Малые циклы обобщённых раковин

Эльмар Гусейнов (elmarguseinov@yahoo.com)

01.09.21

Введение

Гипотеза Эрдёша-Дьярфаша (ГЭД) утверждает, что каждый граф со степенями вершин не менее 3 содержит простой цикл, длина которого равна степени 2. Соответствующая проблема не решена даже для кубических графов, более того – для кубических гамильтоновых графов. С другой стороны, легко убедиться, что каждый кубический гамильтонов граф содержит чётное число вершин $2k$ и может быть получен добавлением k рёбер к $2k$-циклу. Будет показано, что добавление указанного количества рёбер к одной вершине цикла всегда приводит к образованию 4-цикла. Это свидетельствует в пользу справедливости ГЭД для кубических гамильтоновых графов. Соответствующая теорема является следствием более общего результата, доказательство которого составляет основное содержание данной статьи. А именно, будет определено максимальное количество рёбер, добавление которых к заданной вершине цикла не приводит к образованию цикла достаточно малой длины.

1. Обобщённые раковины

Двухэлементное множество $\{a, b\}$ несмежных вершин простого цикла называется *хордой*. Таким образом, цикл C_n содержит $n-3$ хорды, включающие заданную вершину v цикла. Добавляя к v все указанные хорды (т.е. проводя соответствующие рёбра), мы получим т.н. *раковину* (*shell*). Для неотрицательного целого $m \leq n-3$ граф, полученный добавлением m хорд к заданной вершине C_n, будет называться (*обобщённой*) (n, m)-*раковиной*. Нетрудно видеть, что количество (n, m)-раковин равно $\binom{n-3}{m}$. Сформулируем основную теорему.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\frac{n+2}{2} \geq l \geq 3$, $m = \left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor(l-2) - 1 + \min\left\{n-2-\left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor(2l-4), l-3\right\}$. Тогда:

$\mathcal{A}$. Существует (n, m)-раковина, не содержащая C_l в качестве подграфа

$\mathcal{B}$. Каждая $(n, m+1)$-раковина содержит C_l

Чтобы убедиться в корректности соответствующей формулировки, покажем, что выполнены условия $n-3 \geq m+1$ и $m \geq 0$. Заметим, что $\frac{n+2}{2} \geq l$ влечёт $n-2 \geq 2l-4$ (1). Отсюда $\left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor - 1 \geq 0$ и, следовательно, $\left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor(l-2)-(l-2) \geq 0$ (т.к. $l \geq 3$). Таким образом, $\left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor(l-2)-1 \geq 0$. Данное неравенство с учётом $n-2-\left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor(2l-4) \geq 0$ и $l-3 \geq 0$ влечёт $m \geq 0$. Предположим далее, что условие $n-3 \geq m+1$ не выполнено, т.е. $m+1 > n-3$, откуда $m > n-4$. Заметим, что

$$m \leq \frac{n-2}{2l-4}(l-2)-1+(l-3) = \frac{n-2}{2}+l-4 \ (2)$$

Отсюда $\frac{n-2}{2}+l-4 > n-4$, т.е. $\frac{n-2}{2}+l > n$. С учётом $l \leq \frac{n+2}{2}$ получаем $\frac{n-2}{2}+\frac{n+2}{2} > n$, т.е. $n > n$. Это противоречие показывает, что $m+1 \leq n-3$.

Доказательства утверждений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будут приведены далее, пока же обратим внимание на одно из следствий рассмотренной теоремы.

Следствие 1. Добавление k хорд к заданной вершине C_{2k} приводит к графу, содержащему C_4.

Доказательство. Утверждение тривиальным образом истинно при $k=2$. При $k \geq 3$ заметим, что

$$\frac{2k+2}{2} \geq 4$$

Это позволяет воспользоваться Теоремой 1 ($n=2k$, $l=4$). В соответствии с утверждением $\mathcal{B}$ достаточно показать, что $k > m$. Применяя 2, получаем

$$m \leq \frac{2k-2}{2}+4-4 = k-1$$

∎

2. Доказательство утверждения $\mathcal{A}$

Выпишем условия Теоремы 1:

$$\frac{n+2}{2} \geq l \geq 3 \ (3)$$

$$m = \left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor (l-2) - 1 + \min\left\{ n - 2 - \left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor (2l-4), l-3 \right\} \ (4)$$

Для доказательства утверждения $\mathcal{A}$ достаточно построить не содержащую C_l (n, m)-раковину. Без потери общности положим $C_n = v_1 - v_2 - \cdots - v_n - v_1$. Будем добавлять m хорд к вершине v_1.

Рассмотрим множество $\Lambda = \{v_2, \dots, v_{n-1}\}$, содержащее $n-2$ элемента. Из 3 получаем $2l - 4 \geq 2$. Отсюда с учётом 1 в Λ можно выбрать первые $s = \left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor \geq 1$ непустых подмножеств $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, содержащих по $2l-4$ элемента:

$$\lambda_1 = \{v_2, \dots, v_{2l-3}\}$$

$$\lambda_2 = \{v_{2l-2}, \dots, v_{4l-7}\} \ (\text{при } s \geq 2)$$

…

Выберем в каждом из этих множеств первые $l-2$ элемента и соединим их рёбрами с v_1, если этих рёбер ещё нет. Поскольку среди выбранных вершин только v_2 изначально соединена с v_1, будет добавлено $s(l-2) - 1 = \left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor (l-2) - 1$ новых ребра.

Пусть далее $r = \min\left\{ n - 2 - \left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor (2l-4), l-3 \right\}$. Отсюда с учётом 3

$$0 \leq r \leq n - 2 - \left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor (2l-4) = n - 2 - s(2l-4) = \left| \Lambda \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \lambda_i \right|$$

Таким образом, при $r > 0$ мы можем добавить r рёбер, соединяющих v_1 с теми вершинами Λ, которые не принадлежат $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Соединим в этом случае v_1 с последними r вершинами Λ – $v_{n-r}, \dots, v_{n-1}$.

В общей сложности к C_n было добавлено $s(l-2)-1+r=m$ хорд. Обозначим полученную (n,m)-раковину как G и докажем, что она не содержит C_l. Пусть z – цикл G. Нетрудно видеть, что z содержит v_1. В самом деле, утверждение очевидным образом выполнено при $z=C_n$, тогда как в противном случае z содержит добавленную к v_1 хорду. Обозначим как $\mathcal{E}$ множество инцидентных v_1 рёбер. Таким образом, z содержит два различных ребра $\varepsilon, \epsilon \in \mathcal{E}$. Пусть без потери общности $\varepsilon = v_1 v_i$, $\epsilon = v_1 v_j$, $i<j$. Отсюда $z = v_1 - v_i - v_{i+1} - \dots - v_j - v_1$, и длина z равна $\delta = 2 + j - i$ (5). Имеет место одна из следующих возможностей:

1. $v_i, v_j \in \lambda_x$, $x \in \{1, \dots, s\}$
2. $v_i, v_j \in \{v_{n-r}, \dots, v_n\}$
3. $v_i \in \lambda_x$, $v_j \in \lambda_y$, $1 \le x < y \le s$
4. $v_i \in \lambda_x$, $x \in \{1, \dots, s\}$, $v_j \in \{v_{n-r}, \dots, v_n\}$

По построению в первом и втором случае выполнено условие $j - i \le l - 3$, а в третьем и четвёртом $j - i \ge l - 1$. Отсюда с учётом 5 $\delta \le l - 1$ или $\delta \ge l + 1$. Следовательно, $\delta \ne l$.

2. Доказательство утверждения $\mathcal{B}$

Доказательство утверждения $\mathcal{B}$ осуществим от противного, полагая, что при выполнении условий 3 и 4 найдётся не содержащая C_l $(n, m+1)$-раковина G. Без потери общности будем считать, что $C_n = v_1 - v_2 - \dots - v_n - v_1$, и $m+1$ хорда была добавлена к v_1.

Из 1 и 3 следует $n - 1 > 2l - 4 \ge 2$ (6). Пусть $\beta = n - 1 \, mod \, 2l - 4$. Тогда для некоторого $\alpha \ge 1$ выполнено условие $n - 1 = \alpha(2l-4) + \beta$ (7). Для $i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ положим

$$S_i = \left\{\{v_{2+i(2l-4)}, v_{l+i(2l-4)}\}, \dots, \{v_{2+i(2l-4)+(l-3)}, v_{l+i(2l-4)+(l-3)}\}\right\}$$

Здесь при записи последующего двухэлементного множества индексы первого и второго элементов увеличиваются на единицу.

В силу $2 + i(2l - 4) + (l - 3) < l + i(2l - 4)$ элементы S_i попарно не пересекаются. Кроме того, $l + i(2l - 4) + (l - 3) < 2 + (i + 1)(2l - 4)$, поэтому не пересекаются любые два элемента, выбранные из различных множеств $S_0, \dots, S_{\alpha-1}$. Заметим также, что в силу 7 $l + (\alpha - 1)(2l - 4) + (l - 3) = \alpha(2l - 4) + 1 \leq n$. Таким образом, объединение U множеств $S_0, \dots, S_{\alpha-1}$ содержит $\alpha(l - 2)$ попарно не пересекающихся двухэлементных подмножества $\{v_2, \dots, v_n\}$. Заметим, кроме того, что для любого элемента $\{v_p, v_q\} \in U$ выполнено условие $|p - q| = l - 2$. Поскольку G не содержит циклов длины l, заключаем, что в каждом двухэлементном множестве U найдётся хотя бы одна вершина, не смежная с v_1. Таким образом, к v_1 не было добавлено по крайней мере $\alpha(l - 2)$ из возможных $n - 3$ хорд. Отсюда $m + 1 \leq n - 3 - \alpha(l - 2)$, т.е. $m \leq n - 4 - \alpha(l - 2)$ (8). Обращаясь к данному условию, получим противоречие для случая $\beta < l - 1$.

$\beta = 0$. Имеем $n - 1 = \alpha(2l - 4)$, откуда

$$n - 4 - \alpha(l - 2) = n - 4 - \frac{n - 1}{2} = \frac{n - 7}{2}$$

Воспользовавшись 8, получаем $m \leq \frac{n-7}{2}$ (9). Далее в силу 6

$$\left\lfloor \frac{n - 2}{2l - 4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n - 1) - 1}{2l - 4} \right\rfloor = \left\lfloor \alpha - \frac{1}{2l - 4} \right\rfloor = \alpha - 1$$

Заметим, что $l - 3 < 2l - 5$ (иначе $l \leq 2$). Отсюда

$$m = \left\lfloor \frac{n - 2}{2l - 4} \right\rfloor (l - 2) - 1 + \min\left\{n - 2 - \left\lfloor \frac{n - 2}{2l - 4} \right\rfloor (2l - 4), l - 3\right\} =$$

$$= (\alpha - 1)(l - 2) - 1 + \min\{\alpha(2l - 4) - 1 - (\alpha - 1)(2l - 4), l - 3\} =$$

$$= (\alpha - 1)(l - 2) - 1 + \min\{2l - 5, l - 3\} = (\alpha - 1)(l - 2) - 1 + (l - 3) =$$

$$= \alpha(l - 2) - 2 = \frac{n - 1}{2} - 2 = \frac{n - 5}{2}$$

Нами получено равенство $m = \frac{n-5}{2}$, которое противоречит 9.

$0 < \beta < l-1$. В силу $n-1 = \alpha(2l-4)+\beta$ и 8 имеем $m \le \frac{n-7+\beta}{2}$ (10). С другой стороны, так как $\beta > 0$, выполнено равенство

$$\left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha(2l-4)+\beta-1}{2l-4} \right\rfloor = \left\lfloor \alpha + \frac{\beta-1}{2l-4} \right\rfloor = \alpha$$

Заметим, что $\beta < l-1$ влечёт $\beta - 1 < l-2$, откуда $\beta - 1 \le l-3$. Имеем

$$m = \left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor (l-2) - 1 + \min\left\{n-2-\left\lfloor \frac{n-2}{2l-4} \right\rfloor (2l-4), l-3\right\} =$$
$$= \alpha(l-2) - 1 + \min\{n-2-\alpha(2l-4), l-3\} = \alpha(l-2) - 1 + \min\{\beta-1, l-3\} =$$
$$= \alpha(l-2) - 1 + (\beta-1) = \frac{n-5+\beta}{2}$$

Нами получено равенство $m = \frac{n-5+\beta}{2}$, которое противоречит 10.

Пусть теперь $\beta \ge l-1$. В этом случае рассмотренное выше семейство U может быть расширено дополнительными двухэлементными множествами $\{v_p, v_q\} \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$, для которых выполнено условие $|p-q| = l-2$. При этом в расширенном множестве все элементы вновь будут попарно не пересекающимися. Добавим к $S_0, \dots, S_{\alpha-1}$ определяемое прежним способом множество

$$S_\alpha = \left\{\left\{v_{2+\alpha(2l-4)}, v_{l+\alpha(2l-4)}\right\}, \dots, \left\{v_{2+\alpha(2l-4)+\beta-(l-1)}, v_{l+\alpha(2l-4)+\beta-(l-1)}\right\}\right\}$$

В соответствии с доказанным выше наименьший индекс элемента из $\bigcup S_\alpha$ больше наибольшего индекса элемента из U:

$$2 + \alpha(2l-4) > l + (\alpha-1)(2l-4) + (l-3)$$

С другой стороны, поскольку $\beta < 2l - 4$, индекс первого элемента последнего множества в S_α меньше индекса второго элемента первого множества в S_α:

$$2 + \alpha(2l - 4) + \beta - (l - 1) < l + \alpha(2l - 4)$$

Это доказывает, что элементы S_α не пересекаются с элементами U и попарно не пересекаются друг с другом. Таким образом, попарно не пересекаются и элементы множества $U \cup S_\alpha$, причём

$$|U \cup S_\alpha| = |U| + |S_\alpha| = \alpha(l - 2) + \beta - l + 2$$

Покажем, что элементы $U \cup S_\alpha$ являются подмножествами $\{v_2, \dots, v_n\}$. Для этого достаточно убедиться, что наибольший индекс элемента из $\bigcup S_\alpha$ не превышает n:

$$l + \alpha(2l - 4) + \beta - (l - 1) = \alpha(2l - 4) + \beta + 1 \le n$$

Итак, нами получено содержащее $\alpha(l - 2) + \beta - l + 2$ элементов семейство $U \cup S_\alpha$ попарно не пересекающихся двухэлементных подмножеств $\{v_2, \dots, v_n\}$, такое что абсолютная разница индексов элементов каждого двухэлементного подмножества равна $l - 2$. Вновь ввиду отсутствия C_l в G заключаем, что хотя бы одна из вершин $\{v_p, v_q\} \in U \cup S_\alpha$ не смежна с v_1. Следовательно, v_1 не смежна по крайней мере с $\alpha(l - 2) + \beta - l + 2$ вершинами $\{v_3, \dots, v_{n-1}\}$ (при выборе не смежных с v_1 вершин множества $\{v_2, \dots, v_n\}$ вершины v_2 и v_n никогда выбраны не будут). Отсюда

$$m + 1 \le n - 3 - (\alpha(l - 2) + \beta - l + 2)$$

Преобразуем данное неравенство:

$$m \le n - 6 - \alpha(l - 2) - \beta + l = \alpha(2l - 4) + \beta - 5 - \alpha(l - 2) - \beta + l =$$

$$= \alpha(l - 2) + l - 5 \ (11)$$

Обратимся теперь к соотношению $\left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor = \alpha$, полученному при рассмотрении случая $0 < \beta < l-1$. Условие $\beta \geq l-1$ влечёт $\beta - 1 \geq l-2 > l-3$. Отсюда

$$m = \left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor(l-2) - 1 + \min\left\{n-2-\left\lfloor\frac{n-2}{2l-4}\right\rfloor(2l-4), l-3\right\} =$$

$$= \alpha(l-2) - 1 + \min\{\beta - 1, l-3\} = \alpha(l-2) - 1 + (l-3) = \alpha(l-2) + l - 4$$

Нами получено равенство $m = \alpha(l-2) + l - 4$, которое противоречит 11. Это завершает доказательство.