

# Counterexample of Eisenstein conjecture of power iteration of 2 plus 1.

Juan Elías Millas Vera

Zaragoza (Spain)

January 2023

## 0- Abstract:

In this paper I give a counterexample of the Eisenstein conjecture which said that the tetration of number 2 plus 1 gives always a prime number.

## 1- Introduction:

According to “History of mathematics” page 469 of Carl B. Boyer:

“[...]A young man whom the aging Gauss admired, Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823 1852), an instructor of mathematics at Berlin, added a new conjecture about prime numbers when he hazarded the thought, unverified up to the present time, that numbers of the form  $2^{2+1}$ ,  $2^{2^2+1}$ ,  $2^{2^{2^2}+1}$ , and so on, are primes.[...]”

In modern symbols:

$$\forall n \quad (2 \uparrow \uparrow n) + 1 = p \quad p \in Primes$$

In this paper we follow this idea and we compute:

$2^{2+1}=5$  which is prime.

$2^{2^2+1}=17$  which is prime.

$2^{2^{2^2}+1}=65537$  which is prime.

But, What happen if we follow to doing iterations?

## 2- Next iteration ( $2^{2^{2^2+1}}$ ):

If we follow the theoretic problem, we have the next step which is:

$2^{2^{2^2+1}}=2^{65536}+1=$   
20035299304068464649790723515602557504478254755697514192650169737108940595563114  
53089506130880933348101038234342907263181822949382118812668869506364761547029165  
04187191635158796634721944293092798208430910485599057015931895963952486337236720  
30029169695921561087649488892540908059114570376752085002066715637023661263597471  
44807111774815880914135742720967190151836282560618091458852699826141425030123391  
10827360384376787644904320596037912449090570756031403507616256247603186379312648

47037437829549756137709816046144133086921181024859591523801953310302921628001605  
68670105651646750568038741529463842244845292537361442533614373729088303794601274  
72495841486491593064725201515569392262818069165079638106413227530726714399815850  
88112926289011342377827055674210800700652839633221550778312142885516755540733451  
07213112427399562982719769150054883905223804357045848197956393157853510018992000  
02414196370681355984046403947219401606951769015611972698233789001764151719005113  
34663068981402193834814354263873065395529696913880241581618595611006403621197961  
01859534802787167200122604642492385111393400464351623867567078745259464670903886  
54774348321789701276445552940909202195958575162297333357615955239488529757995402  
84719435299135437637059869289137571537400019863943324648900525431066296691652434  
19174691389632476560289415199775477703138064781342309596190960654591300890188887  
58808473362595606544488850144733570605881709016210849971452956834406197969056546  
98136311620535793697914032363284962330464210661362002201757878518574091620504897  
11781820400187282939943446186224328009837323764931814789848119452713007440220765  
68091037620399920349202390662626449190916798546151577883906039772075927937885224  
12943010174580868622633692847258514030396155585643303854506886522131148136384083  
84778263790459607186876728509763471271988890680478243230394718650525660978150729  
86114143030581692792497140916105941718535227588750447759221830115878070197553572  
22414000195481020056617735897814995323252085897534635470077866904064290167638081  
61740550405117670093673202804549339027992491867306539931640720492238474815280619  
16690093380573212081635070763435166986962502096902316285935007187419057916124153  
68975148082619048479465717366010058924766554458408383347905441448176842553272073  
15586349347605137419779525190365032198020108764738368682531025183377533908861426  
18480037400808223810407646887847164755294532694766170042446106331123802113458869  
45322001165640763270230742924260515828110703870183453245676356259514300320374327  
40780879056283663406965030844225855967039271869461158513793386475699748568670079  
82396060439347885086164926030494506174341236582835214480672667684180708375486221  
14082365798029612000274413244384324023312574035450193524287764308802328508558860  
89962774458164680857875115807014743763867976955049991643998284357290415378143438  
84730348426190338884149403136613985425763557710533558020662218557706008255128889  
33322264362819848386132395706761914096385338323743437588308592337222846442879962  
45605476932428998432652677378373173288063210753211238680604674708428051166488709  
08477029120816110491255559832236624486855665140268464120969498259056551921618810  
43412268389962830716548685255369148502995396755039549383718534059000961874894739  
92880432496373165753803673586710175783994818471798498246948060532081996066183434  
01247609663951977802144119975254670408060849934417825628509272652370989865153946  
21930046073645079262129759176982938923670151709920915315678144397912484757062378  
04600009918293321306880570046591458387208088016887445835557926258465124763087148  
56631352893416611749061752667149267217612833084527393646924458289257138887783905  
6300482483799839692029222154861459023734782226825216399574408017271441461795592  
26175083889020074169926238300282286249284182671243405751424188569994272331606998  
71298688277182061721445314257494401506613946316919762918150657974552623619122484  
80638900336690743659892263495641146655030629659601997206362026035219177767406687  
77463549375318899587866282125469797102065747232721372918144666659421872003474508  
94283091153518927111428710837615922238027660532782335166155514936937577846667014  
57179719012271178127804502400263847587883393968179629506907988171216906869295382  
48529830023476068454114178139110648560236549754227497231007615131870024053910510  
91381784372179142252858743209852495787803468370333781842144401713868812424998441  
86181292711985333153825673218704215306311977485352146709553346263366108646673322  
92409879849256691109516143618601548909740241913509623043612196128165950518666022

03071561368473236466086890501426391390651506390819937885231836505989729912540447  
94434251667742996598118492331515552728832740283526884424087528112832899806259126  
73699546247341543333500147231430612750390307397135252069338173843322950701049061  
86753943313078479801565513038475815568523621801041965025559618193498631591323303  
60964619059902361126811960234418433633345949276319461017166529138237171823942992  
16272538461776065694542297877071383198817036964588689811863210976900355735884624  
46483570629145305275710127887202796536447972402540544813274839179412882642383517  
19491972097971459368875371987291308317380339110161285474153773777159517280841116  
27597186384924222802373441925469991983672192131287035585307966942713416391033882  
75431861364349010094319740904733101447629986172542442335561223743571582593338280  
49862438924982227807159517627578471094751190334822414120251826887137281931042534  
78196128440176479531505057110722974314569915223451643121848657575786528197564843  
50895838472292353455946452121583165775147129870822590929265563883665112068194383  
69041162526687100445602437042006637090019411855571604720446436969328500600469281  
40507119069261393993902735534545567470314903886022024639948260501762431969305640  
66636662609020704888743889890749815286544438186291738290105182086993638266186830  
39152732645812867828066013375000965933646251460917231803129303478774212346791184  
54791311109897794648216922505629399956793483801699157439700537542134485874586856  
04728675106542334189383909911058646559511364606105515683854121745980180713316361  
25730796111683438637676673073545834947897883163301292408008363568259391571131309  
78030516441716682518346573675934198084958947940983292500086389778563494693212473  
42610306271374507728615692259662857385790553324064184901845132828463270926975383  
08673084091422476594744399733481308109863994173797896570106870267341619671965915  
99588537834822988270125605842365589539690306474965584147981310997157542043256395  
77607048510088157829140825077773855979012912940730946278594450585941227319481275  
32251523248015034665190482289614066468903051025109162377704484862302294889667113  
80555607956620732449373374027836767300203011615227008921843515652121379215748206  
85935692079021450227713309998772945959695281704458218195608096581170279806266989  
12050615607423256868422713062950098644218534708104071289176469065508361299166947  
78023822502789667843489199409657361704586786242554006942516693979292624714524945  
40885842272615375526007190433632919637577750217600519580069384763578958687848953  
68721228985578068265181927036320994801558744555751753127364714212955364940843855  
86615208012115079075068553344489258693283859653013272046970694571546959353658571  
78889486233329246520273585318853337094845540333656535698817258252891805663548836  
37437933484118455801683318276768346462919956055134700391478768086403226296166415  
60667508153710646723108461964247537490553744805318226002710216400980584497526023  
03564003808347205314994117296573678506642140084269649710324191918212121320693976  
91439233683747092282677387081322366800869247034915868409911530983154120635661231  
87504305467536983230827966457417620806593177265685841681837966106144963432544111  
7069417002265781735835125982108076910196105222926387974504901925431190062056190  
65774524161919131875339840493439768233102984658933183730158095925228292068208622  
30332585280119266496314441316442773003237792274712330696417149945532261035475145  
63129066885434542686978844774298177749371011761465162418361668025481529633530849  
08499430067636548061029400946937506098455885580439704859144495844450799784970455  
83550685408745163316464118083123079704389849190506587586425810738422420591191941  
67418249045270028826398305795005734171148703118714283418449915345670291528010448  
51451760553069714417613685823841027876593246626899784183196203122624211773914772  
08004883578333569204533935953254564897028558589735505751235129536540502842081022  
78524877660357424636667314868027948605244578267362623085297826505711462484659591  
42102781227889414481639949738818846227682448516220518170767221698632657016543169

19742651230041757329904473537672536845792754365412826553581858046840069367718605  
02007054724754840080553042495185449526724726134731817474218007857469346544713603  
69758841180294080396167469462885406791721386012254195038197045384172680063988206  
56328792839582708510919958839448297775647152026132871089526163417707151642899487  
95356485455355314875497813400996485449863582484769059003311696130376612792346432  
31297066284113074270462020320133683503854253603136367635752126047074253112092334  
02837482949453104727418969287275572027615272268283376741393425652653283068469997  
59709775000556088993268502504921288406827413988163154045649035077587168007405568  
57240217586854390532281337707074158307562696283169556874240605277264858530506113  
56384851965918968649596335568216975437621430778665934730450164822432964891270709  
89807667662567151726906205881554966638257382927418208227896068448822298339481667  
09840390242835143068137672534601260072692629694686727507943461904399966189796119  
28750519442356402644303271737341591281496056168353988188569484045342311424613559  
92527233006488162746672352375123431189344211888508507935816384899448754475633168  
92138696755743027379537852625423290248810471819390372206668947022042588368958409  
39998453560948869946833852579675161882159410981624918741813364726965123980677561  
94791255795744647142786862405375057610420426714936608498023827468057598259133100  
69199419046519065311719089260779491192179464073551296338645230356733455880333131  
9708036545718479155043265489955970586288828686660661802188224860214499997312216  
41381706534801755104384066244128228036166489042573776409563264828252584076690456  
08439490325290526337532316509087681336614242398309530806549661879381949120033919  
48949406513239881664208008839555494223709673484007264270570116508907519615537018  
62647974563811878561754571134004738107627630149533097351741806554791126609380343  
11378532532883533352024934365979129341284854970946826329075830193072665337782559  
31433111096384805394085928398890779621047984791968687653998747709591278872747587  
44398067798249682782722009264499445593804146087706419418104407582698056880389496  
54616587983904660587645341810289907194293021774519976104495043196841503455514044  
82092893337865736305283061999007774872692299860827905317169187657886090894181705  
79934048902184415597910926768627965975839524839267348836347456516870161662406424  
24241228961118010615682342539392180052483454723779219911228595914191877491793823  
34001007812832650671028178139602912091472010094787875255126337288422235386949006  
79276645116347581011938753196572421214760382847747745717045786104173857479113019  
08583877890152334343013005282797038580359815182929600305682612091950943737325454  
17105638388704752895056396102984364136093564163258940813798151169333861979733982  
16707610046079800960160248230969430438069566201232136501405495862506152825880330  
22908385812478469315720323233601899469437647726721879376826431828382603564520699  
46863021604887452842436359355862233350623594500289055858161127534178375045593612  
61308526408280512138731774902002495527387345859564051608305830537707325339715526  
20444705429573538361113677523169972740292941674204423248113875075631319078272188  
86405337469421384216992886294047963530515056078812636620649723125757901959887304  
11956262273437289005165611110941117452779654827904712505819990774980638215593768  
85546498822938985408291325129076478386322494781016753491693489288104203015610283  
38614382737816094634133538357834076531432141715065587754782025245478065730134227  
74706167442419689526131642741046954746214837562882997718041867850845469656191509  
08695874251184435837306590951460980451247409411373899927822492983367796011015387  
09612974970556630163730720275073475992294379239382442742118615823616131788639255  
30951171884212985083072382597291441422515794038830113590833316518582349672212596  
21812507058113759495525022747274674369887131926670769299199084467161228738858457  
58462272657333075373557282395161696417519867501268174542932373829414382481437713  
98619067166575729458078048205595118816871880752129718326364421553367877512747669

40790117057509819575084563565217389544179875074523854455200133572033332379895074  
39390531291821225525983379090946363020218535384885482506289771561696386071238277  
17256213134605494017704135817319317633701363322528191275471914434509207118488383  
66818174263342949611870091503049165339464763717766439120798347494627397822171502  
09067019030246976215127852195614207080646163137323651785397629209202550028896201  
29701413796400380557349492690735351459612086747965477336929587736286356601437679  
64038430796864138563447801328261284589184898528048048844180821639423974014362903  
48166545811445436646003249061876303950235640204453074821024136689519664422133920  
07574791286838051751506346625693919377402835120756662608298904918772878338521785  
22792045771846965855278790447562192663992008409302075673925363735628390829817577  
90215320210640961737328359849406665214119818381088451545977289516457213189779790  
74919410131483685446396169046070301075968189337412175759881651270007612627891695  
10406315857637534787420070222051070891257612361658026806815858499852631465878086  
61680073326467683020639169720306489440562819540619068524200305346315662189132730  
90696873531816410945142880366059952202482488867115544291047219291342483464387053  
68508648749099178812670565665387191049721820042371492740164460943459845392536706  
13221061653308566202118896823400575267548610147699368873820958455221157192347968  
68881608536316158628801503959494185294892270744108282071693033878180849362040182  
55222271010985653444817207470756019245915599431072949578197878590578940052540122  
86751714251118435643718405356302418122547326609330271039796809106493927272268303  
54104676325913552796838377050198552346212228584105571199217317179698043393177077  
50755627056047831779844447637560254637033369247114220815519973691371975163241302  
74871219986340454824852457011855334267526471597831073124566342980522145549415625  
27240289153333543493412178620370072603152798707718724912344944771479095207347613  
85425485311552773301030342476835865496093722324007154518129732692081058424090557  
72564580368146223449318970813889714329983134761779967971245378231070373915147387  
86921191875667003193212818968033226965944592862106074388274169194651622676325406  
65070881071030394178860564893769816734159025925194611823642945652669372203155504  
70021359884629275801252771542201662995486313032491231102962792372389976641680349  
71412265279319076363261368141455163766565598397884893817330826687799019628869322  
96597379951931621187215455287394170243669885593888793316744533363119541518404088  
28381519342123412282003095031334105070476015998798547252919066522247931971544033  
17948368373732208218857733416238564413807005419135302459439135025545318864547962  
52260251762928374330465102361057583514550739443339610216229675461415781127197001  
73861149427950141125328062125477581051297208846526315809480663368767014731073354  
07177108766159358568140982129677307591973829734414452566887708553245708889583209  
93823432102718224114763732791357568615421252849657903335093152776925505845644010  
55219264450531207375628774499816364633283581614033017581396735942732769044892036  
18803867549557518068900585329272014939235005258451467069826285482578832673987352  
20457228239290207144822219885587102896991935873074277815159757620764023951243860  
20203259659625021257834995771008562638611823381331850901468657706401067627861758  
37727728958927460394039303372718738505369129571267150668966884938808851429436099  
62012966759079225082275313812849851526902931700263136328942095797577959327635531  
16206675348865131732387243874806351331451264488996758982881292548007642518658649  
02411111273013571971813816025831785069322440079986566353715440884548663931817083  
95735780799059730839094881804060935959190907473960904410150516321749681412100765  
71917748376735575100073361692238653742907945780320004233745280756615304292901449  
57806296341383835517835997647088513490048569736979652386958459945955920907090589  
56891451141412684505462117945026611750166928260250950770778211950432617383223562  
43760177679936279609936897519139496503335850715541843645685261667424368892037103

74953284259271316105378349807407391586338179676584252580367372064693512486522384  
81341663808061505704829059890696451936440018597120425723007316410009916987524260  
37736217776343062161674488493081092990100951797454156425120482208671458684925513  
24442667771278637282113315362243010918243912433802140462422233491535595168908162  
88487989988273630445372432174280215755777967021666317047969728172483392841015642  
27450727177926939992974030807277039501358154514249404902653610582540937311465310  
49433824843797186069372144446008267980024712294894057618538922034256083026970528  
76621377373594394224114707074072902725461307358541745691419446487624357682397065  
70318416846754073346634629367398362000404140071405427763248013274220268539369886  
97876070095900486846506267713630709798210065572851013066010107806337433447730734  
78653881742681230743766066643312775356466578603715192922768440458273283243808212  
84121877613204246046490080105473142674926082692215563740548624171703102791999694  
26456209556198164545476620450224114494047493498322068071913527679867478134582038  
59570413466177937228534940031631599544093684089572533438702986717829770373332806  
80176463950209002394193149911500910527682111951099906316615031158558283558260717  
94100525285836113699613034427901738117874120612881820620232638498615156564512300  
47792967563618345768105043341769543067538041113928553792529241347339481050532025  
70872818630729115891133594201476187266429156403637192760230628384065042544174233  
54645499870553187268879264241021473636986254637471597443549434438997300517425251  
10877357886390946812096673428152585919924857640488055071329814299359911463239919  
11395992675257635900744657281019180584180734222773472139772321823177171691640010  
88261125490933611867805757223910181861685491085008852722743742120865248523724562  
48697662245384819298671129452945515497030585919307198497105414181636968976131126  
74402700964866754593456705993699546450055892162804797636568613331656390739570327  
20343891754152675009150111988568727088481955316769316812728921430313768180164454  
77367518353497857924276463354162433601125960252109501612264110346083465648235597  
93427405686884922445874549377675212032470380303549115754483129527589193989368087  
63276854387695576948814228443119985957007275213931768378317703391304230609589991  
37314684569010422095161967070506420256733873446115655276175992727151877660010238  
94476053978951694570880272873622512107622409181006670088347473760515628553394356  
58437562712412444576516630640859395079475509204639322452025354636344447917556617  
25962187199279186575490857852950012840229035061514937310107009446151011613712423  
76142672254173205595920278212932572594714641722497732131638184532655527960427054  
18714962365852524586489332541450626423378856514646706042985647819684615936632889  
54299780722542264790400616019751975007460545150060291806638271497016110987951336  
63377137843441619405312144529185518013657555866761501937302969193207612000925506  
50815832755084993407687972523699870235679310268041367457189566414318526790547171  
69962990363015545645090044802789055701968328313630718997699153166679208958768572  
29060091547291963638167359667395997571032601557192023734858052112811745861006515  
25988838431145118948805521291457756991465775300413847171245779650481758563950728  
9533753975582208777506072339445587895905719156737

Which is not prime according to <https://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM> .

### 3- Conclusions:

The fifth iteration of 2 counting the base plus 1 is not a prime number, so the conjecture of Eisenstein is false and we have done.

### 4- References:

- Boyer, Carl B. (Carl Benjamin), 1906-1976. A history of mathematics / Carl B. Boyer and Uta Merzbach. 3rd ed.

- <https://www.wolframalpha.com/> for the calculations.

- <https://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM> for the primality test.