

# " $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ Dots Puzzle": An Optimal General Algorithm

**Valerio Bencini**

Independent researcher

Como, Italy

e-mail: [valerio.bencini@gmail.com](mailto:valerio.bencini@gmail.com)

**Abstract:** in this paper, we show a new algorithm for the  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  dots puzzle (an extension of the well-known *nine dots puzzle* of Samuel Loyd), able to solve completely the problem for the case  $k=2$  and, at the same time, provide lower upper bounds for the other cases.

**Keywords:** combinatorics, graph theory, computational science, nine dots puzzle, covering path, minimum-link, minimum-turn, minimum bends, link-length, grid, point, algorithm

## 1 Introduzione

Il problema affrontato in questo articolo è un'estensione del ben noto *nine dots puzzle* di Samuel Loyd (vedi [2]): l' $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  dots puzzle.

Data una griglia regolare  $k$ -dimensionale di  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  punti (adimensionali), con  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 2$  e  $k \geq 2$ , si chiede di passare per tutti i punti (almeno una volta), tramite una spezzata, avente il minor numero possibile di segmenti, connessi in sequenza al proprio punto terminale.

Per il caso bidimensionale, è già stata trovata la soluzione esatta al problema (vedi [1]), mentre, per gli altri casi, sono stati proposti degli algoritmi in grado di fornire un limite superiore per la soluzione (vedi [3] e [4]). Nel nostro articolo, mostreremo un nuovo algoritmo, in grado di fornire sia la soluzione esatta al problema bidimensionale che un limite superiore più efficiente per gli altri casi.

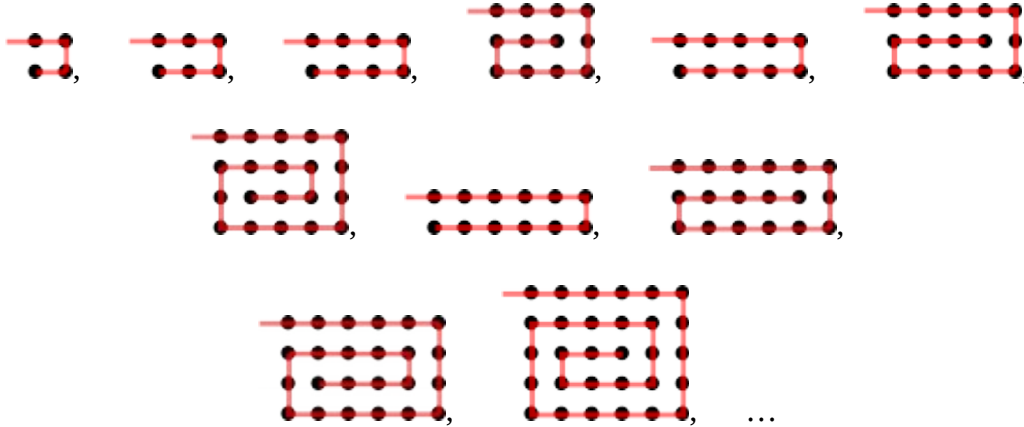
## 2 Il caso $n_1 \times n_2$

Iniziamo la descrizione del nostro algoritmo con il caso più semplice: quello bidimensionale.

Per attraversare gli  $n_1 \times n_2$  punti della griglia, utilizzeremo uno di tre differenti *path*, in base al caso, risolvendo il problema con il minor numero possibile di segmenti.

### 2.1 Path 1 (quando $n_1=n_2=2$ o $n_1>n_2$ )

Quando  $n_1=n_2=2$  o  $n_1>n_2$ , utilizziamo il *path 1*, mostrato in *Figura 1*.

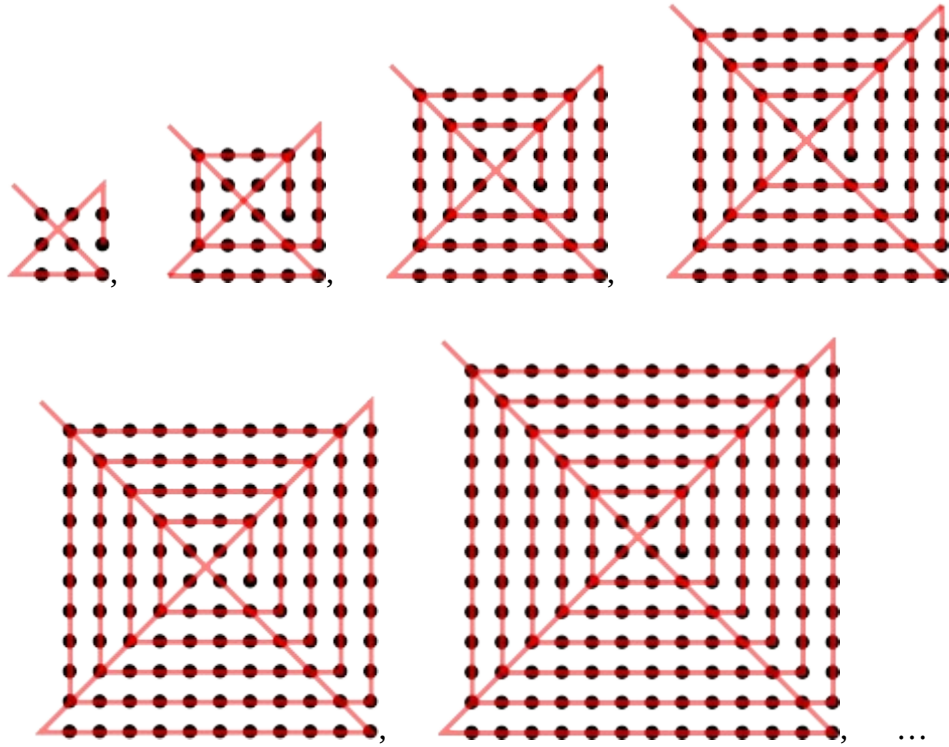


*Figura 1.* Alcuni dei primi esempi del *path 1*.

Il *path 1* inizia dal punto in alto a sinistra della griglia, dove il numero di punti per ogni riga è  $n_1$  e il numero di punti per ogni colonna è  $n_2$ . Il numero totale di segmenti utilizzati è il minimo possibile, pari a  $2 \cdot n_2 - 1$  (vedi [1]). Osservando la *Figura 1*, si nota, infatti, che quando  $n_2$  (il numero di punti per ogni colonna) è pari a 2, utilizziamo  $3 = 2 \cdot 2 - 1$  segmenti, mentre, quando esso è pari a 3, ne utilizziamo  $5 = 2 \cdot 3 - 1$  e, in generale, utilizziamo 2 segmenti aggiuntivi per ogni incremento di  $n_2$ .

## 2.2 Path 2 (quando $n_1=n_2>2$ , con $n:=n_1=n_2$ ed $n$ è un numero dispari)

Quando  $n_1=n_2>2$ , con  $n:=n_1=n_2$  ed  $n$  è un numero dispari, utilizziamo il *path 2*, mostrato in *Figura 2*.

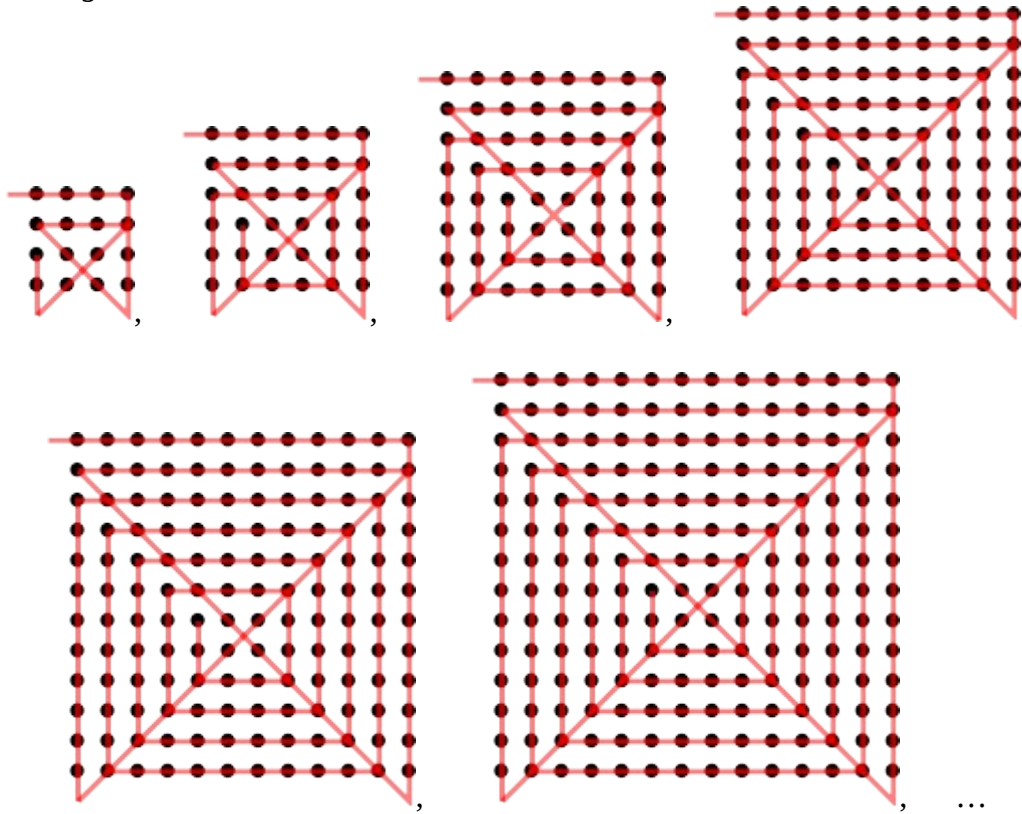


*Figura 2.* Alcuni dei primi esempi del *path 2*.

Il punto di partenza è quello in alto a sinistra della griglia. Il numero totale di segmenti utilizzati è ancora il minimo possibile:  $2 \cdot n - 2$  (vedi [1]), poiché, come mostrato in *Figura 2*, quando  $n=3$ , utilizziamo  $4=2 \cdot 3 - 2$  segmenti, quando  $n=5$  ne utilizziamo  $8=2 \cdot 5 - 2$  e utilizziamo 4 segmenti aggiuntivi per ogni incremento di  $n$ .

### 2.3 Path 3 (quando $n_1=n_2>2$ , con $n:=n_1=n_2$ ed $n$ è un numero pari)

Per l'ultimo caso, quando  $n_1=n_2>2$ , con  $n:=n_1=n_2$  ed  $n$  è un numero pari, utilizziamo il *path 3*, mostrato in *Figura 3*.



*Figura 3.* Alcuni dei primi esempi del *path 3*.

Il *path 3* inizia dal punto in alto a sinistra della griglia. Anche in questo caso, il numero totale di segmenti utilizzati coincide con il minimo possibile:  $2 \cdot n - 2$  (vedi [1]). Quando  $n=4$ , utilizziamo, infatti,  $6=2 \cdot 4 - 2$  segmenti, quando  $n=6$  ne utilizziamo  $10=2 \cdot 6 - 2$  e utilizziamo 4 segmenti aggiuntivi per ogni incremento di  $n$ .

## 2.4 La formula per le nostre soluzioni

Come abbiamo appena mostrato, il numero totale di segmenti utilizzati  $t(n_1; n_2)$  coincide con la soluzione esatta al problema  $s(n_1; n_2)$ .

I valori delle nostre soluzioni risultano, dunque,  $\forall n_1; n_2 \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ :

$$\begin{aligned} t(n_1; n_2) &= \\ &= s(n_1; n_2) = \begin{cases} 2 \cdot n_2 - 1 & \text{se } n_1 = n_2 = 2 \vee n_1 > n_2 \\ 2 \cdot n - 2 & \text{se } n_1 = n_2 > 2 \wedge n := n_1 = n_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

dove:

$$n_1 \geq n_2$$

### 3 Il caso $n_1 \times n_2 \times n_3$

In questa sezione, continuiamo la descrizione del nostro algoritmo, estendendolo al caso tridimensionale e, successivamente, utilizzeremo la maggior parte della sezione per trovare la migliore ottimizzazione in grado di farci guadagnare qualche segmento aggiuntivo.

#### 3.1 Descrizione dell'algoritmo

Estendiamo i *path* mostrati nel caso bidimensionale, come illustrato in *Figura 4*, reiterando lo stesso *path* bidimensionale che abbiamo utilizzato per il caso  $n_1 \times n_2$  su ogni "piano"  $n_1 \times n_2$  della griglia tridimensionale, iniziando da uno dei due "piani" più esterni e connettendo ogni "piano", in sequenza, con un segmento per ogni "piano" successivo al primo (i segmenti verdi della *Figura 4*).

A questo punto, in maniera tale da ridurre il numero di segmenti utilizzati, possiamo sfruttare una semplice ottimizzazione: caso per caso (come in quello della *Figura 4*), possiamo decidere di non portare a completamento i *path* bidimensionali sui "piani"  $n_1 \times n_2$ , lasciando un certo numero di "punti liberi" (interni) su ogni singolo "piano" bidimensionale, uguale in numero e allineati (come i 3 per ogni "piano" nell'immagine a sinistra della *Figura 4*), in maniera tale da poterli visitare successivamente tramite un "*path* finale" molto semplice (segmenti blu e gialli dell'immagine a destra della *Figura 4*), utilizzando, in definitiva, un numero di segmenti che potrebbe essere inferiore a quello che avremmo utilizzato visitando subito i "punti liberi" con i *path* bidimensionali (come, per esempio, nel caso della *Figura 5*, dove il numero totale di segmenti utilizzati  $t(n_1; n_2; n_3)$  risulta superiore a quello della *Figura 4*).

Riguardo al "*path* finale", esso si svilupperà alternando i segmenti blu, con i quali ci sposteremo sui punti rimasti sui due "piani" esterni, ai segmenti gialli, con i quali visiteremo  $n_3 - 1$  "punti liberi" allineati alla volta, "rimbalzando" da un "piano" esterno a un altro e sarà, dunque, tale *path*, composto da un numero fisso di segmenti, pari a due volte il numero dei "punti liberi" di ogni singolo "piano"  $n_1 \times n_2$  (come in *Figura 4*, dove abbiamo 3 "punti liberi" per ogni "piano"  $n_1 \times n_2$  e utilizziamo, esattamente,  $6 = 2 \cdot 3$  segmenti per visitarli: 3 blu e 3 gialli).

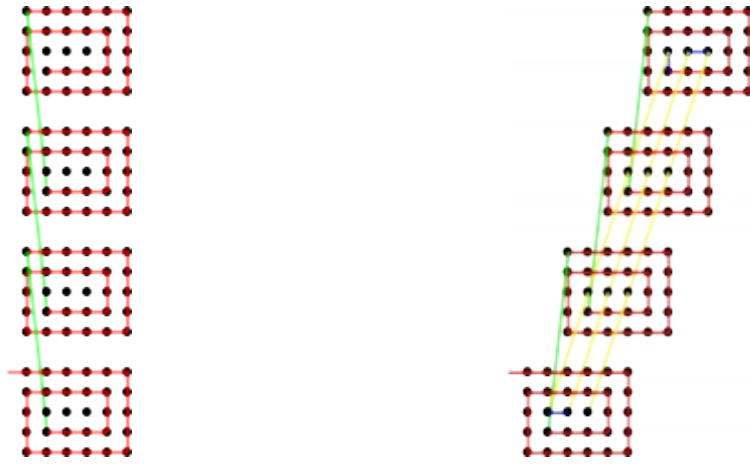


Figura 4. Nell'immagine a sinistra, abbiamo la prima parte del *path* tridimensionale per il caso  $n_1=6$ ,  $n_2=5$  ed  $n_3=4$ . Sono visibili i *path* bidimensionali (*path 1*) tracciati su ognuno dei "piani"  $n_1 \times n_2$ , partendo da quello esterno, in basso, e collegati, in sequenza, con i segmenti verdi, e si notano, inoltre, i "punti liberi" non ancora visitati. Nell'immagine a destra, abbiamo la griglia tridimensionale finalmente risolta, tramite il "*path* finale", alternando i segmenti blu, con i quali ci spostiamo sui punti rimasti sui due "piani" esterni, ai segmenti gialli, con i quali visitiamo  $n_3 - 1$  "punti liberi" allineati alla volta, "rimbalzando" da un "piano" esterno a un altro. Il numero totale di segmenti utilizzati per risolvere la griglia è  $t(6; 5; 4)=37$ .

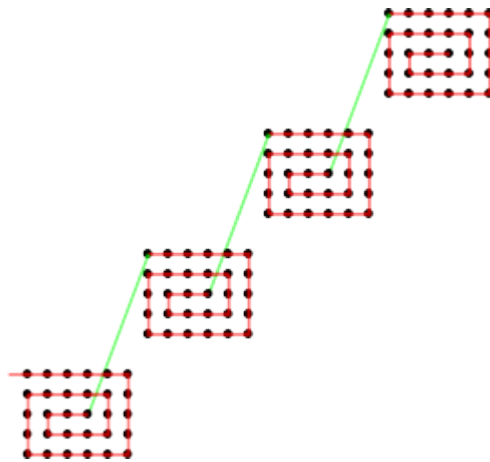


Figura 5. Ancora il caso  $n_1=6$ ,  $n_2=5$  ed  $n_3=4$ : se non avessimo utilizzato l'ottimizzazione mostrata in Figura 4, il numero totale di segmenti utilizzati sarebbe stato 39: due segmenti aggiuntivi.

Avendo concluso la descrizione del nostro algoritmo, una delle sfide delle prossime sottosezioni sarà trovare il numero ottimale di segmenti del *path* bidimensionale da utilizzare sui "piani"  $n_1 \times n_2$  per poter minimizzare il numero totale di segmenti necessari per risolvere la griglia tridimensionale seguendo il nostro nuovo algoritmo.

### 3.2 La formula generale per le nostre soluzioni

Come abbiamo appena mostrato, il numero totale di segmenti utilizzati nel caso tridimensionale è, in generale, pari a uno dei possibili valori del numero di segmenti del *path* bidimensionale da utilizzare su ogni singolo "piano"  $n_1 \times n_2$  (che definiamo  $l$  e il cui massimo valore è, ovviamente, la soluzione del caso bidimensionale, mostrata nella (1)), moltiplicato per il numero dei "piani"  $n_1 \times n_2$  (pari a  $n_3$ ), più il numero dei segmenti (verdi) connettenti i "piani"  $n_1 \times n_2$  (dunque,  $n_3-1$ ), sommato al numero di segmenti utilizzati nel "*path* finale", che sono, come menzionato prima, pari a due volte il numero dei "punti liberi" di ogni "piano"  $n_1 \times n_2$  (i quali definiamo  $p$ ).

La formula generale per le nostre soluzioni risulta, dunque,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\} \wedge l \in \mathbb{N}-\{0\}$ :

$$\begin{aligned} t(n_1; n_2; n_3) &= \\ &= l \cdot n_3 + n_3 - 1 + 2 \cdot p = \\ &= n_3 \cdot l + n_3 + 2 \cdot p - 1 \end{aligned} \tag{2}$$

dove:

$$l \leq$$

$$\leq t(n_1; n_2) = \begin{cases} 2 \cdot n_2 - 1 \\ \text{se } n_1 = n_2 = 2 \vee n_1 > n_2 \\ 2 \cdot n - 2 \\ \text{se } n_1 = n_2 > 2 \wedge n := n_1 = n_2 \end{cases}$$

ed:

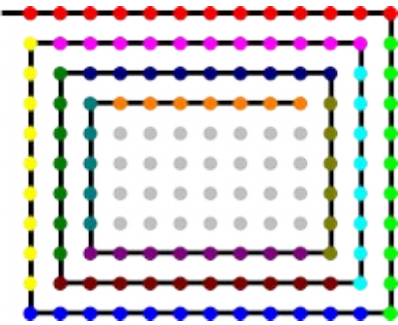
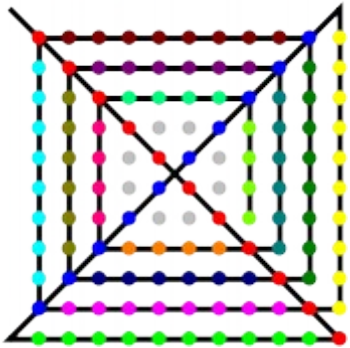
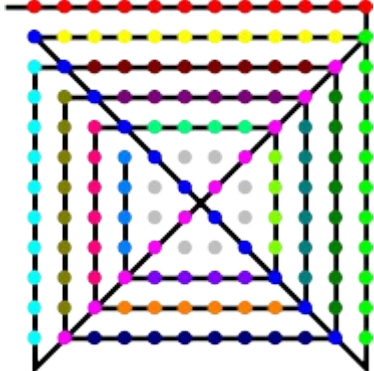
$$n_1 \geq n_2 \geq n_3$$



### 3.3 Calcolo dei possibili valori di $p$

Essendo  $p$  il numero di punti rimanenti di ogni "piano"  $n_1 \times n_2$  dopo aver tracciato  $l$  segmenti di un *path* bidimensionale, per poterlo trovare, calcoliamo il numero di punti attraverso i quali passano i primi  $l$  segmenti di ogni *path* bidimensionale, semplicemente facendo la somma dei punti per i quali passa ogni segmento, in sequenza, esclusi i punti per i quali passano i segmenti precedenti, il tutto  $l$  volte e per ogni possibile valore di  $l$ . Il risultato sarà il numero totale di punti dei "piani"  $n_1 \times n_2$  tranne  $p$  (dunque,  $n_1 \cdot n_2 - p$  o  $n^2 - p$ , se  $n := n_1 = n_2$ ) e ci permetterà, di conseguenza, di trovare tutti i possibili valori del nostro  $p$ .

Nella *Tabella 1*, sono mostrati i valori del numero di punti per i quali passa ogni segmento, esclusi i punti per i quali passano i segmenti precedenti.

<b>Path 1,</b> quando $n_1=n_2=2 \vee n_1>n_2, \forall n_1; n_2 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$	<b>Path 2,</b> quando $n_1=n_2=2 \cdot m-1, \forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\},$ con $n:=n_1=n_2$	<b>Path 3,</b> quando $n_1=n_2=2 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\},$ con $n:=n_1=n_2$
		
<p>Inizia dal punto in alto a sinistra. Il numero di punti per ogni riga è <math>n_1</math> e il numero di punti per ogni colonna è <math>n_2</math>.</p>	<p>Inizia dal punto in alto a sinistra, scendendo in diagonale, in basso a destra. Il numero di punti per ogni riga o colonna è <math>n</math>.</p>	<p>Inizia dal punto in alto a sinistra. Il numero di punti per ogni riga o colonna è <math>n</math>.</p>

Numero segmento	Numero punti del segmento, esclusi i punti dei segmenti precedenti	Numero segmento	Numero punti del segmento, esclusi i punti dei segmenti precedenti	Numero segmento	Numero punti del segmento, esclusi i punti dei segmenti precedenti
1	$n_1$	1	$n$	1	$n$
2	$n_2-1$	2	$n-1$	2	$n-1$
3	$n_1-1$	3	$n-1$	3	$n-1$
4	$n_2-2$	4	$n-1$	4	$n-2$
5	$n_1-2$	5	$n-3$	5	$n-2$
6	$n_2-3$	6	$n-3$	6	$n-2$
7	$n_1-3$	7	$n-3$	7	$n-4$
8	$n_2-4$	8	$n-3$	8	$n-4$
9	$n_1-4$	9	$n-5$	9	$n-4$
10	$n_2-5$	10	$n-5$	10	$n-4$
11	$n_1-5$	11	$n-5$	11	$n-6$
12	$n_2-6$	12	$n-5$	12	$n-6$
13	$n_1-6$	13	$n-7$	13	$n-6$
14	$n_2-7$	14	$n-7$	14	$n-6$
15	$n_1-7$	15	$n-7$	15	$n-8$
16	$n_2-8$	16	$n-7$	16	$n-8$
17	$n_1-8$	17	$n-9$	17	$n-8$
18	$n_2-9$	18	$n-9$	18	$n-8$
...	...	...	...	...	...
$2 \cdot n_2-1$	...	$2 \cdot n-2$	...	$2 \cdot n-2$	...

Tabella 1. Sono mostrati i valori del numero di punti attraverso i quali passa ogni segmento, esclusi i punti attraverso i quali passano i segmenti precedenti, per ognuno dei tre path.

Svolgendo i conti, per il *path 1*, i valori di  $n_1 \cdot n_2 - p$  risultano, dunque,  $\forall n_1; n_2 \in \mathbb{N} - \{0; 1\} \wedge l \in \mathbb{N} - \{0\}$ :

$$n_1 \cdot n_2 - p = \begin{cases} \frac{l+1}{2} \cdot n_1 + \frac{l-1}{2} \cdot n_2 - \frac{l^2-1}{4} \\ \text{se } l=2 \cdot m-1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \frac{l}{2} \cdot n_1 + \frac{l}{2} \cdot n_2 - \frac{l^2}{4} \\ \text{se } l=2 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

quindi:

$$p = \begin{cases} n_1 \cdot n_2 - \frac{1}{2} \cdot n_1 \cdot l - \frac{1}{2} \cdot n_2 \cdot l + \frac{1}{4} \cdot l^2 - \frac{1}{2} \cdot n_1 + \frac{1}{2} \cdot n_2 - \frac{1}{4} \\ \text{se } l=2 \cdot m-1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ n_1 \cdot n_2 - \frac{1}{2} \cdot n_1 \cdot l - \frac{1}{2} \cdot n_2 \cdot l + \frac{1}{4} \cdot l^2 \\ \text{se } l=2 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (3)$$

dove:

$$l \leq 2 \cdot n_2 - 1$$

ed:

$$n_1 = n_2 = 2 \vee n_1 > n_2$$

Per il path 2, abbiamo, invece,  $\forall n_1; n_2 \in \mathbb{N}-\{0; 1\} \wedge l \in \mathbb{N}-\{0\}$ :

$$n^2 - p = \begin{cases} l \cdot n - \frac{l^2 - 1}{4} \\ \text{se } l = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ l \cdot n - \frac{l^2}{4} \\ \text{se } l = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} \\ \\ l \cdot n - \frac{l^2 - 4}{4} \\ \text{se } l = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

quindi:

$$p = \begin{cases} -n \cdot l + \frac{1}{4} \cdot l^2 + n^2 - \frac{1}{4} \\ \text{se } l = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ -n \cdot l + \frac{1}{4} \cdot l^2 + n^2 \\ \text{se } l = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} \\ \\ -n \cdot l + \frac{1}{4} \cdot l^2 + n^2 - 1 \\ \text{se } l = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (4)$$

dove:

$$l \leq 2 \cdot n - 2$$

e,  $\forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$n_1 = n_2 = 2 \cdot m - 1 \wedge n := n_1 = n_2$$

Per il path 3, abbiamo, infine,  $\forall n_1; n_2 \in \mathbb{N}-\{0; 1\} \wedge l \in \mathbb{N}-\{0\}$ :

$$n^2 - p = \begin{cases} l \cdot n - \frac{l^2 - 1}{4} \\ \text{se } l = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ l \cdot n - \frac{l^2}{4} \\ \text{se } l = 2 \vee l = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ l \cdot n - \frac{l^2 - 4}{4} \\ \text{se } l = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

quindi:

$$p = \begin{cases} -n \cdot l + \frac{1}{4} \cdot l^2 + n^2 - \frac{1}{4} \\ \text{se } l = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ -n \cdot l + \frac{1}{4} \cdot l^2 + n^2 \\ \text{se } l = 2 \vee l = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ -n \cdot l + \frac{1}{4} \cdot l^2 + n^2 - 1 \\ \text{se } l = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (5)$$

dove:

$$l \leq 2 \cdot n - 2$$

e,  $\forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$n_1 = n_2 = 2 \cdot m \wedge n := n_1 = n_2$$

### 3.4 Calcolo dei valori di $l$

Avendo trovato i valori di  $p$  per ogni *path*, possiamo, ora, sostituirli nella (2), la formula generale per le nostre soluzioni.

Per il *path 1*, le nostre soluzioni risultano, dunque,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\} \wedge l \in \mathbb{N}-\{0\}$ :

$$t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - n_1 \cdot l - n_2 \cdot l + n_3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 - n_1 + n_2 + n_3 - \frac{3}{2} \\ \text{se } l = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - n_1 \cdot l - n_2 \cdot l + n_3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 + n_3 - 1 \\ \text{se } l = 2 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (6)$$

dove:

$$l \leq 2 \cdot n_2 - 1$$

ed:

$$n_1 = n_2 = 2 \vee n_1 > n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$

Per il *path 2*, abbiamo, invece,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\} \wedge l \in \mathbb{N}-\{0\}$ :

$$t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n \cdot l + n_3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 + n_3 - \frac{3}{2} \\ \text{se } l = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n \cdot l + n_3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 + n_3 - 1 \\ \text{se } l = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} \\ 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n \cdot l + n_3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 + n_3 - 3 \\ \text{se } l = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (7)$$

dove:

$$l \leq 2 \cdot n - 2$$

e,  $\forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$n_1 = n_2 = 2 \cdot m - 1 \wedge n := n_1 = n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$

Per il *path 3*, abbiamo, infine,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\} \wedge l \in \mathbb{N}-\{0\}$ :

$$t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n \cdot l + n_3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 + n_3 - \frac{3}{2} \\ \text{se } l = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n \cdot l + n_3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 + n_3 - 1 \\ \text{se } l = 2 \vee l = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n \cdot l + n_3 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 + n_3 - 3 \\ \text{se } l = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (8)$$

dove:

$$l \leq 2 \cdot n - 2$$

e,  $\forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$n_1 = n_2 = 2 \cdot m \wedge n := n_1 = n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$

Ora che abbiamo trovato le formule generali complete per il nostro  $t(n_1; n_2; n_3)$ , ci rimane, solamente, da trovare i valori di  $l$ , in maniera tale che  $t(n_1; n_2; n_3)$  abbia il minor valore possibile, ovvero la nostra soluzione.

Svolgendo i conti, i valori di  $l$  con il *path 1* risultano, dunque,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$l = \begin{cases} = 2 \cdot n_2 - 1 \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 \leq 0 \\ \\ = n_1 + n_2 - n_3 \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ = \begin{cases} n_1 + n_2 - n_3 - 1 \vee n_1 + n_2 - n_3 \vee n_1 + n_2 - n_3 + 1 \\ \text{se } n_1 = n_2 = 2 \\ \\ n_1 + n_2 - n_3 - 1 \vee n_1 + n_2 - n_3 + 1 \\ \text{se } n_1 > n_2 \end{cases} \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (9)$$

dove:

$$n_1 = n_2 = 2 \vee n_1 > n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$

I valori di  $l$  con il *path 2* risultano, invece,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$l = \begin{cases} 2 \cdot n - n_3 \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} \\ \\ 2 \cdot n - n_3 + 1 \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 2 \cdot n - n_3 - 2 \vee 2 \cdot n - n_3 - 1 \vee 2 \cdot n - n_3 \vee 2 \cdot n - n_3 + 1 \vee 2 \cdot n - n_3 + 2 \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 2 \cdot n - n_3 - 1 \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m + 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (10)$$

dove,  $\forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$n_1 = n_2 = 2 \cdot m - 1 \wedge n := n_1 = n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$

Per il *path 3*, i valori di  $l$  risultano, infine,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot n - n_3 \\ &\text{se } n_3 = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} \\ \\ &= 2 \cdot n - n_3 + 1 \\ &\text{se } n_3 = 4 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ l &= \begin{cases} 2 \cdot n - n_3 - 1 \vee 2 \cdot n - n_3 \vee 2 \cdot n - n_3 + 1 \vee 2 \cdot n - n_3 + 2 \\ \text{se } n = 4 \\ \\ 2 \cdot n - n_3 - 2 \vee 2 \cdot n - n_3 - 1 \vee 2 \cdot n - n_3 \vee 2 \cdot n - n_3 + 1 \vee 2 \cdot n - n_3 + 2 \\ \text{se } n > 4 \\ \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (11) \\ \\ &= 2 \cdot n - n_3 - 1 \\ &\text{se } n_3 = 4 \cdot m + 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{aligned}$$

dove,  $\forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$n_1 = n_2 = 2 \cdot m \wedge n := n_1 = n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$



### 3.5 Le formule complete per le nostre soluzioni

Trovati i valori di  $l$ , li possiamo sostituire, ora, nelle formule generali delle nostre soluzioni: la (6) per il *path 1*, la (7) per il *path 2* e la (8) per il *path 3*.

Per il *path 1*, la formula per le nostre soluzioni risulta, dunque,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 2 \cdot n_2 \cdot n_3 - 1 \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 \leq 0 \\ \\ -\frac{1}{2} \cdot n_1^2 - n_1 + n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_2^2 + n_2 + n_2 \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - \frac{3}{2} \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ -\frac{1}{2} \cdot n_1^2 - n_1 + n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_2^2 + n_2 + n_2 \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - 1 \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (12)$$

dove:

$$n_1 = n_2 = 2 \vee n_1 > n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$

Per il *path 2*, essa risulta, invece,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - 3 \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} \\ \\ 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - \frac{5}{2} \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - 1 \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - \frac{5}{2} \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m + 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (13)$$

dove,  $\forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$n_1 = n_2 = 2 \cdot m - 1 \wedge n := n_1 = n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$

Per il *path 3*, la formula per le nostre soluzioni risulta, infine,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - 3 \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} \\ \\ 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - \frac{5}{2} \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - 1 \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - \frac{5}{2} \\ \text{se } n_3 = 4 \cdot m + 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (14)$$

dove,  $\forall m \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$n_1 = n_2 = 2 \cdot m \wedge n := n_1 = n_2$$

ed:

$$n_2 \geq n_3$$

## 4 Il caso $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times \dots \times n_k$

In questa sezione, concludiamo la descrizione del nostro algoritmo, estendendolo al caso quadridimensionale e a quelli successivi.

### 4.1 Descrizione dell'algoritmo

Per poter estendere l'algoritmo tridimensionale al caso  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times \dots \times n_k$ , reiteriamo il nostro *path* tridimensionale su ognuno degli "spazi"  $n_1 \times n_2 \times n_3$ , connettendoli tutti, in sequenza, con un segmento per ogni "spazio" tridimensionale successivo al primo, fino all'ultimo degli  $n_4$  "spazi" tridimensionali e, successivamente, se necessario, ripetiamo il *path* quadridimensionale appena tracciato su ogni "spazio"  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ , connettendo tutti gli  $n_5-1$  "spazi" dopo il primo tramite un segmento per ogni "spazio" quadridimensionale successivo al primo, e così via, fino a esaurire i punti rimanenti.

### 4.2 La formula per le nostre soluzioni

Come abbiamo appena descritto, il numero totale di segmenti utilizzati  $t(n_1; n_2; n_3; n_4; \dots; n_k)$  è pari al numero di segmenti del *path* tridimensionale utilizzato per ogni "spazio"  $n_1 \times n_2 \times n_3$ , ovvero  $t(n_1; n_2; n_3)$  (che definiamo  $c$ ), moltiplicato per il numero degli "spazi"  $n_1 \times n_2 \times n_3$  (pari a  $n_4$ ), più il numero di segmenti connettenti gli "spazi"  $n_1 \times n_2 \times n_3$  (dunque,  $n_4-1$ ), tutto moltiplicato, se necessario, per il numero degli "spazi"  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  (pari a  $n_5$ ), più il numero dei segmenti connettenti gli "spazi"  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  (dunque,  $n_5-1$ ) e così via, fino ad arrivare a esaurire tutti i punti rimasti.

La formula per le nostre soluzioni risulta, dunque,  $\forall n_1; n_2; n_3; n_4; n_5; n_6; \dots; n_k \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$   
 $\wedge k \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3\}$ :

$$\begin{aligned} t(n_1; n_2; n_3; n_4; \dots; n_k) &= \\ &= (\dots(((c \cdot n_4 + n_4 - 1) \cdot n_5 + n_5 - 1) \cdot n_6 + n_6 - 1) \dots) \cdot n_k + n_k - 1 = \\ &= (c+1) \cdot \prod_{i=4}^k (n_i) - 1 \end{aligned} \tag{15}$$

dove:

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq n_5 \geq n_6 \geq \dots \geq n_k$$

e:

$$c := t(n_1; n_2; n_3)$$

## 5 Conclusione

Avendo terminato la descrizione del nostro algoritmo, in quest'ultima sezione lo compareremo con gli algoritmi proposti da altri, dimostrando che il nostro fornisca un limite superiore più efficiente per il caso tridimensionale e quelli successivi.

### 5.1 Le soluzioni ottenute tramite gli altri algoritmi

Di seguito, sono mostrate le formule per le soluzioni  $h(n_1; n_2; n_3; \dots; n_k)$ , ottenute tramite gli algoritmi proposti da Ripà (vedi [3] e [4]), per il caso tridimensionale e quelli successivi.

Per il caso tridimensionale, la formula generale per le soluzioni di Ripà (vedi [3]) risulta, dunque,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} = 2 \cdot n_2 \cdot n_3 - 1 \\ \text{se } n_3 < 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3 \\ \\ = 2 \cdot n_2 \cdot n_3 - 2 \\ \text{se } n_3 = 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3 \\ \\ = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot i_{max}^3 + (2 \cdot (n_1 - n_2) + 7) \cdot i_{max}^2 + \left(6 \cdot (n_1 - n_2) - 2 \cdot n_3 + \frac{35}{3}\right) \cdot i_{max} + 4 \cdot (n_1 - n_2) + 2 \cdot n_3 \cdot (n_2 - 1) + 5 \\ \text{se } n_3 \leq 2 \cdot (i_{max}^2 + (n_1 - n_2 + 4) \cdot i_{max} + 2 \cdot (n_1 - n_2) + 4) \\ \\ \frac{4}{3} \cdot i_{max}^3 + (2 \cdot (n_1 - n_2) + 9) \cdot i_{max}^2 + \left(8 \cdot (n_1 - n_2) - 2 \cdot n_3 + \frac{59}{3}\right) \cdot i_{max} + 8 \cdot (n_1 - n_2) + n_3 \cdot (2 \cdot n_2 - 3) + 13 \\ \text{se } n_3 > 2 \cdot (i_{max}^2 + (n_1 - n_2 + 4) \cdot i_{max} + 2 \cdot (n_1 - n_2) + 4) \\ \\ \text{se } n_3 > 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3 \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

dove:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{n_1^2 + n_2^2 - 2 \cdot n_1 \cdot n_2 + 2 \cdot (n_1 - n_2 + n_3) + 1} + n_2 - n_1 - 3 \right) \right\rfloor$$

ed:

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3$$

Per alcuni casi particolari, le formule per  $h(n_1; n_2; n_3)$  sono, invece, le seguenti.

Per il primo caso (vedi [3]), abbiamo che le soluzioni di Ripà sono date da,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot i_{max}^3 + 5 \cdot i_{max}^2 - 2 \cdot \left(n - \frac{14}{3}\right) \cdot i_{max} + 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n + 3 \\ \text{se } n - i_{max}^2 - 5 \cdot i_{max} \leq 5 \\ \frac{2}{3} \cdot i_{max}^3 + 6 \cdot i_{max}^2 - \left(2 \cdot n - \frac{43}{3}\right) \cdot i_{max} + 2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 8 \\ \text{se } n - i_{max}^2 - 5 \cdot i_{max} > 5 \end{cases} \quad (17)$$

dove:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{4 \cdot n + 9} - 5) \right\rfloor$$

ed:

$$n_1 = n_2 = n_3 \wedge n := n_1 = n_2 = n_3$$

Per il secondo caso (vedi [3]), abbiamo, invece,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot i_{max}^3 + 5 \cdot i_{max}^2 + \left(\frac{28}{3} - 2 \cdot n_3\right) \cdot i_{max} + 2 \cdot n_2 \cdot n_3 - n_3 + 3 \\ \text{se } n_3 - i_{max}^2 - 5 \cdot i_{max} \leq 5 \\ \frac{2}{3} \cdot i_{max}^3 + 6 \cdot i_{max}^2 + \left(\frac{43}{3} - 2 \cdot n_3\right) \cdot i_{max} + 2 \cdot n_2 \cdot n_3 - 2 \cdot n_3 + 8 \\ \text{se } n_3 - i_{max}^2 - 5 \cdot i_{max} > 5 \end{cases} \quad (18)$$

dove:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{4 \cdot n_3 + 9} - 5) \right\rfloor$$

ed:

$$n_1 - 1 = n_2 \geq n_3$$

In [4], abbiamo, poi, che la (17) è stata migliorata dallo stesso Ripà per quasi tutti i valori di  $n$ , tramite un algoritmo differente, come,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3; 4\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) = \left\lfloor \frac{3}{2} \cdot n^2 \right\rfloor + n - 1 \quad (19)$$

dove:

$$n_1 = n_2 = n_3 \wedge n := n_1 = n_2 = n_3$$

Riguardo al caso quadridimensionale e quelli successivi, abbiamo, invece, che la formula per le soluzioni di Ripà (vedi [3] e [4]) risulta,  $\forall n_1; n_2; n_3; n_4; \dots; n_k \in \mathbb{N}-\{0; 1\} \wedge k \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3; n_4; \dots; n_k) = (q+1) \cdot \prod_{i=4}^k (n_i) - 1 \quad (20)$$

dove:

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq \dots \geq n_k$$

e:

$$q := h(n_1; n_2; n_3)$$

Osservando la (20), si può notare che essa coincide con la nostra stessa formula per il caso quadridimensionale e quelli successivi (la (15)), al variare di  $h(n_1; n_2; n_3)$ , la soluzione di Ripà per il caso tridimensionale, anziché il nostro  $t(n_1; n_2; n_3)$ .

Per comparare il nostro algoritmo con quelli proposti da Ripà, non sarà, dunque, necessario considerare la totalità dei casi presenti nel problema, ma, puramente, quello tridimensionale, e tale sarà lo scopo della prossima sottosezione.

## 5.2 Lo scarto tra le soluzioni ottenute tramite i vari algoritmi

In questa sottosezione, analizzeremo lo scarto tra le soluzioni ottenute tramite il nostro algoritmo e quelli proposti da Ripà per il caso tridimensionale, dimostrando che il nostro fornisca dei limiti superiori più efficienti.

Combinando la (12), la (13) e la (14) con i primi casi della (16), otteniamo che lo scarto tra il nostro algoritmo e quello di Ripà, per questi casi particolari, risulti,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$\begin{aligned}
 & 0 \\
 & \text{se } n_3 \leq n_1 - n_2 \\
 & = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot n_1^2 - n_1 \cdot n_2 - n_1 \cdot n_3 + n_1 + \frac{1}{2} \cdot n_2^2 + n_2 \cdot n_3 - n_2 + \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - n_3 + \frac{1}{2} \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \\
 & = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot n_1^2 - n_1 \cdot n_2 - n_1 \cdot n_3 + n_1 + \frac{1}{2} \cdot n_2^2 + n_2 \cdot n_3 - n_2 + \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - n_3 \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \\
 & = \text{se } n_1 - n_2 < n_3 < 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3 \\
 \\
 h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) & = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot n_1^2 - n_1 \cdot n_2 - n_1 \cdot n_3 + n_1 + \frac{1}{2} \cdot n_2^2 + n_2 \cdot n_3 - n_2 + \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - n_3 - \frac{1}{2} \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \quad (21) \\
 & = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot n_1^2 - n_1 \cdot n_2 - n_1 \cdot n_3 + n_1 + \frac{1}{2} \cdot n_2^2 + n_2 \cdot n_3 - n_2 + \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - n_3 - 1 \\ \text{se } -n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases} \\
 & \text{se } n_3 = 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3 \\
 & \text{se } n_1 = n_2 = 2 \vee n_1 > n_2 \\
 \\
 & = \begin{cases} 2 \\ \text{se } n_3 < 3 \end{cases} \\
 & = \begin{cases} 2 \\ \text{se } n_3 = 3 \end{cases} \\
 & \text{se } n_1 = n_2 > 2 \wedge n := n_1 = n_2
 \end{aligned}$$

dove:

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3$$

Analizzando la (21), otteniamo che lo scarto tra l'algoritmo proposto da Ripà e il nostro risulti essere sempre uguale o maggiore di zero, dunque il nostro algoritmo è sempre pari o più efficiente rispetto all'algoritmo di Ripà nei casi studiati nella (21).

Combinando, poi, la (13) e la (14) con la (17) e la (19), otteniamo,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} = 0 \\ \text{se } n = 4 \\ \\ \begin{cases} 1 \\ \text{se } n = 2 \cdot m - 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2\} \end{cases} \\ \\ 2 \\ \text{se } n = 4 \cdot m + 2, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \\ 0 \\ \text{se } n = 4 \cdot m, \forall m \in \mathbb{N} - \{0; 1\} \\ \\ \text{se } n > 4 \end{cases} \quad (22)$$

dove:

$$n_1 = n_2 = n_3 \wedge n := n_1 = n_2 = n_3$$

Per poter analizzare, infine, lo scarto tra le soluzioni ottenute tramite  $h(n_1; n_2; n_3)$  e  $t(n_1; n_2; n_3)$  per i casi restanti, ci porremo come unico fine il verificare che la differenza  $h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3)$  nei casi rimanenti sia sempre uguale o maggiore di zero, senza quantificarla con precisione, sfruttando delle semplici considerazioni, facilmente deducibili dalle nostre formule.

Per prima cosa, ci sarà utile eliminare le varie funzioni *floor* presenti nelle formule dei casi non ancora studiati di  $h(n_1; n_2; n_3)$ .

Osserviamo, innanzitutto, che  $i_{max}$  sia scritto nella forma,  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$i_{max} = \lfloor x \rfloor \quad (23)$$

dove:

$$x \geq 0$$

Consideriamo, poi, che,  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad (24)$$

dove:

$$x \geq 0$$

Sfruttando, dunque, la (23) e la (24), sostituiamo, all'occorrenza, i vari  $i_{max} = \lfloor x \rfloor$  dei casi rimanenti della (16) con  $x-1$  o  $x$ , ottenendo,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) > \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 + (2 \cdot (n_1 - n_2) + 7) \cdot (x-1)^2 + \left(6 \cdot (n_1 - n_2) + \frac{35}{3}\right) \cdot (x-1) - 2 \cdot n_3 \cdot x + 4 \cdot (n_1 - n_2) + 2 \cdot n_3 \cdot (n_2 - 1) + 5 \\ \text{se } n_3 \leq 2 \cdot (i_{max}^2 + (n_1 - n_2 + 4) \cdot i_{max} + 2 \cdot (n_1 - n_2) + 4) \\ \\ \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 + (2 \cdot (n_1 - n_2) + 9) \cdot (x-1)^2 + \left(8 \cdot (n_1 - n_2) + \frac{59}{3}\right) \cdot (x-1) - 2 \cdot n_3 \cdot x + 8 \cdot (n_1 - n_2) + n_3 \cdot (2 \cdot n_2 - 3) + 13 \\ \text{se } n_3 > 2 \cdot (i_{max}^2 + (n_1 - n_2 + 4) \cdot i_{max} + 2 \cdot (n_1 - n_2) + 4) \end{cases} \quad (25)$$

dove:

$$x := \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{n_1^2 + n_2^2 - 2 \cdot n_1 \cdot n_2 + 2 \cdot (n_1 - n_2 + n_3) + 1} + n_2 - n_1 - 3 \right)$$

e:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{n_1^2 + n_2^2 - 2 \cdot n_1 \cdot n_2 + 2 \cdot (n_1 - n_2 + n_3) + 1} + n_2 - n_1 - 3 \right) \right\rfloor$$

ed:

$$n_3 > 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3$$

ed:

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3$$



Reiterando la procedura appena mostrata anche per la (18), otteniamo,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) > \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot (x-1)^3 + 5 \cdot (x-1)^2 + \frac{28}{3} \cdot (x-1) - 2 \cdot n_3 \cdot x + 2 \cdot n_2 \cdot n_3 - n_3 + 3 \\ \text{se } n_3 - i_{max}^2 - 5 \cdot i_{max} \leq 5 \\ \frac{2}{3} \cdot (x-1)^3 + 6 \cdot (x-1)^2 + \frac{43}{3} \cdot (x-1) - 2 \cdot n_3 \cdot x + 2 \cdot n_2 \cdot n_3 - 2 \cdot n_3 + 8 \\ \text{se } n_3 - i_{max}^2 - 5 \cdot i_{max} > 5 \end{cases} \quad (26)$$

dove:

$$x := \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{4 \cdot n_3 + 9} - 5)$$

e:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{4 \cdot n_3 + 9} - 5) \right\rfloor$$

ed:

$$n_1 - 1 = n_2 \geq n_3$$

A questo punto, poiché il nostro  $t(n_1; n_2; n_3)$  risulta essere suddiviso in un rilevante numero di casi, ci sarà conveniente considerare che, dalla (12), dalla (13) e dalla (14), discenda che,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$t(n_1; n_2; n_3) \leq \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot n_1^2 - n_1 + n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_2^2 + n_2 + n_2 \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - 1 \\ \text{se } n_1 > n_2 \\ 2 \cdot n \cdot n_3 - \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + n_3 - 1 \\ \text{se } n_1 = n_2 \wedge n := n_1 = n_2 \end{cases} \quad (27)$$

dove:

$$-n_1 + n_2 + n_3 \geq 1$$

ed:

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3$$

Combinando, dunque, la (25) e la (26) con la (27), gli scarti tra le soluzioni ottenute tramite il nostro algoritmo e quelli di Ripà, per i casi non ancora analizzati, risultano essere i seguenti.

Per particolari casi della (25), otteniamo,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) > \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot d^3 + d^2 - \frac{1}{3} \cdot d^2 \cdot r + \frac{1}{6} \cdot d - \frac{1}{6} \cdot d \cdot r + r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{3}{2} \cdot n_3 - 1 := a_1 \\ \text{se } n_3 \leq 2 \cdot (i_{max}^2 + (n_1 - n_2 + 4) \cdot i_{max} + 2 \cdot (n_1 - n_2) + 4) \\ \frac{1}{3} \cdot d^3 + d^2 - \frac{1}{3} \cdot d^2 \cdot r + \frac{7}{6} \cdot d - \frac{1}{6} \cdot d \cdot r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{3}{2} \cdot n_3 := a_2 \\ \text{se } n_3 > 2 \cdot (i_{max}^2 + (n_1 - n_2 + 4) \cdot i_{max} + 2 \cdot (n_1 - n_2) + 4) \end{cases} \quad (28)$$

dove:

$$r := \sqrt{d^2 + 2 \cdot d + 2 \cdot n_3 + 1}$$

e:

$$d := n_1 - n_2$$

e:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{n_1^2 + n_2^2 - 2 \cdot n_1 \cdot n_2 + 2 \cdot (n_1 - n_2 + n_3) + 1} + n_2 - n_1 - 3) \right\rfloor$$

ed:

$$n_3 > 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3$$

ed:

$$n_1 > n_2 \geq n_3$$

Per gli ultimi casi della (25), abbiamo, invece,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) > \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{3}{2} \cdot n_3 - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + r - 1 := a_3 \\ \text{se } n_3 \leq 2 \cdot (i_{max}^2 + 4 \cdot i_{max} + 4) \\ \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{3}{2} \cdot n_3 - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 := a_4 \\ \text{se } n_3 > 2 \cdot (i_{max}^2 + 4 \cdot i_{max} + 4) \end{cases} \quad (29)$$

dove:

$$r := \sqrt{2 \cdot n_3 + 1}$$

e:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 \cdot n_3 + 1} - 3) \right\rfloor$$

ed:

$$n_3 > 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3$$

ed:

$$n_1 = n_2 \geq n_3$$

Per i casi mostrati nella (26), otteniamo, infine,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) > \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + \frac{1}{6} \cdot r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + 1 := a_5 \\ \text{se } n_3 - i_{\max}^2 - 5 \cdot i_{\max} \leq 5 \\ \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{5}{6} \cdot r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + 3 := a_6 \\ \text{se } n_3 - i_{\max}^2 - 5 \cdot i_{\max} > 5 \end{cases} \quad (30)$$

dove:

$$r := \sqrt{4 \cdot n_3 + 9}$$

e:

$$i_{\max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{4 \cdot n_3 + 9} - 5) \right\rfloor$$

ed:

$$n_1 - 1 = n_2 \geq n_3$$

Essendo le parti destre della (28), della (29) e della (30) strettamente minori dello scarto tra le soluzioni ottenute tramite il nostro algoritmo e quelli di Ripà, quando entrambi i due  $a_i$  della disequazione risultano essere uguali o maggiori di zero, ne consegue che anche la differenza esatta  $h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3)$ , necessariamente, lo sia.

Ponendo, dunque, i vari  $a_i$  uguali o maggiori di zero, otteniamo quanto segue.

Svolgendo i conti, dalla (28), abbiamo,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 11 \\ a_2 \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 13 \end{cases} \quad (31)$$

dove:

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) > \begin{cases} a_1 \\ \text{se } n_3 \leq 2 \cdot (i_{\max}^2 + (n_1 - n_2 + 4) \cdot i_{\max} + 2 \cdot (n_1 - n_2) + 4) \\ a_2 \\ \text{se } n_3 > 2 \cdot (i_{\max}^2 + (n_1 - n_2 + 4) \cdot i_{\max} + 2 \cdot (n_1 - n_2) + 4) \end{cases}$$

e:

$$a_1 := \frac{1}{3} \cdot d^3 + d^2 - \frac{1}{3} \cdot d^2 \cdot r + \frac{1}{6} \cdot d - \frac{1}{6} \cdot d \cdot r + r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{3}{2} \cdot n_3 - 1$$

e:

$$a_2 := \frac{1}{3} \cdot d^3 + d^2 - \frac{1}{3} \cdot d^2 \cdot r + \frac{7}{6} \cdot d - \frac{1}{6} \cdot d \cdot r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{3}{2} \cdot n_3$$

e:

$$i_{\max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{n_1^2 + n_2^2 - 2 \cdot n_1 \cdot n_2 + 2 \cdot (n_1 - n_2 + n_3) + 1} + n_2 - n_1 - 3) \right\rfloor$$

ed:

$$r := \sqrt{d^2 + 2 \cdot d + 2 \cdot n_3 + 1}$$

e:

$$d := n_1 - n_2$$

ed:

$$n_3 > 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3$$

ed:

$$n_1 > n_2 \geq n_3$$

Dalla (29), otteniamo, invece,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$\begin{cases} a_3 \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 9 \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} a_4 \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 9 \end{cases}$$

dove:

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) > \begin{cases} a_3 \\ \text{se } n_3 \leq 2 \cdot (i_{max}^2 + 4 \cdot i_{max} + 4) \\ a_4 \\ \text{se } n_3 > 2 \cdot (i_{max}^2 + 4 \cdot i_{max} + 4) \end{cases}$$

e:

$$a_3 := \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{3}{2} \cdot n_3 - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + r - 1$$

e:

$$a_4 := \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{3}{2} \cdot n_3 - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3$$

e:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 \cdot n_3 + 1} - 3) \right\rfloor$$

ed:

$$r := \sqrt{2 \cdot n_3 + 1}$$

ed:

$$n_3 > 2 \cdot (n_1 - n_2) + 3$$

ed:

$$n_1 = n_2 \geq n_3$$

Dalla (30), otteniamo, infine,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2; 3\}$ :

$$\begin{cases} a_5 \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 10 \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} a_6 \geq 0 \\ \text{almeno se } n_3 \geq 10 \end{cases}$$

dove:

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) > \begin{cases} a_5 \\ \text{se } n_3 - i_{max}^2 - 5 \cdot i_{max} \leq 5 \\ a_6 \\ \text{se } n_3 - i_{max}^2 - 5 \cdot i_{max} > 5 \end{cases}$$

e:

$$a_5 := \frac{1}{2} \cdot n_3^2 + \frac{1}{6} \cdot r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + 1$$

e:

$$a_6 := \frac{1}{2} \cdot n_3^2 - \frac{5}{6} \cdot r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot n_3 + 3$$

e:

$$i_{max} := \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{4 \cdot n_3 + 9} - 5) \right\rfloor$$

ed:

$$r := \sqrt{4 \cdot n_3 + 9}$$

ed:

$$n_1 - 1 = n_2 \geq n_3$$

Osservando la (31), la (32) e la (33), possiamo notare che lo scarto tra le soluzioni ottenute tramite  $h(n_1; n_2; n_3)$  e  $t(n_1; n_2; n_3)$  non sia, con certezza, sempre uguale o maggiore di zero e, dunque, per un certo numero di casi del problema, tale disuguaglianza potrebbe non essere valida.

In maniera tale da dimostrare che il nostro algoritmo sia, effettivamente, sempre pari o più efficiente rispetto a quelli proposti da Ripà, sarà necessario calcolare la differenza esatta  $h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3)$  nei casi per i quali non abbiamo ancora dimostrato che essa sia sempre uguale o maggiore di zero.

Per i casi della (31) per cui non si ha certezza che siano uguali o maggiori di zero, la differenza esatta  $h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3)$  si calcola unendo la (12) con la (16), ed è mostrata di seguito, ripartita sulla base del valore di  $d$ , ovvero la differenza tra  $n_1$  ed  $n_2$ .

Per il primo valore possibile di  $d$ , abbiamo,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{l} 6 \\ \text{se } n_3=6 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 8 \\ \text{se } n_3=7 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 12 \\ \text{se } n_3=8 \end{array} \\
 h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) &= \begin{array}{l} 16 \\ \text{se } n_3=9 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 22 \\ \text{se } n_3=10 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 28 \\ \text{se } n_3=11 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 36 \\ \text{se } n_3=12 \end{array} \\
 & \text{se } d=1
 \end{aligned} \tag{34}$$

dove:

$$d := n_1 - n_2$$

ed:

$$n_1 > n_2 \geq n_3$$

Per il secondo valore di  $d$ , risulta, invece,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$\begin{aligned}
 h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) &= \begin{array}{l} 10 \\ \text{se } n_3=8 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 14 \\ \text{se } n_3=9 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 18 \\ \text{se } n_3=10 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 24 \\ \text{se } n_3=11 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} 30 \\ \text{se } n_3=12 \end{array} \\
 & \text{se } d=2
 \end{aligned} \tag{35}$$

dove:

$$d := n_1 - n_2$$

ed:

$$n_1 > n_2 \geq n_3$$

Per il terzo valore possibile di  $d$ , abbiamo,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 16 \\ \text{se } n_3 = 10 \\ 20 \\ \text{se } n_3 = 11 \\ 26 \\ \text{se } n_3 = 12 \\ \text{se } d = 3 \end{cases} \quad (36)$$

dove:

$$d := n_1 - n_2$$

ed:

$$n_1 > n_2 \geq n_3$$

Per l'ultimo valore di  $d$ , abbiamo, infine,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 22 \\ \text{se } n_3 = 12 \\ \text{se } d = 4 \end{cases} \quad (37)$$

dove:

$$d := n_1 - n_2$$

ed:

$$n_1 > n_2 \geq n_3$$

Per i casi della (32) per cui non si ha certezza che siano uguali o maggiori di zero, unendo la (13) e la (14) con la (16), abbiamo che la differenza esatta sia, invece,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 2 \\ \text{se } n_3 = 4 \\ 5 \\ \text{se } n_3 = 5 \\ 8 \\ \text{se } n_3 = 6 \\ 11 \\ \text{se } n_3 = 7 \\ 14 \\ \text{se } n_3 = 8 \end{cases} \quad (38)$$

dove:

$$n_1 = n_2 \geq n_3$$

Per i casi della (33) per cui non si ha certezza che siano uguali o maggiori di zero, unendo la (12) con la (18), otteniamo che la differenza esatta  $h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3)$  risulti, infine,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2; 3\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) = \begin{cases} 2 \\ \text{se } n_3 = 4 \\ \\ 3 \\ \text{se } n_3 = 5 \\ \\ 5 \\ \text{se } n_3 = 6 \\ \\ 7 \\ \text{se } n_3 = 7 \\ \\ 11 \\ \text{se } n_3 = 8 \\ \\ 15 \\ \text{se } n_3 = 9 \end{cases} \quad (39)$$

dove:

$$n_1 - 1 = n_2 \geq n_3$$



### 5.3 Conclusione

Avendo illustrato lo scarto tra le soluzioni ottenute tramite il nostro algoritmo e gli altri proposti, possiamo, dunque, affermare che,  $\forall n_1; n_2; n_3 \in \mathbb{N}-\{0; 1\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3) - t(n_1; n_2; n_3) \geq 0 \quad (40)$$

e, di conseguenza, che il nostro algoritmo fornisca dei limiti superiori pari o più efficienti rispetto a quelli ottenuti tramite gli algoritmi proposti da altri per il caso tridimensionale (oltre che fornire la soluzione esatta al caso bidimensionale).

Combinando, infine, la (15) con la (20), possiamo estendere il risultato anche al caso quadridimensionale e a quelli successivi.

In altri termini,  $\forall n_1; n_2; n_3; \dots; n_k \in \mathbb{N}-\{0; 1\} \wedge k \in \mathbb{N}-\{0; 1; 2\}$ :

$$h(n_1; n_2; n_3; \dots; n_k) - t(n_1; n_2; n_3; \dots; n_k) \geq 0 \quad (41)$$

## Bibliografia

- [1] Keszegh, B. (2013). *Covering Paths and Trees for Planar Grids*, arXiv.org. Available online at: <http://arxiv.org/pdf/1311.0452.pdf>.
- [2] Loyd, S. (1914). *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums with Answers*, The Lamb Publishing Company, New York.
- [3] Ripà, M. (2014). The rectangular spiral or the  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  Points Problem, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 20 (1), 59-71.
- [4] Ripà, M. (2016). The  $n \times n \times n$  Points Problem optimal solution, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 22 (2), 36-43.