納米爾史托克和歐拉方程（Navier-Stokes and Euler equation）

By Wan-Chung Hu

Abstract

Navier-Stokes equation existence and smoothness are important unsolved problems in mathematic physics. Here, I use vector calculus and gravity-spinity related Maxwell-like equations (gravitoelectromagnetism) to reduce Navier-Stokes into Laplace equations including conditions such as rotational, irrotational, compressible, or incompressible. Because the solutions of Laplace equations are harmonic functions, the solutions of Navierr-Stoke equations are smooth. In addition, I did curl differentiate the Navier-Stokes-Euler equation to get vortex functions. This can help to explain the mechanism of induction of turbulence.

Main text

紊流仍然是現代物理學的一個謎。到現在為止，沒有人能成功地解釋紊流的詳細機制。流體力學是由 Navier-Stokes 方程和 Euler 方程引導。在這裡，我將提出一個機制來解釋動盪及其 Navier-Stokes 方程和 Euler 方程之間關係。我建議紊流是由歐拉方程產生的，它可以通過 Navier-Stokes 方程可以預防：

Navier-Stokes 方程為

$$\rho\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}+\mathrm{v}\cdot\nabla\mathrm{v}\right)=-\nabla\mathrm{p}+\nabla\cdot\mathrm{T}+\mathrm{f}$$

P 為壓力，T 為黏滯力，f 是體力，尤其是重力。如果 f 是指重力，它可以由 ρg 來表示。

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\nabla v\right)=-\nabla p+\nabla\cdot T+\rho g$$

該 div T 可表示為 μ 黏滯項（μ 是粘度）。根據施陶丁格定律，我建議帶電流體粘度實際上與磁有關。從愛因斯坦的電遷移率關係，我們可以發現磁和帶電流體粘度之間的關係

$$D = \frac{KT}{6\pi\mu r} = \frac{\varphi KT}{q}$$

$$\text{mobility } \varphi = \frac{q}{mf}$$

$$\text{viscosity } \mu = \frac{mf}{6\pi r}$$

由於流體為質量流，則粘滯力可類比電流的電阻：

$$J = \sigma g$$

$$g = \rho J$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

(J 為質量流密度，g 為重力場，σ為質量流傳導係數，ρ為 gravity resistivity)

若存在質量流歐姆定律(R 為質量阻)：

$$g = \frac{V}{l}$$

$$J = \frac{I}{A}$$

則：

$$\rho = \frac{VA}{Il} = R\frac{A}{l}$$

(V 為重力位勢，I 為質量流，A 為截面積，l 為長度)

又知粘滯力公式及類似阻尼公式：

$$F = \mu A\frac{u}{l}$$

$$F = -cu$$

則：

$$c = \mu\frac{A}{l}$$

對比上式，可得粘滯度μ相當於質量阻 R。而已知電阻

有並聯和串聯等公式，也可能適用於質量阻(粘滯度)：

並聯：

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu1} + \frac{1}{\mu2}$$

串聯：

$$\mu = \mu1 + \mu2$$

若相似於電功率：

$$P = I^2R = VR$$

可將質量阻 R 換成黏滯度 u 可得質量功率。

如果我們考慮流體力學的雷諾數（Re）則納維-斯托克斯方程變為

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 v + \rho g$$

另一種表示方法為(黏滯度μ):

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2 v + \rho g$$

而白努力定律:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = -P$$

帶入上式，其中ρg項就是靜水壓$\rho g h$而$\frac{1}{2}\rho v^2$項是動壓:

$$\mathrm{w} = \nabla \times \mathrm{v}$$

$$\mathrm{v} \cdot \nabla \mathrm{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}\right) - \mathrm{v} \times \mathrm{w}$$

又:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho g$$

消去兩邊:

$$-v \times (\nabla x v) = \mu \nabla^2 v$$

根據前面章節速度場旋度似重旋力馬克士威方程:

$$\nabla x v = \mu \left[J - \epsilon \frac{dg}{dt} \right]$$

在圓周運動時速度與躍度平行而速度也與質量流平行故外積為零:

$$\mu \nabla^2 v = 0$$

解上面的拉普拉斯方程則可得速度場及相應的壓力場，這就是有黏滯力下 Navier-

Stokes 方程的旋流解(rotational flow)。而在非旋流(irrotational flow)時:

$$\nabla x v = 0$$
$$\mu \nabla^2 v = 0$$

此時一樣可得到拉普拉斯方程而得黏滯力下 Navier-Stokes 方程的非旋流解。

在可壓縮流(compressible flow)情況納氏方程為:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot v) + \rho g$$

此時需考慮:

$$\nabla \cdot v \neq 0$$

考慮公式帶入:

$$\nabla (\nabla \cdot v) = \nabla^2 v + \nabla \times (\nabla \times v)$$
$$\nabla x v = \mu \left[J - \epsilon \frac{dg}{dt} \right]$$

上式取旋度為零，最後可得:

$$\frac{4}{3}\mu\nabla^2 v = 0$$

我們得可壓縮流的解且不論是旋流或非旋流均可得解。

另外，如果我們完全忽略剪力（粘性），方程變成類似歐拉方程：

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v\right) = -\nabla p + \rho g$$

高雷諾數可誘發紊流的發生。這就是粘性項可以防止紊流的發生。從 Navier-Stokes 方程變成似歐拉方程引起湍流現象。由於 mobility=v/E 與磁場相反則磁與黏滯度相關，慣性力(重力)大則 Re 大易生紊流，黏滯力大則 Re 小不易生紊流，是否與重力場可能造成奇點有關?流體粘滯度如同電學中電阻的概念。而磁流變流體和磁與 shear stress 的關係說明磁與帶電流體黏滯度相關。

湍流有幾個特點。首先，湍流通常是一個快速旋轉流與自發形成旋渦。如何產生一個旋渦，我們可以採取兩種左側和右側的歐拉方程的旋度：

$$\nabla\times\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v\right) = -\nabla\times\nabla p + \rho\nabla\times g$$

基於微積分的規則，我們必須

$$-\nabla\times\nabla p = 0$$
$$\nabla\times g = 0$$

而且，

$\mathrm{w} = \nabla\times\mathrm{v}$

我們也有以下的規則：

$$\mathrm{v}\cdot\nabla\mathrm{v}=\nabla\left(\frac{1}{2}\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}\right)-\mathrm{v}\times\mathrm{w}$$

$$\nabla\times\nabla\varphi=0$$

$$\nabla\times(\mathrm{v}\times\mathrm{w})=-\mathrm{w}(\nabla\cdot\mathrm{v})+(\mathrm{w}\cdot\nabla)\mathrm{v}-(\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{w}+\mathrm{v}(\nabla\cdot\mathrm{w})$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathrm{v})=0$$

另外，在流體不可壓縮，還有

$$\nabla\cdot\mathrm{v}=0$$

我們得到：

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{w}+(\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{w}=(\mathrm{w}\cdot\nabla)\mathrm{v}$$

而且，我們讓：

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\mathrm{w}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{w}+(\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{w}$$

最後，我們得到：

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\mathrm{w}=(\mathrm{w}\cdot\nabla)\mathrm{v}$$

這是渦旋方程。因此，此似歐拉方程可以自發地誘導渦旋方程與渦流的產生。但是，如果我們考慮的納維-斯托克方程的粘性項，散度 T 的旋度不會在等式右邊的變成零。因此，Navier-Stokes 方程的存在可以防止渦旋方程的發生。

紊流的第二個特點是擴散性。即湍流中的流體的增加均化（混合）。這可以通過渦旋方程形成一個奇點的旋渦來解釋：我們可以看到有一個奇異積分操作子作用於渦度。這是說渦流奇點的形成。當流體由於此奇點被移動到旋渦的中心，可以解釋可以解釋湍流擴散性。如果我們考慮的 Navier-Stokes 方程的粘性項，它可以防止渦旋方程的產生，

以及奇點的形成。由於帶電流體黏滯力與磁力相關，由冷次定律知道磁場的感應電流會與原電流方向相反，而重力場可形成奇點而靜電場可形成渦漩，磁場感應電流的產生正可以抵消原流體靜電場的渦漩紊流。

紊流的第三個重要特徵是不規則。這可以通過衝擊波產生的歐拉方程來解釋。基於歐拉方程，我們可以得到所謂的蘭金-雨貢紐（Rankine-Hugonoit）的衝擊（跳躍）條件：

$$[\rho Vx] = \rho 1V1x - \rho 2V2x = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}V_x^2 + E\right] = 0$$

$$[p + \rho V_x^2] = 0$$

由於從歐拉方程衝擊波的不連續性的特點，我們可以從歐拉方程預測的動盪是不規則的。例如，切向不穩定性可以衍生自歐拉方程：

我們讓壓力：

$$p = f(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

我們可以得到：

$$\omega = kv\frac{\rho 1 \mp i\sqrt{\rho 1\rho 2}}{\rho 1 + \rho 2}$$

虛數單位的存在意謂流體的不穩定性。如果我們考慮粘性項，那麼不穩定會降低。因此，我們可以從歐拉方程得到紊流的三個關鍵特性。

基於蘭金-雨貢紐的條件，我們可以解釋一些不穩定的現象。瑞利-泰勒不穩定性是由於兩種流體具有不同的密度。不同密度的流體之間的加速界面衝擊波發生 Richtmyer-Meshkov 不穩定性。當存在兩種流體之間交介面的速度差異發生開爾文-亥姆霍茲不穩定。Saffman-Taylor 不穩定性也因密度不同的兩種液體。瑞利貝納德對流是由於界面之

間的熱能的差異。最後，電熱不穩定（electrothermal instability）是由於升高的熱能（溫度）。因此，湍流現象的機制更見清晰。

我們最後可討論 Navier-Stokes 方程的光滑性問題，光滑性要求要無限可微，但是我們知道空間和時間都有普朗克尺度的最小單位而非無限可微。由於 Navier-Stokes 方程是由連續性方程式導出，Navier-Stokes 方程式是連續性可微分。雖然空間最小單位是普朗克空間，但因其尺度極小而可符合所謂光滑性定義。納維史托克方程都可轉化為拉普拉斯方程，拉氏方程的解為調和函數都有無限可微的光滑性。