Singular properties

by Dmitrii V. Guryanov

dmitriigur76@gmail.com

Abstract: The purpose of this article as a continuation of development of the multiplical topic is to find a solution for operation of differentiation and factorization of a function with points of interruption, points where function turns to zero. The solution which allows restoring the original function as result of reverse operation of integration and factorial-multiplication of previously obtained derivative and factor-derivative respectively and with an appropriate selection of an arbitrary multiplier B or addend C, respectively. As the result of the work made new classes of function properties are introduced as function point properties.

Keywords: Natural singular properties, Applicable singular properties, Singular differential, Singular factorial, Symmetrical factorial, Hyperbolic singular factorial, Singular addend, Hyperbolic singular multiplier.

The preceding related article: Multiplical concept https://vixra.org/abs/2205.0150

Table of content

1. Introduction 1
2. Inclusive and exclusive states 2
3. Natural singular properties 5
4. Applicable singular properties and logic of factorization and differentiation taking into account applicable singular properties 11
5. Working with applicable singulars using helper functions 14
6. Algorithm for calculating defined multiplical and defined integral taking into account applied singulars 17
7. Explanation of the algorithm for calculating a definite multiplical and integral taking into account applied singulars 19
8. Recording the multiplical and integral, taking into account applied 26
9. The rule for matching an arbitrary multiplier **B** and an arbitrary addend **C** taking into account applied singulars 27

Introduction

Function **critical points** are function singularities (function interruption point), and considering the factorials and the factorization, in addition are points where the function turns to zero.

The operations of differentiation and factorization are interrupted at function critical points, so information about function characteristics at those points are not transferred to its derivative and factor-derivative (hereinafter referred to as the first derivatives), that is, it is lost forever.

As a result, with the reverse integration or factorial-multiplication, respectively, of the previously obtained first derivatives, there is no way to restore the original function.

May be we should do nothing about it, but the given circumstance violates the mutual invertibility of factor-derivative and indefinite multiplical as well as derivatives and indefinite integrals or imposes restrictive conditions on the analyzed functions, and thus indirectly violates the postulate of the mutual invertibility of factorial-multiplication and factorization as well as integration and differentiation operations, for which it is worth fighting methodologically, as I guess.

The goal is to develop a new extended logic for the above mentioned operations of mathematical analysis, in the application of which the reverse operations would lead to the effective restoration of the original function in the form of an indefinite multiplical or an indefinite integral with an appropriate selection of an arbitrary multiplier B or addend C, respectively, if not for all, then for a much larger number of cases, and which could be used in practical applications.

The new logic implies existence of new properties for functions. In this case, we are talking about the functions properties at dimensionless points, or the properties that has an effect when passing through a point in the course of analysis. The general name of the class of such properties is **singular properties** of functions at points. These can either be present at points of analytically given functions in a natural way, in which case the analysis will show them, or they can be applied to the points of functions both analytically and automatically in the course of functions factorization and differentiation when certain circumstances occur. Common to the singular properties of functions is that, when analyzed, their value does not depend in any way on the differential of argument **dx**. The first and well-known example of the singular properties is the discrete values in the definition of a function. Despite the fact that the latter does not directly participate in analytic transformations described here, nevertheless, the discrete definition falls under the definition of singular properties.

The new operation logic that takes into account the singular properties of functions finds its notational reflection, which distinguishes it from the classical logic - the one that ignores the singular properties of functions, both naturally present and applied.

Inclusive and exclusive states

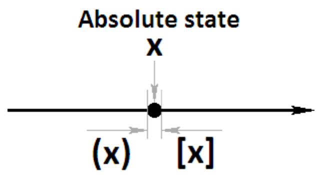
Since we are talking about such properties of functions that are effective when passing through points, it becomes necessary to determine the boundary of the analyzed segment, interval or domain of the function with an additional indication of whether or not the considered boundary point of the interval, segment, domain is included in the corresponding interval, segment, domain, which is true for both (right and left) end boundary points, except for cases when there is simply no boundary point or both at once, when the function domain has no boundary and goes to infinity. Thus, the definition of the border includes not only the coordinate of the point of this border, but also information about the state: inclusive or not inclusive (exclusive), which should be reflected in the notation when writing coordinates. Speaking about the inclusion or exclusion of points in the interval, one should not take this figure of speech literally, because it makes no sense to include or exclude a dimensionless something (points). In this case, we are talking about taking into account (inclusion) or not taking into account (exclusion) the corresponding singular property of the function at a critical point in the process of analyzing the function in one of its two directions: upward or downward of the function argument. The inclusive/exclusive state for the substituted value of the function argument also becomes decisive in the approach under consideration.

For the segment right boundary point the state included in the segment implies the position of the segment boundary when it infinitely approaches the boundary point from the right, and the state excluded in the segment implies the position of the segment boundary when it infinitely approaches the boundary point from the left, and for the left boundary point it is the other way around, included in the segment implies the position of the segment boundary when it infinitely approaches the boundary point from the left and not included in the segment implies the position of the segment boundary when it infinitely approaches the boundary point from the left. This example describes the principle of the relative state inclusive / exclusive, what about a specific segment.

In the circumstances that the analysis of functions is carried out along the entire abscissa axis, with potential division of the analyzed domain into adjacent segments located at the junction with each other, without gaps and overlaps, when the left border of one segment simultaneously means the boundary of the segment following it and adjacent to it (coincides in its definition: the coordinate of the point + inclusive/exclusive), it is necessary to switch to the principle of an absolute, non-segment-centric state of inclusion or exclusion points in intervals, segments and domains, otherwise the conflict of the latter in the “struggle for common points” is inevitable ".

The special notation for the absolute state inclusive/exclusive for the value of an argument or for the coordinate of the boundary of an interval, segment, domain is taken as follows:

- Absolutely inclusive **x**: **[x]**
- Absolutely exclusive **x**: **(x)**



Since there are discrete functions that return their values only at points, and the function analysis is carried out in the direction of growth of its argument by the default, the rule that the absolute state inclusive or exclusive for the coordinates of points, boundaries of intervals, segments, domains of functions coincides with the above-described relative state inclusive or exclusive for the right border of the segment. At the same time, as a consequence of the above reasons, the rule implies an absolute inclusion state by the default for substituted values as a function argument for specifying the coordinate of a point, or boundaries of intervals, segments, domains, including as a definition of integration and factorial-multiplication segments, if another state is not indicated specifically. Expression **f(x)** is equivalent to expression **f([x])**, where both imply inclusive **x**, which distinguishes them from expression **f((x))**, which implies exclusive **x**.

Note: The default inclusive state rule does not apply to a passed function argument at points where a discrete value definition is present. For such points, the expression **f(x)** will return a discrete value at the point **x**. In order to get the value of the continuous definition of the function when approaching the point from the right (if any), you need to give the function an explicit indication of the on state: **f([x])**.

Switching to measurement and taking into account the absolute state inclusive or exclusive for points on the abscissa axis and choosing one of the states as the default state under the conditions of analysis that takes into account the singular properties of functions, leaves valid the following equations of **Multiplical concept** article: **4**; **5**; **7.1**; **7.2,** and valid in the form in which they are presented. Similar equations for definite integrals also remain valid under the conditions described.

Taking into account the state of the point inclusive or exclusive, special binary operators for comparing two coordinate values are introduced, which define the state inclusive as greater, and the state exclusive as less, in case if both compared values have the same numerical values:

[x] **>▪** x **>▪** (x) true,

(x) **▪<** x **▪<** [x] true,

(x) **▪<** (x) false,

(x) **<** [x] false,

where **>▪** is more, taking into account the state; **▪<** is less, taking into account the state; **>** is more stateless; **<** is less stateless; **x** is absolute coordinate of the point, **[x]** is absolutely inclusive **x**; **(x)** is absolutely exclusive of **x**.

Other signs that take into account states: **≥▪** is equal and greater; **▪≤** is equal or less.

Equalities and inequalities of coordinates with states:

(x) = (x) true,

(x) **▪=▪** (x) true,

(x) = [x] true,

(x) **▪=▪** [x] false,

(x) **<▪>** [x] true,

(x) **!▪=▪** [x] true,

(x) **<>** [x] false,

(x) **!=** [x] false,

where **=** is stateless equality; **▪=▪** is stateful equality; **!▪=▪** and **<▪>** are stateful inequality; **!=** and **<>** are stateless inequality.

Arithmetic operations with coordinates ignore states inclusive or exclusive, and the return result of such operations is simply a number, and is identical to the length of the interval, or the coordinate of a point without the specified state:

$$[x] – (x) = 0 \text{ true.}$$

Functions to operate with states:

$$\text{St} = \text{get\_state}(x), \qquad (19.1)$$

$$x_1 = \text{set\_ state}\ (x_0, \text{St}), \qquad (19.2)$$

where **get_state** is a function that returns the state of the passed **x** coordinate as follows: **–1** is coordinate exclusive, **+1** is coordinate included, **0** is stateless point or just a real number, **null** is error; **set_state** is a function that returns the $\mathbf{x_1}$ coordinate with the state **St** and $\mathbf{x_0}$ position.

Natural singular properties

Singular factorial and **singular differential** are values that are present at any point of a function, including the function critical points, numerically describing the change in the function from one of its value, which is exclusive at the point, to its other value, which is inclusive at the point when passing through the points in the direction of growth of the argument and are determined as follows: the singular factorial as ratio of function value at point inclusive to function value at point exclusive, the singular differential as difference of function value at point inclusive to function value at point exclusive:

$$\mathbf{sf}f(x) = \frac{f(x)}{f\big((x)\big)}, \qquad (20.1)$$

$$\mathbf{sd}f(x) = f(x) - f\big((x)\big), \qquad (20.2)$$

where **sf*f*(x)** is the singular factorial of the function ***f(x)*** at the point **x**; **sd*f*(x)** is the singular differential of the function ***f(x)*** at the point **x**.

Through the mediation of the function ***f***, there is interdependence between the singular factorial and the singular differential, but only if the hypothetical division by zero operation (in the case of critical points) in the following equations does not prevent this:

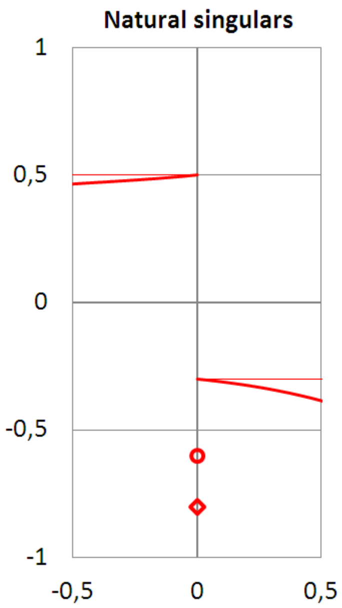
$$\mathbf{sd}f(x) = f\big((x)\big) \cdot \mathbf{sf}f(x) \ - f\big((x)\big) = f(x) - \frac{f(x)}{\mathbf{sf}f(x)}, \qquad (21.1)$$

$$\mathbf{sf}f(x) = \frac{\mathbf{sd}f(x) - f\big((x)\big)}{f\big((x)\big)} = \frac{f(x)}{f(x) - \mathbf{sd}f(x)}, \qquad (21.2)$$

The singular factorial and the singular differential can be characterized as function **singular increments** of the second and first order, respectively.

At non-critical points, the singular differential is 0, and the singular factorial is 1 by definition. This condition is necessary and sufficient. At these points, the described singular properties are not informative.

A finite value different from 1 for a singular factorial and from 0 for a singular differential takes place in function interruption points, but only if the function values at the point on both its sides are within the allowed range that is they are defined finite and for defining the singular factorial are not zero in addition. In such case the singular factorial and the singular differential are informative at the point and they numerically describe the interdependence between the two function domains separated by the interruption point, the singular differential describes the absolute difference of function values, the singular factorial describes the relative difference of function values.



The diagram shows the described case with an interruption of the function at **x=0**. Despite the fact that the singular increments are not being explicitly indicated, because there is no need for, since the graph of the function is self speaking, indirectly indicates the values of the natural singular properties, nevertheless, for clarity, the singular factorial is indicated in this diagram as circle, and the singular differential is indicated as diamante and they have visibly informative values there.

The stored value of this numerical relationship between the function domains separated by a critical point is necessary to restore the function in a reverse factorial-multiplication or reverse integration of its factor-derivative or its derivative respectively. In process of the mentioned operation the continuous definition of the function respective first derivative in the vicinity of the critical point can be excluded and replaced by the stored numerical value as a multiplier or as an addend of the intermediate result of the operation being performed. Thus, despite the obvious gap of the factor-derivative or derivative with values that are out of the allowed range at the point, the described technique allows us to effectively restore the function.

If the function value on one or both sides of the point when approaching it are out of the allowed range then the singular factorial and differential are indefinite, informative. Further analysis based on the singular differential is not possible in the case, and it is not possible to restore the function as a result of the reverse integration of the function derivative. But if the analysis is based on the singular factorial then the one can numerically relate the values of the function measured on both sides of the critical point at the same (symmetrically with respect to the point) and infinitely small distance from it. In other words, find a factorial of a function, as its change with a change in the argument from one of the measurement points to another. In view of the fact that the measurement points are located at an equal distance from the critical point **x**, this factorial can be characterized as a symmetrical factorial:

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x},\mathrm{dx}) = \frac{f(\mathrm{x}+\mathrm{dx})}{f(\mathrm{x}-\mathrm{dx})}, \qquad (22.1)$$

where **x** is the coordinate of the critical point; **dx** is module of an infinitesimal distance from measurement points to the critical point **x**; **si*f*** is the function symmetric factorial as a function of the coordinate **x** and the module of the infinitesimal distance from measurement points to the critical point **x.**

The previous ratio can be converted into a product of two multipliers: a finite non-zero proportionality factor **V** and in general an infinitesimal or infinitely large value which depends on the distance from measurement points to the critical point. Both multipliers are properties of the object - **the hyperbolic singular factorial** as a natural singular property of the function at the point:

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}) = \{\,\mathrm{V}, \mathrm{H}(\mathrm{dx})\,\} \qquad (22.2)$$

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x},\mathrm{dx}) = \mathrm{V}\cdot\mathrm{H}(\mathrm{dx}) = \mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{V}\cdot\mathbf{hsf}f(x).\mathrm{H}(\mathrm{dx}), \qquad (22.3)$$

Example:

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}) = \{\,-5, \mathrm{dx}^1\,\} \qquad (22.4)$$

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x},\mathrm{dx}) = -5\cdot\mathrm{dx}^1 \qquad (22.5)$$

where **hsf*f*** is a hyperbolic singular factorial of the function ***f***; **V** or **hsf*f***(x).V is the value of the hyperbolic singular factorial of the function ***f*** at the point **x** as its property; **H** or **hsf*f***(x).H is the hyperbolizer as a function of the modulus of the distance **dx** of the measurement points of the function values from the point **x** and as a property of the hyperbolic singular factorial of the function ***f*** at the point **x**; **dx** is the hyperbolization arm as the hyperbolizer argument.

The value of the hyperbolic singular factorial indicates the value of the proportional relation between the domains of the function separated by a critical point.

The hyperbolizer has such a name, because with an infinitesimal value of the hyperbolization arm, it returns an infinitely large or infinitely small value, and even possibly raised to some finite power. When numerically solving definite multiplicals, the hyperbolizer returns sufficiently small or sufficiently large values, depending on the size of the hyperbolization arm and its possible exponentiation. The return value of the hyperbolizer is always positive, since the arithmetical sign of the symmetrical factorial is always bound to the value of the hyperbolic singular factorial **V**. The hyperbolizer cannot be zero or undefined, since such symmetrical singular values are assigned to the value of the hyperbolic singular factorial.

The hyperbolizer describes the order of incommensurability (not parity) of function values on both sides of a critical point when approaching it to the limit. Incommensurability is a general case of function properties at critical points. If the values of the functions on both sides of the critical point are commensurate (parity), then the returned value of the hyperbolizer is 1, in which case we can talk about a unit hyperbolizer, and in this case the symmetric factorial is equivalent to the singular factorial at the function point, and this case is special. Such cases take place for finite non-zero function values at a critical point on both sides of from it, as shown in the previous diagram, and also if on both sides of the critical point the function is represented by the same analytically given constituent functions, differing only in their multipliers.

The hyperbolizer as a multiplier of the value of the hyperbolic singular factorial, hyperbolizes it, thereby justifying the names of this class of natural singular properties. This actually explains the methodological division of the symmetrical factorial into two multipliers, one of them is a conditional constant that does not depend on the hyperbolization arm, and the other is a conditional variable that depends on the arm of the hyperbolizer only, and which has its direct decisive value when carrying out factorial-multiplication using arbitrarily chosen size of the factorial-multiplication element.

As an example, consider a hyperbolic singular factorial at the junction (at a critical point) at x = 0 of two different power polynomials as constituent functions. Based on the general formulation of the problem both functions do not necessarily have finite non-zero values at critical point. They represented by the following equation, with different values of multipliers of terms and exponents for **x** in the general case:

$$f(x) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{b_i} \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{a_i}}, \text{for } \mathrm{a_i} \in \mathrm{Z}, \qquad (23.1)$$

$$f(x) = \mathrm{sign(x)} \cdot \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{b_i} \cdot |\mathrm{x}|^{\mathrm{a_i}}, \text{for } \mathrm{a_i} \in \mathrm{R}. \qquad (23.1)$$

where **N** is the number of power terms in the definition of the constituent function; $\mathbf{b_i}$ - **i**-th term multiplier; $\mathbf{a_i}$ is the exponent of the argument **x**; **sign** — function that returns **–1** in case if the passed argument is negative, otherwise returns **+1**.

When approaching a critical point infinitely close (x = 0), the decisive value of the function will be the term with the minimum value of $\mathbf{a_i}$ from among those with a finite non-zero value of $\mathbf{b_i}$. When **x** tends to zero, the components of the value of functions from other terms with higher $\mathbf{a_i}$ and finite nonzero **b**, regardless of the size of the latter, can be neglected, in view of the ratio of these components of the value of the function to the component of the value of the function from the decisive term tends to zero. So, if the decisive term is with negative $\mathbf{a_i}$, then the value of the function at a critical point is not defined and it tends to infinity in absolute value as **x** tends to the point, and if the decisive term is with positive $\mathbf{a_i}$, then the value of the function at a critical point is equal to zero and tends to zero as **x** tends to a point. If the decisive term is with zero $\mathbf{a_i}$, then the value of the function at a critical point is equal to **b**, a finite non-zero.

The value of the symmetrical singular factorial at a critical point at x=0:

For integer $\mathbf{a_i}$:

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x}, \mathrm{dx}) = \frac{f(+\mathrm{dx})}{f(-\mathrm{dx})} = \frac{\mathrm{b}_k \cdot (+\mathrm{dx})^{\mathrm{a_k}}}{\mathrm{b}_j \cdot (-\mathrm{dx})^{\mathrm{a_j}}} = \mathrm{sign}\big(-|\mathrm{a_j}|\%2\big) \cdot \frac{\mathrm{b}_k}{\mathrm{b}_j} \cdot \mathrm{dx}^{(\mathrm{a_k}-\mathrm{a_j})}, \qquad (23.3)$$

For real $\mathbf{a_i}$:

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x},\mathrm{dx}) = \frac{f(+\mathrm{dx})}{f(-\mathrm{dx})} = \frac{+\mathrm{b}_k \cdot \mathrm{dx}^{\mathrm{a_k}}}{-\mathrm{b}_j \cdot \mathrm{dx}^{\mathrm{a_j}}} = -\frac{\mathrm{b}_k}{\mathrm{b}_j} \cdot \mathrm{dx}^{(\mathrm{a_k}-\mathrm{a_j})}, \qquad (23.4)$$

where **j** is the index of the decisive term of the constituent function, which is before the critical point; **k** is the index of the decisive term of the constituent function, which is after the critical point; **%** is the division remainder operator.

Properties of a hyperbolic singular factorial:

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} = \mathrm{sign}\big(-|\mathrm{a}|_{\mathrm{j}}\%2\big) \cdot \frac{\mathrm{b}_k}{\mathrm{b}_j} \text{ for } \mathrm{a_i} \in \mathrm{Z}, \qquad (23.5)$$

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} = -\frac{\mathrm{b}_k}{\mathrm{b}_j} \text{ for } \mathrm{a_i} \in \mathrm{R}, \qquad (23.6)$$

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{H}(\mathrm{dx}) = \mathrm{dx}^{(\mathrm{a_k}-\mathrm{a_j})}. \qquad (23.7)$$

For constituent functions represented by a power polynomial with natural $\mathbf{a_i}$ including 0, the definition of a hyperbolic singular factorial can be expressed in terms of the finite values of the constituent functions derivatives at a critical point on either side of it, both inclusive and non-inclusive:

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x},\mathrm{dx}) = \frac{f(\mathrm{x}+\mathrm{dx})}{f(\mathrm{x}-\mathrm{dx})} = \mathrm{sign}(-\mathrm{j}\%2) \cdot \frac{\mathrm{f}'^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{j}!}{\mathrm{f}'^{\mathrm{j}}\big((\mathrm{x})\big) \cdot \mathrm{k}!} \cdot \mathrm{dx}^{\mathrm{k}-\mathrm{j}}, \qquad (23.8)$$

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} = \mathrm{sign}(-\mathrm{j}\%2) \cdot \frac{\mathrm{f}'^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{j}!}{\mathrm{f}'^{\mathrm{j}}\big((\mathrm{x})\big) \cdot \mathrm{k}!}, \qquad (23.9)$$

$$\mathbf{hsf}f(x).\mathrm{H}(\mathrm{dx}) = \mathrm{dx}^{\mathrm{k}-\mathrm{j}}, \qquad (23.10)$$

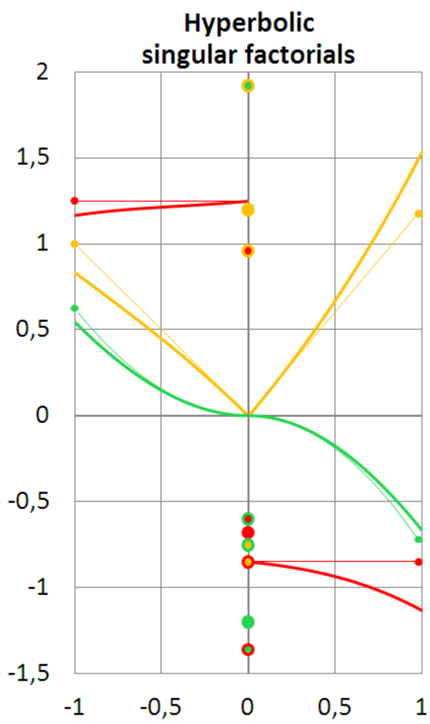
where **k** is the ordinal number of the first found derivative of a non-zero final value at the point **x** inclusive; **j** is the ordinal number of the first found derivative of a non-zero final value at the point **x** exclusive; $\mathbf{f'_k(x)}$ is the value of the derivative of the ordinal number **k** at the point **x** inclusive; $\mathbf{f'_j((x))}$ is the value of the derivative of the ordinal number **j** at the point **x** exclusive.

For the purpose of the notation universalizing the function ***f*** itself is understood as a conditional derivative of the zero ordinal number or the conditional $\mathbf{0^{th}}$ derivative and the value of the expression 0! is taken equal to 1 as the result of the product of the zero number of multipliers. The enumeration of derivatives is carried out up to the first one found with a non-zero final value in the direction of growth of their ordinal number, starting from zero. The first derivatives found with non-zero finite values, in this case under the ordinal numbers **j** and **k**, are the decisive derivatives for their respective function domains, since the increase in the derivatives of higher ordinal numbers can be neglected if **dx** tends to zero.

Since, the function value is negative to the left of the critical point for an odd exponentiation of the decisive term or for an odd ordinal number of the decisive derivative, and also since the positive symmetric factorial must describe the numerical proportional relationship of the pair of function values of the same arithmetic sign on both sides of the critical point (without passing through x-axis), and negative, on the contrary, the different arithmetic sign (with x-axis crossing), the result of the ratio is multiplied by **–1** , which is reflected in the multiplier as the returning value of the **sign** function.

If the function value on one of the sides is finite non-zero, that is in case of the polynomial at $\mathbf{a_j} = \mathbf{0}$ or $\mathbf{a_k} = \mathbf{0}$ or in case of the function's conditionally zero derivative being decisive (k=0 or j=0), and since this value, in turn, does not depend on the size of **dx**, then on the corresponding side the module of the interval between the function value measurement point and the critical point can be greater or less than the same on the opposite side, or even equal to zero. The rule of symmetry of the positions of the function values measurement points relative to the critical point can be violated in this case, and then the module of the interval on the side of the critical point, where the value of the function is determined by the derivative of the ordinal number from one and higher, is substituted as **dx**.

<u>Note</u>: It should not be assumed at all that the hyperbolizer is an exclusively power function, as in the above example with a power polynomial, since the described is a special case. So, for example, the constituent function may be logarithmic, thus the logarithm will be present in the hyperbolizer definition. Nevertheless in general a successful finding hyperbolic singular factorial via analysis of the constituent functions derivative values at the critical point, that is the confirmed fact of their finite non-zero values there, makes the hyperbolizer definition to be exactly a power function in deed.



On the diagram, colored thick lines indicate graphs of the continuous function definition of two domains on both sides of the critical point in a form of power polynomials with natural exponents. Thin lines indicate the component of the function value from the decisive term or, in other words, the function growth from the decisive derivative measured in the critical point on the corresponding side of it, with the exponent of the term or with the ordinal number of the derivative, respectively, as follows: red - zero (the function itself), orange - the first, green - the second. On both sides of the critical point at points with coordinates along the x-axis –1 and 1, components of the function values from the decisive terms were measured, or in other words, the growth of the function from the decisive derivative was measured. Small one-color bullets located at the intersection of the thin lines with the grid lines of the coordinate system at marks –1 and 1 reflect the result of the corresponding measurement. The ratio of **Y** coordinate values of all pairs of the small bullets of different colors are numerically reflected as the **Y** coordinates of large bullets, which are located in the coordinate **x** of the critical point, as a graphical reflection of the point property. For them, the outer color of the bullet is associated with the function domain to the right of the critical point, and the inner color is associated with the function domain to the left of the critical point. Thus, the numerical relation of the function domains in the vicinity of a critical point is reflected, arising from the corresponding pair of terms or from the corresponding pair of derivatives. Since the arm of the hyperbolizer **dx = 1** in the diagram, and therefore the return value of the hyperbolizer is one, these values would point to the values of the hyperbolic singular factorials if the terms or the derivatives whose graphs are displayed as thin lines of the corresponding colors would be decisive. The values of large single-color bullets do not depend on **dx**, since in this case pairs of identical functions join at a critical point and the value of the hyperbolizer for such a pair is equal to one regardless the **dx** size.

The singular factorial of a function is a special case of the hyperbolic singular factorial, and the hyperbolic singular factorial as a concept is a hyperbolic extension of the concept of a singular factorial. Probably here it is worth noting that the concept of a singular differential cannot fundamentally have its own hyperbolic expansion since this does not make sense. An evidence of this is also the fact that the concept of zero-order derivatives is principally absent, in contrast to how the existence of the concept of first-order derivatives (one order lower than the order of a singular factorial) gives sense to the concept of a hyperbolic singular factorial as it is described above. Concepts and entities of higher orders are based on concepts and entities of lower orders, and we can only recognize the higher and lower orders in entities and concepts. This is the philosophy of mathematics, which once again brings us back to its source - to the concept of a hyper-operator.

Singular factorial and singular differential, as well as the hyperbolic singular factorial, are inherent natural singular properties of functions at points revealed by analysis, they cannot be removed from the function definition and cannot be added to it as they are not part of it, but they depend on it.

Applicable singular properties and logic of factorization and differentiation taking into account applicable singular properties

According to the updated logic of the operations of factorization and differentiation of functions, when these operations pass through critical points, the hyperbolic singular factorial or singular differential existing at such points and belonging to them, respectively, is automatically copied into the **applicable singular properties** of the functions, respectively: **hyperbolic singular multiplier** or **singular addend**, generally named as **applicable singulars**, and are automatically applied to the generated, respectively factor-derivative or derivative at the appropriate points and by this becoming **applied singulars**. Thus, the operation of factorization or differentiation of a function is not interrupted at critical points of the respectively modulated or differentiable function:

$$\mathbf{hsm}f^{\bullet}(\mathrm{x}) = \mathbf{hsf}f(\mathrm{x}), \qquad (24.1)$$

$$\mathbf{hsm}f(\mathrm{x}) = \mathbf{hsf}F^{\bullet}(\mathrm{x}), \qquad (24.2)$$

$$\mathbf{sa}f'(\mathrm{x}) = \mathbf{sd}f(\mathrm{x}), \qquad (24.3)$$

$$\mathbf{sa}f(\mathrm{x}) = \mathbf{sd}F(\mathrm{x}), \qquad (24.4)$$

where **hsm*f*(**x) is the hyperbolic singular multiplier of the function ***f*** at the point **x**; **sa*f***(x) is the singular addend of the function ***f*** at the point **x**; ***f•*** - factor-derivative of the function ***f***; ***f'*** - derivative of the function ***f***; ***F•*** factor-anti-derivative of the function ***f***; ***F*** is the anti-derivative of the function ***f***.

It seems important not to confuse natural singular properties with applicable ones, despite the identity of the content of one and the other, since they exhibit their properties in different ways, nevertheless determined by the common content. So, unlike natural singular properties, applicable singulars are part of the function definition, they can be added (to be applied) or removed from the function definition, changing the latter in this way. Adding or removing an applicable singular changes the first or second order anti-derivatives and derivatives according to the type of applied singular.

It is proposed to graphically display the applied singulars on the diagrams as part of the function definition as follows: the **x** coordinate is the position of the singular; the **y** coordinate is the numerical value of the singular. Singular sign in the diagram: singular addends - "**+**", hyperbolic singular multipliers - "✕”. The crosshairs of the signs must accurately indicate the position of the singular on the diagram (**x**-coordinate and numerical value in **y**).

For a hyperbolic singular multiplier the definition of a hyperbolizer is indicated on the right and above its sign, but only if the hyperbolizer is not unit. If the hyperbolizer is a power function, then it is allowed to indicate only the exponentiation at **dx**, while omitting **dx** itself. Examples:

$$\times^{\ln \mathrm{dx}}, \qquad (25.1)$$

$$\times^{\mathrm{dx}^{-2}} \Leftrightarrow \times^{-2}, \qquad (25.2)$$

$$\times^{h}, \qquad (25.3)$$

where ***h*** is a function – hyperbolizer which definition can be given additionally, for example in cases where the latter is simply bulky.

When the continuous function definition and the applied singulars describe different physical quantities and/or have different physical dimensions, for example, the Power (Watts) and the Energy or Work (Joules), respectively, if the Time (seconds) is an argument, or there is a different numerical order of values of the continuous function definition and singular values, then the diagrams are supposed to use two mutually independent Y scales, separately for the function continuous definition and for the applied singulars.

Similar to the factorial-multiplication, when factorizing, the function domain can be divided into several constituent domains with analytically given functions and their separate factorization can be performed.

In the example, the construction of the factor-derivative (magenta) for a function (black) is divided into domains by break points and three critical points of the function. At the break points of the function, as expected, its factor-derivative is interrupted. Also, as expected, the graphs of the factor-derivatives of the domains are located above the x-axis, which allows reverse factorial-multiplication of the factor-derivative to restore the function. In this regard, the function interruption at **x=1.5** and **x=2** and function critical point at **x=3.5** where the function crosses the x-axis, both cause interrupting the factorization process with the loss of information about the change in the function at the those critical points.

At the points **x=1.5** and **x=2** , the function has singular factorials as ratio of the finite non-zero value of the function to the right of the respective point to the finite non-zero value of the function to the left of the respective point:

$$\mathbf{sf}f(1.5) = \frac{f([1.5])}{f((1.5))} = \frac{1.41421}{1.06066} = 1⅓\,, \quad (42.1)$$

$$\mathbf{sf}f(2) = \frac{f([2])}{f((2))} = \frac{-1}{4} = -¼\,. \quad (42.2)$$

Specially the point **x=1.5** represents a good example of how a presence of a singular multiplier at function (the factor-derivative in our case) point causes an interruption of its multiplical (the analyzed function in our case) at the same point even though the function itself (the factor-derivative in our case) has no interruption at this point.

At the point **x=3.5**, the function has a hyperbolic singular factorial that is determined by finite non-zero values of the function derivatives, including the function itself, at the point **x=3.5** on both sides of it:

$$\mathbf{hsf}f(3.5) = \left\{\mathrm{sign}(-1\%2) \cdot \frac{\mathrm{f}([3.5]) \cdot 1!}{\mathrm{f}'((3.5)) \cdot 0!}; \mathrm{dx}^{0-1}\right\}$$

$$= \left\{-1 \cdot \frac{0.66943 \cdot 1}{0.5 \cdot 1}; \mathrm{dx}^{-1}\right\} = \{-1.33887; \mathrm{dx}^{-1}\}. \quad (42.3)$$

Factorizing the function domain at critical points, taking into account the singular properties of the functions, applies corresponding hyperbolic singular multipliers to the factor-derivative. In the process of the reverse factorial-multiplication of the factor-derivative at infinitely close approximation to the point **x=2**, the finite non-zero intermediate result of the factorial-multiplication is multiplied by the finite value of the singular at this point, and at infinitely close approximation to the point **x=3.5**, the infinitely small intermediate result will be multiplied by product of the singular finite value and the hyperbolizer return value, which is, in this case, equals to the size of extremely small interval to the interruption point (hyperbolizer arm), raised to the power of –1, that is, the intermediate result is multiplied by an infinitely large number, and as a result become non-zero and finite. Also, the proportion of the relative distance to the x-axis for the locus of points of the indefinite multiplical of factor-derivative and the same of the initial function is preserved, which makes the indefinite multiplical of the factor-derivative be identical to the original function when choosing and coordinating arbitrary factors **B**.

Working with applicable singulars using helper functions

In addition to the automatic generation and application of applicable singulars to functions in the process of factorization and differentiation, these singulars can also be applied to functions in an analytical way, using the universal "apply" method, which accepts a singular directly or generates it according to data submitted to the method: singular type, its numerical value and hyperbolizer (the hyperbolizer is only for the hyperbolic singular multiplier, which is assumed to be y=1 by the default, hereinafter information about the hyperbolizer, which is given in these brackets is not mentioned, but is meant). The application of singulars is possible both ways by one singular per call of the "**apply**" method, and by an array, where the coordinates **x** of the points of application of singulars are the array keys:

apply(f, x, s), (26.1)

apply(f, x, V, T, [H]), (26.2)

apply(f, array), (26.3)

where ***f*** is the identifier of the function as the target of the object's application; **x** is the value of the function argument - point as the target of the object's application; **V** is a real number as the numerical value of the singular to be applied; **s** is the applicable object; **T** is the type of the applicable object with the following possible constants: "**D**" - discrete value for the function point; "**SA**" - singular addend, "**HSM**" - hyperbolic singular multiplier; **H** - hyperbolizer; **array** - an array of objects to be applied at the given coordinates **x** of their application in the function.

The "**apply**" method works on the principle of replacing an existing object with a newly applied object in cases where the latter has the same setting criteria as those already existing in the function definition: the **x** coordinate (the new one is placed at the existing one location point) and the object type (the new object matches the existing one type). Two or more objects or singulars of the same type cannot exist at the same point of the function.

Separately, it is worth clarifying that placing a discrete value in the definition of a function at a point will override the continuous definition of the function for this point, if it existed there, but will not lead to an effective interruption of the function when doing differentiation or factorization and integrating or factorial-multiplicating, as it is shown by example of factorial-multiplication of $\mathbf{y = |bn| \cdot |x|^n}$ at the zero point, but will cause the function to return this discrete value when it is called, submitting the coordinate of the requested point without explicitly specifying the inclusive or exclusive state.

The given singular can be removed from the function definition using the universal function "**remove**" according to the submitted singular setting criteria to the method:

$$s = \text{remove}(f,[x_0,[x_1]],[T]), \quad (27)$$

where $\mathbf{x_0}$ is the coordinate of the object for a single removal, or the first of the coordinates of the removal interval; $\mathbf{x_1}$ is the second coordinate of the removal interval; **T** - type of function definition - the object of removal: "**V**" - continuous function definition, coupled with discrete function definition; "**C**" - continuous function definition; "**D**" - discrete function definition; "**SA**" - singular addend, "**HSM**" - hyperbolic singular multiplier; **s** is entity to be removed, as object or as function.

If one does not submit the type of the object to the “**remove**” function, then the entire existing definition is being removed from the function. If an interval is passed to the “**remove**” function, then the specified function definition object type is being removed within the specified interval, if neither the object coordinate nor the interval is passed, then the specified function definition object type is being removed in the entire interval from $-\infty$ to $+\infty$. If one coordinate is passed to the “**remove**” function, then an object of the specified type will be removed at the specified coordinate: singular or discrete function definition. The “**remove**” function returns the removed object, or null, if the latter is not found in the function definition according to the passed setting criteria. In case of multiple removal of objects of the specified function definition object type by the specified interval, or the same, but without specifying the interval, then the “remove” function returns a function created with all objects of the specified function definition object type that are removed: continuous definition and/or, discrete values in points, all singulars of the specified type in relation to their original coordinates.

The "**create_singular**" function transforms a passed real number or a discrete values of a function definition, which are passed as an argument, respectively, into the value of the applicable singular created and returned or into the values of one or more applicable singulars in the function created and returned in relation to original discrete values coordinates, and all having passed singular type and hyperbolizer:

$$a = \text{create\_singular}(V, T, [H]), \quad (28.1)$$

$$f_1 = \text{create\_singular}(f_0, T, [H]), \quad (28.2)$$

where **V** is a real number as the numerical value of the returned singular; $\mathbf{f_0}$ is a discretely defined function; $\mathbf{f_1}$ is a function containing singulars.

The "**merge**" function merges several functions into one and returns the result of the merge made:

$$f = \text{merge}(f_1, [f_2, [f_3, .. [f_n]]]), \quad (29)$$

where **f** – result function; $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ .. $\mathbf{f_n}$ – functions to merge.

The "**merge**" function works on the principle of replacing the function definition to the right with the function definition to the left in the list of passed arguments, acting in the direction from left to right along the list. Discrete values, singulars with matching setting criteria, and overlapping domains of continuous function definition are subject of substitution.

The "**extract**" function extracts a part of the definition of a function of the specified function definition object type at the specified point or specified interval, and returns the result of the extraction as a function:

$$s = \text{extract}(f,[x_0,[x_1]],[T]). \quad (30)$$

The returned object, the set of arguments and the logic of their processing of the "**extract**" function completely coincides with that of the "**remove**" function. The only difference between the "**extract**" function and the "**remove**" function is that "**extract**" does not modify the function passed as an argument.

In order to find the first singular and its coordinate in the function definition, the following functions are called:

$$s = \text{find\_one}\ (f, [x_0,[x_1],T), \quad (31.1)$$

$$x = \text{find\_one\_coordinate}\ (f, [x_0,[x_1],T), \quad (31.2)$$

where **s** is an object (singular); **x** - coordinate of the object (singular).

The functions "**find_one**" and "**find_one_coordinate**" search in the direction from $\mathbf{x_0}$ to $\mathbf{x_1}$ until an object of the specified type is encountered. The set of arguments and the logic of their processing of functions completely coincides with that of the "**extract**" function. The only difference between these two functions and "extract" function is that they do not return a function under any circumstances.

All of the listed helper functions that accept intervals support the submitting of interval boundaries with the specified absolute state inclusive or exclusive and with the absolute state inclusive by the default.

The hyperbolic singular multiplier and singular addend applied to the functions do not exhibit themselves in any way during an ordinary function call with the specified argument value corresponding to the position of these features, they are in a hidden state. In order to explicitly get their numerical value, type and hyperbolizer, one needs to call the following functions, respectively, passing them a singular as an argument:

$$V = \text{singular\_value}(s), \quad (32.1)$$

$$t = \text{singular\_type}(s), \quad (32.2)$$

$$H = \text{singular\_hyperbolizer}(s), \quad (32.3)$$

where **s** is an object (singular); **T** - type of object (singular); **V** is the numerical value of the object (singular), **H** is the singular hyperbolizer.

If undefined is passed to the "**singular_type**", "**singular_value**", and "**singular_hyperbolizer**" functions as an argument, they also return undefined. The "**singular_hyperbolizer**" function returns undefined in case if a singular addend is passed as a singular. Also one can get the value of a singular or its hyperbolizer by directly referring to its property: **V = s.V**; **H = s.H**.

Algorithm for calculating defined multiplical and defined integral taking into account applied singulars

Operation constants:

Common for factorial-multiplication and integration:

d_0x – positive infinitely small or small enough when applying numerical method;

Only for factorial-multiplication: **T = ”HSM”, N = 1**.

Only for integration: **T = ”SA”, N = 0**.

Input variables:

Common for factorial-multiplication and integration: ***f_1, f_2, X_0, X_1***.

Setting the initial state of the variables: $x_0 := X_0$, $g := X_1$ ▪< X_0? –1:+1, R := N.

Executing following actions of the present paragraph in the given order in a loop till x0 <▪> X1 and R is finite and not equal to ln(N):

Common for factorial-multiplication and integration:

$$x_1' := x_0 = X_1\ ?\ \text{set\_state}(X_1, g) : \text{set\_state}(g \cdot x_0 + d_0x > g \cdot X_1 ?\ X_1 : x_0 + g \cdot d_0x, -g) \quad (33.1),$$

$$x_c := x_0 = x_1'\ ?\ \text{undefined} :$$

$$\Big(\text{find\_one\_coordinate}(f_1, x_0, x_1', T)\ ||\ \text{find\_one\_interruption\_coordinate}(f_2, x_0, x_1')\Big), \quad (33.2)$$

Only for factorial-multiplication:

$$i := |x_1 - x_0|\ /\ 2 \geq |x_c - x_0|, \quad (33.3.1)$$

$$x_1 := x_c\ ?\ \Big(x_c = x_0\ ?\ \text{set\_state}(2 \cdot x_0 - x_1', -g) :$$

$$\left(x_c = x_1'?\ \text{set\_state}(x_1', g) : \text{set\_state}\left(2 \cdot x_c - (i\ ?\ x_0 : x_1), -g\right)\right) : x_1', \quad (33.4.1)$$

Only for integration:

$$i := x_c = x_0, \quad (33.3.2)$$

$$x_1 := x_c\ ?\ \text{set\_state}\left(x_c, i\ ?\ g : -g\right) : x_1', \quad (33.4.2)$$

Common for factorial-multiplication and integration:

$$dx := x_1 - x_0, \quad (33.5)$$

$$s := i\ ?\ \text{find\_one}(f_1, x_0, x_1, t) : \text{undefined}, \quad (33.6)$$

$$V := \text{singular\_value}(s), \quad (33.7)$$

$$x := i\ ?\ x_c : (x_1 + x_0) / 2, \quad (33.8)$$

Only for factorial-multiplication:

$$H := \text{singular\_hyperbolizer}(s), \quad (33.9)$$

$$d_h x := \text{sign}\left(\ln\left(H(d_0 x)\right)\right) \cdot g\ ?\ x_1 - x_c : x_c - x_0, \quad (33.10)$$

$$\text{tsf} := \left(V \cdot H(d_h x)\right)^g, \quad (33.11.1)$$

$$\text{tf} := f_2(x)\ |!|\ f_2(x)^{dx/2} \cdot f_2(x_1)^{dx/2}, \quad (33.12.1)$$

$$R := R \cdot (\text{tsf}\ ||\ \text{tf}), \quad (33.13.1)$$

Only for integration:

$$\text{tsd}(x) := V \cdot g, \quad (33.11.2)$$

$$\text{td} := f_2(x)\ |!|\ f(x_0)\, dx/2 + f(x_1)\, dx/2, \quad (33.12.2)$$

$$R := R + (\text{tsd}\ ||\ \text{td}), \quad (33.13.2)$$

Common for factorial-multiplication and integration: $x_0 := x_1$. (33.14)

Returning the result: R.

where $\mathbf{d_0x}$ is the nominal element of factorial-multiplication or integration, sets the length of the corresponding value; **T** is the type of the applicable singular; it depends on the operation being carried out: factorial-multiplication or integration; **N** is a neutral element which depends on the operation being carried out; $\boldsymbol{f_1}$ is a multiplicand or integrand function containing hyperbolic singular multipliers or singular addends, respectively; $\boldsymbol{f_2}$ is a multiplicand or integrand function containing a continuous function definition; $\mathbf{X_0}$ is the absolute beginning boundary of the factorial-multiplication or integration segment; $\mathbf{X_1}$ is the absolute ending boundary of the factorial-multiplication or integration segment; **:=** - assignment sign, value to the right of itself is set to variable to the left of itself; $\mathbf{x_0}$ is the absolute beginning boundary of the factorial-multiplication or integration element; **{..} ? {..} : {..}** is a conditional operator that works according to the scheme: {questioned statement} ? {expression in case of truth} : {expression in case if false}; **g** - sign of the element of factorial-multiplication or integration, at the same time it is an indicator of the direction of factorial-multiplication or integration, respectively: +1 in the direction of the growth of the argument, –1 in the opposite direction of the direction of the growth of the argument; **R** is the result of factorial-multiplication or integration, and also the intermediate result of factorial-multiplication or integration, respectively; $\mathbf{x_1'}$ is the absolute preliminary ending boundary of the factorial-multiplication or integration element; **||** - sign of the enumeration operator, returns the value to the right of itself, if the value to the left of it is not defined, otherwise it returns the value to the left of it; **find_one_interruption_coordinate(*f*, $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$)** - a function that returns the absolute coordinate of the first interruption of f_2 within the boundaries of the specified interval from $\mathbf{x_0}$ to $\mathbf{x_1}$, searching in the direction from $\mathbf{x_0}$ to $\mathbf{x_1}$; $\mathbf{x_c}$ is the absolute coordinate of the applied singular in f_1 or the f_2 interruption; **i** – indicator of singular inclusion or function interruption in the operation element; $\mathbf{x_1}$ is the absolute ending boundary of the factorial-multiplication or integration element; **s** is the applied singular; **V** is the singular numerical value; **x** is the absolute coordinate of the conditional middle of the factorial-multiplication or integration element; **dx** is the effective element of factorial-multiplication or integration; $\mathbf{d_h x}$ - part of the factorial-multiplication element - the hyperbolization arm; **H** is the hyperbolizer; **tsf** – technical singular factorial of the factor-anti-derivative; **|!|** - sign of the negative enumeration operator, returns the value to the left of itself if it is not defined, otherwise it returns value to the right of itself; **tf** – technical continuous factorial of the factor-anti-derivative; **tsd** – technical singular differential of the anti-derivative; **td** is the technical continuous differential of the anti-derivative.

Note: functions f_1, f_2 can be represented by one function. In present case, the explicit separation to two functions demonstrates the fundamental possibility of calculating over two separate functions.

Explanation of the algorithm for calculating a definite multiplical and integral taking into account applied singulars

Factorial-multiplication or integration (hereinafter referred to as the operation) begins with setting the initial state: the beginning boundary of the first element of the operation $\mathbf{x_0}$ is set to the beginning of the segment of the operation $\mathbf{X_0}$. The intermediate result **R** is set to a neutral number **N**. The direction of operation relative to the direction of the x-axis is determined by means of determining the indicator of the direction of operation **g**.

The iterations of the loop are repeated till the intermediate result of the operation does not go beyond the allowable values and till the initial boundary of the operation element is less than the final boundary of the operation segment, taking into account the absolute state of the boundaries (inclusive or exclusive). Further explanation is given on the example of the forward direction of the operation, which is in the direction of growth of the argument. And here it is necessary to clarify that if considering the operation in the opposite direction then the described absolute states of the boundaries change to the opposite: inclusive to exclusive, and exclusive to inclusive, which **g** is responsible for.

At the beginning of each cycle, based on the nominal size of the operation element, the preliminary ending boundary of the operation element $\mathbf{x_1'}$ is determined. The ending boundary of the segment of the operation is taken into account here. By default, the ending boundary of the operation element is defined as exclusive, except for the case when the beginning boundary of the operation element with the state exclusive coincides in coordinate value with the ending boundary of the segment of the operation with the state inclusive, by other words, when the last element of the operation contains only a transition through point of the ending boundary of the segment of the operation.

After determining the preliminary ending boundary of the operation element, a check is made for the presence of applied singulars of $\boldsymbol{f_1}$ inside this element, and if they are not found, then a check for the presence of $\boldsymbol{f_2}$ interruptions inside this element, and in that order, and the coordinate of such a point $\mathbf{x_c}$ is extracted, if it is found. If the values of the coordinates of the beginning and preliminary ending of the operation element coincide (the operation element is only a transition through a point), then it makes no sense to look for the coordinate of the applied singular or interruption, if one of them exists, then it is at the point.

Once $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1'}$ and $\mathbf{x_c}$ are known the final coordinate and state of the ending boundary of the operation element $\mathbf{x_1}$ can be determined, which will finally determine the position and size of the operation element. The method of obtaining this value is different for factorial-multiplication and integration.

The peculiarity of determining the operation element for factorial-multiplication is that, the position of the applied singular found, if possible, should fall in the middle of the operation element with the equality of the lengths of the resulting parts of the operation element on both sides of the applied singular in order to comply with the above described symmetry. The exceptions are cases where symmetry cannot be achieved in principle potentially for the first and last element of the operation, if the corresponding boundaries of the operation segment are specified with the state exclusive for the beginning or inclusive for the ending boundary, and same time singulars are applied at these boundary points.

The ending boundary of the operation segment approaches the beginning one in order to comply with the symmetry condition indicated above, or in order not to include the found singular at all to the current iteration, but to include it in the next one, because otherwise the length of the operation segment potentially will exceed the nominal length, which may be critically important when applying the numerical method for calculating the multiplical or integral.

The specific feature of defining an operation element in integration is the separation of singulars or interruptions of a function from domains of continuous function definition and their allocation among different operation elements. Thus, if the applied singular or interruption is found at the beginning of the operation element, then the operation element includes only the transition through this point, otherwise the operation element ends before the point, without passing through it and excluding the point in itself.

The indicator **i** indicates the inclusion of the found singular or interruption in the current iteration.

After determining the ending boundary of the operation element, it is possible to determine the length of the operation element **dx**, which can be zero if the operation element is only a transition through a point, and also it is possible to find the applied singular **s** in the operation element if it is certain that it is included in the current element of the operation, for which **i** is responsible. If the singular is found then it is possible to read its numerical value **V**, and for the hyperbolic singular multiplier, also its hyperbolizer **H**. If the inclusion of the applicable singular or function interruption in the current element of the operation is confirmed, then the coordinate of the detected one of them is taken as the midpoint **x** of the operation element, thereby recreating the conditions of the singular creation from a symmetric factorial of the multiplicand function anti-derivative (if it is created during factorization). If the inclusion of the applicable singular or function interruption in the current operation element is not confirmed, then the midpoint of the operation element is taken as the default midpoint. One of the two halves of the factorial-multiplication element. formed by its division by the midpoint, is designated as the hyperbolization arm $\mathbf{d_h x}$.

After the preparatory steps are completed, it is possible to begin to calculate the elementary increment of the operation result, for factorial-multiplication it is an elementary multiplier, for integration it is an elementary addend. Each of them is determined by the values of its two parts: the first and prior, responsible for the increment associated with the presence of the applicable singular, and the second and secondary, responsible for the increment associated with the continuous definition of the function. So, if the first part has certainty (the applicable singular is present in the operation element), then the second part is not taken into account. As a rule, the interruption of the function is covered by the presence of the applicable singular, which, as it were, puts a patch on this section of the function, which, in particular, justifies the priority of the first part over the second. Also, the reason for the priority of the first part is the immeasurability of the parts as multipliers or addends. The second part influence on the result of the operation шы tending to nothing, compared to the influence of the first part, when the size of the operation element approaches zero.

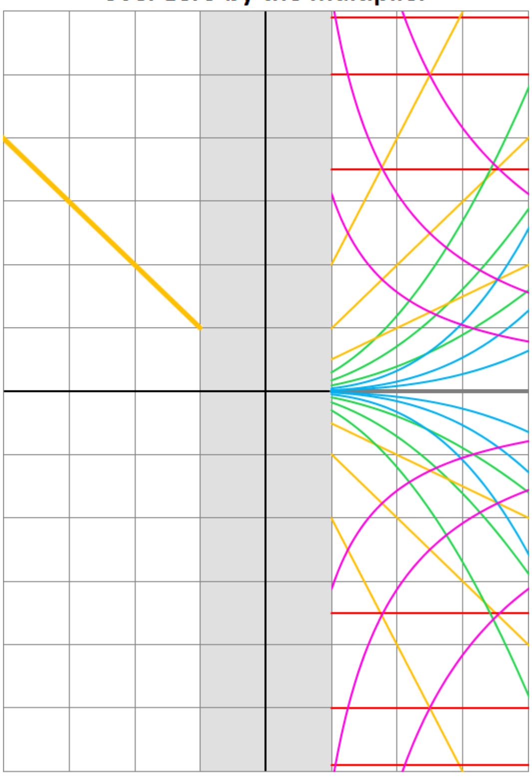
The calculation of the first part of **tsd** for integration is quite trivial and is the result of multiplying the value of the singular addend by the integration direction indicator **g**, depending on the integration direction, either leaving the singular addend as an addend (for direct) or effectively turning it into a subtrahend (when reversed). The calculation of the first part **tsf** for factorial-multiplication is somewhat similar, but just as complicated. Instead of multiplying the hyperbolic singular multiplier is raised to power of the direction indicator **g**, depending on the direction of factorial-multiplication, either leaving the hyperbolic singular multiplier as a multiplier (when forward) or effectively turning it into divider (when reverse). Also, the hyperbolic singular multiplier itself has a positive hyperbolizer return value **H** as its own multiplier, which for obvious reasons is not present with the singular addend in any form.

As it is already clear, the value of the hyperbolic singular multiplier can be negative. The negative arithmetic sign allows, during the factorial-multiplication, to translate the intermediate result of the factorial-multiplication, and hence the multiplical function from the positive zone to the negative one, and vice versa, an unlimited number of times, which is one of the guarantees of restoring the function from its derivative filled with hyperbolic singular multipliers. If we are talking about an indefinite multiplical, then the freedom to choose an arbitrary multiplier **B** saves us from the need to choose the arithmetic sign of multiplical domains, which are separated by the transition of the multiplical through zero, directly in the process of factorial-multiplication. In this case, the determining factor is the position of the zero crossing points and their number within the factorial-multiplication segment or within the entire domain of the indefinite multiplical definition.

Speaking about the number of transitions of the multiplical from the positive to the negative zone and vice versa, and therefore about the number of negative multipliers encountered in the process of factorial-multiplication, we can refer to the fact that hyperbolic singular multipliers in general, being discrete quantities, assume the finiteness of their number relative to the finite interval of the multiplicand function, which obviously casts to the finiteness of the number of negative multipliers of the intermediate factorial-multiplication result in the finite factorial-multiplication segment, and thus fundamentally removes the prohibition on the negative value of the hyperbolic singular multiplier, which is fundamentally imposed on the negativity of the multiplicand function continuous definition the precisely because of the appearance in this case of a sequential series of negative multipliers of infinite quantity.

tsf or **tsd**, having priority over **tf** or **td**, respectively, effectively “cuts out” this function continuous definition in the interval of the operation element and replaces it with itself. From a technical point of view, the intermediate result corresponding to the beginning point of the operation element is multiplied by **tsf** or added by **td**, respectively, at the entrance of the iteration and passed to the iteration exit, to the point corresponding to the ending of the operation element.

"throwing" the multiplical over zero by the multiplier



Thus, the intermediate result of the factorial-multiplication does not reach extreme values: uncertainty or zero. Suppose it approaches zero at an infinitely small distance from it and then either “throws” over the x-axis by the negative value of the hyperbolic singular multiplier, or “reflects” from it if the latter is positive. With or without “refraction”, with the equal angle of reflection to the angle of incidence or not, with “jump” in the value of the function or its derivatives or not, all this depends on the value of the modulus of the value of the singular hyperbolic multiplier, whether it differs from 1, and for how much.

The diagram shows an illustration of the "throwing" and "reflection" varieties in the vicinity of the critical point (gray zone) depending on the value of the hyperbolic singular multiplier and the definition of its hyperbolizer.

Strictly speaking, the multiplical obtained as a result of the reverse factorial-multiplication of the factor-derivative with the applied singulars is not an exact copy of the original function due to the presence of “throws” through zero or “reflections”, which we know about, but nevertheless is effectively identical to it which, in particular, is necessary for the practical use. Despite the presence of such an infinitely small "patches", the new function has hyperbolic singular factorials indistinguishable from those of the original function, which makes it possible to repeat the factorization with it again and obtain an identical factor-derivative.

In the vicinity of the interruption point of the integrand or multiplicand function (hereinafter the sub-operational function) we can calculate respectively arithmetical mean or geometrical mean out of two values of the sub-operational function taken on both sides of the interruption point and at the same infinitesimal distance from it. We call this the value as the conditional average at the interruption point.

So the finite value of this quantity indicates that the influence of the sub-operational function values before the interruption point on the intermediate result of the operation (on the integral or multiplical, respectively) is compensated by its values after the interruption point. We can say that the values of the function in the vicinity of the interruption point on both sides of it are mutually compensating. In this case a singular addend or a hyperbolic singular multiplier with unit hyperbolizer can be placed at this point as a “patch”, which generates the finite size values of **tsd** and **tsf** respectively, establishing the absolute difference or the relative (proportional) difference between the two domains of the integral or multiplical respectively.

During the factorial-multiplication, if the conditional average value at the critical point is infinitely small or infinitely large in modulus, then compensation is performed by the return value of the hyperbolizer, by the hyperbolizer definition which is corresponding to the case, and which is different from unity. The hyperbolizer is something what brings the value of the hyperbolic singular multiplier into line with the continuous definition of the multiplicand function on either side of the interruption point. An infinitely large conditional average is compensated by an infinitely small hyperbolizer return value, an infinitely small conditional average is compensated by an infinitely large hyperbolizer return value.

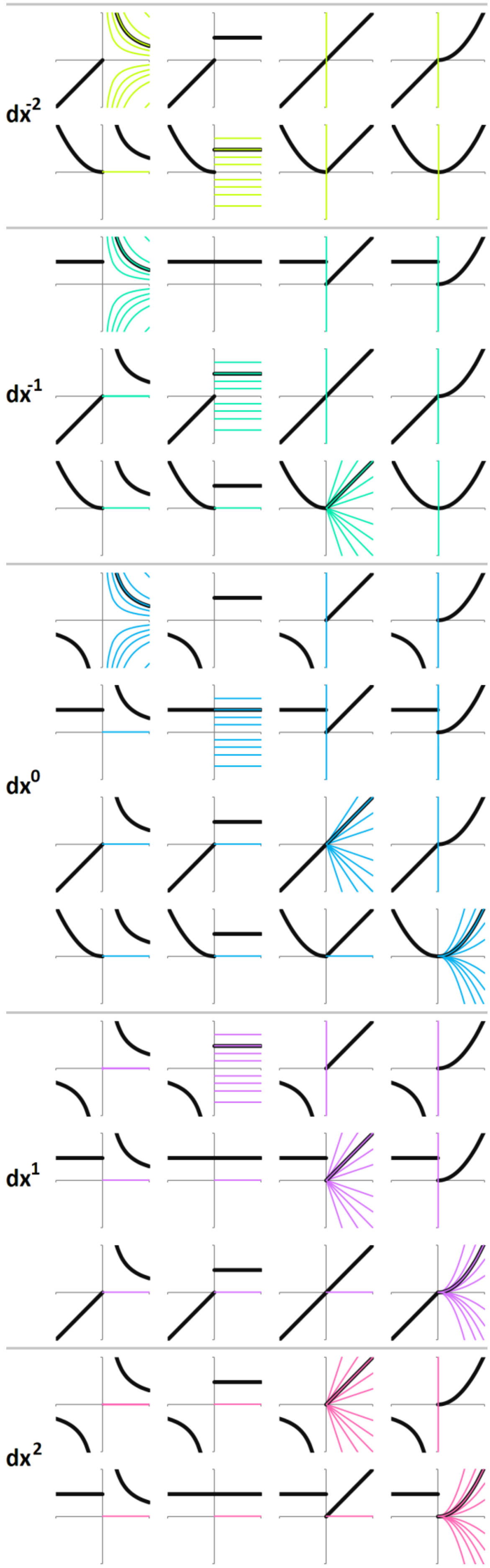
For this reason, a definite multiplical for a segment consisting of only one point with a singular with a non-unit hyperbolizer will not give a finite result. Also, the result of factorial-multiplicating the segment, the boundaries of which include points with hyperbolic singular multipliers with a non-unit hyperbolizer, may not give the finite result. For the integration operation, the conditional average value, which is infinitely large in modulus, at the critical point, unfortunately, cannot be compensated.

If the hyperbolizer definition at a point does not correspond to the conditional average value at a point, and not necessarily at the interruption point of the multiplicand function, then the factorial-multiplication can be interrupted by turning the multiplical to zero or to infinity modulo. In such cases, the hyperbolizer is insufficient or excessive. The automatic generation of the applicable singulars during the factorization of functions by definition cannot lead to a mismatch of the hyperbolizer definition. Here deliberately applied singulars, function modification are meant.

The diagram shows combinations of the continuous definition of the multiplical on both sides of the critical point (black graphs) given by the following power equations: **$y=C/x$; $y=C$; $y=C\cdot x$; $y=C\cdot x^2$**. The colored graphs show how the multiplical possibly could develop to the right of the critical point when a hyperbolic singular multiplier is placed at the critical point, depending on the definition of the hyperbolizer, namely on the value of exponentiation, as follows (from right to left): light green: –2, aquamarine: –1, blue: 0, lilac: 1, magenta: 2. A fan of color plots of non-zero finite value indicates a matched hyperbolizer definition of a combination of indefinite multiplicals on either side of a critical point. Zero or undefined values of these graphs indicate inconsistency: insufficiency or excessivity of the hyperbolizer, respectively.

A hyperbolizer return value depends on the factorial-multiplication element passed as the hyperbolization arm which is infinitesimal or small enough respectively for the analytical or numerical solution of a definite multiplical. Metaphorically speaking, the hyperbolic singular multiplier is a “seed” containing quantitative (finite value of the singular) and qualitative (hyperbolizer definition) information about its potential growth, the factorial-multiplication

H **Assesment of consistency between a hyperbolizer and combinations of types of constituent functions**



element is a growth resource, “fertile soil”, and the result of “powering” the hyperbolic singular multiplier by the factorial-multiplication element generates a "fruit" ready for use as a multiplier or divisor of the intermediate result of the factorial-multiplication.

The question of why the singular contains qualitative information, why the nature of hyperbolization is not determined "automatically", "in place" in the process of factorial-multiplication, disappears for two reasons. Firstly, an applicable singular is a property of a function at a point, which in principle cannot depend on the analysis being carried out, on its logic and surrounding circumstances, in other words, the analyst must have the right and the technical ability to purposely apply a singular at a point with a hyperbolizer definition that does not correspond to this point. Secondly, the factorial-multiplication process is sequential, it does not "run ahead" in order to possibly determine the nature of the development of the factorial-multiplication after the interruption point, and then choose the appropriate definition of the hyperbolizer for the interruption point. The operation logic of factorial-multiplication or integration is built in such a way that it “works blindly”, as it should be in principle, it should not care about the input value and state of the intermediate result at the entrance to the iteration, whether it is finite, infinitesimal or infinitely large (the arbitrary multiplier B is purely responsible for the input value), so it does not care about the output value, whether it is finite, infinitesimal, or infinitely large.

Analysis of the continuous definition of a sub-operational function solely (function derivative or function factor-derivative, respectively) without taking into account the applied singulars does not allow us to guarantee the restoration of the function itself, if we admit the possibility of interruptions of the function or interruption of its derivatives at critical points (for a multiplical at zero points), that is, due to for the presence of the problem of coordinating arbitrary addends or arbitrary multipliers. This circumstance once again indicates the need to introduce the class of applicable singulars and their application to sub-operational functions in the circumstances of the analysis, including the critical points themselves and the properties of the functions at these points.

If a singular is not found in the operation element, then the process is effectively executed by the continuous definition of the sub-operational function. A preliminary check is made of the definiteness of the sub-operational function at the midpoint. For example, the zero point passes such a check in the absence of an applicable singular when factorial-multiplicating the modulus of the function that intersects the x-axis. To ensure significantly greater practical accuracy in the numerical solution of a definite multiplical or a definite integral, the multiplier or addend of the intermediate result, respectively, of factorial-multiplication or integration is calculated as the geometric mean and arithmetic mean, respectively, out of the values of the sub-operational function at the beginning boundary and at the ending boundary of the operation element.

Recording the multiplical and integral, taking into account applied singulars

Since the singulars applied to functions do not manifest themselves in any way when the latter is usually called, the formal approach requires modifying the notation of the multiplical and integral, which implies the operation that takes into an account applicable singulars in the function definition:

For multiplical:

$$\bullet\int \overset{|}{f_1}(\mathrm{x},\mathrm{dx})\ ||\, f_2(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}\ ||\ 1, \quad (34.1.1)$$

$$\bullet\int \overset{|}{f}(\mathrm{x},\mathrm{dx})\ ||\ 1, \quad (34.2.1)$$

$$\bullet\int \overset{+}{f}(\mathrm{x},\mathrm{dx})^{\mathrm{dx}}\ ||\ 1, \quad (34.3.1)$$

$$\bullet\int f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}\ ||\ 1, \quad (34.4.1)$$

For integral:

$$\int \overset{|}{f_1}(\mathrm{x},\mathrm{dx})\ ||\, f_2(\mathrm{x})\mathrm{dx}\ ||\ 0, \quad (34.1.2)$$

$$\int \overset{|}{f}(\mathrm{x},\mathrm{dx})\ ||\ 0, \quad (34.2.2)$$

$$\int \overset{+}{f}(\mathrm{x},\mathrm{dx})\mathrm{dx}\ ||\ 0, \quad (34.3.2)$$

$$\int f(\mathrm{x})\mathrm{dx}\ ||\ 0, \quad (34.4.2)$$

where "**|**" - the function accent, forcing the function to return only multipliers or only addends for the intermediate result of factorial-multiplication or integration, respectively, which are due to the applied singulars that fall into the operation elements, otherwise it returns uncertainty; "**+**" the function accent, forcing the function to return multipliers or addends for the intermediate result of factorial-multiplication or integration, respectively, which is due both to the singulars that fall into the operation elements and to the continuous definition of the function.

Accenting gives the function the logic described above, essentially defining a new function, which is based on the function under the accent. **dx** is passed to this new function as an additional argument. This is necessary so that, acting in the new logic, the function could search for a singular inside the operation element and generate the hyperbolizer return value. At the same time, the reduced notation, the one with an accent "**+**", formally implies the return of infinite values by the function under the accent: **tsd / dx** when integrating, and $\sqrt[\mathbf{dx}]{\mathbf{tsf}}$ when factorial-multiplicating. It is assumed that before extracting the root from **tsf**, the latter decomposes into two multipliers: its module **|tsf|** and its arithmetic sign **sign(tsf)** as follows: $\sqrt[\mathbf{dx}]{\mathbf{sign(tsf)}} \cdot \sqrt[\mathbf{dx}]{|\mathbf{tsf}|}$, which is necessary for the possibility of transferring the sign of the multiplier through the operation of raising to an infinitesimal power **dx**. In this context, whatever the expression $\sqrt[\mathbf{dx}]{-\mathbf{1}}$ is, but subsequently raised to the power of **dx**, must result **—1** .

The expanded notation, the one with the accent "**|**", allows us to perform operations using two separate functions: one is for function definition with singulars and another for continuous function definition.

Equations **34.4.1** and **34.4.2** reflect the classical conduct of operations without taking into account the applicable singulars, even though they are present in the definition of the sub-operational function.

The optional additions **||1** and **||0** can be used to prevent the operation from being aborted if there is no continuous function definition.

Solely for the purpose of demonstrating the possibilities of factorial-multiplication taking into account the singular properties of functions, it is possible to define **x!** using a definite multiplical. To do this, we need to introduce the **getZ** function, which generates a discrete function from a continuous one passed as an argument by removing the definition of the function from its entire domain except for the points of the integer value of the argument:

$$\mathrm{X(x) = x}, \quad (35.4)$$

$$\mathrm{x! = \bullet\!\!\int_0^x \overset{|}{\text{create\_singular}}(getZ(X), "HSM")(x', dx')\ ||\ 1}. \quad (35.5)$$

The rule for matching an arbitrary multiplier "B" and an arbitrary addend "C" taking into account applied singulars

The coordinating equations for arbitrary multipliers and arbitrary addends for adjacent domains of functions in the analytical construction of indefinite multiplicals and indefinite integrals, taking into account the presence of hyperbolic singular multipliers and singular addends, take the following form:

$$F_0\big((\mathrm{x})\big) + \mathrm{C_0} + \mathbf{sa}f(\mathrm{x}) = F_1(\mathrm{x}) + \mathrm{C_1}, \quad (36.1)$$

$$\lim_{\mathrm{dx}\to 0} F^{\bullet}{}_0(\mathrm{x-dx}) \cdot \mathrm{B_0} \cdot \mathbf{hsm}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} \cdot \mathbf{hsm}f(\mathrm{x}).\mathrm{H(dx)} = \lim_{\mathrm{dx}\to 0} F^{\bullet}{}_1(\mathrm{x+dx}) \cdot \mathrm{B_1}, \quad (36.2)$$

$$\mathrm{p_x} = \lim_{\mathrm{dx}\to 0} \log_{dx} \mathbf{hsm}f(\mathrm{x}).\mathrm{H(dx)}, \quad (36.3)$$

$$(F^{\bullet}{}_0)'^{\mathrm{j_x}}\big((\mathrm{x})\big) \cdot \mathrm{k_x}! \cdot \mathrm{B_0} \cdot \mathbf{hsm}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} \cdot 0^{(\mathrm{p_x - k_x + j_x})} = (F^{\bullet}{}_1)'^{\mathrm{k_x}}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{j_x}! \cdot \mathrm{B_1}, \quad (36.4)$$

where $\mathbf{F_0}$ is the anti-derivative of the function to the left of the point **x** with a singular addend; $\mathbf{F_1}$ - anti-derivative of the function to the right of the point with the singular addend; $\mathbf{C_0}$ is an arbitrary addend of the indefinite integral of the function to the left of the point **x**; $\mathbf{C_1}$ is an arbitrary addend of the indefinite integral of the function to the right of the point **x**; **sa*f*(x)** is the value of the singular addend at the point **x**; **p** – exponentiation at **dx** in the hyperbolizer definition; $\mathbf{j_x}$ is the ordinal number of the first found derivative of the anti-derivative with a non-zero finite value at the point **x** exclusive, starting from the 0^{th} ordinal number, meaning the anti-derivative itself; $\mathbf{k_x}$ is the ordinal number of the first found derivative of the anti-derivative with a non-zero finite value at the point **x** inclusive, starting from the 0^{th} ordinal number, meaning the anti-derivative itself;$\mathbf{(F^\bullet{}_0)'^{j_x}}$ – $\mathbf{j}^{th}$ derivative of the factorial-anti-derivative function to the left of the point with a singular **x** exclusive; $\mathbf{(F^\bullet{}_1)'^{k_x}}$ – $\mathbf{k}^{th}$ derivative of the factorial-anti-derivative function to the right of the point with a singular **x** inclusive; $\mathbf{B_0}$ is an arbitrary multiplier of an indefinite function multiplical to the left of the point **x**; $\mathbf{B_1}$ is an arbitrary multiplier of the indefinite multiplical of the function to the right of the point **x**; **hsm*f*(x).V** is the value of the hyperbolic singular multiplier at point **x**; **hsm*f*(x).H** is the hyperbolizer of the hyperbolic singular multiplier at point **x**.

The coordinating equation for arbitrary addends of indefinite integral is a coordinating equation for the singular differential of the anti-derivative with the singular addend of the integrand function (**36.1**). For an indefinite multiplical, the analogy is expressed in coordinating the symmetric factorial of the anti-derivative with the hyperbolic singular multiplier of the multiplicand function (**36.2**), and for this reason the equation is solved through the limit as **dx** tends to zero.

If it is possible to find a solution for a hyperbolic singular factorial of indefinite multiplical at the point **x** in terms of non-zero finite value derivatives of its adjacent constituent functions and if the hyperbolizer of the hyperbolic singular multiplier at the point **x** is represented by a power function with natural, including zero, exponentiation at **dx**, the coordinating equation for arbitrary multipliers for these constituent functions can be expressed in terms of their derivatives (**36.4**). The size of **dx** in this case is not critical, it is necessary only to extract the integer exponentiation at **dx** from the hyperbolizer definition (**36.3**). As it is seen in **36.4** a successful arbitrary multipliers coordination is only possible in case if the hyperbolizer compensates a potential immeasurability of the indefinite multiplical constituent functions values on both sides of point **x**. The following equation has to be valid: $\mathbf{p_x - k_x + j_x = 0}$, implying $\mathbf{0^0 = 1}$, as checking for satisfaction of the compensation.

References:

[1] Math Singularity https://en.wikipedia.org/wiki/Singularity_(mathematics)

[2] Dmitrii V. Guryanov, Multiplical concept https://vixra.org/abs/2205.0150

Сингулярные свойства

Дмитрий Владимирович Гурьянов

dmitriigur76@gmail.com

Аннотация Цель настоящей статьи в своём качестве продолжения развития концепции мультипликала – это найти решение для операций дифференцирования и факторирования функции с точками прерывания или точками обращения функции в ноль. Решение, что позволило бы восстановление исходной функции по средствам обратного интегрирования или мультиплицирования предварительно полученной производной или фактор-производной соответственно с подбором произвольного слагаемого C или произвольного множителя B соответственно. В результате проделанной работы были введены новые классы свойств функций в точках.

Ключевые слова: Естественные сингулярные свойства, Прилагаемые сингулярные свойства, Сингулярный дифференциал, Сингулярный факториал, Симметричный факториал, Гиперболический сингулярный факториал, Сингулярное слагаемое, Гиперболический сингулярный множитель.

Предыдущая связанная статья: Концепция мультипликала https://vixra.org/abs/2205.0150

Краткое содержание

1. Введение 30
2. Состояние включительно/не включительно 31
3. Естественные сингулярные свойств 33
4. Прилагаемые сингулярные свойства и логика факторирования и дифференцирования с учётом прилагаемых сингулярных свойств 40
5. Работа с прилагаемыми сингулярами через вспомогательные функции 43
6. Алгоритм вычисления определённого мультипликала и определённого интеграла с учётом приложенных сингуляров по пунктам 46
7. Пояснение работы алгоритма вычисления определённого мультипликала и интеграла с применением прилагаемых сингуляров 49
8. Запись мультипликала и интеграла с учётом приложенных сингуляров 56
9. Правило согласования произвольного множителя «B» и произвольного слагаемого «C» с учётом приложенных сингуляров 57

Введение

Критические точки функции – это особенности функции (точки прерывания функции), а для рассмотрения факториалов и операции факторирования дополнительно ещё точки обращения функции в ноль.

Операции дифференцирования и факторирования прерываются в критических точках функции, так информация о характеристике функции в точке не переносится на её соответственно производную и фактор-производную (далее первые производные), то есть теряется безвозвратно. В результате чего при обратном соответственно интегрировании или мультиплицировании предварительно полученных первых производных нет возможности восстановить исходную функцию.

Наверное на этом можно было бы поставить жирную точку, но приведённое обстоятельство нарушает взаимную обратимость фактор-производных и неопределённых мультипликалов, а также производных и неопределённых интегралов или накладывает на анализируемые функции ограничительные условия, и таким образом косвенно нарушает постулат об взаимной обратимости операций мультиплицирования и факторирования, а также интегрирования и дифференцирования, за которые стоит методологически побороться, как я полагаю.

Задача сводится к выработке новой расширенной логики работы упомянутых операций математического анализа, при применении которых обратные операции приводили бы к эффективному восстановлению исходной функции в виде неопределённого мультипликала или неопределённого интеграла при соответствующем подборе произвольных множителя **B** или слагаемого **C** соответственно, если не для всех, то для значительно большего числа случаев, что могло бы быть использовано в практическом приложении.

Новая логика работы подразумевает возможность наличия у функций новых свойств. В данном случае речь идёт о свойствах функций в безразмерных точках, или свойствах, проявляемых функциями при переходе через точку в процессе анализа. Общее наименование класса таких свойств - **сингулярные свойства** функций в точках. Они могут как присутствовать в точках аналитически заданных функций естественным образом, и в этом случае анализ покажет на них, так и быть приложенными точкам функций как аналитически, так и автоматически в ходе проводимого факторирования и дифференцирования функций при наступлении определённых обстоятельств. Общим для сингулярный свойств функций является то, что при анализе их значение никаким образом не зависит от дифференциала аргумента **dx**. В качестве первого и известного примера сингулярных свойств можно привести дискретные значения в определении функции. Не смотря на то, что последнее напрямую не участвует в описываемых здесь аналитических преобразований, тем не менее дискретное определение подпадает под определение сингулярных свойств.

Работа операторов по новой учитывающей сингулярные свойства функций логике находит своё нотационное отражение, отличающего её от работы по классической логике - той, что игнорирует сингулярные свойства функций как естественно присутствующие, так и приложенные.

Состояние включительно/не включительно

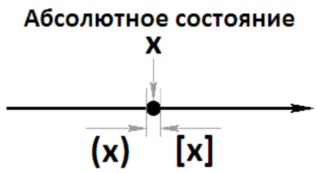
Поскольку речь идёт о таких свойствах функций, что эффективны при проходе через точки, становится необходимым определять границу анализируемого отрезка, интервала или области функции с дополнительным указанием о включении или не включении рассматриваемой пограничной точки интервала, отрезка, области в соответствующий интервал, отрезок, область, что справедливо по отношению к обеим (правой и левой) конечным пограничным точкам, за исключением случаев, когда пограничной точки или сразу обеих просто нет, когда область функции не имеет границы и уходит в бесконечность. Таким образом определение границы включает в себя не только координату точки этой границы, но и информацию о состоянии: включительно или не включительно, что должно находить своё отражение в нотации при записи координат. Говоря о включении или не включении точек в интервал не следует воспринимать данную фигуру речи буквально, ибо не имеет смысла включать или не включать безразмерное нечто (точки). В данном случае речь идёт об учёте (включении) или о не учёте (не включении) соответствующего сингулярного свойства функции в конкретной точке в процессе проведения анализа функции в одном из двух его направлений: в сторону роста или в сторону убывания аргумента функции. Состояние включительно/не включительно для подставляемого значения аргумента функции также становится определяющим в рассматриваемом подходе.

Для правой пограничной точки отрезка: включено в отрезок подразумевает положение границы отрезка при её бесконечном приближении к пограничной точке справа, а не включено в отрезок подразумевает положение границы отрезка при её бесконечном приближении к пограничной точки слева, а для левой пограничной точки всё наоборот, включено в отрезок подразумевает положение границы отрезка при её бесконечном приближении к пограничной точке слева и не включено в отрезок подразумевает положение границы отрезка при бесконечном её приближении к пограничной точки слева. В данном примере описан принцип относительного состояния включительно/не включительно, то что относительно конкретного отрезка.

В обстоятельствах того, что анализ функций проводится вдоль всей оси абсцисс, с возможным разбиением анализируемой области на смежные отрезки, располагающиеся в стык другу к другу, без пропусков и накладок, когда левая граница одного отрезка одновременно означает границу следующего за ним и смежного ему отрезка (совпадает в своём определении: координата точки + состояние включительно/не включительно), необходимо переходить на принцип абсолютного, не отрезко-центрического состояния включения или не включения точек в интервалы, отрезки и области, в противном случае неизбежен конфликт последних в «борьбе за общие точки».

Специальное обозначение для абсолютного состояния включительно/не включительно для значения аргумента или для координаты границы интервала, отрезка, области принимается как следует:

- Абсолютно включительно **x**: **[x]**
- Абсолютно не включительно **x**: **(x)**



Поскольку существуют дискретные функции, возвращающие свои значения только в точках, и также по причине того, что по умолчанию анализ функции проводится в направлении роста аргумента, принимается правило о том, что абсолютное состоянии включительно/не включительно для координат точек, границ интервалов, отрезков, областей функций совпадает с вышеописанным относительным состоянием включительно/не включительно именно для правой границы отрезка. Одновременно в качестве следствия выше обозначенных причин данное правило подразумевает абсолютное состояние включительно по умолчанию для подставляемых значений в качестве аргумента функции для указании координаты точки, или границ интервалов, отрезков, областей, в том числе в качестве определения отрезков интегрирования и мультиплицирования, если другое состояние не указано специально. Выражение **f(x)** равносильно выражению **f([x])**, где оба подразумевают включительно **x**, что отличает их от выражения **f((x))**, подразумевающего не включительно **x**.

<u>Примечание</u>: Правило о состояние включительно по умолчанию не действует для передаваемого аргумента функции в точках, где присутствует определение дискретного значения. Для таких точек выражение **f(x)** будет возвращать дискретно заданное значение в точке **x**. для что бы получить значение непрерывного определения функции при приближении к точке справа (если оно есть), нужно подать в функцию явное указание на состояние включено: **f([x]).**

Переход на измерение и учёт абсолютного состоянии включительно/не включительно для точек на оси абсцисс и выбора одного из состояний состоянием по умолчанию в условиях проведения анализа, учитывающего сингулярные свойства функций, оставляет действительными уравнения: **4**; **5**; **7.1**; **7.2**, действительными в той форме, в которой они представлены. Аналогичные уравнения для определённых интегралов также остаются действительными в при описанных условиях.

С учётом состояния точки включительно/не включительно вводятся специальные бинарные операторы сравнения двух координатных значений, которые определяет состояние включительно как большее, а состояние не включительно как меньшее, при условии того, что обе сравниваемые величины имеют одинаковые численные значения:

[x] **>▪** x **>▪** (x) истина,

(x) **▪<** x **▪<** [x] истина,

(x) **▪<** (x) ложь,

(x) **<** [x] ложь,

где **>▪** - больше с учётом состояния; **▪<** – меньше с учётом состояния; **>** - больше без учёта состояния; **<** - меньше без учёта состояния; **x** – абсолютная координата точки, **[x]** – абсолютно включительно **x**; **(x)** – абсолютно не включительно **x**.

Другие знаки учитывающие состояния: **≥▪** - равно и больше; **▪≤** - равно или меньше.

Равенства и неравенства координат с состояниями:

(x) = (x) истина,

(x) **▪=▪** (x) истина,

(x) = [x] истина,

(x) **▪=▪** [x] ложь,

(x) **<▪>** [x] истина,

(x) **!▪=▪** [x] истина,

(x) **<>** [x] ложь,

(x) **!=** [x] ложь,

где **=** - равенство без учёта состояния; **▪=▪** - равенство с учётом состояния; **!▪=▪** и **<▪>** - неравенство с учётом состояния; **!=** и **<>** - неравенство без учёта состояния.

Арифметические действия с координатами игнорируют состояния включительно / не включительно, а возвращаемый результат таких действий просто число, и тождественен длине интервала, или координате точки без указанного состояния:

[x] – (x) = 0 истина.

Функции для работы с состояниями:

St = get_state(x), (19.1)

x_1 = set_ state (x_0, St), (19.2)

где **get_state** – функция, возвращающая состояние переданной координаты **x** как следует: **–1** – координата не включительно, **+1** - координата включено, **0** – точка без состояния или просто вещественное число, **null** - ошибка; **set_state** – функция, возвращающая координату $\mathbf{x_1}$ с состоянием **St** и по положению $\mathbf{x_0}$.

Естественные сингулярные свойства

Сингулярный факториал и **сингулярный дифференциал** – величины, присутствующие в любой точке функции, включительно и в критических точках функции, численно описывающие изменение функции от одного своего значения, что в точке не включительно, до другого своего значения, что в точке включительно при прохождении через точки в направлении роста аргумента, и определяются как следует: сингулярный факториал как отношение значения функции в точке включительно к значению функции в точке не включительно, и сингулярный дифференциал как разница между значением функции в точке включительно и значением функции в точке не включительно:

$$\mathbf{sf}f(x) = \frac{f(x)}{f\big((x)\big)}, \qquad (20.1)$$

$$\mathbf{sd}f(x) = f(x) - f\big((x)\big), \qquad (20.2)$$

Где **sf***f*(x) – сингулярный факториал функции *f*(x) в точке x; **sd***f*(x) – сингулярный дифференциал функции *f*(x) в точке x.

При посредничестве функции **f** между сингулярным факториалом и сингулярным дифференциалом существует взаимозависимость, но при условии, если гипотетическое совершении операции деления на ноль (в случае с критическими точками) в следующих уравнениях не препятствуют этому:

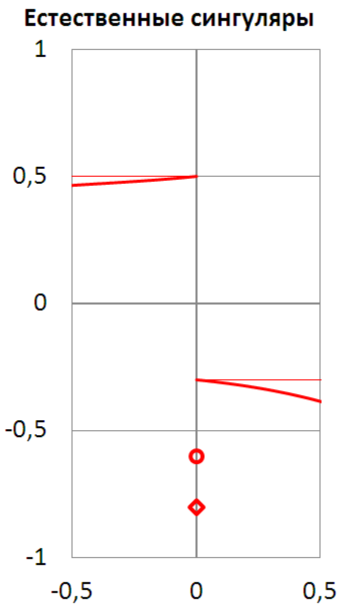
$$\mathbf{sd}f(x) = f\big((x)\big) \cdot \mathbf{sf}f(x) \; - f\big((x)\big) = f(x) - \frac{f(x)}{\mathbf{sf}f(x)}, \qquad (21.1)$$

$$\mathbf{sf}f(x) = \frac{\mathbf{sd}f(x) - f\big((x)\big)}{f\big((x)\big)} \; = \frac{f(x)}{f(x) - \mathbf{sd}f(x)}, \qquad (21.2)$$

Сингулярные факториал и сингулярный дифференциал можно охарактеризовать как сингулярные приращения функции второго и первого порядка соответственно.

В некритических точках сингулярный дифференциал равен 0, а сингулярный факториал равен 1 по определению. Данное условие является необходимым и достаточным. В этих точках описываемые сингулярные свойства не информативны.

Конечное значение отличное от 1 для сингулярного факториала и от 0 для сингулярного дифференциала присутствуют в точках разрыва функции, но при условии того, что значения функции по обе стороны от точки разрыва не являются запредельными, то есть являются определёнными конечными, а для определения сингулярного факториала дополнительно не являются нулевыми. В таком случае сингулярный факториал и сингулярный дифференциал являются информативными в точке функции, и численно описывают взаимозависимость между двумя разделёнными точкой разрыва областями функции, так сингулярный дифференциал описывает абсолютную разницу значений функции, а сингулярный факториал описывает относительную разницу.



На диаграмме изображён описанный случай с разрывом функции при x=0. Не смотря на то, что сингулярные приращения не обозначают явно, ибо в этом нет нужды, поскольку график самой функции говорит сам за себя, косвенно показывает на значения естественных сингулярных свойств, тем не менее исключительно для наглядности на приведённой диаграмме сингулярный факториал обозначен в виде кружка, а сингулярный дифференциал обозначен в виде ромбика, где они видимо имеют информативные значение.

Сохранённая информация об этой численной связи между разделёнными критической точкой областями функции необходима для восстановления функции в операции обратного мультиплицирования или обратного интегрирования её фактор-производной или её производной соответственно. В ходе указанной операции непрерывное определение соответствующей первой производной в окрестности критической точки может быть выключено и заменено на сохранённое численное значение связи функции в качестве множителя или слагаемого промежуточного результата проводимой операции. Таким образом не смотря на очевидный разрыв фактор-производной или производной с запредельными значениями в точке описанный приём позволяет эффективно восстановить функцию.

Если значения функции по одну или по обе стороны от точки при приближении к ней являются запредельными, то сингулярные факториал и дифференциал не определены и не информативны. В таком случае дальнейший основанный на рассмотрении сингулярного дифференциала анализ функции не возможен, восстановить функцию в результате обратного интегрирования её производной технически не представляется невозможным. Но для случая проведения анализа, основанного на рассмотрении сингулярного факториала, можно численно связать значения функции, измеренные по обе стороны от критической точки на одинаковой (симметрично относительно точки) и бесконечно малой дистанции до неё. Другими словами найти некий факториал функции, как её изменение с изменением аргумента от одной из точек замера до другой. В виду того, что точки замера располагаются на равном расстоянии от критической точки **x**, данный факториал можно охарактеризовать как **симметричный факториал**:

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x}, \mathrm{dx}) = \frac{f(\mathrm{x} + \mathrm{dx})}{f(\mathrm{x} - \mathrm{dx})}, \qquad (22.1)$$

где **x** – координата критической точки; **dx** – модуль бесконечно малой дистанции точек замера значений функции до критической точки **x**; **sif*f*** – симметричный факториал функции ***f*** как функция от координаты **x** и от модуля бесконечно малой дистанции **dx** точек замера значений функции до точки **x.**

Предыдущее отношение можно преобразовать в произведение двух множителей: конечного ненулевого коэффициента пропорциональности и бесконечно малой или бесконечно большой величины в общем случае, зависящего от дистанции точки замера до критической точки. Оба множителя являются свойствами объекта — **гиперболический сингулярный факториал** как естественного сингулярного свойства функции в точке:

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}) = \{\,\mathrm{V}, \mathrm{H}(\mathrm{dx})\,\} \qquad (22.2)$$

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x}, \mathrm{dx}) = \mathrm{V} \cdot \mathrm{H}(\mathrm{dx}) = \mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} \cdot \mathbf{hsf}f(x).\mathrm{H}(\mathrm{dx}), \qquad (22.3)$$

Пример:

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}) = \{\,-5, \mathrm{dx}^1\,\} \qquad (22.4)$$

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x}, \mathrm{dx}) = -5 \cdot \mathrm{dx}^1 \qquad (22.5)$$

где **hsf*f*** – гиперболический сингулярный факториал функции ***f***; **V** или **hsf*f***(x).V – значение гиперболического сингулярного факториала функции ***f*** в точке **x** как его свойство; **H** или **hsf*f***(x).H – **гиперболизатор** как функция от **dx** модуля дистанции точек замера значений функции до точки **x** и как свойство гиперболического сингулярного факториала функции ***f*** в точке **x**; **dx** - **плечо гиперболизации** в качестве аргумента гиперболизатора.

Значение гиперболического сингулярного факториала численно показывает на значение пропорциональной связи между разделёнными критической точкой областями функции.

Гиперболизатор имеет такое наименование, потому что при бесконечно малом значении плеча гиперболизации возвращает бесконечно большую или бесконечно малую величину, да и ещё возможно возведённые в некоторую конечную степень. При численном решении определённых мультипликалов гиперболизатор возвращает достаточно малые или достаточно большие значения в зависимости от размера плеча гиперболизации и возможной степени его возведения. Возвращаемое значение гиперболизатора всегда положительно, поскольку арифметический знак симметричного факториала всегда выносится в значение гиперболического сингулярного факториала **V**. Гиперболизатор не может быть равен нулю или быть неопределённым, поскольку такие значения симметричного сингуляра всегда связываются со значением гиперболического сингулярного факториала.

Гиперболизатор описывает порядок несоизмеримости (не паритетности) значений функций по обе стороны от критической точке при предельном приближении к ней Несоизмеримость представляет собой общий случай свойств функций в критических точках. Если значения функций по обе стороны от критической точки соизмеримые (паритетные), то возвращаемое значение гиперболизатор равно 1, в таком случае можно говорить о единичном гиперболизаторе, и в таком случае симметричный факториал эквивалентен сингулярному факториалу в точке функции, и этот случай является частным. Такие случаи имеют место при конечных ненулевых значениях в критической точке по обе сторон функции от неё, как это показано на предыдущей диаграмме, а также если по обе стороны от критической точки функция представлена одинаковыми аналитически заданными составляющими функция, различающимися только своими множителями.

Гиперболизатор как множитель значения гиперболического сингулярного факториала, гиперболизирует его, тем оправдывая названия данного класса естественных сингулярных свойств. Этим собственно объясняется методологическое разделение симметричного факториала на два множителя, один из которых условная константа, не зависящая от плеча гиперболизации, а другой только от плеча гиперболизатора зависящая условная переменная, и что имеет своё непосредственное решающее значение при проведении мультиплицировании с применением произвольно выбранного размера элемента мультиплицирования.

В качестве примера рассмотрим гиперболический сингулярный факториал в точке стыка (в критической точке) при **x = 0** двух отличающихся степенных многочлена в своём качестве составляющих функций. исходя из общей постановки задачи обе функции не обязательно имеют конечные ненулевые значения в критической точке. Функции представлены следующим уравнением, при отличающихся для них значениях множителей членов и показателей степени при **x** в общем случае:

$$f(x) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{b_i} \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{a_i}} \text{ для } \mathrm{a_i} \in \mathrm{Z}, \qquad (23.1)$$

$$f(x) = \mathrm{sign}(\mathrm{x}) \cdot \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{b_i} \cdot |\mathrm{x}|^{\mathrm{a_i}} \text{ для } \mathrm{a_i} \in \mathrm{R}. \qquad (23.1)$$

где **N** – количество степенных членов в определении составляющей функции; $\mathbf{b_i}$ - i-ый множитель члена; $\mathbf{a_i}$ – показатель степени при аргументе **x**; **sign** – функция – знак, возвращает **–1**, если переданный аргумент отрицателен, в противном случае возвращает **+1**.

При бесконечно близком приближении к критической точке (**x = 0**) решающим значением функции будет член с минимальным значением $\mathbf{a_i}$ из числа тех, что с конечным ненулевым значением $\mathbf{b_i}$. При стремлении **x** к нулю составляющими значения функций от прочих членов с более высокими $\mathbf{a_i}$ и конечными ненулевыми $\mathbf{b_i}$, не взирая на размер последних, можно пренебречь, в виду стремления к нулю отношения этих составляющих значения функции к составляющей значения функции от решающего члена. Так, если решающий член с отрицательным $\mathbf{a_i}$, то значение функции в критической точке не определёно и оно стремится в бесконечность по модулю при стремлении **x** к точке, а если решающий член с положительный $\mathbf{a_i}$, то значение функции в критической точке равно нулю и стремится к нулю при стремлении **x** к точке. Если решающий член с нулевым $\mathbf{a_i}$, то значение функции в критической точке равно $\mathbf{b_i}$, то есть конечно.

Значение симметричного сингулярного факториала в критической точке при **x=0**:

Для целочисленных $\mathbf{a_i}$**:**

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x},\mathrm{dx}) = \frac{f(+\mathrm{dx})}{f(-\mathrm{dx})} = \frac{\mathrm{b}_k \cdot (+\mathrm{dx})^{\mathrm{a_k}}}{\mathrm{b}_j \cdot (-\mathrm{dx})^{\mathrm{a_j}}} = \mathrm{sign}\big(-|\mathrm{a_j}|\%2\big) \cdot \frac{\mathrm{b}_k}{\mathrm{b}_j} \cdot \mathrm{dx}^{(\mathrm{a_k}-\mathrm{a_j})}, \qquad (23.3)$$

Для действительных $\mathbf{a_i}$**:**

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x},\mathrm{dx}) = \frac{f(+\mathrm{dx})}{f(-\mathrm{dx})} = \frac{+\mathrm{b}_k \cdot \mathrm{dx}^{\mathrm{a_k}}}{-\mathrm{b}_j \cdot \mathrm{dx}^{\mathrm{a_j}}} = -\frac{\mathrm{b}_k}{\mathrm{b}_j} \cdot \mathrm{dx}^{(\mathrm{a_k}-\mathrm{a_j})}, \qquad (23.4)$$

где **sign** – функция – знак, возвращает **–1**, если переданный аргумент отрицателен, в противном случае возвращает **+1**; **%** - знак оператора остатка от деления; **j** – индекс решающего члена составляющей функции, что до критической точки **k** - индекс решающего члена составляющей функции, что после критической точки; **%** - знак оператора остатка от деления.

Свойства гиперболического сингулярного факториала:

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} = \mathrm{sign}\big(-|\mathrm{a}|_{\mathrm{j}}\%2\big) \cdot \frac{\mathrm{b}_k}{\mathrm{b}_j} \text{ для } \mathrm{a_i} \in \mathrm{Z}, \qquad (23.5)$$

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} = -\frac{\mathrm{b}_k}{\mathrm{b}_j} \text{ для } \mathrm{a_i} \in \mathrm{R}, \qquad (23.6)$$

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{H}(\mathrm{dx}) = \mathrm{dx}^{(\mathrm{a_k} - \mathrm{a_j})}. \qquad (23.7)$$

Для составляющих функций в виде степенного многочлена с натуральными включающими 0 значениями степеней $\mathbf{a_i}$ определение гиперболического сингулярного факториала может быть выражено через конечные значения производных составляющих функций в критической точке по обе стороны от неё как включительно и как не включительно:

$$\mathbf{sif}f(\mathrm{x},\mathrm{dx}) = \frac{f(\mathrm{x}+\mathrm{dx})}{f(\mathrm{x}-\mathrm{dx})} = \mathrm{sign}(-\mathrm{j}\%2) \cdot \frac{\mathrm{f}'^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{j}!}{\mathrm{f}'^{\mathrm{j}}\big((\mathrm{x})\big) \cdot \mathrm{k}!} \cdot \mathrm{dx}^{\mathrm{k-j}}, \qquad (23.8)$$

$$\mathbf{hsf}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} = \mathrm{sign}(-\mathrm{j}\%2) \cdot \frac{\mathrm{f}'^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{j}!}{\mathrm{f}'^{\mathrm{j}}\big((\mathrm{x})\big) \cdot \mathrm{k}!}, \qquad (23.9)$$

$$\mathbf{hsf}f(x).\mathrm{H}(\mathrm{dx}) = \mathrm{dx}^{\mathrm{k-j}}, \qquad (23.10)$$

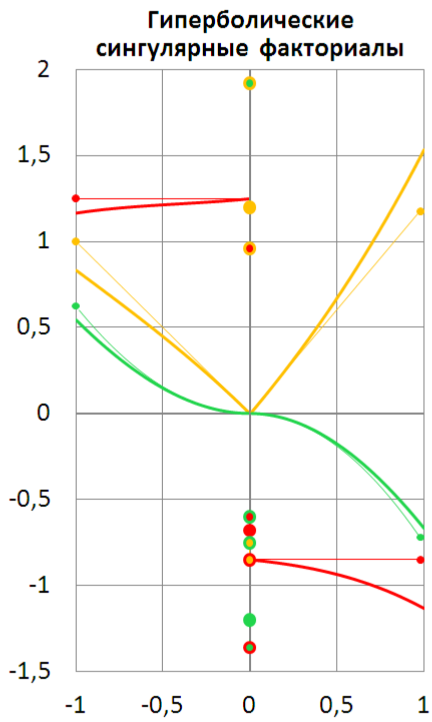
где **k** – порядковый номер первой найденной производной ненулевого конечного значения в точке **x** включительно; **j** – порядковый номер первой найденной производной ненулевого конечного значения в точке **x** не включительно; $\mathbf{f'^k(x)}$ – значение производной порядкового номера **k** в точке **x** включительно; $\mathbf{f'^j((x))}$ – значение производной порядкового номера **j** в точке **x** не включительно.

Для цели универсализации записи под производной условного нулевого порядкового номера или условной нулевой производной принимается сама функция ***f***, а также значение выражения **0!** принимается равным 1 как результат произведения из нулевого количества множителей. Перебор производных проводится до первой найденной с ненулевым конечным значением производится в направлении роста их порядкового номера начиная с нуля. Первые найденные с ненулевыми конечными значениями производные, в данном случае под порядковыми номерами **j** и **k**, являются решающими производными для своих областей функции, поскольку приростом производных высших порядковых номеров можно пренебречь при **dx** стремящемся к нулю.

Поскольку значение функции отрицательно при нечётном показателе степени решающего члена или при нечётном порядковом номере решающей производной, что слева от критической точки, и также поскольку положительный симметричный факториал должен описывать численную пропорциональную связь пары значений функции одинакового арифметического знака по обе стороны от критической точки (без перехода через ось абсцисс), а отрицательный, напротив, разного арифметического знака (с переходом через ось абсцисс), результат отношения умножается на **–1**, что нашло своё отражение в множителе в виде возвращаемого значения функции **sign**.

Если значение функции по одну из сторон функции представляет собой конечное ненулевое значения, что в случае с многочленом при $\mathbf{a_j = 0}$ или $\mathbf{a_k = 0}$ или в качестве своей решающей условно нулевой производной (**k=0** или **j=0**), и поскольку данная величина в свою очередь не зависит от размера **dx**, то с соответствующей стороны модуль дистанции точки замера значения функции до критической точки может быть больше или меньше от такого же с противоположной стороны, либо вообще равен нулю. Правило симметрии положения точек замера значений функции относительно критической точки может быть нарушено в таком случае, и тогда в качестве **dx** подставляется модуль интервала с той стороны от критической точки, где значение функции определяется производной порядкового номера от единицы и выше.

Примечание: вовсе не следует полагать то, что гиперболизатор – это исключительно степенная функция, как в приведённом примере со степенным многочленом, поскольку описанное представляет собой частный случай. Так, например, составляющая функция может представлять собой логарифмическую, в этом случае в определении гиперболизатора будет присутствовать логарифм. И тем не менее в общем случае факт успешного определения гиперболического сингулярного факториала на основе анализа значений производных функции в критической точке, то есть установленный факт обнаружения их конечных значений там, в действительности обуславливает именно степенной характер гиперболизатора.



На диаграмме цветными толстыми линиями обозначены графики непрерывного определения функции в двух областях по обе стороны от критической точки в виде степенных многочленов с натуральными показателями степеней. Тонкими линиями обозначена составляющая значения функции от решающего члена или другими словами прирост функции от решающей производной, замеренной в критической точке по соответствующую сторону от неё, с показателем степени члена или с порядковым номером производной соответственно как следует: красный – нулевая (сама функция), оранжевый – первая, зелёных – вторая. По обе стороны от критической точки В точках с координатами по оси абсцисс –1 и 1 произведён замер составляющих значений функции от решающих членов или другими словами замер прироста функции от решающих производных. Малые одноцветные буллеты, расположенные на пересечении тонких линий с линиями сетки координатной системы на отметках –1 и 1 отражают результат соответствующего замера. Величины отношений всех пар значений Y координат малых буллетов разных цветов численно отражены в виде **Y** координат больших буллетов, что расположены в **x** координате критической точки, в качестве графического отражения соответствующего свойства точки. Для них внешний цвет буллета ассоциируется с областью функции правее критической точки, а внутренний цвет ассоциируется к области функции левее критической точки. Таким образом отражена численная связь областей функции в окрестности критической точки, возникающую от соответствующей пары членов или соответствующей пары производных. Поскольку на диаграмме плечо гиперболизатора **dx = 1**, и следовательно возвращаемое значение гиперболизатора равно единице, данные значения показывали бы на значения гиперболических сингулярных факториалов, если составляющие значение функции члены или прирост от производных, чьи графики отображены тонкими линиями соответствующих цветов, были бы решающими. Значения больших одноцветных буллетов не зависят от **dx**, поскольку в этом случае в критической точке стыкуются пары одинаковых функций и значение гиперболизатора для такой пары равно единице независимо от размера **dx**.

Сингулярный факториал функции является частным случаем гиперболического сингулярного факториала, а гиперболический сингулярный факториал как понятие является гиперболизированным расширением понятия сингулярный факториал. Наверное тут стоит отметить и то, что понятие сингулярный дифференциал принципиально не может иметь своего гиперболизированного расширения, поскольку не имеет смыла. Признаком этого также является отсутствие понятия производных нулевого порядка, в противоположность тому, как существование понятия производных первого порядка (одного порядка ниже, чем порядок сингулярного факториала), как это выше продемонстрировано, придаёт смысл понятию гиперболического сингулярного факториала. Понятия и сущности высших порядков имеют в своей основе понятия и сущности низших порядков, а нам остаётся лишь распознать высшие и низшие порядки в сущностях и понятиях В этом заключается философия математики, что в очередной раз возвращает нас к её истоку - к понятию гипероператора.

Сингулярные факториал и дифференциал, а также гиперболический сингулярный факториал, являются выявляемые анализом неотъемлемыми естественными сингулярными свойствами функций в точках, их нельзя изъять из определения функции и нельзя добавить туда, поскольку они к нему не относятся, они зависят от самого определения функции.

Прилагаемые сингулярные свойства и логика факторирования и дифференцирования с учётом прилагаемых сингулярных свойств

Согласно обновлённой логике операций факторирования и дифференцирования функций при прохождении этими операциями критических точек существующий в таких точках и принадлежащий им соответственно гиперболический сингулярный факториал или сингулярный дифференциал автоматически копируется в **прилагаемые сингулярные свойства** функций соответственно: **гиперболический сингулярный множитель** или **сингулярное слагаемое**, обобщённо именуемые как **прилагаемые сингуляры**, и автоматически прилагаются образуемой соответственно фактор-производной или производной в соответствующих точках в результате становясь **приложенными сингулярами**. Таким образом операция факторирования или дифференцирования функции не прерывается в критических точках соответственно факторируемой или дифференцируемой функции:

$$\mathbf{hsm}f^{\bullet}(\mathrm{x}) = \mathbf{hsf}f(\mathrm{x}), \qquad (24.1)$$

$$\mathbf{hsm}f(\mathrm{x}) = \mathbf{hsf}F^{\bullet}(\mathrm{x}), \qquad (24.2)$$

$$\mathbf{sa}f'(\mathrm{x}) = \mathbf{sd}f(\mathrm{x}), \qquad (24.3)$$

$$\mathbf{sa}f(\mathrm{x}) = \mathbf{sd}F(\mathrm{x}), \qquad (24.4)$$

где **hsm*f*(x)** – гиперболический сингулярный множитель функции ***f*** в точке **x**; **sa*f*(x)** – сингулярное слагаемое функции ***f*** в точке **x**; ***f•*** - фактор-производная функции ***f***; ***f'*** - производная функции ***f***; ***F•*** - фактор-первообразная функции ***f***; ***F*** - первообразная функции ***f***.

Представляется важным не путать естественные сингулярные свойства с прилагаемыми, не смотря на идентичность содержания одних и других, поскольку они по разному проявляют свои свойства, тем не менее определяемые общим содержанием. Так в отличие от естественных сингулярных свойств, прилагаемые являются частью определения функции, их можно добавить (приложить) или изъять из определения функции, изменив его таким образом. Добавление или изъятие приданного сингуляра вносит изменение в первообразные и производные функции первого или второго порядка в соответствии с типом приложенного сингуляра.

Предлагается на диаграммах графически отображать приложенные сингуляры как част определения функции как следует: координата **x** – точка положение сингуляра; координата **y** – численное значение сингуляра. Знак сингуляра на диаграмме: сингулярные слагаемые - «**+**», гиперболические сингулярные множители - «⨯». Перекрестие знаков должно точно указывать на положение сингуляра на диаграмме (координату по **x** и численное значение по **y**).

Для гиперболического сингулярного множителей справа и сверху относительно его знака указывается определение гиперболизатора, но только если он не единичен. В случае если гиперболизатор – это степенная функция, то допускается указать только степень при **dx** опустив при этом сам **dx**. Примеры:

$$\times^{\ln \mathrm{dx}}, \qquad (25.1)$$

$$\times^{\mathrm{dx}^{-2}} \Leftrightarrow \times^{-2}, \qquad (25.2)$$

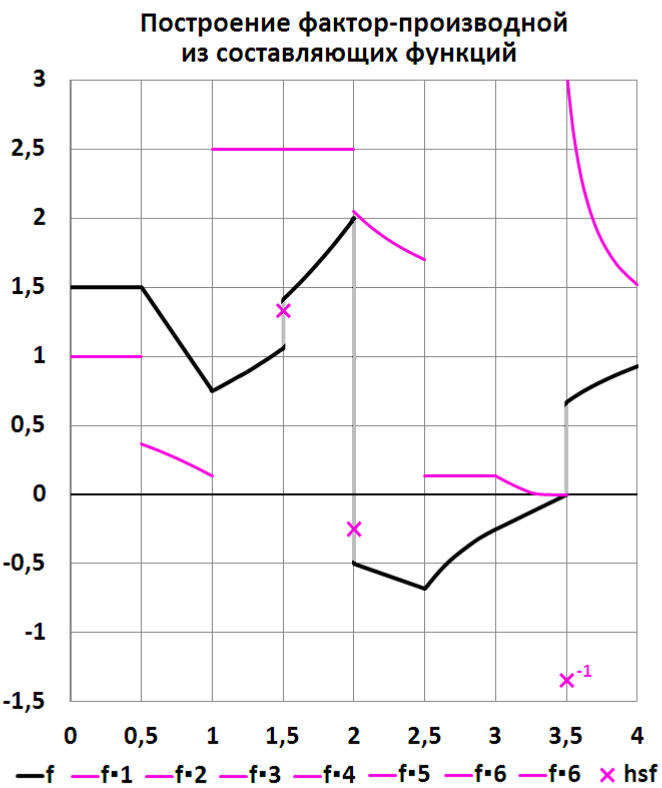
$$\times^{h}, \qquad (25.3)$$

где ***h*** – функция – гиперболизатор, чьё определение может быть дано отдельно, например, для случаев громоздкости последнего.

Когда непрерывное определение функции и приложенные сингуляры описывают разные физические величины и/или имеют разную физическую размерность, например, мощность (**Вт**) и работа или энергия (**Дж**) соответственно при времени (**с**) в качестве аргумента, или имеет место разный численный порядок значений непрерывного определения функции и значений сингуляров, тогда в диаграммах предполагается использовать две взаимно независимые **Y** шкалы, отдельно для не прерывного определения функции и для приложенных сингуляров.

Аналогично проведению мультиплицирования, при проведении факторирования область функции можно разбить на несколько составляющих областей с аналитически заданными функциями и произвести их отдельное факторирование.

На приведённом примере построение фактор-производной (пурпурным) для функции (чёрным) разбитой на области точками излома и тремя критическими точками. В точках излома функции ожидаемо происходит прерывание её фактор-производной. Также ожидаемо графики фактор-производных отдельных областей функции располагаются выше оси абсцисс, что позволяет произвести обратное мультиплицирование фактор-производной для восстановления функции. В этой связи определённую проблему представляют собой критические точки: точка прерывания в точках **x=1.5** и **x=2** и обращение в ноль при **x=3.5**, где функция переходит через ноль. Обе эти точки причиняют прерывание процесса факторирования с потерей информации об изменении функции в этих критических точках.



В точках **x=1.5** и **x=2** у функции присутствует сингулярные факториалы как отношение конечного ненулевого значения функции правее соответствующей точки к конечному ненулевому значению функции левее соответствующей точки:

$$\mathbf{sf}f(1.5) = \frac{f([1.5])}{f((1.5))} = \frac{1.41421}{1.06066} = 1⅓\,, \quad (42.1)$$

$$\mathbf{sf}f(2) = \frac{f([2])}{f((2))} = \frac{-1}{4} = -¼\,. \quad (42.2)$$

Примечательно то, что точка **x=1.5** представляет собой наглядный пример того, как наличие сингулярного множителя функции (фактор-производной в случае) в точке приводит к прерыванию её мультипликала (анализируемой функции в случае), даже если сама фунция (фактор-производная в случае) не имеет прерывания в данной точке.

В точке **x=3.5** у функции присутствует гиперболический сингулярный факториал, определяемый конечными ненулевыми значениями производных функции, включая саму функцию, в точке **x=3.5** по о обе стороны от неё:

$$\mathbf{hsf}f(3.5) = \left\{\text{sign}(-1\%2) \cdot \frac{\text{f}([3.5]) \cdot 1!}{\text{f}'((3.5)) \cdot 0!}; \text{dx}^{0-1}\right\}$$

$$= \left\{-1 \cdot \frac{0.66943 \cdot 1}{0.5 \cdot 1}; \text{dx}^{-1}\right\} = \left\{-1.33887; \text{dx}^{-1}\right\}. \quad (42.3)$$

Факторирование области функции в критических точках с учётом сингулярный свойств функций прилагает фактор-производной соответствующие гиперболические сингулярные множители. При обратном мультиплицировании фактор-производной на предельном приближении к точке **x=2** конечный ненулевой промежуточный результат мультиплицирования умножается на значение сингуляра в этой точке, а на предельном приближении к точке **x=3.5**, бесконечно малый промежуточный результат уможается на результат произведения конечного значения сингуляра и возвращаемого значения гиперболизатора, который в данном случае равен предельно малому интервалу до точки прерывания (плечу гиперболизатора), возведённому в степень –1, то есть промежуточный результат умножается на бесконечно большое число, в результате чего становится ненулевым и конечным. Также сохраняется пропорция относительного расстояния до оси абсцисс для геометрического места точек неопределённого мультипликала фактор-производной и такого же исходной функции, что при подборе и согласовании произвольных множителей **B** сделает неопределённых мультипликал фактор-производной идентичным исходной функции.

Работа с прилагаемыми сингулярами через вспомогательные функции

Кроме автоматического формирования и приложения функциям в процессе факторирования и дифференцирования соответственно гиперболических сингулярных множителей и сингулярных слагаемых данные сингуляры также могут быть приложены функциям аналитическим способом, используя для этого универсальный метод «**apply**», принимающий сингуляр непосредственно или генерирующий его по известным передаваемым в метод: типе сингуляра, его численном значении и гиперболизатор (только для гиперболического сингулярного множителя, что по умолчанию принимается как **y=1**, далее по тексту информация о гиперболизаторе, что в настоящих скобках не приводится, но имеется в виду). Приложение сингуляров возможно как по одному сингуляру на один вызов метода «**apply**», так и массивом, где ключами массива выступают координаты **x** точек приложения сингуляров:

apply(f, x, s), (26.1)

apply(f, x, V, T, [H]), (26.2)

apply(f, array), (26.3)

где **f** – идентификатор функции как цели приложения объекта; **x** – значение аргумента функции - точка как цель приложения объекта; **V** – вещественное число в качестве численного значения прилагаемого сингуляра; **s** – прилагаемый объект; **T** – тип прилагаемого объекта со следующими возможными константами: «**D**» - дискретное значение для точки функции; «**SA**» - сингулярное слагаемое, «**HSM**» - гиперболический сингулярный множитель; **H** – гиперболизатор; **array** – массив прилагаемых объектов по заданным координатам **x** их приложения в функции.

Метод “**apply**” работает по принципу замещения ново-прилагаемым объектом существующего объекта в случаях, если последний обладает совпадающими с уже существующим в определении функции установочными данными: координатой положения **x** (новый помещается в ту же точку) и типом объекта (новый объект совпадает с типом существующего). В одной точке функции не могут находится более одного объекта или сингуляра одного типа.

Отдельно стоит пояснить то, что помещение дискретной величины в определение функции в точке, переопределит непрерывное определение функции для этой точки, если оно там существовало, но не приведёт к эффективному прерыванию функции при проведении дифференцирования или факторирования и интегрирования или мультиплицирования, что было показано на примере мультиплицирования функции $y = |b_n| \cdot |x|^n$ в нулевой точке, но приведёт к тому, что функция возвращает данную дискретную величину при её вызове с указанием координаты точки по оси абсцисс, но без явного указания состояния включительно/не включительно.

Приложенный сингуляр можно удалить из определения функции с помощью универсальной функции «**remove**» по известным и поданным в метод установочным данным сингуляра:

$$s = \text{remove}(f,[x_0,[x_1]],[T]), \quad (27)$$

где $\mathbf{x_0}$ – координата объекта для единичного удаления, или первая координата интервала удаления; $\mathbf{x_1}$ – вторая координата интервала удаления; **T** - тип определения функции – объекта удаления: «**V**» – непрерывное определение функции в купе с дискретным; «**C**» – непрерывное определение функции; «**D**» – только дискретное определение функции; «**SA**» - сингулярное слагаемое, «**HSM**» - гиперболический сингулярный множитель; **s** – удаляемый объект, объект или функция.

Если не передать тип объекта определения функции «**remove**», то из функции будет удалено всё существующее определение. Если в функцию «**remove**» передать интервал, то будет удалено определение функции указанного типа объекта внутри указанного интервала, если не передать ни координату объекта ни интервал, то будут удалено определение функции указанного типа объекта во всём интервале от – ∞ до + ∞. Если в функцию «**remove**» передана одна координат, то будет удален объект указанного типа по указанной координате: сингуляр или дискретное определение функции. Функция «**remove**» возвращает удалённый объект, или null, если последний не найден в определении функции по поданным установочным данным, а в случае множественного удаления объектов указанного определения по указанному интервалу или тоже самое, но без указания интервала, то функция «**remove**» возвращает созданную ей функцию со всеми удалённым объектами указанного типа определения: непрерывное определение и/или, дискретные значения в точках, все сингуляры указанного типа в привязке к их оригинальным координатам.

Функция «**create_singular**» трансформирует передаваемое вещественное число или дискретные значения в определении функции, что переданы в качестве аргумента, соответственно в значение возвращаемого ею прилагаемого сингуляра или в значения одного и более приложенных сингуляров в возвращаемой ею функции, содержащей соответствующее сингулярное определение в привязке к координатам по передаваемому в качестве аргументов типе сингуляра и его гиперболизаторе:

$$a = \text{create\_singular}(V, T, [H]), \quad (28.1)$$

$$f_1 = \text{create\_singular}(f_0, T, [H]), \quad (28.2)$$

где **V** – вещественное число в качестве численного значения возвращаемого сингуляра; $\mathbf{f_0}$ – дискретно определённая функция; $\mathbf{f_1}$ – функция, содержащая сингуляры.

Функция «**merge**» сливает несколько в функций в одну и возвращает результат слияния:

$$f = \text{merge}(f_1, [f_2, [f_3, .. [f_n]]]), \quad (29)$$

где **f** – результирующая функция; $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ .. $\mathbf{f_n}$ – сливаемые функции.

Функция «**merge**» работает по принципу замещения функции, что правее, функцией, что левее в списке передаваемых аргументов, действую в направлении слева направо по списку. Замещению подлежать дискретные значения, сингуляры с совпадающими установочными данными и перекрывающиеся области непрерывного определения функций.

Функция «**extract**» выделяет часть определения функции указанного типа в указанной точке или указанном интервале, и возвращает результат выделения в виде функции:

$$s = \text{extract}(f,[x_0,[x_1]],[T]). \quad (30)$$

Возвращаемые объект, набор аргументов, и также логика их обработки у функции «**extract**» полностью совпадает с таковой функции «**remove**». Единственным отличием функции «**extract**» от функции «**remove**» является то, что «**extract**» не модифицирует передаваемую в качестве аргумента функцию.

Для того, что бы найти перво-попавшийся сингуляр и его координату в определении функции, вызываются следующие функции:

$$s = \text{find\_one} (f, [x_0,[x_1],T), \quad (31.1)$$

$$x = \text{find\_one\_coordinate} (f, [x_0,[x_1],T), \quad (31.2)$$

где **s** – объект (сингуляр); **x** - координата объекта (сингуляра).

Функции «**find_one**» и «**find_one_coordinate**» производят поиск в направлении от x_0 до x_1 пока не будет встречен объект указанного типа. Набор аргументов и логика их обработки функций полностью совпадает с таковой функции «**extract**». Единственное отличие двух функций от «**extract**» в том, что они не возвращают функцию ни при каких условиях.

Все перечисленные вспомогательные функции, принимающие интервалы, поддерживают подачу границ интервалов с указанным абсолютным состоянием включительно/ не включительно и с абсолютным состоянием включительно по умолчанию.

Приложенные функциям гиперболические сингулярный множитель и сингулярное слагаемое никаким образом не проявляют себя при обыкновенном вызове функции с указанным значением аргумента, соответствующим положению данных свойств, они находятся в скрытом состоянии. Для того, что-бы и получить в явном виде их численное значение, тип и гиперболизатор, необходимо вызвать следующие функции соответственно, передавая им предварительно выделенный сингуляр в качестве аргумента:

$$V = \text{singular\_value}(s), \quad (32.1)$$

$$t = \text{singular\_type}(s), \quad (32.2)$$

$$H = \text{singular\_hyperbolizer}(s), \quad (32.3)$$

где **s** – объект (сингуляр); **T** - тип объекта (сингуляра); **V** - численное значение объекта (сингуляра), **H** – гиперболизатор.

Если в функции «**singular_type**», «**singular_value**» и «**singular_hyperbolizer**» передана неопределённость, то они также возвращают неопределённость. Функция «**singular_hyperbolizer**» возвращает неопределённость, если в качестве сингуляра передано сингулярное слагаемое. Получить значение сингуляра или его гиперболизатор можно непосредственно обратившись к его соответствующему свойству: **V = s.V**; **H = s.H**.

Алгоритм вычисления определённого мультипликала и определённого интеграла с учётом приложенных сингуляров по пунктам

1. **Константы операции**:

Общее для мультиплицирования и интегрирования:

d_0x – положительная бесконечно малая величина или достаточно малая при применении численного метода;

Только для мультиплицирования: **T = ”HSM”, N = 1**.

Только для интегрирования: **T = ”SA”, N = 0**.

2. **Вводные переменные**:

Общее для мультиплицирования и интегрирования: $\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}$, $\mathbf{X_0}$, $\mathbf{X_1}$.

3. **Установка начального состояния переменных**: **$x_0 := X_0$, $g := X_1$ ▪< X_0? –1:+1, R := N**.

4. **Выполнение действий настоящего пункта в указанном порядке в цикле пока x_0 <▪> X_1 и R конечное и неравное ln (N)** :

Общее для мультиплицирования и интегрирования:

$$x_1' := x_0 = X_1 \ ?\ \text{set\_state}(X_1, g) : \text{set\_state}(g \cdot x_0 + d_0x > g \cdot X_1 ?\ X_1 : x_0 + g \cdot d_0x, -g) \quad (33.1),$$

$$x_c := x_0 = x_1' \ ?\ \text{undefined} :$$

$$\big(\text{find\_one\_coordinate}(f_1, x_0, x_1', T)\ ||\ \text{find\_one\_interruption\_coordinate}(f_2, x_0, x_1')\big), \quad (33.2)$$

Только для мультиплицирования:

$$i := |x_1 - x_0|\ /\ 2 \geq |x_c - x_0|, \quad (33.3.1)$$

$$x_1 := x_c \ ?\ \Big(x_c = x_0 \ ?\ \text{set\_state}(2 \cdot x_0 - x_1', -g) :$$

$$\Big(x_c = x_1' ?\ \text{set\_state}(x_1', g) : \text{set\_state}\big(2 \cdot x_c - (i \ ?\ x_0 : x_1), -g\big)\Big)\Big) : x_1', \quad (33.4.1)$$

Только для интегрирования:

$$i := x_c = x_0, \quad (33.3.2)$$

$$x_1 := x_c \ ?\ \text{set\_state}\big(x_c , i \ ?\ g : -g\big) : x_1', \quad (33.4.2)$$

Общее для мультиплицирования и интегрирования:

$$dx := x_1 - x_0, \quad (33.5)$$

$$s := i \ ?\ \text{find\_one}(f_1, x_0, x_1, t) : \text{undefined}, \quad (33.6)$$

$$V := \text{singular\_value}(s), \quad (33.7)$$

$$x := i \ ?\ x_c : (x_1 + x_0)\ /\ 2\ , \quad (33.8)$$

Только для мультиплицирования:

$$H := \text{singular\_hyperbolizer}(s), \quad (33.9)$$

$$d_hx := \text{sign}\Big(\ln\big(H(d_0x)\big)\Big) \cdot g \ ?\ x_1 - x_c : x_c - x_0, \quad (33.10)$$

$$\text{tsf} \coloneqq \big(V \cdot H(d_hx)\big)^g, \quad (33.11.1)$$

$$\text{tf} \coloneqq f_2(x)\ |!|\ f_2(x)^{dx/2} \cdot f_2(x_1)^{dx/2}, \quad (33.12.1)$$

$$\mathrm{R} \coloneqq \mathrm{R} \cdot (\mathrm{tsf} \,||\, \mathrm{tf}), \quad (33.13.1)$$

Только для интегрирования:

$$\mathrm{tsd(x)} \coloneqq \mathrm{V} \cdot \mathrm{g}, \quad (33.11.2)$$

$$\mathrm{td} \coloneqq f_2(x) \;\; |!| \, f(\mathrm{x_0})\,\mathrm{dx}/2 + f(\mathrm{x_1})\,\mathrm{dx}/2, \quad (33.12.2)$$

$$\mathrm{R} \coloneqq \mathrm{R} + (\mathrm{tsd} \,||\, \mathrm{td}), \quad (33.13.2)$$

Общее для мультиплицирования и интегрирования: $x_0 := x_1$. (33.14)

5. **Возвращение результата**: R.

где $\mathbf{d_0x}$ – номинальный элемент мультиплицирования или интегрирования, задаёт длину соответствующей величины; **T** – тип прилагаемого сингуляра, зависит от проводимой операции: мультиплицирование или интегрирование; **N** – нейтральный элемент, зависит от проводимой операции; f_1 – подмультипликальная или подынтегральная функция, содержащая гиперболические сингулярные множители или сингулярные слагаемые соответственно; f_2 – подмультипликальная или подынтегральная функция, содержащая непрерывное определение функции; $\mathbf{X_0}$ – абсолютная начальная граница отрезка мультиплицирования или интегрирования; $\mathbf{X_1}$ – абсолютная конечная граница отрезка мультиплицирования или интегрирования; **:=** - знак присвоения, присваивает выражения справа переменной слева; $\mathbf{x_0}$ – абсолютная начальная граница элемента мультиплицирования или интегрирования; **{..} ? {..} : {..}** – условный оператор, работающий по схеме: {*проверяемое утверждение*} **?** {выражение в случае *истины*} **:** {выражение с случае *лжи*}; **g** - знак элемента мультиплицирования или интегрирования, одновременно является индикатором направления мультиплицирования или интегрирования соответственно: +1 в направлении роста аргумента, –1 в противоположном направлении направления роста аргумента; **R** – результат мультиплицирования или интегрирования, и также промежуточный результат мультиплицирования или интегрирования соответственно; $\mathbf{x_1'}$ – абсолютная предварительная конечная граница элемента мультиплицирования или интегрирования; **||** - знак оператора перебора, возвращает правое от себя значение, если левое от него значение не определено, в противном случае возвращает левое значение; **find_one_interruption_coordinate(*f*, $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$)** – функция, возвращающая абсолютную координату перво-попавшегося прерывания f_2 внутри границ указанного интервала от $\mathbf{x_0}$ до $\mathbf{x_1}$, ведя поиск в направлении от $\mathbf{x_0}$ к $\mathbf{x_1}$; $\mathbf{x_c}$ – абсолютная координата прилагаемого сингуляра f_1 или прерывания f_2; **i** – индикатор включения сингуляра или прерывания функции в элемент операции; $\mathbf{x_1}$ – абсолютная конечная граница элемента мультиплицирования или интегрирования; **s** – прилагаемый сингуляр; **V** - численное значение сингуляра; **x** – абсолютная координата условной середины элемента мультиплицирования или интегрирования; **dx** – эффективный элемент мультиплицирования или интегрирования; $\mathbf{d_hx}$ – часть элемента мультиплицирования – плечо гиперболизации; **H** – гиперболизатор; **tsf** – технический сингулярный факториал фактор-первообразной; **|!|** - знак оператора негативного перебора, возвращает левое от себя значение, если оно не определено, в противном случае возвращает правое от себя значение; **tf** – технический непрерывный факториал фактор-первообразной; **tsd** – технический сингулярный дифференциал первообразной; **td** – технический непрерывный дифференциал первообразной.

Примечание: функции $\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}$ могут быть представлены одной функцией. В данном случае разделением на явно отдельные две показана принципиальная возможность проводить расчёт по двум отдельный функциям.

Пояснение работы алгоритма вычисления определённого мультипликала и интеграла с применением прилагаемых сингуляров

Мультиплицирование или интегрирование (далее операция) начинается с установки начального состояния: начальная граница первого элемента операции $\mathbf{x_0}$ устанавливается на начало отрезка операции $\mathbf{X_0}$. Промежуточный результат **R** устанавливается на нейтрального число **N**. Определяется направление операции относительно направления оси абсцисс по средствам определения индикатора направления операции **g**.

Итерации цикла повторяются пока промежуточный результат операции не выходит за допустимые значения и пока начальная граница элемента операции меньше, чем конечная граница отрезка операции учитывая абсолютно состояние границ (включительно/не включительно). Далее пояснение приводится на примере прямого направления проведения операции, по направлению роста аргумента. И тут необходимо уточнить то, что при рассмотрении операции в обратном направлении описываемые абсолютные состояния границ меняются на противоположные: включительно на не включительно, и не включительно на включительно, за что отвечает **g**.

В начале каждого цикла на основе номинального размера элемента операции определяется предварительная конечная граница элемента операции $\mathbf{x_1'}$. При этом во внимание принимается конечная граница отрезка операции. По умолчанию конечная граница элемента операции определяется как не включительно, за исключением случая, когда начальная граница элемента операции с состоянием не включительно совпадает по значению координаты с конечной границей отрезка операции с состоянием включительно, другими словами, когда последний элемент операции содержит в себе только переход через точку конечной границы отрезка операции.

После определения предварительной конечной границы элемента операции производится проверка на наличие прилагаемых сингуляров $\boldsymbol{f_1}$ внутри данного элемента, а если их нет, то проверка на наличие прерываний $\boldsymbol{f_2}$ внутри данного элемента, и именно в таком порядке, и извлекается координата таковой точки $\mathbf{x_c}$, если она найдена. Если значения координат начала и предварительного конца элемента операции совпадают (элемент операции – это только переход через точку), то нет смысла искать координату положения прилагаемого сингуляра или прерывания, если один из них есть то, он в точке.

После того как стали известны $\mathbf{x_1'}$ и $\mathbf{x_c}$ и при известном $\mathbf{x_0}$ можно определить окончательною координату и состояние конечной границы элемента операции $\mathbf{x_1}$, что окончательно определит положение и размер элемента операции. Способ получения этой величины различен для мультиплицирования и интегрирования.

Особенность определения элемента операции при мультиплицировании заключается в том, что по возможности положение прилагаемого сингуляра, если таковой найден, должно приходится на середину элемента операции с равенством длин образующихся частей элемента операции по обе стороны от прилагаемого сингуляра для цели соблюдения вышеописанной симметрии. Исключение представляют случаи, когда симметрии невозможно добиться в принципе потенциально для первого и последнего элемента операции при условии задании соответствующих границ отрезка операции с состоянием не включительно для начальной или включено для конечной границы, и одновременно с фактом того, что именно в этих граничных точках находятся прилагаемые сингуляры.

Конечная граница элемента операции приближается к начальной для того, что бы соблюсти выше обозначенное условие симметрии, или для того, что-бы вообще не включать при текущей итерации найденный сингуляр, а включить его в следующую, ибо в противном случае длина элемента отрезка возможно превысит номинальную длину, что может быть критически важным при применении численного метода вычисления мультипликала или интеграла.

Особенность определения элемента операции при интегрировании заключается в отделении сингуляров или прерываний функции от областей непрерывного определения функций и их распределении по разным элементам операции. Таким образом, если прилагаемый сингуляр или прерывание найдено в начале элемента операции, то элемент операции включает в себя только переход через эту точку, в противном случае элемент операции заканчивается перед точкой, не переходя через ней и не включая точку в себя.

Индикатор **i** показывает на включение найденного сингуляра или прерывания в текущую итерацию.

После определения конечной границы элемента операции можно определить длину элемента операции **dx**, которая может быть и нулевой, если элемент операции – это только переход через точку, а также можно найти прилагаемый сингуляр **s** в элементе операции, если достоверно известно о том, что он включен в текущий элемент операции, за что отвечает **i**. При условии того, что сингуляр найден можно прочитать его численное значение **V**, а для гиперболического сингулярного множителя ещё и его гиперболизатор **H**. Если подтверждено включение прилагаемого сингуляра или прерывания функции в текущий элемент операции, то координата обнаруженного одного из них принимается за условную середину **x** элемента операции, тем самым воссоздаются условия возникновения сингуляра из симметричного факториала фактор-первообразной подмультипликальной функции (если он создан при факторировании). Если включение прилагаемого сингуляра или прерывания функции в текущий элемент операции не подтверждено, то по умолчанию за серединную точку принимается серединная точка элемента операции. Одна из двух половин элемента мультиплицирования не нулевой длины, образованная его делением серединной точкой, назначается плечом гиперболизации $\mathbf{d_h x}$.

После того, как подготовительные действия завершены, можно приступать к вычислению элементарного приращения результата операции, для мультиплицирования – это элементарный множитель, для интегрирования – это элементарное слагаемое. Каждый из них определяется значениями двух своих частей: первой и приоритетной, отвечающей за приращение, связанное с наличием прилагаемого сингуляра, и второй и второстепенной, отвечающей за приращение, связанное с непрерывным определением функции. Так в случае, если первая часть имеет определённость (прилагаемый сингуляр присутствует в элементе операции), то вторая часть не принимается в расчёт. Как правило прерывание функции прикрывается наличием прилагаемого сингуляра, который как-бы ставит заплатку на этот участок функции, что, собственно, оправдывает приоритет первой части над второй. Также причиной приоритета первой части является неизмеримость частей в качестве множителей или слагаемых, а именно, стремление к нулю влияния второй части на результат операции по сравнению с влиянием первой при предельном приближении размера элемента операции к нулю.

Расчёт первой части **tsd** для интегрирования достаточно тривиален и представляет собой результат умножения значения сингулярного слагаемого на индикатор направления интегрирования **g**, в зависимости от направления интегрирования либо оставляющего сингулярное слагаемое слагаемым (при прямом), либо эффективно превращающего его в вычитаемое (при обратном). Расчёт первой части **tsf** для мультиплицирования в некоторой мере аналогичен, но настолько же и сложнее. Вместо умножения гиперболический сингулярный множитель ожидаемо возводится в степень индикатора направления **g**, в зависимости от направления мультиплицирования либо оставляющего гиперболический сингулярный множитель множителем (при прямом), либо эффективно превращающего его в делитель (при обратном). Также сам гиперболический сингулярный множитель имеет всегда положительное возвращаемое гиперболизатором значение **H** в качестве своего собственного множителя, который по понятным причинам отсутствует при сингулярном слагаемом в какой-то ни было форме.

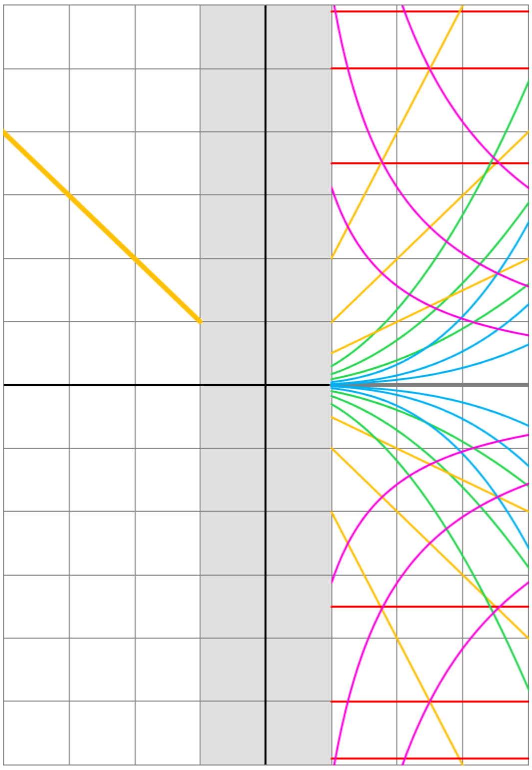
Как это уже понятно значение гиперболического сингулярного множителя может быть отрицательным. Отрицательный арифметический знак позволяет по ходе проведения мультиплицирования переводить промежуточный результат мультиплицирования, а значит и функцию мультипликала из положительной области в отрицательную, и наоборот, при этом неограниченное число раз, что является одним из залогов восстановления функции по её начинённой гиперболическими сингулярными множителями фактор-производной. Если мы говорим о неопределённом мультипликале, то свобода выбора произвольного множителя **B** избавляет нас от необходимости непосредственно в процессе мультиплицирования выбирать арифметический знак областей мультипликала, что разделены переходом мультипликала через ноль. В данном случае определяющим является положение точек перехода через ноль и их количество в отрезке мультиплицирования или во всей области определения неопределённого мультипликала.

Говоря о количестве переходов мультипликала из положительной области в отрицательную и обратно, а значит о количестве встречаемых в процессе мультиплицирования отрицательных множителей, можно сослаться на то, что гиперболические сингулярные множители в общем, будучи величинами дискретными, предполагают конечность своего количества отнесённого на конечный интервал подмультипликальной функции, что очевидно переноситься на конечность количества отрицательных множителей промежуточного результата мультиплицирования в конечном отрезке мультиплицирования, и таким образом принципиально снимает запрет на отрицательность значения гиперболического сингулярного множителя, принципиально наложенный на отрицательность непрерывного определения подмультипликальной функции именно из-за возникновения в таком случае последовательного ряда из отрицательных множителей бесконечности количества.

tsf и **tsd** обладая приоритетом перед соответственно **tf** и **td** эффективно «вырезает» это непрерывное определение функции в интервале элемента операции и заменяет его собой. С технической точки зрения промежуточный результат, соответствующий начальной точке элемента мультиплицирования, на входе в итерацию соответственно умножается на **tsf** или прибавляется **tsd** и передается на выход из итерации, в точку соответствующую концу элемента операции.

Таким образом промежуточный результат мультиплицирования не достигает запредельных значений: неопределённости или нуля. Допустим он приближается к нулю на бесконечно малую дистанцию от него и затем либо «перебрасывается» через ось абсцисс отрицательным значением гиперболического сингулярного множителя, либо «отражается» от неё, если последний положителен. С «преломлением» или без, с равенством угла отражения углу падения или нет, со скачком в значении функции или её производных или нет, всё это уже зависит от значения модуля значения сингулярного гиперболического множителя, отличен ли он от единицы, и насколько.

"Переброска" мультипликала множителем через ноль



На диаграмме представлена иллюстрация вариантов «переброски» и «отражения» в окрестности критической точки (серая зона) в зависимости от значения гиперболического сингулярного множителя и определения его гиперболизатора.

Строго говоря полученный в результате обратного мультиплицирования фактор-производной с прилагаемыми сингулярами мультипликал не является точной копией оригинальной функции из-за наличия «перебросок» через ноль или «отражений» от него, о которых мы знаем, но тем не менее эффективно тождественен ей, что, собственно, необходимо для практической работы. Несмотря на наличие таких бесконечно малого размера «заплаток» новая функция имеет неотличимые гиперболические сингулярные факториалы от принадлежащих оригинальной функции, что позволяет вновь повторить с ней операцию факторирования и получить идентичную фактор-производную.

В окрестности точки прерывания подынтегральной или подмультипликальной функции имеет значение такая величина как среднеарифметическое или среднегеометрическое от значений подынтегральной или подмультипликальной функции соответственно (далее подоперационной функции), взятых по обе стороны от точки прерывания при бесконечно близком приближении к ней. назовём данную величину условное среднее знание в точке прерывания.

Так конечное значение данной величины свидетельствует о том, что влияние значений подоперационной функции до точки прерывания на промежуточный результат операции (на интеграл или мультипликал соответственно) компенсируется её значениями после точки прерывания. Можно говорить о том, что значения функции в окрестности точки прерывания по обе стороны от неё взаимно-компенсирующие. В этом случае в качестве «заплатки» в эту точку может быть помещены сингулярное слагаемое или гиперболического сингулярного множителя с единичным гиперболизатором, что генерирует величины соответственно **tsd** и **tsf** конечного размера, устанавливающие соответственно абсолютную разницу или относительную (пропорциональную) разницу между двумя областями интеграла или мультипликала соответственно.

При операции мультиплицирования если условное среднее геометрическое значение в критической точке бесконечно мало или бесконечно велико по модулю, то компенсация осуществляется отличным от единицы возвращаемым значением гиперболизатора соответствующего случаю определения. Гиперболизатор – это то, что приводит значение гиперболического сингулярного множителя в соответствие с непрерывным определением подмультипликальной функции по обе стороны от точки разрыва. Бесконечно большое условное среднее значение компенсируется бесконечно малым возвращаемым значением гиперболизатора, бесконечно малое условное среднее значение компенсируется бесконечно большим возвращаемым значением гиперболизатора.

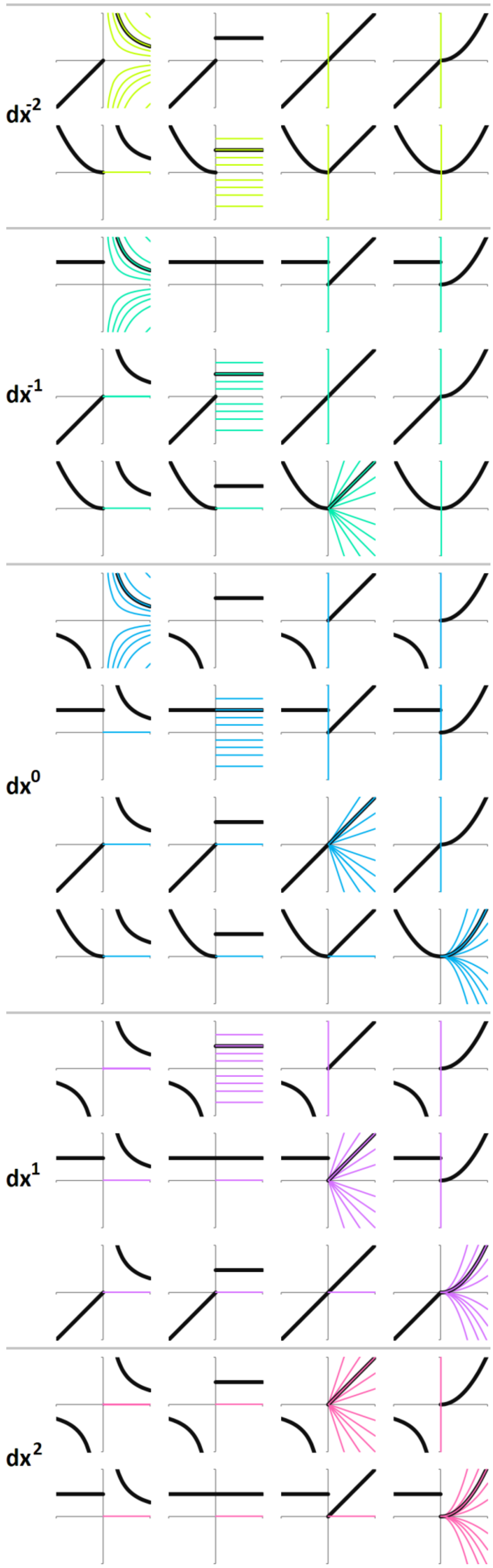
По этой причине определённый мультипликал для отрезка, состоящего только из одной точки с сингуляром с не единичным гиперболизатором, не даст конечного в качестве результата. Также результат мультиплицирования отрезка, границы которого включают в себя точки с гиперболическими сингулярными множителями с не единичным гиперболизатором могут не дать конечного значения в качестве результата. Для операции интегрирования бесконечно большое по модулю условное среднее значение в критической точке к сожалению не может быть компенсировано.

В случае если определение гиперболизатора в точке не соответствует условному среднему значению в точке, и не обязательно в точке прерывания подмультипликальной функции, то мультиплицирование может быть прервано обращением мультипликала в ноль или в бесконечность по модулю. В таких случаях гиперболизация является недостаточной или избыточной. Автоматическое генерирование прилагаемых сингуляров в процессе факторирования функций не может привести к описываемому несоответствию определения гиперболизатора по определению. Здесь имеются в виду умышленно приложенные сингуляры, модификация функций.

На диаграмме показаны комбинации непрерывного определения мультипликала по обе стороны от критической точки (чёрные графики), заданные следующими степенными уравнениями: **y=C/x; y=C; y=C·x; y=C·x²**. Цветными графиками показано то, как мог бы развиваться мультипликал справа от критической точки при помещении в критическую точку гиперболического сингулярного множителя в зависимости от определения его гиперболизатора, а именно от степени гиперболизации, как следует (справа налево): салатный: –2, аквамарин: –1, голубой: 0, сиреневый: 1, малиновый: 2. Веер из цветных графиков ненулевого конечного значения показывает на соответствие определение гиперболизатора комбинации неопределённых мультипликалов по обе стороны от критической точки. Нулевые или неопределённые значения этих графиков показывают на несоответствие, на недостаточность или на избыточность гиперболизации соответственно.

Возвращаемое значение гиперболизатора зависит от элемента мультиплицирования переданного в качестве плеча гиперболизации бесконечно малого или

H **Оценка соответствия гиперболизатора комбинациям видов смежных составляющих функций**



достаточно малого значения соответственно при аналитическом методе или при численном методе вычисления определённого мультипликала. Выражаясь метафорично, гиперболический сингулярный множитель – это «семя», содержащее количественную (конечное значение

сингуляра) и качественную (определение гиперболизатора) информацию о своём потенциальном росте, элемент мультиплицирования – это ресурс роста, «благодатная почва», а результат «запитки» гиперболического сингулярного множителя элементом мультиплицирования порождает готовый к употреблению в качестве множителя или делителя промежуточного результата мультиплицирования «плод».

Вопрос о том, почему сингуляр содержит качественную информацию, почему характер гиперболизации не определяется «автоматически», «по месту» в процессе мультиплицирования, отпадает по двум причинам. Во-первых приложенный сингуляр – это свойство функции в точке, которое принципиально не может зависеть от проводимого анализа, его логики и окружающих обстоятельств, другими словами, аналитик должен иметь право и техническую возможность нарочно приложить сингуляр в точке функции с несоответствующим этой точки определением гиперболизатора. Во-вторых в процесс мультиплицирования последовательный, он не «забегает вперед» для того, что бы определить характер развития мультиплицирования после точки прерывания, и затем выбрать соответствующее точке прерывания определение гиперболизатора. Логика операции мультиплицирования или интегрирования построена так, что она «работает в слепую», как и должно быть в принципе, ей должно быть безразлично значение и состояние промежуточного результата на входе в итерацию, конечное, бесконечно малое или бесконечно большое оно (за входное значение отвечает исключительно произвольный множитель **B**), следовательно ей безразлично получаемое на выходе значение, будет ли оно конечным, бесконечно малым, или бесконечно большим.

Анализ только непрерывного определения подоперационной функции (производной функции или фактор-производной соответственно) без учёта приложенных сингуляров не позволяет гарантировано восстановить саму функцию, если допускать возможность наличия прерываний функции или прерывания её производных в критических точках (для мультипликала в нулевых точках), то есть из-за наличия проблемы согласования произвольных слагаемых или произвольных множителей. Это обстоятельство ещё раз указывает на необходимость введения класса прилагаемых сингуляров и их приложения подоперационным функциям в обстоятельствах проведения анализа с включением в него самих критических точек и свойств функций в этих точках.

Если в элементе операции сингуляр не обнаружен, то процесс эффективно исполняется по непрерывному определению подоперационной функции. Производится предварительная проверка определённости подоперационной функции в серединной точке. Например такую проверку в отсутствии приложенного сингуляра проходит нулевая точка при мультиплицировании модуля пересекающей ось абсцисс функции. Для обеспечения существенно большей практической точности при численном решении определённого мультипликала или определённого интеграла множитель или слагаемое промежуточного результата соответственно мультиплицирования или интегрирования рассчитывается как соответственно среднегеометрическое и среднеарифметической от значений подоперационной функции в начальной границе и в конечной границе элемента операции.

Запись мультипликала и интеграла с учётом приложенных сингуляров

Поскольку приложенные к функциям сингуляры никак не проявляют себя при обычном вызове последней, формальный подход требует модификации записи мультипликала и интеграла, подразумевающих проведение операции с учётом приложенный сингуляров в определении функции:

Для мультипликала:

$$\bullet \int \overset{|}{f_1}(\mathrm{x}, \mathrm{dx}) \; || \, f_2(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} \, || \, 1, \quad (34.1.1)$$

$$\bullet \int \overset{|}{f}(\mathrm{x}, \mathrm{dx}) \; || \, 1, \quad (34.2.1)$$

$$\bullet \int \overset{+}{f}(\mathrm{x}, \mathrm{dx})^{\mathrm{dx}} \, || \, 1, \quad (34.3.1)$$

$$\bullet \int f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} \; || \, 1, \quad (34.4.1)$$

Для интеграла:

$$\int \overset{|}{f_1}(\mathrm{x}, \mathrm{dx}) \, || \, f_2(\mathrm{x})\mathrm{dx} \, || \, 0, \quad (34.1.2)$$

$$\int \overset{|}{f}(\mathrm{x}, \mathrm{dx}) \; || \, 0, \quad (34.2.2)$$

$$\int \overset{+}{f}(\mathrm{x}, \mathrm{dx})\mathrm{dx} \, || \, 0, \quad (34.3.2)$$

$$\int f(\mathrm{x})\mathrm{dx} \; || \, 0, \quad (34.4.2)$$

где «**|**» - акцент функции, заставляющий функцию возвращать только множители или только слагаемые для промежуточного результата мультиплицирования или интегрирования соответственно, что обусловлены приложенными сингулярами, попадающими в элементы операции, в противном случае возвращает неопределённость; «**+**» акцент функции, заставляющий функцию возвращать множители или слагаемые для промежуточного результата мультиплицирования или интегрирования соответственно, что обусловлены как попадающими в элементы операции сингулярами, так и непрерывным определением функции.

Постановка акцента придаёт функции выше описанную логику, по сути определяя новую функцию, за основу которой взята функция под акцентом. В эту новую функцию в качестве дополнительного аргумента передаётся **dx.** Это необходимо для того, что бы действуя в новой логике она могла вести поиск сингуляра внутри элемента операции и генерировать возвращаемое значение гиперболизатора. При этом сокращенная запись, та, что с акцентом «**+**» формально подразумевает возвращение функцией под акцентом не конечных значений: **tsd/dx** при интегрировании, и $\sqrt[\mathbf{dx}]{\mathbf{tsf}}$ при мультиплицировании. При этом предполагается то, что перед извлечением корня из **tsf** последний разлагается два множителя: свой модуль **|tsf|** и свой арифметический знак **sign(tsf)** как следует: $\sqrt[\mathbf{dx}]{\mathbf{sign(tsf)}} \cdot \sqrt[\mathbf{dx}]{|\mathbf{tsf}|}$, что необходимо для возможности передачи знака множителя через операцию возведение в бесконечно малую степень **dx**. В данном случае, чем бы не являлось выражение $\sqrt[\mathbf{dx}]{-\mathbf{1}}$, но в последствии возведённое в степень **dx**, должно дать в результате **—1**.

Развернутая запись, та, что с акцентом «**|**», позволяет проводить операции с использованием двух отдельный функций: для определения сингуляров и для непрерывного определения функции.

Уравнения **34.4.1** и **34.4.2** отражают классическое проведение операций без учета приданных сингуляров, даже не смотря на то, что они присутствуют в определении подоперационной функции.

Необязательные добавки **||1** и **||0** могут быть использованы для предотвращения прерывания операции при отсутствии непрерывного определения функции.

Исключительно для цели демонстрации возможностей мультиплицирования с учётом сингулярных свойств функций можно определить **x!** используя определённый мультипликал. Для этого необходимо ввести функцию **getZ**, что генерирует дискретную функцию из переданной в качестве аргумента непрерывной путём удаления определения функции из всей её области кроме точек целочисленного значения аргумента:

$$\mathrm{X(x) = x}, \quad (35.4)$$

$$\mathrm{x! = \bullet\!\!\int_0^x \overset{|}{\mathrm{create\_singular}}(getZ(X), "HSM")(x', dx') \;||\; 1.} \quad (35.5)$$

Правило согласования произвольного множителя «B» и произвольного слагаемого «C» с учётом приложенных сингуляров

Уравнение согласования произвольных множителей и произвольных слагаемых для смежных областей функций при аналитическом построении неопределённых мультипликалов и неопределённых интегралов с учётом наличия гиперболических сингулярных множителей и сингулярный слагаемых приобретают следующий вид:

$$F_0\big((\mathrm{x})\big)\ + \mathrm{C}_0 + \mathbf{sa}f(\mathrm{x})\ = F_1(\mathrm{x})\ + \mathrm{C}_1,\quad (36.1)$$

$$\lim_{\mathrm{dx}\to 0} F^{\bullet}{}_0(\mathrm{x}-\mathrm{dx})\ \cdot \mathrm{B}_0 \cdot \mathbf{hsm}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} \cdot \mathbf{hsm}f(\mathrm{x}).\mathrm{H}(\mathrm{dx})\ = \lim_{\mathrm{dx}\to 0} F^{\bullet}{}_1(\mathrm{x}+\mathrm{dx})\ \cdot \mathrm{B}_1,\quad (36.2)$$

$$\mathrm{p_x} = \lim_{\mathrm{dx}\to 0} \log_{dx} \mathbf{hsm}f(\mathrm{x}).\mathrm{H}(\mathrm{dx}),\quad (36.3)$$

$$(F^{\bullet}{}_0)'^{\mathrm{j_x}}\big((\mathrm{x})\big)\ \cdot \mathrm{k_x}! \cdot \mathrm{B}_0 \cdot \mathbf{hsm}f(\mathrm{x}).\mathrm{V} \cdot 0^{(\mathrm{p_x}-\mathrm{k_x}+\mathrm{j_x})}\ = (F^{\bullet}{}_1)'^{\mathrm{k_x}}(\mathrm{x})\ \cdot \mathrm{j_x}! \cdot \mathrm{B}_1,\quad (36.4)$$

где $\mathbf{F_0}$ – первообразная функции слева от точки **x** с сингулярным слагаемым; $\mathbf{F_1}$ - первообразная функции справа от точки с сингуляром; $\mathbf{C_0}$ – произвольное слагаемое неопределённого интеграла функции слева от точки **x**; $\mathbf{C_1}$ – произвольное слагаемое неопределённого интеграла функции справа от точки **x**; **sa*f*(x)** – значение сингулярного слагаемого в точке **x**; **p** – степень при **dx** в определении гиперболизатора; $\mathbf{j_x}$ – порядковый номер первой найденной производной от фактор-первообразной с ненулевым конечным значением в точке **x** не включительно, начиная с нулевого порядкового номера, имея в виду саму фактор-первообразную; $\mathbf{k_x}$ – порядковый номер первой найденной производной от фактор-первообразной с ненулевым конечным значением в точке **x** включительно, начиная с нуля имея в виду саму фактор-первообразную; $\mathbf{(F^{\bullet}{}_0)'^{j_x}}$ – **j**-ая производная от фактор-первообразной функции слева от точки с сингуляром **x** не включительно; $\mathbf{(F^{\bullet}{}_1)'^{k_x}}$ – **k**-ая производная от фактор-первообразной функции справа от точки с сингуляром **x** включительно; $\mathbf{B_0}$ – произвольный множитель неопределённого мультипликала функции слева от точки **x**; $\mathbf{B_1}$ – произвольный множитель неопределённого мультипликала функции справа от точки **x**; **hsm*f*(x).V** – значение гиперболического сингулярного множителя в точке **x**; **hsm*f*(x).H** –гиперболизатор гиперболического сингулярного множителя в точке **x**.

Для неопределённого интеграла уравнение согласования произвольных слагаемых представляет собой уравнение согласования сингулярного дифференциала первообразной с сингулярным слагаемым подынтегральной функции (**36.1**). Для неопределённого мультипликала аналогичное выражается в согласовании симметричного факториала первообразной с гиперболическим сингулярным множителем подмультипликальной функции (**36.2**), и по этой причине в уравнении решается через предел при **dx** стремящемся к нулю.

Если можно найти решение для гиперболического сингулярного факториала неопределённого мультипликала в точке **x** через конечные ненулевые значения производных его составляющих функций и если гиперболизатор гиперболического сингулярного множителя в точке **x** представлен степенной функцией с натуральным включающим ноль значением показателя степени при **dx**, то уравнение согласования произвольных множителей для этих составляющих функций может быть выражено через их производные (**36.4**). Размер **dx** в данном случае не принципиален, он необходим лишь для того, что бы извлечь целочисленное значение степени при **dx** из определения гиперболизатора (**36.3**). Как видно из уравнения **36.4** успешное согласование произвольных множителей возможно в только случае, если гиперболизатор компенсирует потенциальную несоизмеримость значений составляющих функций неопределённого мультипликала по обе стороны от точки **x**. В качестве контроля удовлетворительной компенсации должно соблюдаться уравнение: $\mathbf{p_x - k_x + j_x = 0}$, при этом подразумевая $\mathbf{0^0 = 1}$.

Ссылки:

[1] Особенность https://ru.wikipedia.org/wiki/Особенность

[2] Дмитрий Владимирович Гурьянов, Концепция мультипликала https://vixra.org/abs/2205.0150