Definición Mejorada de Lógica Neutrosófica No Estándar e Introducción a los Hiperreales Neutrosóficos (Quinta versión)

Improved Definition of Non-Standard Neutrosophic Logic and Introduction to Neutrosophic Hyperreals (Fifth Version)

Florentin Smarandache[1]

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad de Nuevo México, 705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, EE. UU.
E-mail: smarand@unm.edu

Resumen: En la quinta versión de nuestro artículo de respuesta [26] a la crítica de Imamura, recordamos que la Lógica Neutrosófica No Estándar nunca fue utilizada por la comunidad neutrosófica en ninguna aplicación, que los operadores neutrosóficos de un cuarto de siglo de antigüedad (1995-1998) criticados por Imamura nunca fueron utilizados ya que se mejoraron poco después, pero omite hablar de su desarrollo, y que en las aplicaciones del mundo real necesitamos convertir/aproximar los hiperreales, mónadas y bínadas del Análisis No Estándar a intervalos diminutos con la precisión deseada; de lo contrario, serían inaplicables.

Señalamos varios errores y afirmaciones falsas de Imamura [21] con respecto al inf/sup de subconjuntos no estándar, también la "rigurosa definición de lógica neutrosófica" de Imamura es incorrecta, al igual que su definición de intervalo unitario no estándar, y demostramos que no hay un orden total en el conjunto de hiperreales (debido a los Hiperreales Neutrosóficos recientemente introducidos que son indeterminados), por lo que el Principio de Transferencia de R a R* es cuestionable.

Después de su crítica, siguieron varias publicaciones de respuesta sobre neutrosofía teórica no estándar en el período 2018-2022. Como tal, extendí el Análisis No Estándar añadiendo la mónada izquierda cerrada a la derecha, la mónada derecha cerrada a la izquierda, la bínada perforada (que introdujimos en 1998), y la bínada no perforada - todo esto con el fin de cerrar el espacio no estándar recién extendido (R*) bajo operaciones de adición no estándar, sustracción no estándar, multiplicación no estándar, división no estándar y potencia no estándar [23, 24].

Se presentan definiciones mejoradas del Intervalo Unitario No Estándar y de la Lógica Neutrosófica No Estándar, junto con los Operadores Neutrosóficos No Estándar.

Palabras clave: Lógica Neutrosófica; Análisis No Estándar; Lógica Neutrosófica No Estándar; Operadores Neutrosóficos; Hiperreales Neutrosóficos

Abstract: In the fifth version of our reply article [26] to Imamura's critique, we recall that Neutrosophic Non-Standard Logic was never used by the neutrosophic community in any application, that the quarter-century old (1995-1998) neutrosophic operators criticized by Imamura were never used as they were improved soon after, but omits to talk about their development, and that in real-world applications we need to convert/approximate the hyperreals, monads and bi-nads of Non-Standard Analysis to tiny intervals with the desired precision; otherwise they would be inapplicable.

We pointed out several errors and false statements by Imamura [21] regarding the inf/sup of nonstandard subsets, also Imamura's "rigorous definition of neutrosophic logic" is incorrect, as is his definition of nonstandard unit interval, and we showed that there is no total order in

the set of hyperreals (due to the recently introduced Neutrosophic Hyperreals which are indeterminate), so the Transfer Principle from R to R* is questionable.
After his critique, several reply posts on non-standard theoretical neutrosophy followed in 2018-2022. As such, I extended the Nonstandard Analysis by adding the right-closed left monad, the left-closed right monad, the punctured binad (which we introduced in 1998), and the nonpunctured binad - all in order to close the newly extended nonstandard space (R*) under nonstandard addition, nonstandard subtraction, nonstandard multiplication, nonstandard division, and nonstandard power operations [23, 24].
Improved definitions of the Nonstandard Unitary Interval and Nonstandard Neutrosophic Logic are presented, along with Nonstandard Neutrosophic Operators.

Keywords: Neutrosophic Logic; Nonstandard Analysis; Nonstandard Neutrosophic Logic; Neutrosophic Operators; Neutrosophic Hyperreals.

1. Introducción

Recuerdo mis dos primeras respuestas a las críticas de Imamura del 7 de noviembre de 2018 [1] sobre la Lógica Neutrosófica No Estándar [20] el 24 de noviembre de 2018 (versión 1) y el 13 de febrero de 2019 (versión 2), y las actualizo después de que Imamura había publicado una tercera versión [21] en una revista sin ni siquiera citar mis anteriores trabajos de respuesta, ni hacer ningún comentario o crítica a los mismos, aunque el trabajo fue subido a arXiv poco después que él y también online en mi UNM [20]. Eso me parece muy deshonesto.

Seguramente, él puede recordar una y otra vez las primeras conectivas neutrosóficas, pero tiene que contar toda la historia: nunca se utilizaron en ninguna aplicación, y se mejoraron varias veces, empezando por las conectivas neutrosóficas del investigador estadounidense Ashbacher en 2002, Rivieccio en 2008, y Wang, Smarandache, Zhang y Sunderraman en la versión de 2010.

La única razón por la que he añadido la forma no estándar a la lógica neutrosófica (y de forma similar al conjunto neutrosófico y a la probabilidad) fue para hacer una distinción entre la *Verdad Relativa* (que es la verdad en algunos Mundos, según Leibniz) y la *Verdad Absoluta* (que es la verdad en todos los Mundos posibles, según Leibniz también) que se dan en la filosofía.

Otra posible razón puede ser cuando los grados neutrosóficos de verdad, indeterminación o falsedad se determinan infinitesimalmente, por ejemplo: la mónada derecha (0.8+) significa un valor estrictamente mayor que 0.8 pero infinitamente más cercano a 0.8. Y de manera similar, la mónada izquierda (-0.8) significa un valor estrictamente menor que 0.8 pero infinitamente más cercano a 0.8. Mientras que la bínada (-0.8+) significa un valor diferente de 0.8 pero infinitamente más cercano (desde el lado derecho o desde el lado izquierdo) a 0.8. Pero no existen en nuestro mundo real (el conjunto real R), solo en el conjunto hiperreal R*, por lo que necesitamos *convertir / aproximar* estos conjuntos hiperreales por pequeños intervalos reales con la precisión deseada (ε), como: $(0.8, 0.8+\varepsilon)$, $(0.8-\varepsilon, 0.8)$, o $(0.8-\varepsilon, 0.8)\cup(0.8, 0.8+\varepsilon)$ respectivamente [24].

Desde el comienzo del campo neutrosófico, muchas cosas se han desarrollado y evolucionado, donde se han definido mejores definiciones, operadores, descripciones y aplicaciones de la lógica neutrosófica. Lo mismo sucede en cualquier campo científico: a partir de unas definiciones y operaciones iniciales la comunidad las va mejorando poco a poco. El lector debe consultar el último desarrollo de la neutrosofía: hay miles de artículos, libros y presentaciones de conferencias en línea, verifíquese, por ejemplo: http://fs.unm.edu/neutrosophy.htm. No es de temer que se sigan recordando las antiguas definiciones y operadores, ya que entretanto se han mejorado. El último desarrollo del campo debe ser revelado, no omitido.

La definición general del conjunto neutrosófico utilizada en los últimos años.

Sea *U* un universo y *S* un conjunto incluido en *U*. Entonces cada elemento $x \in S$, denotado como

x(T(x), I(x), F(x)), tiene un grado de pertenencia/verdad T(x) con respecto a S, grado de pertenencia indeterminada I(x), y grado de no pertenencia F(x), donde

T(x), I(x), F(x) son subconjuntos reales de [0, 1].

Fui más prudente cuando presenté la suma de componentes neutrosóficos estándar de un solo valor, diciendo:

Sean T, I, F números de un solo valor, T, I, F∈[0, 1], tal que $0 \le T + I + F \le 3$.

Un amigo me alertó: "*Si T, I, F son números en [0, 1], por supuesto que su suma está entre 0 y 3*". "Sí, respondí, me permito esta tautología, porque si no dijera que la suma es hasta 3, los lectores darían por sentado que la suma T + I + F está acotada por 1, ya que es así es en todas las lógicas y en probabilidad!"

De manera similar, para la Lógica Neutrosófica, pero en lugar de elementos tenemos proposiciones (en la lógica proposicional).

2. Errores en el artículo de Imamura [21]:

2.1 La afirmación de Imamura, refiriéndose a los componentes neutrosóficos T, I, F como subconjuntos, que:

“Los subconjuntos de]-0, 1+[”pueden no tener ni ínfimo ni supremo” es falso.

Contraejemplos de subconjuntos que tienen ínfimo y supremo:

Denotemos el intervalo unitario no estándar U =]-0, 1+[.

Sea *M =]0.2+, -0.3[*, que es un subconjunto de U, entonces

inf(M) = 0,2, sup(M) = 0,3.

En general, para cualquier número real a y b, tal que 0 ≤ a < b ≤ 1, se tiene el correspondiente subconjunto no estándar S =]a+, -b[incluido en U, que tiene ambos: inf(S) = a , sup(S) = b.

Como caso particular e interesante, se tiene: $]0^+, {}^-1[\subset]{}^-0, 1^+[$. En general, para cualquier número real finito $a, b \in R$, a < b, el subconjunto no estándar S =]a+, -b[incluido en R*, tiene ambos: inf(S) = a, sup(S) = b. De manera más general, para cualquier $x \in \{\overset{0}{a}, \overset{+}{a}, \overset{0+}{a}\}$ y cualquier $y \in \{\overset{0}{b}, \overset{-}{b}, \overset{-0}{b}\}$ el subconjunto no estándar $]x, y[$ posee $\inf(x) = a$ y $\sup(y) = b$; incluso el subconjunto $]\overset{0}{a}, \overset{0}{b}[\equiv [a, b]$, que normalmente es estándar, puede convertirse en no estándar si contiene dentro al menos un hiperreal. Por supuesto, si al menos uno de x o y es hiperreal, entonces el subconjunto]x, y[no es estándar.

2.2 La “*rigurosa definición de lógica neutrosófica*” de Imamura es incorrecta.

Sea K un campo ordenado no arquimediano. El campo ordenado K se llama no arquimediano si tiene infinitesimales distintos de cero.

definió, por $x, y \in K$, se dice que x e y están infinitamente cerca (indicado por $x \approx y$) si x-y es infinitesimal. Entonces x es aproximadamente más pequeña que y (denotado como $x \underset{\approx}{<} y$) si x < y o $x \approx y$.

Esto está mal. Véanse los siguientes contraejemplos.

Sea ε > 0 un infinitesimal positivo, y sean $x = 5 + \varepsilon$ e $y = 5 - \varepsilon$ hiperreales.

Por supuesto, $x \in (5^+)$, mónada derecha de 5, y $y \in ({}^-5)$, mónada izquierda de 5.

$5 + \varepsilon$ está infinitamente más cerca de 5, pero por encima (estrictamente mayor que) 5;

Mientras que $5 - \varepsilon$ está infinitamente más cerca de 5, pero por debajo (estrictamente menor que) 5.

Entonces x – y = 2 ε ,que es infinitesimal, y, debido a que *x está infinitamente cerca de y* ($x \approx y$), se tiene que x es aproximadamente menor que y (o $x \underset{\approx}{<} y$), según la definición de Imamura.

Pero esto es falso, ya que para $\varepsilon > 0$ claramente $5 + \varepsilon > 5 > 5 - \varepsilon$, de donde x > y.

Por lo tanto, x no es más pequeño que y, sino todo lo contrario.

Contraejemplos generales:

Sea ε > 0 un infinitesimal positivo, y el número real $a \in R$.

Entonces para $x = a + \varepsilon$ y $y = a - \varepsilon$ se obtiene el mismo resultado incorrecto x < y, según Imamura.

Más adelante, para $x = a + \varepsilon$ y y = a, se obtiene el resultado erróneo x < y.

Y de manera similar, para x = a y $y = a - \varepsilon$, se obtiene el resultado incorrecto x < y.

2.3 No existe orden entre a y -a+ en R*.

Sea $a \in R$ un número real y ε un infinitesimal positivo o negativo (no lo sabemos exactamente).

Entonces $y = {}^-a^+$ es un número hiperreal de la forma $y = a + \varepsilon$, dónde ε puede ser infinitesimal positivo o negativo.

Sea $({}^-a^+)$ la bínada izquierda-derecha [5] de a, definida como:

$({}^-a^+) = \{a \pm \varepsilon$, dónde ε es un infinitesimal positivo}.

Por supuesto, ${}^-a^+ \in ({}^-a^+)$.

El principio de transferencia [21] establece que R* tiene las mismas propiedades de primer orden que R.

Pero R* tiene solo un orden parcial, ya que no hay orden entre a y -a+ en R*, mientras que R tiene un orden total.

Se tiene $\overset{-0}{a} \leq_N \overset{-0+}{a} \leq_N \overset{0+}{a}$, luego $\overset{-0}{a} \leq_N$ a$\leq_N \overset{0+}{a}$, de donde $\overset{-0}{a} \leq_N \overset{0+}{a}$.

Pero, problemas similares de relaciones sin orden se dan entre $\overset{-0+}{a}$, $\overset{-0}{a}$ respectivamente y ${}^{-}a^{+}$.

Por lo tanto, el Principio de Transferencia de R a R* es cuestionable...

3. Inutilidad del Análisis No Estándar en Lógica, Conjunto, Probabilidad y Estadística Neutrosóficas.

La discusión de Imamura [1] sobre la definición de lógica neutrosófica es bienvenida, pero es inútil, ya que de todos los artículos y libros neutrosóficos publicados, de todas las presentaciones en congresos, y de todas las tesis de maestría y doctorado defendidas en todo el mundo, etc. (más de dos mil) en las últimas dos décadas desde que comenzó la primera investigación neutrosófica (1998-2022), y de miles de investigadores neutrosóficos, ni uno solo usó la forma no estándar de lógica neutrosófica, conjunto o probabilidad y estadísticas en ninguna ocasión (investigaciones extendidas o aplicaciones).

Todos los investigadores, sin excepción, han utilizado el *Conjunto y Lógica Neutrosófica Estándar* [así que ninguna postura de *Conjunto y Lógica Neutrosófica No Estándar*], donde los componentes neutrosóficos T, I, F son subconjuntos reales del intervalo unitario estándar [0, 1].

La gente ni siquiera escribe "estándar" porque se entiende, porque nunca se usó no estándar en ninguna aplicación; no se puede usar en aplicaciones reales.

Más aún, para simplificar los cálculos, la mayoría de los investigadores han utilizado el *Conjunto y la Lógica Neutrosófica de Valor Único* {cuando T, I, F son números reales simples de *[0, 1]*}, en segundo lugar se ubicó el *Conjunto y la Lógica Neutrosófica de Valor Intervalo* {cuando T, I, F son intervalos incluidos en *[0, 1]*}, y en el tercero el *Conjunto y la Lógica Neutrosófica Vacilante* {cuando T, I, F son subconjuntos finitos discretos incluidos en *[0, 1]*}.

En este sentido, se han publicado artículos sobre "conjuntos estándar neutrosóficos" de un solo valor [12, 13, 14], donde los componentes neutrosóficos son solo números reales estándar, considerando el caso particular cuando $0 \leq T + I + F \leq 1$ (en el caso más general $0 \leq T + I + F \leq 3$).

De hecho, el propio Imamura reconoce en su artículo [1], página 4, que:

> *"la lógica neutrosófica no depende de la transferencia, por lo que el uso de análisis no estándar no es esencial para esta lógica, y puede eliminarse de su definición".*

Toda la comunidad neutrosófica se ha enterado de este resultado y ha ignorado el análisis no estándar desde el principio en los estudios y aplicaciones de la lógica neutrosófica durante dos décadas.

4. Aplicabilidad de la Lógica Neutrosófica vs. Análisis Teórico No Estándar

Él escribió:

> *"no discutimos el significado teórico o las aplicaciones de la lógica neutrosófica"*

¿Por qué no habla de las aplicaciones de la lógica neutrosófica? Porque tiene tantas que trajeron su popularidad entre los investigadores [2], a diferencia del análisis no estándar que es un objeto no físico (idealista, imaginario) y es difícil de aplicar en el mundo real.

La lógica, el conjunto, la medida, la probabilidad, y la estadística neutrosóficas, etc., fueron diseñadas con el objetivo primordial de ser aplicadas en campos prácticos, tales como:

Inteligencia Artificial, Sistemas de Información, Informática, Cibernética, Métodos Teóricos,
Estructuras Matemáticas Algebraicas, Matemáticas Aplicadas, Automatización,
Sistemas de Control, Big Data, Ingeniería, Eléctrica, Electrónica, Filosofía, Ciencias Sociales,
Psicología, Biología, biomédica, ingeniería, informática médica, investigación operativa,
Ciencias de la gestión, Ciencias de la imagen, Tecnología fotográfica, Instrumentos,
Instrumentación, Física, Óptica, Economía, Mecánica, Neurociencias, Radiología Nuclear,
Medicina, Imagen Médica, Aplicaciones Interdisciplinarias, Ciencias Multidisciplinarias, etc. [2],
mientras que el análisis no estándar es principalmente una matemática pura.

Desde 1990, cuando emigré de un campo de refugiados políticos en Turquía a Estados Unidos, trabajando como ingeniero de software para Honeywell Inc., en Phoenix, estado de Arizona, mis compañeros de trabajo estadounidenses me aconsejaron que hiciera teorías que tuvieran *aplicaciones prácticas*, no teorías puras y abstracciones de tipo "*art pour art*".

5. Razón Teórica de la Forma No Estándar de la Lógica Neutrosófica

La única razón por la que agregué la forma no estándar a la lógica neutrosófica (y de manera similar al conjunto neutrosófico y la probabilidad) fue para hacer una distinción entre la *Verdad Relativa* (que es la verdad en algunos Mundos, según Leibniz) y la *Verdad Absoluta* (que es la verdad en todos los Mundos posibles, según Leibniz también) que se dan en la filosofía.

Otra posible razón puede ser cuando los grados neutrosóficos de verdad, indeterminación o falsedad se determinan infinitesimalmente, por ejemplo, un valor infinitesimalmente mayor que 0,8 (o 0,8+), o infinitesimalmente menor que 0,8 (o -0,8). Pero estos pueden superarse fácilmente usando aproximadamente valores neutrosóficos de intervalo y dependiendo de la precisión deseada, por ejemplo (0.80, 0.81) y (0.79, 0.80) respectivamente.

Quería que la lógica neutrosófica fuera lo más general posible [6], extendiendo todas las lógicas anteriores (booleana, difusa, lógica difusa intuicionista, lógica intuicionista, lógica paraconsistente, dialetismo), y que fuera capaz de tratar con todo tipo de proposiciones lógicas. (incluyendo paradojas, proposiciones sin sentido, etc.).

Es por eso que en 2013 extendí la Lógica Neutrosófica a la Lógica Neutrosófica Refinada [desde las generalizaciones de la lógica booleana de 2 valores a la lógica difusa, también desde la lógica de valores de 3 símbolos de Kleene y Lukasiewicz y Bochvar o la lógica de valores de 4 símbolos de Belnap a la Lógica neutrosófica refinada más general de valor n-símbolo o n-numérico, para cualquier número entero $n \geq 1$], la más grande hasta ahora, cuando algunos o todos los componentes neutrosóficos T, I, F son divididos/refinados respectivamente en subcomponentes neutrosóficos: T_1, T_2, …; I_1, I_2, …; F_1, F_2, …; que se son deducidos de nuestra vida cotidiana [3].

6. Del movimiento Paradoxista a la Neutrosofía – generalización de la Dialéctica

Empecé primero con el *Paradoxismo* (que fundé en la década de 1980 como un movimiento basado en antítesis, antinomias, paradojas, contradicciones en la literatura, las artes y las ciencias), luego introduje la Neutrosofía (como generalización de la Dialéctica (estudiada por Hegel y Marx) y del Yin Yang (Filosofía China Antigua), la neutrosofía es una rama de la filosofía que estudia la dinámica de las tríadas, inspiradas en nuestra vida cotidiana, tríadas que tienen la forma:

<*A*>, su opuesto <antiA>, y sus neutros <neutA>,

donde <A> es cualquier elemento o entidad [4].

(Por supuesto, solo tomamos en consideración aquellas tríadas que tienen sentido en nuestro mundo real y científico).

El valor neutrosófico de la Verdad Relativa se marcó como 1, mientras que el valor neutrosófico de la Verdad Absoluta se marcó como 1^+ (un poco más grande que el valor de la Verdad Relativa):

$1^+ >_N 1$, donde $>_N$ es una desigualdad no estándar, lo que significa que 1^+ es mayor que 1 de manera no estándar.

De manera similar para la Falsedad / Indeterminación Relativa (que es falsedad/indeterminación en algunos Mundos), y la Falsedad / Indeterminación Absoluta (que es falsedad/indeterminación en todos los Mundos posibles).

7. Introducción al Análisis No Estándar [15, 16]

Un *número infinitesimal* es un número ε tal que su valor absoluto $|\varepsilon| < 1/n$, para cualquier número entero positivo no nulo *n*. Un infinitesimal está cerca de cero y es tan pequeño que no se puede medir.

El infinitesimal es un número más pequeño, en valor absoluto, que cualquier cosa positiva distinta de cero.

Los infinitesimales se usan en el cálculo, pero se interpretan como pequeños números reales.

Un número infinito (ω) es un número mayor que cualquier cosa:

$1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ (para cualquier término de número finito)

Los infinitos son recíprocos de infinitesimales.

El conjunto de los *hiperreales* (*reales no estándar*), denotados como R^*, es la extensión del conjunto de los números reales, denotados como *R*, y comprende los infinitesimales y los infinitos, que pueden representarse en la *recta numérica hiperreal*

$1/\varepsilon = \omega/1$.

El conjunto de hiperreales satisface el *principio de transferencia*, que establece que las proposiciones de primer orden en *R* son válidas también en R^* [según el análisis No Estándar Clásico]:

"'Cualquier cosa demostrable sobre una superestructura *V* dada pasando a una ampliación no estándar *V de V también es demostrable sin hacerlo, y viceversa'. Es un resultado del teorema de Łoś y el teorema de completitud para la lógica de predicados de primer orden" [16].

Una mónada (halo) de un elemento a ∊ R*, denotada por *μ(a)*, es un subconjunto de números infinitesimalmente cercanos a *a*.

Denotemos por R_+^* al conjunto de números hiperreales positivos distintos de cero.

7.1. Primera extensión del Análisis No Estándar

Consideremos la mónada izquierda y la mónada derecha; luego recordemos la *bínada perforada* (Smarandache [5]) introducida en 1998:

Mónada izquierda {que denotamos, por simplicidad, por (-*a*)} se define como:

μ(-a) = (-a) = {a - x, x ∊R+ | x es infinitesimal}.*

Mónada derecha {que denotamos, por simplicidad, por (*a*+)} se define como:

μ(a+) = (a+) = {a + x, x ∊R+ | x es infinitesimal}.*

La *Bínada perforada* {que denotamos, por simplicidad, con (-*a*+)} se define como:

μ(-a+) = (-a+) = {a - x, x ∊R+ | x es infinitesimal} ∪{a + x, x ∊R+* | x es infinitesimal}*

= {a - x, x ∊R | x es infinitesimal positivo o negativo}.*

7.1. Segunda extensión del Análisis No Estándar [23]

Por la necesidad de hacer cálculos que serán usados en lógica neutrosófica no estándar para calcular los operadores lógicos neutrosóficos no estándar (conjunción, disyunción, negación, implicación, equivalencia) y para tener el Conjunto MoBiNad Real No Estándar cerrado bajo operaciones aritméticas, extendemos por ahora: la mónada izquierda a la Mónada Izquierda Cerrada a la Derecha, la mónada derecha a la Mónada Derecha Cerrada a la Izquierda; y la Bínada Perforada a la Bínada no perforada, lo que se define de la siguiente manera (Smarandache, 2018-2019):

- Mónada Izquierda Cerrada a la Derecha

  $\mu\left(\overset{-0}{a}\right)=\left(\overset{-0}{a}\right)=\{a-x \mid x=0,$ o $x\in R_+^*$ *y x es infinitesimal*$\}$ = $\mu({}^-a)\cup\{a\}$.

  Y por $x = \overset{-0}{a}$ entendemos lo **hiperreal** $x = a-\varepsilon$, o *x* = *a*, donde ε es un infinitesimal positivo. Entonces, x no se conoce claramente, $x\in\{a-\varepsilon, a\}$.

- Mónada Derecha Cerrada a la Izquierda

  $\mu\left(\overset{0+}{a}\right)=\left(\overset{0+}{a}\right)=\{a+x \mid x=0,$ o $x\in R_+^*$ *y x es infinitesimal*$\}$ = $\mu(a^+)\cup\{a\}$.

  Y por $x = \overset{-0}{a}$ entendemos lo **hiperreal** $x = a+\varepsilon$, o x = a, donde ε es un infinitesimal positivo. Entonces, x no se conoce claramente, $x\in\{a+\varepsilon, a\}$.

- Bínada no perforada

  $\mu\left(\overset{-0+}{a}\right)=\left(\overset{-0+}{a}\right)=\{a+x \mid x=0,$ o $x\in R^*$ *donde x es un infinitesimal positivo o negativo*$\}$ =

  $=\mu\left({}^-a\right)\cup\mu\left(a^+\right)\cup\{a\} = ({}^-a)\cup(a^+)\cup\{a\}$.

  Y por $x = \overset{-0+}{a}$ entendemos lo **hiperreal** $x = a-\varepsilon$, o x = a, o $x = a+\varepsilon$, dónde ε es un infinitesimal positivo. Entonces, x no se conoce claramente, $x\in\{a-\varepsilon, a, a+\varepsilon\}$.

La mónada izquierda, la mónada izquierda cerrada a la derecha, la mónada derecha, la mónada derecha cerrada a la izquierda, la bínada perforada y la bínada no perforada son subconjuntos de R*, mientras que los hiperreales anteriores son números de R*.

Definamos un orden parcial en R*.

8. Desigualdades Estrictas Neutrosóficas

Recordemos la desigualdad estricta neutrosófica que se necesita para las desigualdades de números no estándar.

Sean α, β elementos de un conjunto M parcialmente ordenado.

Hemos definido la desigualdad estricta neutrosófica

$\alpha >_N \beta$

y se lee como

"α es neutrosóficamente mayor que β"

si

α en general es mayor que β,

o α *es aproximadamente mayor que* β,

o *está sujeto a alguna indeterminación* (relación de orden desconocida o poco clara entre α y β) *o sujeto a alguna contradicción* (situación en la que α es menor o igual que β) α *es mayor que* β.

Significa que en la mayoría de los casos, en el conjunto M, α *es mayor que* β.

Y de manera similar para la desigualdad estricta neutrosófica opuesta $\alpha <_N \beta$.

9. Igualdad Neutrosófica

Hemos definido la desigualdad neutrosófica

$\alpha =_N \beta$

y se lee como

"α es neutrosóficamente igual a β"

si

α en general es igual a β,

o α *es aproximadamente igual a* β,

o *está sujeto a alguna indeterminación* (relación de orden desconocida o poco clara entre α y β) o *sujeto a alguna contradicción* (situación en la que α no es igual a β) α *es igual a* β.

Significa que en la mayoría de los casos, en el conjunto M, α *es igual a* β.

10 Desigualdades Neutrosóficas (No Estrictas)

Combinando las desigualdades estrictas neutrosóficas con la igualdad neutrosófica, obtenemos las desigualdades neutrosóficas $\geq_N$ y $\leq_N$.

Sean α, β elementos de un conjunto M parcialmente ordenado.

La *desigualdad neutrosófica (no estricta)*

$\alpha \geq_N \beta$

y se lee como

"α *es neutrosóficamente mayor o igual que* β"

si

α en general es mayor o igual que β,

o α *es aproximadamente mayor o igual que* β,

o *está sujeto a alguna indeterminación* (relación de orden desconocida o poco clara entre α y β) o *sujeto a alguna contradicción* (situación en la que α es menor que β) α *es mayor o igual que* β.

Significa que en la mayoría de los casos, en el conjunto M, α *es mayor o igual que* β.

Y de manera similar para la desigualdad neutrosófica (no estricta) opuesta $\alpha \leq_N \beta$.

11 Conjunto Ordenado Neutrosóficamente

Sea M un conjunto. (M, <N) se denomina conjunto neutrosóficamente ordenado si:
 α, β ∈ M, se tiene: o α $<_N$ β, o α $=_N$ β, o α $>_N$ β.

12 Definición de Parte Estándar y Parte Infinitesimal de un Número HiperReal

Para cada hiperreal (número) $h \in R^*$ uno define su <u>parte estándar</u>
st(h) sea la parte real (estándar) de h, $st(h) \in R$,
y su <u>parte infinitesimal</u>, que puede ser positiva $(+\varepsilon)$, o cero (0), o negativa $(-\varepsilon)$, y cualquier combinación de dos o tres de ellos en el caso de Hiperreales Neutrosóficos que tienen valores alternativos (indeterminados) como se ve a continuación, denotados como $in(h) \in R^*$.

Luego $h = st(h) + in(h)$.

Dos números hiperreales h_1 y h_2 son iguales si:
$st(h_1) = st(h_2)$ y $in(h_1) = in(h_2)$.

- Ejemplos

Sea ε un infinitesimal positivo, y los números hiperreales:

$h_1 = 4 - \varepsilon \in ({}^{-}4)$

$h_2 = 4 + 0 \overset{def}{=} \overset{0}{4} \in R$

$h_3 = 4 + \varepsilon \in (4^{+})$

$h_4 = 4 - \{\varepsilon,$ o $0\}$ = {4-ε , o 4-0} = {4-ε , o 4}$\in \begin{pmatrix} {}^{-0} \\ 4 \end{pmatrix}$

$h_5 = 4 + \{0,$ o ε } = {4+0, o 4+ε } = {4, o 4+ε }$\in \begin{pmatrix} {}^{0+} \\ 4 \end{pmatrix}$

$h_6 = 4 + \{-\varepsilon,$ o ε } = {4-ε , o 4+ε }$\in \begin{pmatrix} {}^{-+} \\ 4 \end{pmatrix}$

$h_7 = 4 + \{-\varepsilon,$ o 0, o ε } = {4-ε , o 4+0, o 4+ε }= {4-ε , o 4, o 4+ε }$\in \begin{pmatrix} {}^{-0+} \\ 4 \end{pmatrix}$

Entonces, sus partes estándar son todas iguales:

$st(h_1) = st(h_2) = ... = st(h_7) = 4$

Mientras que sus partes infinitesimales son diferentes:

$in(h_1) = -\varepsilon$

$in(h_2) = 0$

$in(h_3) = \varepsilon$

13 Números Hiperreales Neutrosóficos

Los siguientes casos son indeterminados, como en la neutrosofía, por eso se les llama *Hiperreales neutrosóficos*, presentados ahora por primera vez:

$in(h_4) = \{-\varepsilon$, o 0}; también se puede escribir que $in(h_4) \in \{-\varepsilon, 0\}$, porque no estamos seguros si
$in(h_4) = -\varepsilon$, o $in(h_4) = 0$.

$in(h_5) = \{\varepsilon$, o 0}; también se puede escribir que $in(h_4) \in \{\varepsilon, 0\}$.

$in(h_6) = \{-\varepsilon,$ o ε }, o $in(h_6) \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$.

$in(h_7) = \{-\varepsilon,$ o 0, o ε }, o $in(h_6) \in \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\}$.

14 Orden Parcial No Estándar De Hiperreales

Sean h_1 y h_2 números hiperreales. Entonces $h_1 <_N h_2$ si:

ya sea $st(h_1) < st(h_2)$, o $st(h_1) = st(h_2)$ e $in(h_1) <_N in(h_2)$.

Por $in(h_1)$ entendemos todos los infinitesimales posibles de h_1, y de manera similar para $in(h_2)$.

Esto hace un orden parcial sobre el conjunto de hiperreales R^*, debido a que los Hiperreales Neutrosóficos tienen partes infinitesimales indeterminadas y no siempre se pueden ordenar.

15. Pertenencia de un número Hiperreal a un Conjunto No Estándar

Definimos por primera vez la pertenencia de un número hiperreal *(h)* a un subconjunto *S* de R^*, denotado como $\in_N$, o una pertenencia aproximada (desde un punto de vista Neutrosófico).

Como se ve arriba, un número hiperreal puede tener una, dos o tres partes infinitesimales, dependiendo de su forma.

Denotemos la parte estándar de *h* por $st(h)$, y sean $in(h) = in(h)_1$, $in(h)_2$, e $in(h)_3$ sus partes infinitesimales. Construimos tres números hiperreales correspondientes:

$h_1 = st(h) + in(h)_1$

$h_2 = st(h) + in(h)_2$

$h_3 = st(h) + in(h)_3$

si los tres $h_1, h_2, h_3 \in_N S$, entonces $h \in_N S$. Si al menos uno no pertenece a S, entonces $h \notin_N S$.

(En el caso de que *h* tenga solo uno o dos infinitesimales posibles, por supuesto que solo tomamos esos).

La pertenencia de un número hiperreal a un conjunto no estándar puede extenderse más tarde si se construyen nuevas formas de Hiperreales Neutrosóficos.

16. Notaciones y Aproximaciones

Se requiere una aproximación con la precisión deseada, ya que los hiperreales, mónadas y bínadas no existen en nuestro mundo real. Son solo conceptos muy abstractos construidos en algún espacio matemático imaginario.

Es por eso que deben ser aproximados por pequeños conjuntos reales.

Como ejemplo, supongamos que el valor de verdad (T) de una proposición (P), en la lógica proposicional, es el hiperreal $T(P) = 0.7^+$ que significa, en análisis no estándar, según Imamura [22]:

> *"La interpretación de $T(P) = 0.7^+$ (mónada derecha de 0.7 en su terminología):*
> *1. el valor de verdad de P es estrictamente mayor e infinitamente cercano a 0,7 (pero se desconoce su valor exacto);*
> *2. el valor de verdad de P puede ser estrictamente mayor e infinitamente cercano a 0,7;*
> *3. el valor de verdad de P toma todos los hiperreales estrictamente mayores que e infinitamente cercanos a 0,7 simultáneamente."*

Probamos por reducción al absurdo que tal número no existe en nuestro mundo real. Supongamos que 0.7+ = w. Entonces w > 0.7, pero en el conjunto de los números reales continuos, en el intervalo (0.7, w] existe un número v tal que 0.7 < v < w, por lo tanto, v está más cerca de 0.7 que w, y por lo tanto w no está infinitamente cerca de 0.7. Contradicción que incluso Imamura reconoce acerca de 0.7+ que "su valor es desconocido".

Y debido a que no existen en nuestro mundo real, necesitamos aproximarlos/convertirlos con una precisión dada al mundo real, por lo tanto, en lugar de 0.7+ podemos tomar por ejemplo el intervalo diminuto (0.7, 0.7001) con cuatro decimales, o (0,7, 0,7000001), etc.

De la misma manera se puede probar que, para cualquier número real $a \in R$, su mónada izquierda, mónada izquierda cerrada a la derecha, mónada derecha, mónada derecha cerrada a la izquierda, bínada perforada y bínada no perforada no existen en nuestro mundo real. Son solo conceptos abstractos disponibles en espacios matemáticos abstractos/imaginarios.

17 Intervalo de Unidad No Estándar

Imamura cita mi trabajo:

> *"por "$-a$" se entiende una mónada, es decir, un conjunto de números hiperreales en análisis no estándar:*
> *$(-a) = \{ a - x \in R_* \mid x$ es infinitesimal $\}$, y de manera similar "b+" es una hipermónada:*

(b+) = { b + X $\in R_*$ *| x es infinitesimal}. ([5] pág. 141; [6] pág. 9)"*

Pero estos son inexactos, porque mis definiciones exactas de mónadas, desde mi primera publicación neutrosófica mundial de 1998 {ver [5], página 9; y [6], páginas 385 - 386}, fueron:

"(−a) = { a – x: x $\in R_+{}^*$ *| x es infinitesimal }, y de manera similar "b+" es una hipermónada:*

(b+) = { b + x: x $\in R+*$ *| x es infinitesimal }"*

Imamura dice que:

"Las definiciones correctas son las siguientes:

(−a) = { un − X $\in R*$ *| x es infinitesimal positivo },*

(segundo+) = { segundo + X $\in R*$ *| x es infinitesimal positivo }."*

No tuve la oportunidad de ver cómo se imprimió mi artículo en *Actas de la 3ª Conferencia de la Sociedad Europea de Lógica y Tecnología Difusa* [7], del que habla Imamura, tal vez hubo algunos errores tipográficos, pero Imamura puede verificar el *Lógica de valores múltiples / Una revista internacional* [6], publicado en Inglaterra en 2002 (antes de la Conferencia Europea de 2003, que cita Imamura) por la prestigiosa Taylor & Francis Group Publishers, y claramente se ve que es: $\boldsymbol{R}_+{}^*$ (por lo que, x es un infinitesimal positivo en las fórmulas anteriores), por lo tanto no hay error.

Luego Imamura continúa:

"Ambigüedad de la definición del intervalo unitario no estándar. Smarandache no dio ninguna definición explícita de la notación]−0, 1+[en [5] (o la notación ⊮−0, 1+⊣ en [6]). solo dijo:

Entonces, llamamos a] −0, 1+ [un intervalo unitario no estándar. Obviamente, el 0 y el 1, y análogamente los números no estándar infinitamente pequeños pero menores que 0 o infinitamente pequeños pero mayores que 1, pertenecen al intervalo unitario no estándar. ([5] p. 141; [6] p. 9)."

Con respecto a las notaciones que usé para los intervalos no estándar, como ⊩ ⊣ o] [, era imperativo emplear notaciones que fueran diferentes de los intervalos clásicos [ ] o ( ), ya que los extremos del intervalo unitario no estándar no estaban claros, eran vagos con respecto al conjunto real.

Pensé que se entendía fácilmente que:

$]^-0, 1^+[\;\; = (^-0) \cup [0, 1] \cup (1^+).$

O, usando las desigualdades neutrosóficas anteriores, podemos escribir:

$]^-0, 1^+[\;\; = \{x \in R^*, {}^-0 \leq_N x \leq_N 1^+\}.$

Imamura dice que:

"Aquí $^-0$ *y* 1^+ *son números reales particulares definidos en el párrafo anterior:*

−0 = 0−ε y 1+ = 1+ ε, donde ε es un infinitesimal no negativo fijo".

Esto no es cierto, nunca dije que "ε es un infinitesimal *fijo* no negativo", ε no era fijo, dije que para cualquier número real *a* y *b* {ver nuevamente [5], página 9; y [6], páginas 385 - 386}:

"(^-a*) = { a – x: x* $\in R_+{}^*$ *| x es infinitesimal }, (*b^+*) = { b + x: x* $\in R_+{}^*$ *| x es infinitesimal }".*

Por lo tanto, una vez que reemplazamos *a = 0* y *b = 1*, obtenemos:

$$(^-0) = \{ 0 - x: x \in R_+{}^* \mid x \text{ es infinitesimal} \},$$

$$(1^+) = \{ 1 + x: x \in R_+{}^* \mid x \text{ es infinitesimal} \}.$$

Pensar fuera de la caja, inspirado en el mundo real, fue la primera intención, es decir, permitir que los valores de los componentes neutrosóficos (verdad/indeterminación/falsedad) estén fuera del intervalo real unitario clásico (estándar) [0, 1] utilizado en todas las lógicas anteriores (booleana, de valores múltiples, etc.) si es necesario en las aplicaciones, por lo que los valores de los componentes neutrosóficos < 0 y > 1 tuvieron que ocurrir debido a las cosas Relativas / Absolutas, con:

$$^-0 <_N 0 \quad \text{y} \quad 1^+ >_N 1.$$

Más tarde, en 2007, encontré multitud de casos y aplicaciones reales en la Lógica y el Conjunto Neutrosófico Estándar (por lo tanto, sin usar la Lógica y el Conjunto Neutrosófico No Estándar), y así fue posible la extensión del conjunto neutrosófico a *Overset Neutrosófico (cuando algunos el componente neutrosófico es > 1), y a Underset Neutrosófico (cuando algún componente neutrosófico es < 0), y a Offset Neutrosófico (cuando algunos componentes neutrosóficos están fuera del intervalo [0, 1], es decir, algún componente neutrosófico > 1 y algún componente neutrosófico < 0). Luego, extensiones similares a Over/Under/Off Lógica, Medida, Probabilidad, Estadística Neutrosóficas respectivamente, etc. [8, 17, 18, 19]*, extendiendo el intervalo unitario [0, 1] a

$$[\Psi, \Omega], \text{ con } \Psi \leq 0 < 1 \leq \Omega,$$

donde Ψ, Ω son números reales estándar.

Imamura dice, con respecto a la definición de lógica neutrosófica que:

“En esta lógica, cada proposición toma un valor de la forma (T, I, F), donde T, I, F son subconjuntos del intervalo unitario no estándar]−0, 1+[y representan todos los valores posibles de Veracidad, Indeterminación y Falsedad de la proposición, respectivamente.”

Desafortunadamente, esto no es exactamente como lo definí.

En mi primer libro {ver [5], p. 12; o [6] pp. 386 – 387} se afirma:

“Sean T, I, F subconjuntos reales estándar o no estándar de]-0, 1+[“

lo que significa que T, I, F también pueden ser "estándar real", no solo no estándar real.

En *The Free Online Dictionary of Computing*, 1999-07-29, editado por Denis Howe de Inglaterra, está escrito:

Lógica Neutrosófica:

<lógica> (O "lógica de Smarandache") Una generalización de la lógica difusa basada en la Neutrosofía. Una proposición es t verdadera, i indeterminada y f falsa, donde t, i y f son valores reales de los rangos T, I, F, sin restricción sobre T, I, F o la suma

n = t + i + f.

Por lo tanto, la lógica neutrosófica generaliza:

- *lógica intuicionista, que apoya teorías incompletas (para 0 < n < 100, 0 ≤ t,i,f ≤ 100);*
- *lógica difusa (para n = 100 e i = 0, y 0 ≤ t,i,f ≤ 100);*
- *Lógica booleana (para n=100 e i = 0, con t,f 0 o 100);*
- *lógica multivaluada (para 0 ≤ t,i,f ≤ 100);*
- *lógica paraconsistente (para n > 100, con t,f < 100);*
- *dialeteísmo, que dice que algunas contradicciones son verdaderas (para t = f = 100 e i = 0; algunas paradojas se pueden denotar de esta manera).*

En comparación con todas las demás lógicas, la lógica neutrosófica introduce un porcentaje de "indeterminación", debido a parámetros inesperados ocultos en algunas proposiciones. También permite que cada componente t, i, f "hierva sobre" 100 o "congele" por debajo de 0. Por ejemplo, en algunas tautologías t > 100, llamado "sobreverdad".

["Neutrosofía / Probabilidad, conjunto y lógica neutrosófica", F. Smarandache, American Research Press, 1998].

Como dijo Denis Howe en 1999, los componentes neutrosóficos t, i, f son “*valores reales de los rangos T, I, F*”, no valores no estándar o intervalos no estándar. Y esto se debió a que los no estándar no eran importantes para la lógica neutrosófica (lo Relativo/Absoluto no jugaba ningún papel en las aplicaciones tecnológicas y científicas y en las teorías futuras).

18 Notaciones Formales

En mi primera versión del artículo, usé notaciones informales. Vamos a verlas en una versión mejorada.

Los números hiperreales se representan sin paréntesis ( ) alrededor de ellos:

$$^{-}a = \overset{-}{a} = a - \varepsilon$$

$\overset{0}{a} = a + 0$, que coincide con el número real *a*.

$$a^{+} = \overset{+}{a} = a + \varepsilon$$

Los Números Hiperreales Neutrosóficos (que son indeterminados, alternativos) se representan sin llaves, o con llaves $\{\,\}$ alrededor de ellos para conjuntos discretos que pueden tener uno, dos o tres elementos:

$\overset{-0}{a} = a - \varepsilon$, o un + 0 = $\{a - \varepsilon, \text{o } a + 0\}$

$\overset{+0}{a} = a + \varepsilon$, o un + 0 = $\{a + \varepsilon, \text{o } a + 0\}$

$\overset{-+}{a} = a-\varepsilon$, o $a+\varepsilon$ = $\{a-\varepsilon$, o $a+\varepsilon\}$

$\overset{-0+}{a} = a-\varepsilon$, o un + 0, o $a+\varepsilon$ = $\{a-\varepsilon$, o $a+0$, o $a+\varepsilon\}$

Para las mónadas y bínadas, uno simplemente agrega los paréntesis alrededor de ellas:

Conjuntos de mónadas: $a = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, ({}^{-}a) = \begin{pmatrix} - \\ a \end{pmatrix}, (a^{+}) = \begin{pmatrix} + \\ a \end{pmatrix}$

Conjuntos de bínadas: $\begin{pmatrix} -0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0+ \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -+ \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0+ \\ a \end{pmatrix}$

19 Definición Mejorada de Intervalo de Unidad No Estándar

- **Fórmula del Intervalo de Unidad No Estándar**

$]^{-}0,1^{+}[\equiv]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[=\{a \in R^{*}, 0 \le st(a) \le 1\} = \{\overset{-}{a},\overset{-0}{a},\overset{0}{a},\overset{0+}{a},\overset{-+}{a},\overset{-0+}{a},\overset{+}{a}, a \in [0,1]\}$.

Prueba de la fórmula anterior

Para $0 < st(a) < 1$ no importa lo que sea *in(a)*, porque $st(a)+in(a) \in_N]0,1[$, siendo este un intervalo no estándar.

No es necesario establecer ninguna restricción en (a) en este caso, ya que $\overset{-}{a}$ es el hiperreal más pequeño, mientras que $\overset{+}{a}$ es el hiperreal más grande del conjunto de siete tipos de hiperreales enumerados anteriormente.

Sea ε un infinitesimal positivo, $\varepsilon \in R^{*}$.

Sea a = 0, y $\overset{m}{0}$ cualquier número hiperreal posible asociado a 0.

para *st(*$\overset{m}{0}$ *) = 0*, el *in(*$\overset{m}{0}$) más pequeño puede ser $-\varepsilon$, de donde $0-\varepsilon = \overset{-}{0} \in_N]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$;

y si *in(*$\overset{m}{0}$) es mayor (es decir, 0, o $+\varepsilon$), por supuesto $0+0 = \overset{0}{0} \in_N]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$ y $0+\varepsilon = \overset{+}{0} \in_N]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$.

Así como también cualquier otra versión no estándar del número 0, como por ejemplo: $\overset{-0}{0}, \overset{0+}{0}, \overset{-+}{0}, \overset{-0+}{0} \in_N]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$.

Sea a = 1, y $\overset{m}{1}$ cualquier posible número hiperreal asociado a 1.

para st($\overset{m}{1}$ *) = 1*, el *in (*$\overset{m}{1}$*)* más grande puede ser $+\varepsilon$, de donde $1+\varepsilon = \overset{+}{1} \in_N]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$,

y si *in(*$\overset{m}{1}$*)* es menor (es decir, 0, o $-\varepsilon$), por supuesto $1+0 = \overset{0}{1} \in_N]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$ y $1-\varepsilon = \overset{-}{1} \in_N]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$.

Así como también cualquier otra versión no estándar del número 1, como por ejemplo: $\overset{-0}{1}, \overset{0+}{1}, \overset{-+}{1}, \overset{-0+}{1} \in_N]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$.

Observación:

Esta fórmula debe actualizarse si se introducen nuevos tipos de hiperreales / mónadas / bínadas

- Ejemplo de Inclusión de Conjuntos No Estándar

$]\overset{+}{0},\overset{-}{1}[\subset]0,1[\subset]\overset{-}{0},\overset{+}{1}[$

- Orden Parcial en el Conjunto de Hiperreales

Sea $a \in R$ un número real. Entonces no hay orden entre *a* y $\overset{-+}{a}$, ni entre *a* y $\overset{-0+}{a}$.
Algunas desigualdades no estándar que involucran hiperreales:

$\overset{-}{a} <_N \overset{0}{a} <_N \overset{+}{a}$
$\overset{-0}{a} \leq_N \overset{-+}{a} \leq_N \overset{0+}{a} \leq_N \overset{+}{a}$
$\overset{-}{a} \leq_N \overset{-0}{a} \leq_N \overset{-+}{a} \leq_N \overset{-0+}{a}$
$\overset{-}{a} \leq_N \overset{-+}{a} \leq_N \overset{+}{a}$

- Ejemplos de Intervalos No Estándar

  $]\overset{-}{a}, \overset{0}{a}[= \{\overset{-}{a}, \overset{0}{a}, \overset{-0}{a}\}$

  $]\overset{-}{a}, \overset{+}{a}[= \{\overset{-}{a}, \overset{0}{a}, \overset{+}{a}, \overset{-0}{a}, \overset{0+}{a}, \overset{-+}{a}, \overset{-0+}{a}\}$

20 Definición mejorada de Lógica Neutrosófica No Estándar

En el cálculo proposicional no estándar, una proposición P tiene grados de verdad (T), indeterminación (I) y falsedad (F), tales que T, I, F son subconjuntos no estándar del intervalo unitario no estándar $]^{-}0,1^{+}[$, o $T, I, F \subseteq_N]^{-}0,1^{+}[$.

Como caso particular se tiene cuando T, I, F son números hiperreales o neutrosóficos hiperreales del intervalo unitario no estándar $]^{-}0,1^{+}[$, o $T, I, F \in_N]^{-}0,1^{+}[$.

21 Operadores Neutrosóficos No Estándar

Dado que el Conjunto Hiperreal R^* no tiene un orden total, en general no podemos usar conectivos (conjunción no estándar, disyunción no estándar, negación no estándar, implicación no estándar, equivalencia no estándar, etc.) que impliquen las operaciones de min/max o inf/sup, pero podemos usar conectivos que involucran operaciones de suma, resta, multiplicación escalar, multiplicación, potencia y división que tratan con subconjuntos no estándar o hiperreales del intervalo unitario no estándar $]^{-}0,1^{+}[$. Vea a continuación las operaciones con hiperreales, mónadas y bínadas.

Para cualquier subconjunto no estándar o número hiperreal, $T_1, I_1, F_1, T_2, I_2, F_2$, del intervalo unitario no estándar $]^{-}0,1^{+}[$ se tiene:

- Conjunción Neutrosófica No Estándar

  $(T_1, I_1, F_1) \wedge_N (T_2, I_2, F_2) = (T_1 \wedge_F T_2, I_1 \vee_F I_2, F_1 \vee_F F_2)$

- Disyunción Neutrosófica No Estándar

  $(T_1, I_1, F_1) \vee_N (T_2, I_2, F_2) = (T_1 \vee_F T_2, I_1 \wedge_F I_2, F_1 \wedge_F F_2)$

- Negación Neutrosófica No Estándar

  $\neg_N (T_1, I_1, F_1) = (F_1, 1^{+} - I_1, T_1)$

- Implicación Neutrosófica No Estándar

  $(T_1, I_1, F_1) \rightarrow_N (T_2, I_2, F_2) = (F_1, 1^{+} - I_1, T_1) \vee_N (T_2, I_2, F_2) = (F_1 \vee_F T_2, (1^{+} - I_1) \wedge_F I_2, T_1 \wedge_F F_2)$

- Equivalencia Neutrosófica No Estándar

  $(T_1, I_1, F_1) \leftrightarrow_N (T_2, I_2, F_2)$ *significa* $(T_1, I_1, F_1) \rightarrow_N (T_2, I_2, F_2)$ *y* $(T_2, I_2, F_2) \rightarrow_N (T_1, I_1, F_1)$

  Ejemplo de Conjunción Difusa:

  $A \wedge_F B = AB$

Ejemplo de Disyunción Difusa:
$A \vee_F B = A + B - AB$

Más explicaciones sobre ellos siguen a continuación.

22 Aproximaciones de los operadores lógicos/conectivos no estándar ∧, ∨,→, ↔

Las críticas de Imamura a mi primera definición de los operadores neutrosóficos son historia desde hace más de un cuarto de siglo. Él está atacando mi trabajo con "errores... errores... paradojas", etc., sin embargo, mis primeros operadores no eran una especie de errores, sino aproximaciones menos precisas de la agregación con respecto al componente de falsedad (F), pero no con respecto a la verdad (T) e indeterminación (I), las que fueron correctas.

Las representaciones de conjuntos de mónadas y bínadas por intervalos diminutos también fueron aproximaciones ($\cong$) con una precisión deseada (ε > 0), desde un punto de vista clásico (real), para el número real $a \in R$:

$$\left({}^{-}a\right) = \left(\overset{-}{a}\right) \cong (a-\varepsilon, a)$$

$$\left(a^{+}\right) = \left(\overset{+}{a}\right) \cong (a, a+\varepsilon)$$

$$\left({}^{-}a^{+}\right) = \left(\overset{-+}{a}\right) \cong (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

$$\left(\overset{-0}{a}\right) \cong (a-\varepsilon, a]$$

$$\left(\overset{0+}{a}\right) \cong [a, a+\varepsilon)$$

$$\left(\overset{-0+}{a}\right) \cong (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

Y por abuso del lenguaje se denota:

$$\left(\overset{0}{a}\right) = a = [a, a]$$

Las representaciones de números hiperreales ($h = st(h) + in(h)$) por números diminutos cercanos a su parte estándar ($st(h)$) también fueron aproximaciones ($\cong$) con la precisión deseada (ε > 0), desde un punto de vista clásico (real):

$$\overset{-}{a} \cong a-\varepsilon$$

$$\overset{+}{a} \cong a+\varepsilon$$

$\overset{-+}{a} \cong a-\varepsilon$, o $a+\varepsilon$

$\overset{-0}{a} \cong a-\varepsilon$, o 0

$\overset{0+}{a} \cong 0$, o $a+\varepsilon$

$\overset{-0+}{a} \cong a-\varepsilon$, o 0, o $a+\varepsilon$

$$\overset{0}{a} = a$$

Todas las agregaciones en lógica difusa y extensiones (que incluye la neutrosófica) y conjuntos difusos son *aproximaciones* (no exactas, como en la lógica clásica), y dependen de cada aplicación específica y de los expertos. Algunos expertos/autores prefieren unos, otros prefieren operadores diferentes.

NO ES UN OPERADOR ÚNICO de conjunción difusa/neutrosófica, como lo es en la lógica clásica, sino una clase de muchos operadores neutrosóficos, que se denomina t-norma neutrosófica; de manera similar para la disyunción difusa/neutrosófica, denominada t-conorma neutrosófica, negación difusa/neutrosófica, implicación difusa/neutrosófica, equivalencia difusa/neutrosófica, etc.

Todos los operadores lógicos difusos, intuicionistas difusos, neutrosóficos (y otros de extensión difusa) son *aproximaciones inferenciales*, que no están escritas en piedra. Se mejoran de una aplicación a otra.

23 Operaciones con mónadas, bínadas e hiperreales

Para operar sobre ellos, es más fácil considerar sus aproximaciones reales a intervalos diminutos para las mónadas y bínadas, o a números reales cercanos a la forma estándar de los números hiperreales, como en el apartado anterior.

Para mónadas y bínadas:

$\left(\overset{m_1,m_2,m_3}{a}\right)\circ\left(\overset{m_1,m_2,m_3}{b}\right)=\left(\overset{x_1,x_2,x_3}{a\circ b}\right)$, dónde $\circ$ es cualquiera de las operaciones aritméticas bien definidas (suma, resta, multiplicación, multiplicación escalar, potencia, raíz, división).

Dónde $m_1, m_2, m_3 \in \{-,0,+\}$, pero hay casos en que algunas o todas las partes infinitesimales m_1, m_2, m_3 puede descartarse para a o para b o para ambos, si uno tiene solo mónadas, o mónadas cerradas, o bínadas perforadas. Si tal m_i se descarta, lo consideramos como $m_i = \phi$, para $i \in \{1,2,3\}$.

Siempre hacemos la operación clásica. $a \circ b$, pero el problema es: ¿cuáles son los infinitesimales correspondientes al resultado $\left(\overset{x_1,x_2,x_3}{a\circ b}\right)$, es decir, ¿cuáles son $x_1, x_2, x_3 = ?$

por supuesto los infinitesimales $x_1, x_2, x_3 \in \{-,0,+\}$, que representan respectivamente la mónada izquierda de $a \circ b$, solo el número real $a \circ b$, o la mónada derecha de $a \circ b$. Para encontrarlos, necesitamos pasar de *R** a *R* usando pequeñas aproximaciones.

Se obtiene el mismo resultado para **números hiperreales** que para mónadas y bínadas:

$$\overset{m_1,m_2,m_3}{a} \circ \overset{m_1,m_2,m_3}{b} = \overset{x_1,x_2,x_3}{a\circ b}$$

- Un ejemplo de Mónada-Bínada

Sea $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ números reales diminutos.

Probemos que:

$$\left(\overset{-}{a}\right)+\left(\overset{+}{b}\right)=\left(\overset{-0+}{a+b}\right)$$

Nos aproximamos a las mónadas anteriores con:

$$(a-\varepsilon_1, a)+(b, b+\varepsilon_2)=(a+b-\varepsilon_1, a+b+\varepsilon_2) \;\cong\; \left(\overset{-0+}{a+b}\right)$$

porque en el intervalo real $(a+b-\varepsilon_1, a+b+\varepsilon_2)$, se obtienen valores más pequeños que *a+b* (de ahí el – en la parte superior, que representa la 'mónada izquierda de a+b'), igual a *a+b* (de ahí el 0 en la parte superior, que representa simplemente el 'número real a +b'), y mayor que *a+b* (de ahí el + en la parte superior, que significa 'mónada derecha de a+b').

- Ejemplo numérico

$$\left(\overset{-}{2}\right)+\left(\overset{+}{3}\right)=\left(\overset{-0+}{2+3}\right)=\left(\overset{-0+}{5}\right)$$

porque $\left(\overset{-}{2}\right)+\left(\overset{+}{3}\right)\cong(2-0.1, 2)+(3, 3+0.2)=(5-0.1, 5+0.2)$, y este intervalo está un poco por debajo de 5, un poco por encima de 5 y también incluye al 5.

Para números hiperreales el resultado es similar:

$\overset{-}{a}+\overset{+}{b}=\overset{-0+}{a+b}$ porque

$\overset{-}{a}+\overset{+}{b}\cong a-\varepsilon_1+b+\varepsilon_2=a+b-\varepsilon_1+\varepsilon_2$, dónde $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ son cualquier número positivo diminuto,

por eso $a+b-\varepsilon_1+\varepsilon_2$ puede ser menor que *a*+*b*, igual a *a*+*b* o mayor que *a*+*b* eligiendo convenientemente los diminutos números positivos ε_1 y ε_2, como: $\varepsilon_1>\varepsilon_2$, o $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, o $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ respectivamente.

- Más Ejemplos de Operaciones No Estándar

$$\left(\overset{-}{a}\right)+b=\left(\overset{-}{a+b}\right)$$

$$a+\left(\overset{+}{b}\right)=\left(\overset{+}{a+b}\right)$$

$$\left(\overset{-}{a}\right)+\left(\overset{-}{b}\right)=\left(\overset{-}{a+b}\right)$$

$$\left(\overset{+}{a}\right)+\left(\overset{+}{b}\right)=\left(\overset{+}{a+b}\right)$$

$$a+\left(\overset{-+}{b}\right)+b=\left(\overset{-+}{a+b}\right)$$

$$\left(\overset{-+}{a}\right)+\left(\overset{-+}{b}\right)=\left(\overset{-0+}{a+b}\right)$$

$$\left(\overset{-}{a}\right)+\left(\overset{-+}{b}\right)=\left(\overset{-0+}{a+b}\right)$$

$$8\div\left(\overset{+}{2}\right)=\left(\overset{-}{4}\right)$$

$$8\div\left(\overset{-}{2}\right)=\left(\overset{+}{4}\right)$$

$$8\div\left(\overset{-0+}{2}\right)=\left(\overset{-0+}{4}\right)$$

$$\sqrt{\left(\overset{-}{9}\right)}=\left(\overset{-}{3}\right)$$

$$\left(\overset{-}{11}\right)^2=\left(\overset{-}{121}\right)$$

$$\left(\overset{-}{6}\right)\times\left(\overset{+}{7}\right)=\left(\overset{-0+}{42}\right)$$

$$\left(\overset{-}{10}\right)-\left(\overset{+}{4}\right)=\left(\overset{-}{6}\right)$$

$$\left(\overset{+}{10}\right)-\left(\overset{-}{4}\right)=\left(\overset{+}{6}\right)$$

Etc.

24 Operadores Neutrosóficos No Estándar (revisado)

Denotemos:

$\wedge_F$, $\wedge_N$, $\wedge_P$ representando respectivamente la conjunción difusa, la conjunción neutrosófica y la conjunción plitogénica; de manera similar

$\vee_F$, $\vee_N$, $\vee_P$ representando respectivamente la disyunción difusa, la disyunción neutrosófica y la disyunción plitogénica,

$\neg_F$, $\neg_N$, $\neg_P$ representando respectivamente la negación difusa, la negación neutrosófica y la negación plitogénica,

$\rightarrow_F$, $\rightarrow_N$, $\rightarrow_P$ representando respectivamente la implicación difusa, la implicación neutrosófica y la implicación plitogénica; y

$\leftrightarrow_F, \leftrightarrow_N, \leftrightarrow_P$ representando respectivamente la equivalencia difusa, la equivalencia neutrosófica y la equivalencia plitogénica.

Estoy de acuerdo en que mis operadores neutrosóficos iniciales (cuando apliqué la misma *t-norma difusa*, o la misma *t-conorma difusa*, a todos los componentes neutrosóficos *T, I, F*) eran menos precisos que otros desarrollados más tarde por los investigadores de la comunidad neutrosófica. Esto fue señalado desde 2002, parcialmente corregido por Ashbacher [9] y confirmado en 2008 por Rivieccio [10] y corregido en 2010 por Wang, Smarandache, Zhang y Sunderraman [25], muy por delante de Imamura [1] en 2018. Observaron que si en T_1 y T_2 se aplica una *t-norma difusa*, en sus opuestos F_1 y F_2 se necesita aplicar la *t-conorma difusa* (lo opuesto a la t-norma difusa), y recíprocamente.

Sobre inferir I_1 e I_2, algunos investigadores los combinaron en las mismas direcciones que T_1 y T_2.

Entonces:

$$(T_1, I_1, F_1) \wedge_N (T_2, I_2, F_2) = (T_1 \wedge_F T_2, I_1 \wedge_F I_2, F_1 \vee_F F_2),$$

$$(T_1, I_1, F_1) \vee_N (T_2, I_2, F_2) = (T_1 \vee_F T_2, I_1 \vee_F I_2, F_1 \wedge_F F_2),$$

$$(T_1, I_1, F_1) \rightarrow_N (T_2, I_2, F_2) = (F_1, I_1, T_1) \vee_N (T_2, I_2, F_2) = (F_1 \vee_F T_2, I_1 \vee_F I_2, T_1 \wedge_F F_2);$$

otros combinaron I_1 e I_2 en la misma dirección que F_1 y F_2 (ya que tanto *I* como *F* son componentes neutrosóficos negativamente cualitativos), el más utilizado:

$$(T_1, I_1, F_1) \wedge_N (T_2, I_2, F_2) = (T_1 \wedge_F T_2, I_1 \vee_F I_2, F_1 \vee_F F_2),$$

$$(T_1, I_1, F_1) \vee_N (T_2, I_2, F_2) = (T_1 \vee_F T_2, I_1 \wedge_F I_2, F_1 \wedge_F F_2),$$

$$(T_1, I_1, F_1) \rightarrow_N (T_2, I_2, F_2) = (F_1, I_1, T_1) \vee_N (T_2, I_2, F_2) = (F_1 \vee_F T_2, I_1 \wedge_F I_2, T_1 \wedge_F F_2).$$

Ahora, aplicando la conjunción neutrosófica sugerida por Imamura:

> *"Esto provoca algunos fenómenos contrarios a la intuición. Sea A una proposición (verdadera) con valor ({ 1 } , { 0 } , { 0 }) y sea B una proposición (falsa) con valor ({ 0 } , { 0 } , { 1 }).*
>
> *Usualmente esperamos que la falsedad de la conjunción A ∧ B es {1}. Sin embargo, su falsedad real es {0}."*

tenemos:

$$(1, 0, 0) \wedge_N (0, 0, 1) = (0, 0, 1), \qquad (50)$$

que es correcto (por lo que la falsedad es 1).

Más aún, recientemente, en una extensión del conjunto neutrosófico al *conjunto plitogénico* [11] (que es un conjunto en el que cada elemento se caracteriza por muchos valores de atributo), *los grados de contradicción c(,)* entre los componentes neutrosóficos *T, I, F* se han definido (para facilitar el diseño de los operadores de agregación), como sigue: $c(T, F) = 1$ (o 100%, por ser totalmente opuestos), c(T, I) = c(F, I) = 0.5 (o 50%, porque son solo la mitad de opuestos), entonces:

$$(T_1, I_1, F_1) \wedge_P (T_2, I_2, F_2) = (T_1 \wedge_F T_2, 0.5(I_1 \wedge_F I_2) + 0.5(I_1 \vee_F I_2), F_1 \vee_F F_2),$$

$$(T_1, I_1, F_1) \vee_P (T_2, I_2, F_2) = (T_1 \vee_F T_2, 0.5(I_1 \vee_F I_2) + 0.5(I_1 \wedge_F I_2), F_1 \wedge_F F_2).$$

$$(T_1, I_1, F_1) \rightarrow_N (T_2, I_2, F_2) = \neg_N (T_1, I_1, F_1) \vee_N (T_2, I_2, F_2) = (F_1, I_1, T_1) \vee_N (T_2, I_2, F_2)$$

$$= (F_1 \vee_F T_2, 0.5(I_1 \vee_F I_2) + 0.5(I_1 \wedge_F I_2), T_1 \wedge_F F_2).$$

Para la Lógica Neutrosófica No Estándar, se reemplazan todos los componentes neutrosóficos anteriores $T_1, I_1, F_1, T_2, I_2, F_2$ por números hiperreales, mónadas o bínadas del intervalo unitario no estándar]-0, 1+[y se usan las operaciones no estándar anteriores.

25 Aplicación de la Lógica Neutrosófica No Estándar

Suponga que dos fuentes s_1 y s_2 proporcionan información sobre el valor de verdad no estándar de una proposición dada P:

$$s_1(P)=(T_1(P),I_1(P),F_1(P))=\left(\overset{+}{1},\overset{-+}{0.4},\overset{-}{0.2}\right)$$

$$s_2(P)=(T_2(P),I_2(P),F_2(P))=\left(\overset{0}{0.8},\overset{+}{0.6},\overset{-0}{0.3}\right)$$

Usemos la siguiente *conjunción difusa*:

$$A \wedge_F B = A\cdot B$$

y la *disyunción difusa*:

$$A \vee_F B = A + B - A\cdot B$$

Fusionamos las dos fuentes (usando la conjunción neutrosófica no estándar):

$$s_1(P)\wedge_N s_2(P)=(T_1(P)\wedge_F T_2(P),I_1(P)\vee_F I_2(P),F_1(P)\vee_F F_2(P))=(\overset{+}{1}\wedge_F \overset{0}{0.8},\overset{-+}{0.4}\vee_F \overset{+}{0.6},\overset{-}{0.2}\vee_F \overset{0-}{0.3})=$$

$$(\overset{+}{1}\times\overset{0}{0.8},\overset{-+}{0.4}+\overset{+}{0.6}-\overset{-+}{0.4}\times\overset{+}{0.6},\overset{-}{0.2}+\overset{-0}{0.3}-\overset{-}{0.2}\times\overset{-0}{0.3})$$

$$=(\overset{+}{0.8},\ \overset{-0+}{1}-\overset{-+}{0.24},\overset{-}{0.5}-\overset{-}{0.06})=(\overset{+}{0.8},\ \overset{-0+}{1}-\overset{-0+}{0.24},\overset{-}{0.5}-\overset{-}{0.06})=(\overset{+}{0.80},\overset{-0+}{0.76},\overset{-0+}{0.44}),$$

lo que significa que, con respecto a las dos fuentes fusionadas, el grado neutrosófico no estándar de verdad de la proposición P es levemente superior a 0,8, su grado neutrosófico no estándar de indeterminación es levemente inferior o superior o igual a 0,76, y de manera similar su grado neutrosófico no estándar de falsedad es minúsculamente inferior o superior o igual a 0,44.

Al convertir/aproximar números hiperreales a números reales, con una precisión $\varepsilon = 0.001$, se obtiene:

$$s_1(P)\wedge_N s_2(P)\cong\big((0.8,0.8+0.001),(0.76-0.001,0.76+0.001),(0.44-0.001,0.44+0.001)\big)$$

$$=\big((0.800,0.801),(0.759,0.761),(0.439,0.441)\big)$$

26. Declaración Abierta

En general, el Principio de Transferencia, de un campo no neutrosófico a un campo neutrosófico correspondiente, no funciona. Esta conjetura está motivada por el hecho de que cada campo neutrosófico puede tener varios tipos de indeterminaciones.

27. Conclusión

Agradecemos mucho al Dr. Takura Imamura por su interés y sus críticas a la *Lógica neutrosófica No Estándar*, que eventualmente ayudaron a mejorarla. {En la historia de las matemáticas, las críticas sobre el análisis no estándar, en general, han sido hechas por Paul Halmos, Errett Bishop, Alain Connes y otros.} Esperamos tener más diálogos sobre el tema en el futuro.

En este artículo introducimos por primera vez los Hiperreales Neutrosóficos (que tienen una forma indeterminada), y mejoramos las definiciones de Intervalo Unitario No Estándar y de Lógica Neutrosófica No Estándar.

Señalamos varios errores y afirmaciones falsas de Imamura [21] con respecto al inf/sup de subconjuntos no estándar, también la “rigurosa definición de lógica neutrosófica” de Imamura es incorrecta al igual que su definición de intervalo unitario no estándar, y probamos que no hay un orden total en el conjunto de hiperreales (debido a los hiperreales neutrosóficos recién introducidos que son indeterminados), por lo que el principio de transferencia es cuestionable. Conjeturamos que: En general, el Principio de Transferencia, de un campo no neutrosófico a un campo neutrosófico correspondiente, no funciona.

Fondos: Esta investigación no recibió financiación externa.

Conflictos de interés: Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

Referencias

1. Takura Imamura, *Note on the Definition of Neutrosophic Logic*, arxiv.org, 7 Nov. 2018.
2. Xindong Peng and Jingguo Dai, *A bibliometric analysis of neutrosophic set: two decades review from 1998 to 2017*, Artificial Intelligence Review, Springer, 18 August 2018;
   http://fs.unm.edu/BibliometricNeutrosophy.pdf

3. Florentin Smarandache, *n-Valued Refined Neutrosophic Logic and Its Applications in Physics*, Progress in Physics, 143-146, Vol. 4, 2013; http://fs.unm.edu/n-ValuedNeutrosophicLogic-PiP.pdf
4. F. Smarandache, *Neutrosophy, A New Branch of Philosophy*, <Multiple Valued Logic / An International Journal>, USA, ISSN 1023-6627, Vol. 8, No. 3, pp. 297-384, 2002.
5. Florentin Smarandache, *Neutrosophy. / Neutrosophic Probability, Set, and Logic*, ProQuest Information & Learning, Ann Arbor, Michigan, USA, 105 p., 1998; http://fs.unm.edu/eBook-Neutroosphics6.pdf.
6. F. Smarandache, *A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic*, <Multiple Valued Logic / An International Journal>, USA, ISSN 1023-6627, Vol. 8, No. 3, pp. 385-438, 2002.
   {The whole issue of this journal is dedicated to Neutrosophy and Neutrosophic Logic.}
7. Florentin Smarandache, *Definition of neutrosophic logic — a generalization of the intuitionistic fuzzy logic*, Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, 2003, pp. 141–146.
8. Florentin Smarandache, Neutrosophic Overset, Neutrosophic Underset, and Neutrosophic Offset. Similarly for Neutrosophic Over-/Under-/Off- Logic, Probability, and Statistics, 168 p., Pons Editions, Bruxelles, Belgique, 2016; https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1607/1607.00234.pdf
9. Charles Ashbacher, Section: Logical Connectives in Neutrosophic Logic, pages 59-72 in his book Introduction to Neutrosophic Logic, ProQuest Information & Learning, Ann Arbor, 2002, http://fs.unm.edu/IntrodNeutLogic.pdf .
10. Umberto Rivieccio, Neutrosophic logics: Prospects and problems, Fuzzy Sets and Systems, v. 159, issue 14, 1860–1868, 2008.
11. F. Smarandache, Plithogeny, Plithogenic Set, Logic, Probability, and Statistics, Pons Publishing House, Brussels, Belgium, 141 p., 2017; arXiv.org (Cornell University), Computer Science - Artificial Intelligence, 03Bxx: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1808/1808.03948.pdf
12. Nguyen Xuan Thao, Florentin Smarandache, *(I, T)-Standard neutrosophic rough set and its topologies properties*, Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 14, 2016, pp. 65-70; doi.org/10.5281/zenodo.570892 http://fs.unm.edu/NSS/RoughStandardNeutrosophicSets.pdf
13. Nguyen Xuan Thao, Bui Cong Cuong, Florentin Smarandache, *Rough Standard Neutrosophic Sets: An Application on Standard Neutrosophic Information Systems*, Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 14, 2016, pp. 80-92; doi.org/10.5281/zenodo.570890 http://fs.unm.edu/NSS/RoughStandardNeutrosophicSets.pdf
14. Bui Cong Cuong, Pham Hong Phong, Florentin Smarandache, *Standard Neutrosophic Soft Theory - Some First Results*, Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 12, 2016, pp. 80-91; doi.org/10.5281/zenodo.571149
    http://fs.unm.edu/NSS/StandardNeutrosophicSoftTheory.pdf
15. Insall, Matt and Weisstein, Eric W. "Nonstandard Analysis." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/NonstandardAnalysis.html
16. Insall, Matt. "Transfer Principle." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. http://mathworld.wolfram.com/TransferPrinciple.html
17. F. Smarandache, Applications of Neutrosophic Sets in Image Identification, Medical
18. Diagnosis, Fingerprints and Face Recognition and Neutrosophic Overset/Underset/Offset, COMSATS Institute of Information Technology, Abbottabad, Pakistan, December 26^{th}, 2017; [18] F. Smarandache, Interval-Valued Neutrosophic Oversets, Neutrosophic Understes, and Neutrosophic Offsets, International Journal of Science and Engineering Investigations, Vol. 5, Issue 54, 1-4, July 2016.
19. F. Smarandache, *Operators on Single-Valued Neutrosophic Oversets, Neutrosophic Undersets, and Neutrosophic Offsets*, Journal of Mathematics and Informatics, Vol. 5, 63-67, 2016.
20. Florentin Smarandache, About Nonstandard Neutrosophic Logic (Answers to Imamura 'Note on the Definition of Neutrosophic Logic'), pp. 1-16, Cornell University, New York City, USA, {Submitted on 24 Nov 2018 (version 1), last revised 13 Feb 2019 (version 2)}
    Abstract: https://arxiv.org/abs/1812.02534v2
    Full paper: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1812/1812.02534.pdf
    UNM Website: http://fs.unm.edu/neut/AboutNonstandardNeutrosophicLogic.pdf
21. T. Imamura, On the Definition of Neutrosophic Logic, Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Intelligent Informatics, Vol. 34, No. 3, pp. 669-672, 2022.
22. T. Imamura, Emails to the Author, August 2022
23. F. Smarandache, Extended Nonstandard Neutrosophic Logic, Set, and Probability based on Extended Nonstandard Analysis, Symmetry 2019, 11, 515;
    doi:10.3390/sym11040515, http://doi.org/10.5281/zenodo.2838678; arXiv.org, Cornell University, https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1903/1903.04558.pdf
24. F. Smarandache, *Advances of Standard and Nonstandard Neutrosophic Theories*, Pons Publishing House Brussels, Belgium, 307 p., 2019, http://fs.unm.edu/AdvancesOfStandardAndNonstandard.pdf

25. Haibin Wang, Florentin Smarandache, Yanqing Zhang, Rajshekhar Sunderraman, Single Valued Neutrosophic Sets, in Multispace & Multistructure. Neutrosophic Transdisciplinarity, Vol. IV, pp. 410-413, North-European Scientific Publishers, Hanko, Finland, 2010, http://fs.unm.edu/MultispaceMultistructure.pdf
26. Florentin Smarandache, Improved Definition of NonStandard Neutrosophic Logic and Introduction to Neutrosophic Hyperreals (version 3), arXiv.org, 13 Sep 2022, http://arxiv.org/abs/1812.02534