Note sur l'Altération Linéaire de la Représentation Lambert-Tunisie

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ingénieur Général

A Tous mes Amis et Collègues de l'Office de la Topographie et du Cadastre (OTC)

Abstract
In this note, we study the variation of $m(\varphi)$ the distortion in length in the function of the geodetic latitude φ of the Tunisian Lambert map projection.

Résumé
Dans cette note, nous donnons la définition du module linéaire et de l'altération linéaire de la représentation plane Lambert-Tunise. Nous étudions la variation de ces deux paramètres en fonction de φ la latitude géodésique.

Mots clés
Module linéaire, altération linéaire, représentation plane Lambert Tunisie.

 pp. 2-6

Figure 1 Photo de l'Auteur (2019)

Note sur l'Altération Linéaire de la Représentation Lambert-Tunisie

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ingénieur Général Géographe

1. Introduction

Lors des mesures de distances sur le terrain, le géomètre ou le géodésien est obligé de réduire les distances mesurées au plan de la représentation plane adoptée en apportant les corrections nécessaires et particulièrement celles dues à l'altération linéaire.

2. Rappels

2.1. Le module linéaire

Il est défini par le coefficient m tel que:

$$m = \frac{\text{distance Plan}}{\text{distance Ellipsoïde}} \tag{1}$$

ou encore sous forme différentielle:

$$\boxed{m = \frac{dS}{ds} = \frac{\text{élément de dist. Plan}}{\text{élément de dist. Ellipsoïde}} \qquad (2)}$$

Donc $m > 0$.

2.2. L'altération linéaire

L'altération linéaire est définie par:

$$\epsilon = m - 1 = \frac{dS_{plan} - ds_{Ellip}}{ds_{Ellip}} \tag{3}$$

Par suite:

$$D_{Plan} = (1+\epsilon).D_{Ellip.} \tag{4}$$

3. Cas de la Représentation Plane Lambert-Tunisie

On démontre que le module linéaire de la représentation plane Lambert-Tunisie (LT) est donné par la formule suivante [1]:

$$m(\varphi) = \frac{k.sin\varphi_0.R(\varphi)}{N(\varphi).cos\varphi} \tag{5}$$

où:
- k est le coefficient de réduction d'échelle,
- φ_0 est la latitude géodésique du parallèle origine de la représentation plane LT,

$$R_0 = N(\varphi_0).cotg\varphi_0 \tag{6}$$

$$L(\varphi) = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}Log\left(\frac{1+esin\varphi}{1-esin\varphi}\right) \tag{7}$$

$$R(\varphi) = R_0exp(-sin\varphi_0(L(\varphi) - L(\varphi_0))) \tag{8}$$

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}, \quad e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \tag{9}$$

- e la première excentricité et a, b sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipsoïde de référence (ellipsoïde Clarke Français).

3.1. Etude de $m(\varphi)$

On considère le cas où $\varphi \in [0, \frac{+\pi}{2}]$. Calculons d'abord la limite de $m(\varphi)$ quand $\varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. De l'expression (5) de m, on a pour $\varphi = \pi/2$, $cos\varphi = 0$ et $N = a/\sqrt{1-e^2}$. Alors le dénominateur de m vaut 0.

Pour $\varphi = \pi/2$, $L(\pi/2) = Logtg(\pi/4 + \pi/4) - (e/2)Log\frac{1+e}{1-2}$. Or $tg(\pi/4+\pi/4) = tg(\pi/2) = 1/0 = +\infty \Longrightarrow lim_{\varphi\longrightarrow\pi/2}L(\varphi) = +\infty$. Par suite on a :

$$lim_{\varphi\longrightarrow\pi/2}R(\varphi) = 0 \tag{10}$$

On déduit que $lim_{\varphi\rightarrow\pi/2}m(\varphi) = 0/0 =$ forme indéterminée. Alors levons cette indétermination.

Posons $\theta = \pi/2 - \varphi$, l'expression de m devient:

$$m(\varphi) = m(\pi/2 - \theta) = M(\theta) \tag{11}$$

Etudions alors:

$$lim_{\theta\rightarrow 0}m(\pi/2-\theta) = lim_{\theta\rightarrow 0}M(\theta)$$

On obtient l'expression de $M(\theta)$:

$$M(\theta) = \frac{ksin\varphi_0.R(\pi/2-\theta)}{N(\pi/2-\theta)sin\theta} = \frac{k\sqrt{1-e^2cos^2\theta}R(\pi/2-\theta)}{asin\theta} \tag{12}$$

et $L(\varphi)$ devient:

$$L(\varphi) = L(\pi/2 - \theta) = Logtg(\pi/2 - \theta/2) - (e/2)Log\left(\frac{1+ecos\theta}{1-ecos\theta}\right) =$$

$$L(\varphi) = -Logtg(\theta/2) - (e/2)Log\left(\frac{1+ecos\theta}{1-ecos\theta}\right)$$

On peut écrire que $M(\theta) = A(\theta).u$ avec:

$$u = \frac{\mathbf{e}^{sin\varphi_0 Logtg(\theta/2)}}{sin\theta}, \quad \mathbf{e} = \text{base du logarithme népérien} \tag{13}$$

$$A(\theta) = \frac{k.sin\varphi_0\sqrt{1-e^2cos^2\theta}}{a}.\mathbf{e}^{sin\varphi_0\left(\frac{e}{2}.Log\frac{1+ecos\theta}{1-ecos\theta}+L(\varphi_0)\right)} \tag{14}$$

On vérifie facilement que $lim_{\theta\to 0}A(\theta)$ est une quantité positive finie. Pour étudier u quand $\theta \longrightarrow 0$, faisons un autre changement de variables en posant $t = tg(\theta/2)$, u devient :

$$u = \frac{\mathbf{e}^{sin\varphi_0 Logtg(\theta/2)}}{sin\theta} = \frac{1+t^2}{t^{1-sin\varphi_0}} \tag{15}$$

Donc $\theta \longrightarrow 0 \Rightarrow t \longrightarrow 0$. Comme $1 - sin\varphi_0 > 0$, alors $lim_{t\to 0}t^{1-sin\varphi_0} = 0$. Par suite $lim_{t\to 0}u = +\infty$. Il s'en suit :

$$\boxed{lim_{\theta\to 0}M(\theta) = lim_{\theta\to 0}m(\pi/2-\theta) = lim_{\varphi\to\pi/2}m(\varphi) = +\infty} \tag{16}$$

Pour $\varphi = 0$, on obtient:

$$m(0) = kcos\varphi_0(1-e^2sin^2\varphi_0)^{-1/2}\mathbf{e}^{sin\varphi_0.L(\varphi_0)} > 0 \tag{17}$$

Calculons la variation de $m(\varphi)$. Or le calcul de $\dfrac{dm}{d\varphi}$ [1] donne :

$$\frac{dm}{d\varphi} = \frac{m.\rho(sin\varphi - sin\varphi_0)}{N(\varphi).cos\varphi} \tag{18}$$

où $\rho = \dfrac{a(1-e^2}{(1-e^2sin^2\varphi)^{3/2}}$ le rayon de courbure de la méridienne.

Donc $\dfrac{dm}{d\varphi} = 0 \Rightarrow sin\varphi = sin\varphi_0 \Rightarrow \varphi = \varphi_0[2\pi]$. On a alors le tableau de variation (Fig.2) suivant:

4. Exemple Numérique

Considérons la représentation plane Lambert-Tunisie Nord, on a les éléments numériques suivants:

- $\varphi_0 = 40.0000\,gr$,
- $k = k_N = 0.999\,625\,544$,
- $a = 6\,378\,249.20\,m$ et $e^2 = 0.006\,803\,487\,7$.

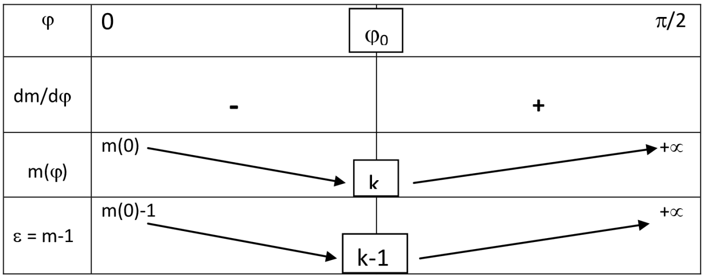

Figure 2 Tableau de variation de $m(\varphi)$

5. Exercices

Exercice 1. *On donne les formules de la représentation plane Lambert-Tunisie, utilisant les notations de la note:*

$$\Omega = (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0 \tag{19}$$

$$X = 500000.00\,m + kRsin\Omega \tag{20}$$

$$Y = 300000.00\,m - k(R_0 - Rcos\Omega) \tag{21}$$

1. Donner l'expression de l'élément métrique ds sur l'ellipsoïde de référence.
2. Calculer $dS = \sqrt{dX^2 + dY^2}$ *l'élément métrique sur le plan pour la représentation plane Lambert Tunisie.*
3. En déduire la formule donnant $m(\varphi)$ *le module linéaire.*
4. Calculer les valeurs numériques de $m(\varphi)$ *et* $\epsilon(\varphi)$ *pour les latitudes extrêmes* $\varphi = \varphi_0 \pm 2.5\,gr$.

References

[1] **A. Ben Hadj Salem**. 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*, publié par Nour-Publishing, 365 pages. ISBN – 13 : 978-3-330-96843-1.
(lien: https://www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-des-moindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1).

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ingénieur Général
Résidence Bousten 8, Mosquée Raoudha, Bloc B, 1181 La Soukra Raoudha, Tunisia,
E-mail: abenhadjsalem@gmail.com