

Note sur La Représentation Plane de Laborde Appliquée en Madagascar - I. Partie Théorique -

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

Résidence Bousten 8, Bloc B, Rue Mosquée Raoudha,
1181 La Soukra Raoudha, Tunisia.
E-mail: abenhadjsalem@gmail.com

Résumé

Nous présentons dans cette première note la représentation plane de Laborde appliquée au Madagascar. Nous revenons sur les formules et les détails mathématiques à partir du document source à savoir le fascicule $n^{\circ}4$ du " Traité des Projections des Cartes Géographiques, à l'Usage des Cartographes et des Géodésiens ", publié en 1926, par L. Driencourt et J. Laborde [5]. Nous avons fait usage du langage moderne pour certaines anciennes expressions citées dans le document source.

Mots-clefs : représentation plane conforme, altérations angulaire et linéaire, lignes isomètres et isomorphes, représentation plane de Gauss, représentation plane de Mercator.

Abstract

In this first paper, we present the plane representation of Laborde applied to Madagascar. We come back to the formulas and the mathematical details from the source document namely fascicle $n^{\circ}4$ of the "Treaty of Projections of Geographical Maps, for the Use of Cartographers and Geodesists ", published in 1926, by L. Driencourt and J. Laborde. We have used modern language for certain old expressions cited in the source document.

Keywords : conformal plane representation, angular and linear alterations, isometric and isomorphic lines, Gauss and Mercator plane representations.

Version 1., 13 February 2022

Cet article est dédié à mon épouse pour son soutien quotidien, à mes élèves, à mon professeur de mathématiques M. Chebil

1 Préambule

Cette première note concerne la représentation plane conforme de Laborde au nom de Jean Laborde, Lieutenant-Colonel d'Artillerie Coloniale qui avait adopté cette représentation en remplacement de la représentation de Bonne (qui est équivalente) pour le Madagascar en 1928.

Nous organisons cette première note comme suit :

- Nous rappelons dans la section 2 le lien entre les représentations planes et les fonctions analytiques en utilisant les nombres complexes.
 - Dans la section 3, nous présentons les différentes formules qui seront utilisées par la suite dans la note.
 - La section 4 donne tous les détails de la représentation de Laborde.
- L'étude d'un exemple numérique fait l'objet d'une deuxième note.

2 Les Représentations Planes et les Fonctions Analytiques

2.1 Rappels Mathématiques

On considère le plan complexe tel que à un point de coordonnées (x, y) , on associe le nombre complexe $z = x + iy$ et on peut écrire :

$$z = |z|e^{i \cdot \arg(z)} = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))) \quad (1)$$

où $|z|$ est le module et $\arg(z)$ est l'argument du nombre complexe z défini à $2k\pi$ avec :

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}(\arg(z)) &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

2.1.1 Logarithme Complexe

Soit t un nombre complexe donné, on cherche tous les nombres complexes z tels que $e^z = t$. Il n'en existe que si $t \neq 0$. Supposons $t \neq 0$, on a alors :

$$z = x + iy \implies e^z = t \implies e^x e^{iy} = t = |t|e^{i \cdot \arg(t)} \implies x = \operatorname{Log}|t| \text{ et } y = \arg(t) \text{ à } 2k\pi \text{ près}$$

On a donc :

$$z = x + iy = \operatorname{Log}|t| + i \cdot \arg(t)$$

Par définition, on pose :

$$z = \text{Log}t = \text{Log}|t| + i.\text{arg}(t) \quad (3)$$

Définition 2.1. On appelle détermination de $\text{Log}t$ dans un ouvert connexe \mathcal{D} du plan complexe toute fonction g continue de t définie dans \mathcal{D} et telle que :

$$\forall t \in \mathcal{D}, e^{g(t)} = t \quad (4)$$

2.2 Les Fonctions analytiques

A tout nombre complexe $z = x + iy$ on peut faire correspondre un nombre complexe $Z = X + iY$ par l'intermédiaire d'une fonction f . On note, en appelant P et Q les parties réelle et imaginaire de f :

$$Z = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (5)$$

Cette correspondance entre z et Z définit une représentation d'un plan (p) sur un plan (P) dans laquelle le point A d'affixe Z du plan (P) est l'image d'un point a d'affixe z du plan (p). L'extension des propriétés concernant les limites et la continuité, pour la fonction f , se

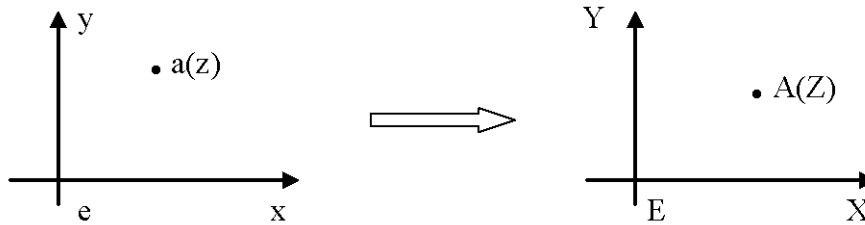


FIGURE 1 – Correspondance

déduit immédiatement des propriétés analogues concernant les fonctions P et Q des deux variables (x, y) .

Pour étendre à la fonction f la notion de dérivée, il faut étudier la limite, lorsque $z \rightarrow 0$, du rapport $\frac{dZ}{dz}$, qui s'écrit :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dX + idY}{dx + idy} = \frac{P'_x dx + P'_y dy + i(Q'_x dx + Q'_y dy)}{dx + idy} = \frac{(P'_x + iQ'_x)dx + (P'_y + iQ'_y)dy}{dx + idy}$$

Ce rapport dépend en général de $\frac{dy}{dx}$; sa limite dépend de la manière dont dz tend vers zéro, ou encore de la façon dont le point a' d'affixe $z + dz$ tend vers le point a d'affixe z : si a' tend vers a en décrivant une spirale dont a est le point asymptotique, par exemple, la limite n'existe pas.

Mais le rapport $\frac{dZ}{dz}$ est une fonction homographe de (dx, dy) . La limite quand $dz \rightarrow 0$, est indépendante de la façon dont $dz \rightarrow 0$, c'est-à-dire dont dx et dy tendent (indépen-

damment) vers 0, si :

$$P'_x + iQ'_x = \frac{P'_y + iQ'_y}{i} \quad (6)$$

C'est-à-dire si :

$$P'_x = Q'_y \quad \text{et} \quad P'_y = -Q'_x \quad (7)$$

ou en revenant à X et Y :

$$\text{Conditions de Cauchy} \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases} \quad (8)$$

relations connues sous le nom de **conditions de Cauchy**^a. Lorsque ces conditions sont satisfaites, la fonction f admet, en tout point de son domaine de définition, une dérivée notée :

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{dZ}{dz} = P'_x + iQ'_x = Q'_y - iP'_y \quad (9)$$

La fonction f est dite **analytique**.

^a. **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) : Mathématicien français.

2.3 Autre définition de la fonction analytique

Soit $F(x, y)$ une fonction complexe donc une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. On suppose que F soit différentiable entraîne que :

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy \quad (10)$$

On pose :

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

qui sont 2 fonctions différentiables en x et y , d'où :

$$dz = dx + idy$$

$$d\bar{z} = dx - idy$$

Par suite :

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad (11)$$

$$dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \quad (12)$$

On les remplace dans l'équation (10), on obtient :

$$dF(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

En remplaçant x par $(z + \bar{z})/2$ et y par $(z - \bar{z})/2i$, $F(x, y)$ devient une fonction $G(z, \bar{z})$, ce qui donne en posant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ dF(x, y) &= dG(z, \bar{z}) = \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial z} dz + \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned} \quad (13)$$

On considère maintenant le cas où la fonction F est analytique. De l'équation précédente, on a :

$$dF(x, y) = dG(z, \bar{z}) = \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial z} dz + \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = F'(z) dz$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (14)$$

On vérifie bien si ce terme là est nul :

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial y} \right) \quad (15)$$

On introduit la notation suivante :

$$F(x, y) = G(z, \bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y) = P + iQ$$

On a donc de (15) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(P + iQ)}{\partial x} + i \frac{\partial(P + iQ)}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Comme la fonction F ou G est analytique, et en utilisant les conditions de Cauchy (7), on a finalement :

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (16)$$

Définition 2.2. Une fonction $f(z, \bar{z})$ est analytique en z si elle ne dépend que de z soit :

$$\frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (17)$$

Avec les notations de l'équation (5), au point a du plan (p) , quelle que soit la direction du vecteur $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$, d'affixe dz , on peut écrire :

$$dZ = f'(z_0)dz = |f'(z_0)|e^{i \cdot \arg f'(z_0)} dz$$

relation qui exprime que le vecteur $\mathbf{A}_0\mathbf{A}$ se déduit du vecteur $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$ par une similitude, dont le rapport est $|f'(z_0)|$ et l'angle $\arg f'(z_0)$.

La représentation du plan (p) sur le plan (P) est donc conforme. On peut écrire :

$$dS = |dZ| \quad \text{et} \quad ds = |dz| \quad (18)$$

Le module linéaire de la représentation est :

$$m = \left| \frac{dZ}{dz} \right|$$

$$\text{et} \quad \arg \left(\frac{dZ}{dz} \right) = \text{Arctg} \left(\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x}} \right) = \alpha \quad (19)$$

α angle de la tangente en A_0 à l'image y_0 de la droite $y = y_0$ du plan (p) (Fig. 2).

En effet, cette image est définie en fonction du paramètre x , par :

$$\begin{cases} X = X(x, y_0) \\ Y = Y(x, y_0) \end{cases} \quad (20)$$

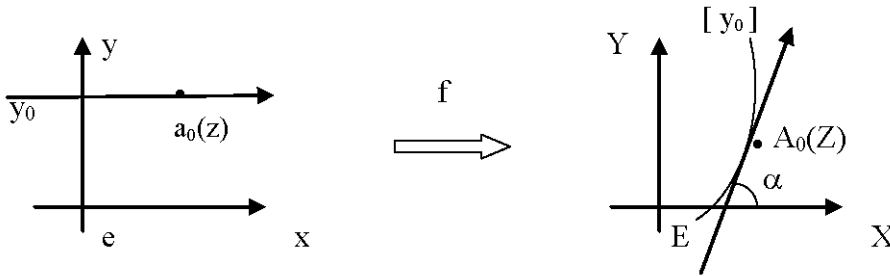


FIGURE 2 – Image de $y = y_0$

Les conditions de Cauchy données par (8) se traduisent aussi en disant que les fonctions P et Q sont des fonctions harmoniques, c'est-à-dire qu'elles satisfont chacune l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

On démontre les propriétés suivantes (J. Dieudonné¹, [1]) :

- si f est une fonction analytique, elle admet des dérivées de tous les ordres : elle est donc développable en série entière en tout point de son domaine de définition,

- une fonction analytique est déterminée dans tout son domaine d'existence, si elle est définie dans une région, aussi petite qu'on la suppose, entourant un point a ; ou même tout le long d'un arc de courbe, aussi petit qu'on le suppose, aboutissant au point a .

En effet, la connaissance de f au voisinage de a permet (théoriquement tout au moins) de former la suite des dérivées de f au point a , donc, d'écrire son développement en série de Taylor. Si b est un point intérieur au cercle de convergence de cette série, on peut alors calculer les dérivées successives de f au point b , et ainsi de suite. L'opération est dite prolongement analytique de f .

3 Rappels d'éléments de la cartographie mathématique

Dans cette section, nous allons rappeler les différentes définitions et formules qu'on aura besoin dans la suite de la note.

3.1 La géométrie de l'ellipse et de l'ellipsoïde

3.1.1 L'ellipse

Définition 3.1. *L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes ou foyers est constante :*

$$MF + MF' = \text{constante} = 2a \quad (22)$$

où a est dit le demi-grand axe de l'ellipse (Fig. 3).

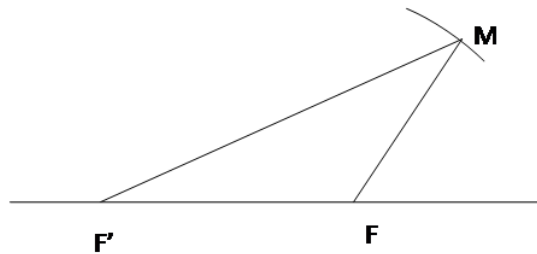


FIGURE 3 – Définition de l'ellipse

Définition 3.2. *Une ellipse est la transformée par affinité d'un cercle dans le rapport b/a où b est le demi-petit axe (Fig. 4).*

1. Jean Dieudonné (1906 - 1992) : Mathématicien français.

Au point $M' \in \text{cercle} \implies M \in \text{ellipse}$ avec :

$$HM = \frac{b}{a}HM' \quad (23)$$

Soit Ψ l'angle $\widehat{HOM'}$, Ψ est dite latitude paramétrique ou réduite, d'où les coordonnées

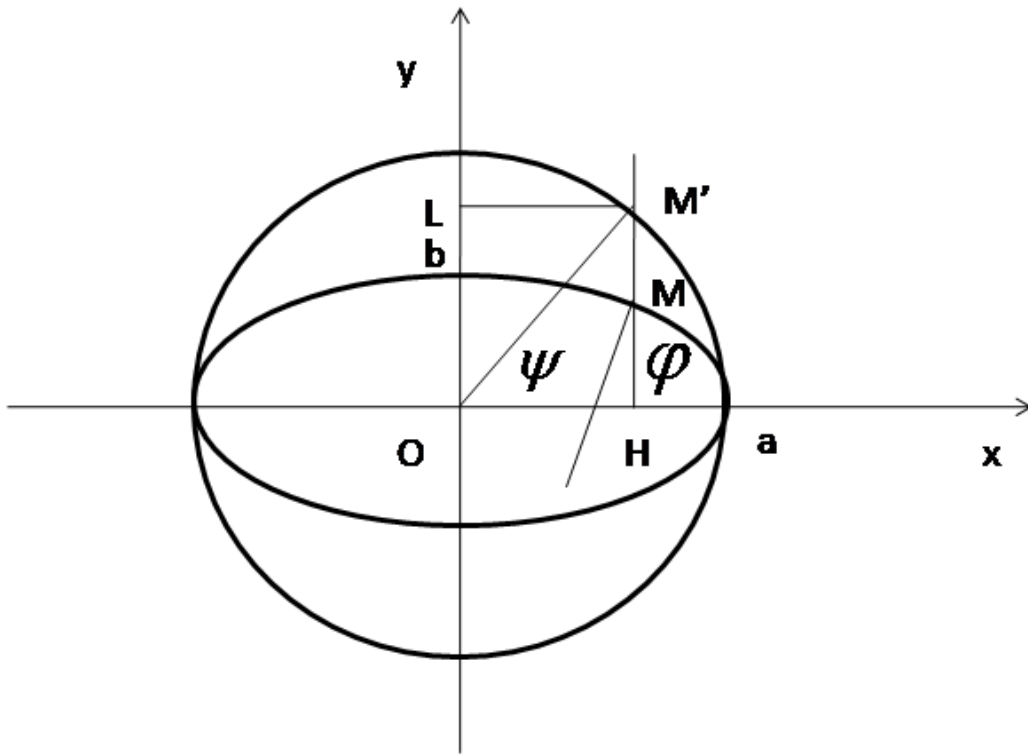


FIGURE 4 – L'affinité

de M' :

$$\begin{aligned} x &= OH = OM' \cos \Psi \\ y &= OL = OM' \sin \Psi \end{aligned}$$

Par suite, les coordonnées de M sur l'ellipse sont :

$$\begin{cases} x = OH = a \cos \Psi \\ y = OL = \frac{b}{a} HM' = \frac{b}{a} a \sin \Psi = b \sin \Psi \end{cases} \quad (24)$$

Dans le système d'axes Ox, Oy , l'équation de l'ellipse s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On appelle respectivement aplatissement, le carré de la première excentricité et le carré de la deuxième excentricité les quantités :

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \quad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \quad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2} \quad (25)$$

Les Equations paramétriques de l'ellipse

Les équations (24) représentent les équations paramétriques de l'ellipse en fonction de la latitude Ψ . On va exprimer ces équations en fonction de l'angle φ de la normale en M avec l'axe Ox .

Soit TM' la tangente en M' au cercle de rayon a , le point T est l'intersection de cette tangente avec l'axe Ox . La transformée de cette tangente par affinité de rapport b/a de cette tangente est la droite tangente à l'ellipse au point M et elle passe par T (**Fig. 5**).

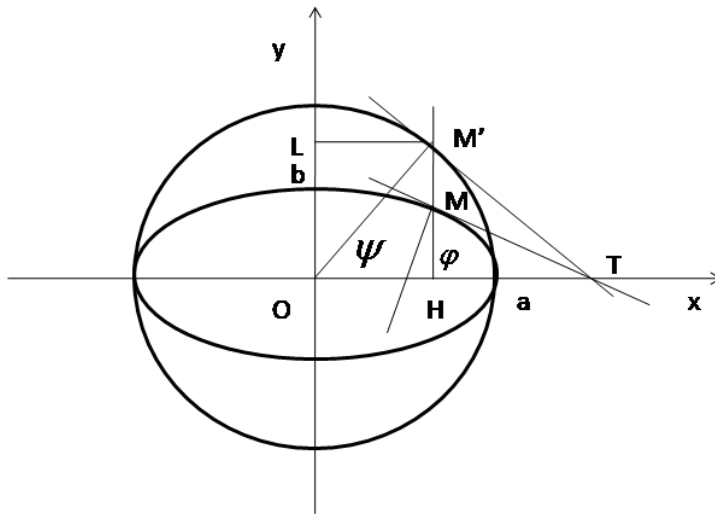


FIGURE 5 – La relation entre φ et Ψ

Dans le triangle MHT , on a :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{HT}{MH}$$

et dans le triangle $M'HT$, on a :

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{HT}{M'H}$$

d'où :

$$\frac{\operatorname{tg} \Psi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{HT}{M'H} \frac{MH}{HT} = \frac{MH}{M'H} = \text{rapport de l'affinité} = \frac{b}{a}$$

Soit :

$$tg\Psi = \frac{b}{a}tg\varphi \quad (26)$$

De (26), on exprime $\cos\Psi$ et $\sin\Psi$ en fonction de l'angle φ , d'où :

$$\frac{1}{\cos^2\Psi} = 1 + tg^2\Psi = 1 + (b/a)^2tg^2\varphi = \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi}$$

D'où :

$$\cos^2\Psi = \frac{a^2\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$$

On pose :

$$W^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2} = 1 - e^2\sin^2\varphi \quad (27)$$

d'où :

$$W = \frac{\cos\varphi}{\cos\Psi} \quad (28)$$

On calcule de même $\sin\Psi$:

$$\sin^2\Psi = 1 - \cos^2\Psi = 1 - \frac{a^2\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$$

soit :

$$\sin^2\Psi = \frac{b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \quad (29)$$

On pose :

$$V^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1 - e'^2\cos^2\varphi \quad (30)$$

avec e' la 2ème excentricité, d'où :

$$V = \frac{\sin\varphi}{\sin\Psi} = \frac{a}{b}W \quad (31)$$

Alors les équations paramétriques de l'ellipse en fonction de φ sont :

$$X = a\cos\Psi = a\frac{\cos\varphi}{W} = a\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} \quad (32)$$

$$Y = b\sin\Psi = \frac{b\sin\varphi}{V} = \frac{b^2\sin\varphi}{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} = a(1 - e^2)\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} \quad (33)$$

Soit :

$$\begin{aligned} X &= a\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} \\ Y &= a(1 - e^2)\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} \end{aligned} \quad (34)$$

Les relations différentielles entre φ et Ψ

A partir de la relation (26), on obtient :

$$\frac{d\Psi}{\cos^2\Psi} = \frac{bd\varphi}{a\cos^2\varphi} \implies \frac{d\Psi}{d\varphi} = \frac{b\cos^2\Psi}{a\cos^2\varphi} \quad (35)$$

et en utilisant (28), on a :

$$\frac{d\Psi}{d\varphi} = \frac{b}{aW^2} = \frac{b}{a(1 - e^2\sin^2\varphi)} \quad (36)$$

Calcul de la grande normale

Définition 3.3. On appelle la grande normale la longueur de JM . JM est porté par la normale à l'ellipse au point M . La normale a pour vecteur de direction, le vecteur \mathbf{l} de composantes $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ (Fig. 6).

D'où l'équation cartésienne de la normale :

$$\frac{X - X_M}{\cos\varphi} = \frac{Y - Y_M}{\sin\varphi} \quad (37)$$

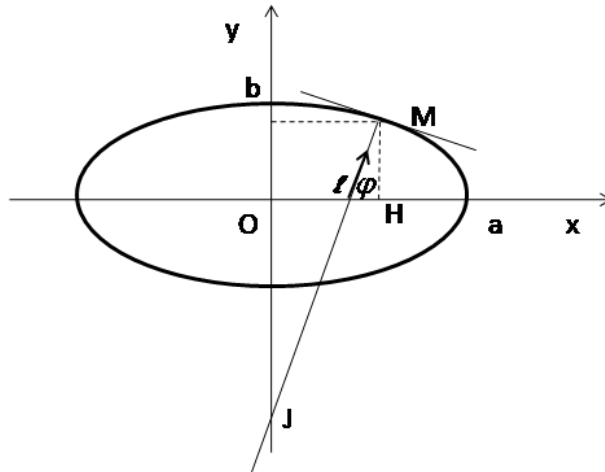


FIGURE 6 – La grande normale

On obtient l'ordonnée de J en faisant $X = 0$ dans (37), d'où :

$$\frac{-X_M}{\cos\varphi} = \frac{Y - Y_M}{\sin\varphi} \implies Y_J = Y_M - X_M \operatorname{tg}\varphi$$

Par suite, la distance MJ est égale à :

$$MJ = \sqrt{(Y_J - Y_M)^2 + X_M^2} = \sqrt{X_M^2 \operatorname{tg}^2\varphi + X_M^2} = X_M \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$$

Soit :

$$MJ = \frac{X_M}{\cos\varphi}$$

Or :

$$X_M = \frac{a\cos\varphi}{W} \implies MJ = \frac{a\cos\varphi}{W\cos\varphi} = \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

On pose :

$$N(\varphi) = MJ = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \quad (38)$$

N est appelé la grande normale. C'est aussi le deuxième rayon de courbure de l'ellipsoïde de révolution.

Les équations paramétriques de l'ellipse (24) deviennent :

$$\begin{aligned} X &= a\cos\Psi = a \frac{\cos\varphi}{W} = a \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = N(\varphi)\cos\varphi \\ Y &= b\sin\Psi = b \frac{\sin\varphi}{V} = a(1-e^2) \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = (1-e^2)N(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} X &= a \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = N(\varphi)\cos\varphi \\ Y &= a(1-e^2) \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = (1-e^2)N(\varphi)\sin\varphi \end{aligned} \quad (39)$$

Arc élémentaire ds et rayon de courbure ρ de l'ellipse

L'arc élémentaire ds se calcule à partir des équations paramétriques de l'ellipse par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dX^2 + dY^2 = a^2\sin^2\Psi d\Psi^2 + b^2.\cos^2\Psi d\Psi^2 \\ \text{ou } ds^2 &= (a^2\sin^2\Psi + b^2.\cos^2\Psi)d\Psi^2 \end{aligned}$$

En utilisant les équations (28) et (31), on obtient :

$$ds = \frac{b}{W}.d\Psi$$

Et en remplaçant $d\Psi$ en utilisant (36), on trouve :

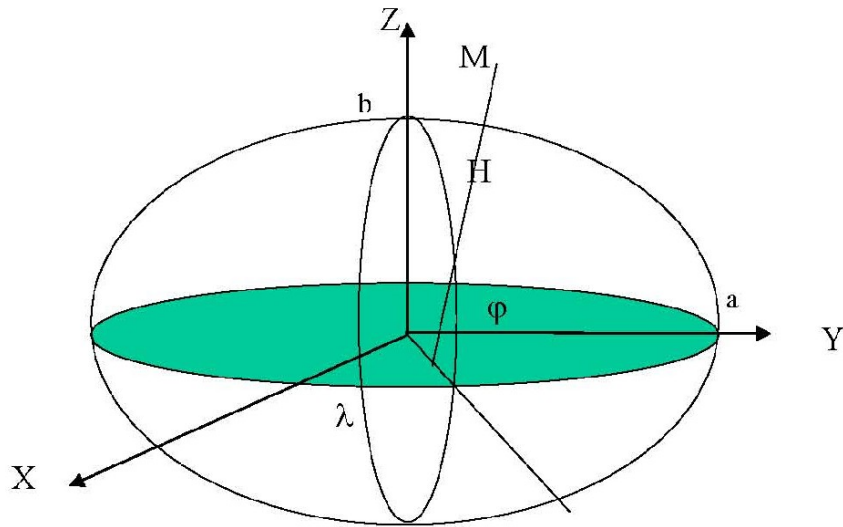


FIGURE 7 – L'ellipsoïde de révolution : ellipsoïde de référence

$$ds = a(1 - e^2) \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

La longueur de l'arc de méridien comptée depuis l'équateur est :

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi ds = a(1 - e^2) \int_0^\varphi \frac{dt}{(1 - e^2 \sin^2 t)^{3/2}} \quad (40)$$

L'intégration se fait à partir d'un développement limité de $(1 - e^2 \sin^2 t)^{-3/2}$. Le rayon de courbure ρ de l'ellipse s'obtient à partir de ds par :

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{b^2}{aW^3} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (41)$$

3.1.2 L'Ellipsoïde de révolution

On va étudier les propriétés de l'ellipsoïde de révolution obtenu par la rotation d'une ellipse autour du demi-petit axe comme le montre la figure ci-dessous (**Fig. 7**) :

Les coordonnées géographiques

Les coordonnées géographiques définies sur l'ellipsoïde de révolution sont :

- la longitude λ : angle du plan méridien du point M avec le plan méridien origine, dans notre cas, le plan origine est le plan XOZ,
- la latitude φ : angle de la direction de la normale au point M avec le plan équatorial ;

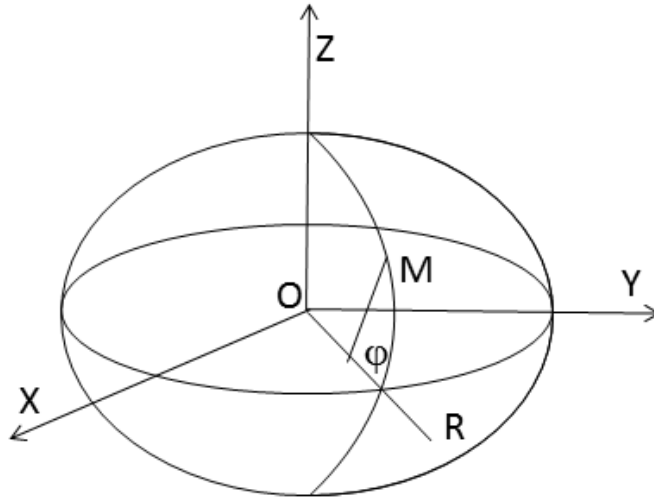


FIGURE 8 – Calcul des coordonnées géodésiques

- l'altitude ellipsoïdique h_e : si le point est sur l'ellipsoïde $h_e = 0$.

Dans le plan ROZ (Fig. 8) avec r et k les vecteurs unitaires des axes OR et OZ, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= a \cos \Psi \mathbf{r} + b \sin \Psi \mathbf{k} \\ \text{et } \mathbf{r} &= \cos \lambda \mathbf{i} + \sin \lambda \mathbf{j} \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{OM} = a \cos \Psi \cos \lambda \mathbf{i} + a \cos \Psi \sin \lambda \mathbf{j} + b \sin \Psi \mathbf{k}$$

Donc, les équations paramétriques du point M sont :

$$\begin{aligned} X &= a \cos \Psi \cos \lambda \\ Y &= a \cos \Psi \sin \lambda \\ Z &= b \sin \Psi \end{aligned}$$

Et en exprimant Ψ en fonction de φ , on a :

$$\begin{aligned} X &= a \cos \Psi \cos \lambda = \frac{a \cos \varphi}{W} \cos \lambda = N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= a \cos \Psi \sin \lambda = N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= b \sin \Psi = \frac{b^2 \sin \varphi}{a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = N(1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} X &= N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= N(1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned} \quad (42)$$

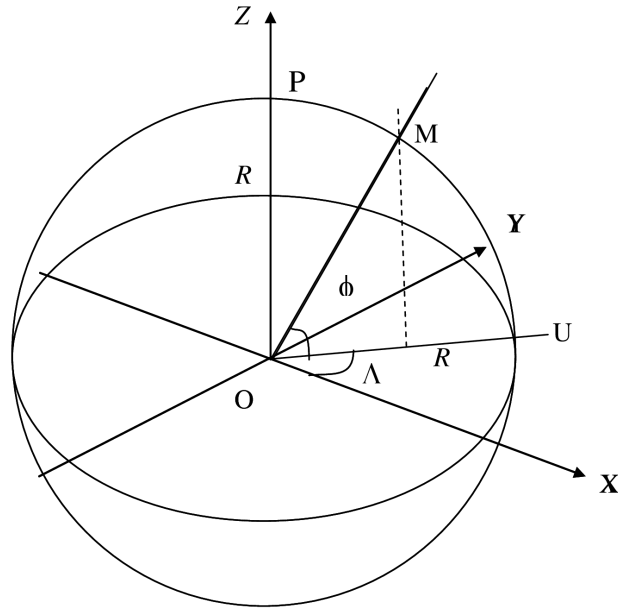


FIGURE 9 – La sphère S de rayon R

Si $he \neq 0$, alors les coordonnées de M sont :

$$\begin{aligned} X &= (N + he)\cos\varphi\cos\lambda \\ Y &= (N + he)\cos\varphi\sin\lambda \\ Z &= (N(1 - e^2) + he)\sin\varphi \end{aligned} \quad (43)$$

3.2 Géométrie de la sphère

Soit S une sphère de rayon R . Un point $M \in S$ a ses coordonnées tridimensionnelles (X, Y, Z) , dans le repère orthonormé (O, X, Y, Z) , données par les formules :

$$M \begin{cases} X = R\cos\Lambda.\cos\phi \\ Y = R.\cos\Lambda.\sin\phi \\ Z = R.\sin\phi \end{cases} \quad (44)$$

où les angles $\Lambda = \widehat{XOU}$, $\phi = \widehat{UOM}$ et $OP = OU = R$ le rayon de la sphère (**Fig. 9**).

3.3 Première forme fondamentale

Nous donnons ci-dessous les expressions de la première forme fondamentale respectivement de la sphère et de l'ellipsoïde.

3.3.1 Cas de la sphère

Soit dS l'élément infinitésimal de longueur, la première forme fondamentale est donnée par :

$$dS^2 = a^2(d\phi^2 + \cos^2\phi d\Lambda^2) \quad (45)$$

Posons :

$$d\mathcal{L}(\phi) = \frac{d\phi}{\cos\phi} \implies \mathcal{L} = \text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right), \quad \mathcal{L}(0) = 0 \quad (46)$$

\mathcal{L} est appelée la latitude de Mercator ou latitude croissante. L'équation (45) devient :

$$dS^2 = \frac{a^2}{\cos^2\phi}(d\mathcal{L}^2 + d\Lambda^2) \quad (47)$$

3.3.2 Cas de l'ellipsoïde de révolution

Soit ds l'élément infinitésimal de longueur, la première forme fondamentale de l'ellipsoïde de révolution est donnée par :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2(\varphi)\cos^2\varphi d\lambda^2 \quad (48)$$

Posons :

$$dL(\varphi) = \frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi} \quad (49)$$

L est appelée la latitude isométrique. L est donnée par :

$$L = \text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}\text{Log}\frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi}, \quad L(0) = 0 \quad (50)$$

L'équation (48) devient :

$$ds^2 = N^2\cos^2\varphi(dL^2 + d\lambda^2) \quad (51)$$

Les coordonnées (\mathcal{L}, Λ) et (L, λ) sont nommées coordonnées symétriques respectivement de la sphère et de l'ellipsoïde de révolution.

4 Introduction

Avant d'étudier la représentation Laborde, nous donnons ci-dessous quelques informations concernant le Madagascar.

4.1 Situation du Madagascar

Le Madagascar est une grande île de l'Océan Indien. D'une superficie de $587\,040\text{ Km}^2$, elle s'étend sur $1\,580\text{ km}$ du Nord au Sud et sur 560 km d'Est en Ouest. Elle est la cinquième plus grande île du monde après l'Australie, le Groenland, la Nouvelle-Guinée et Bornéo.

Madagascar, qui est également appelée la Grande Ile ou encore l'Ile rouge, en référence à sa latérite rouge est située au large de la côte Est du continent africain, duquel elle est séparée par le Canal de Mozambique (Figure 10).

4.2 Historique de la cartographie du Madagascar jusqu'à 1926

L'activité cartographique avait commencé à partir de la création en 1896 du Service géographique de Madagascar (SGM), en adoptant la représentation équivalente de Bonne [6], employée pour l'ancienne carte de France et plus tard pour la cartographie à l'échelle 1/100 000 des pays de l'Afrique du Nord.

Le géodésien J. Laborde avait expliqué le choix d'une nouvelle représentation pour le Madagascar - appelée par la suite la représentation de Laborde - dans le chapitre VI du quatrième fascicule du *Traité des Projections des Cartes Géographiques*, à l'Usage des Cartographes et des Géodésiens édité en 1932 par L. Driencourt et lui-même ([5]).

5 Le Choix de la nouvelle représentation plane

Pour les principales causes du choix de la nouvelle représentation plane pour le Madagascar, nous donnons ci-dessous un extrait (pages 360-362) du chapitre VI où l'auteur J. Laborde traite convenablement le sujet.

□

Le Présent chapitre (VI) donne quelques détails sur l'application que nous avons réalisée à Madagascar en fin 1926, de la projection appelée dans les deux chapitres précédents (IV et V) " solution générale n°1 " et que nous croyons être la meilleure dans le cas, assez général d'ailleurs, d'un pays de forme quelconque, mais assez petit pour pouvoir être inscrit dans une calotte de moins de 1 000 kilomètres de rayon.

Nous indiquons notamment, dans les pages qui suivent, les artifices de calcul d'intérêt secondaire que nous avons effectivement employés, mais qui pourraient fort bien être remplacés par d'autres. Ces artifices de calcul sont en effet l'adaptation des formules données précédemment à des circonstances locales et temporaires, à savoir les tables et les machines à calculer dont nous disposons au moment où nous avons entrepris l'établissement de la projection. Nous aurions évidemment opéré autrement dans d'autres circonstances, par exemple si nous avions possédé, dès le début, les tables d'Andoyer que nous n'avons eues qu'après avoir arrêté le détail des calculs à faire, tables dont l'emploi nous eût permis d'éviter certains des développements en série auxquels nous avons eu recours.

.....

Les inconvénients de la projection de Bonne - insignifiants pour la cartographie - sont très graves pour la topographie. Les altérations élémentaires de cette projection atteignent à Madagascar 36 minutes centésimales pour les angles, $\pm \frac{1}{350}$ pour les longueurs; l'altération angulaire maximum, en particulier, surpasse de beaucoup les erreurs instrumentales à craindre dans les



FIGURE 10 – Carte du Madagascar (Source : Site Internet - cartes de Madagascar)

levés topographiques soignés.

La projection de Bonne, qui n'est pas conforme, se prête fort mal à l'emploi des coordonnées rectangulaires pour les calcul de triangulation.

Jusqu'en l'année 1924, les défauts de cette projection avaient été sans grands inconvénients pour le Service géographique de Madagascar; car, d'une part, la géodésie y était calculée en coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde, et, d'autre part, les travaux de topographie régulière s'étaient trouvés localisés dans le voisinage des axes de la projection où, comme on sait, les altérations s'annulent.

Le choix défectueux fait en 1896 n'avait donc pas eu encore de conséquences fâcheuses. Mais il n'en eût pas été de même si l'on avait continué à utiliser la projection de Bonne pour les travaux du Service.

La topographie régulière a abordé en effet, en 1925, des régions plus éloignées des axes de la projection, notamment la région du delta du Mangoky au sud-ouest de Madagascar. Dans cette région, les altérations atteignent 22' pour les angles et $\pm \frac{1}{580}$ pour les longueurs. Il était donc urgent, sous peine de compromettre la qualité des levés exécutés au cours de la campagne 1925, de chercher une autre solution. Pressé par le temps, nous avons adopté une projection locale provisoire, dont les déformations sont pratiquement négligeables, étant donnée la faible étendue du champ d'application.

Enfin, les difficultés de recrutement en personnel spécialisé nous ont contraint, en 1926, à confier des opérations de triangulation à des officiers, topographes éprouvés, mais n'ayant jamais fait de géodésie. Dans l'instruction hâtive que nous leur avons donnée avant de les lancer isolément sur le terrain, nous avons dû nous borner aux procédés de calcul les plus simples, c'est-à-dire à l'emploi des coordonnées rectangulaires. Là encore, la projection de Bonne étant inutilisable, nous avons improvisé des systèmes provisoires de coordonnées locales.

Tout compte fait, en 1925 et 1926, nous avons mis en service quatre projections locales provisoires, en attendant la mise au point d'une projection unique et définitive qui n'offre pas les inconvénients de la projection de Bonne.

Cette projection définitive, adoptée en 1926, a été mise en service pendant l'hivernage 1926-27 pour la rédaction des calculs de la campagne géodésique 1926; elle a servi pour la campagne topographique de 1927; puis elle a été progressivement étendue à tous les travaux géodésiques, topographiques et cartographiques du Service géographique de Madagascar.

Etablissement de la Projection

Choix de la projection

En laissant de côté l'archipel isolé des Comores, Madagascar est une île très allongée (longueur= 1 600 kilomètres; plus grande largeur= 600 kilomètres dont la forme présente une particularité remarquable : la côte est presque rigoureusement rectiligne sur 1 150 kilomètres.

Il est donc superflu de faire la construction de Tissot : un coup d'œil sur la carte montre

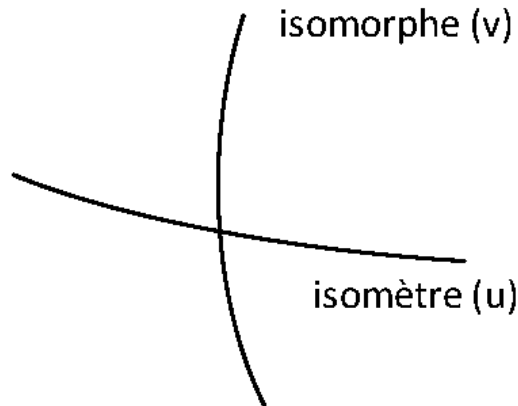


FIGURE 11 – Les isomètres et les isomorphes

qu'aucune conique ne s'adaptera mieux au contour de l'île que le système de deux droites comprenant à l'est la côte rectiligne d'Angontsy à Fort-Dauphin, à l'ouest une parallèle à la première (droite) passant par le Cap Saint-André; l'azimut de ces droites est à très peu près de 21^{gr} .

La parallèle médiane passe à quelques kilomètres du point :

$$\text{Latitude Sud} = 21.0000 \text{ gr} \quad (52)$$

$$\text{Longitude Est Paris} = 49.0000 \text{ gr} \quad (53)$$

Nous avons donc adopté une projection conforme du type parabolique, pour coordonnées géographiques du point central (52) :

$$O \begin{cases} \varphi_0 = -21.0000 \text{ gr}, \\ \lambda_0 = +49.0000 \text{ gr Est Paris} \end{cases} \quad (54)$$

□

5.1 Définition de la représentation conforme du type parabolique

Dans ce paragraphe, nous définissons la représentation conforme du type parabolique telle qu'elle a été définie par J. Laborde.

Nous rappellons les définitions des lignes isomètres et isomorphes.

Définition 5.1. Dans une représentation conforme, le module linéaire est indépendant de la direction : il existe des courbes n'ayant aucun point d'intersection deux à deux, telles que $m = \text{constante}$ où m est le module linéaire. Ces courbes sont dites lignes isométriques ou isomètres. Leurs trajectoires orthogonales sont dites lignes isomorphes ou isomorphes (Figure 11).

5.1.1 Surfaces indicatrices

Dans son traité [5], J. Laborde a introduit la notion de la surface indicatrice. On sait que toutes les altérations dues à la représentation conforme s'expriment simplement en fonction de l'altération linéaire. On définit la surface indicatrice de la surface modèle comme suit :

Définition 5.2. *La surface indicatrice de la représentation conforme d'un modèle (I) est ainsi définie :*

En chaque point de la surface (I), on porte suivant la normale à la surface une ordonnée égale à l'altération linéaire $\epsilon = m - 1$. Le lieu des points ainsi définis est la surface indicatrice.

Nous donnons ci-dessous la définition d'une représentation conforme du type parabolique.

Définition 5.3. *Soit une représentation conforme donnée. S'il existe une ligne du maximum (ou du minimum) de l'altération linéaire ϵ . Le point central peut être choisi arbitrairement sur cette ligne centrale. Les isomètres voisines ont des altitudes décroissantes (ou croissantes); les lignes isomorphes orthogonales à la ligne centrale y présentent un sommet (ou un point bas). Nous dirons que la représentation conforme en question est du type parabolique.*

J. Laborde avait proposé dans [5] deux solutions générales :

- solution n°1 (pp230-243),
- solution n°2 (pp244-269).

Nous résumons ci-dessous la solution générale n°1 à partir de laquelle il avait adopté la représentation plane conforme pour le Madagascar.

5.2 Solution générale n°1

La solution générale n°1 s'applique à un pays de forme quelconque, dont la plus grande dimension est inférieure à 2000 km (c'est le cas de Madagascar). Elle consiste à adopter la représentation plane conforme qui rend minimum, dans l'étendue du pays à représenter, la plus grande altération linéaire. Le choix de la représentation détermine le point central et l'indicatrice.

L'indicatrice étant fixée, l'altération linéaire est de la forme :

$$\epsilon = \epsilon_2 + \tau \quad (55)$$

où ϵ_2 étant un polynôme connu du second degré en X, Y et τ un résidu (du 3^{ème} ordre au moins en X, Y) si l'on a choisi convenablement :

- les coordonnées symétriques x, y de la sphère (on choisit la sphère de courbure totale),
- la fonction arbitraire $F(x + iy)$ définissant la représentation plane conforme.

Les coordonnées x, y est la fonction F ont été choisies de façon à ce que le calcul :

$$X + iY = F(x + iy) \quad (56)$$

L'établissement de la représentation comporte les opérations suivantes :

- 1° - ρ_0, N_0 étant les rayons de courbures principaux de l'ellipsoïde au point central, la représentation conforme de l'ellipsoïde se fera sur une sphère de rayon :

$$R = K_0 \sqrt{N_0 \rho_0} \quad (57)$$

où $K_0 = 0.9995$ coefficient de réduction de l'échelle².

- 2° - Sauf cas particuliers, changement de variables sur la sphère de façon à introduire le système particulier de coordonnées symétriques (x, y) défini par le réseau comprenant les grands cercles orthogonaux au méridien central et leurs trajectoires orthogonales c'est-à-dire les petits cercles parallèles au méridien central).
- 3° - En partant des coordonnées symétriques x, y , la représentation conforme de la sphère de rayon R sur le plan, solution particulière adoptée est définie comme suit :

$$X + iY = x + iy + (A + iB)(x + iy)^3 \quad (58)$$

Soit en notant $x + iy = z$, $X + iY = Z$ et $\beta = A + iB$, l'équation ci-dessus devient :

$$Z = z + \beta.z^3 \quad (59)$$

Le paramètre complexe β étant déterminé par la condition qu'on ait l'indicatrice voulue.

Il s'ensuit de ce qu'il a été dit ci-dessus que la représentation plane conforme de Laborde est obtenue par une triple représentation :

$$\text{Ellipsoïde} \stackrel{(1)}{=} \text{Sphère} \stackrel{(2)}{=} \text{Sphère} \stackrel{(3)}{=} \text{Plan}$$

6 Etude de la représentation (1) de l'ellipsoïde \implies la sphère de courbure totale S

Soit un ellipsoïde de révolution $E(a, e)$ avec a et e respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution et e la première excentricité. Soit S une sphère de rayon R . On considère le passage suivant :

$m'(\varphi, \lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow M'(\Phi, \Lambda) \text{ de la sphère } S$

Utilisant les notations de la section 3, on pose :

$$z = L_e + i\lambda, \quad i^2 = -1 \quad (60)$$

$$Z = \mathcal{L} + i\Lambda \quad (61)$$

avec :

$$L_e = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}, \quad \mathcal{L} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right)$$

² Il permet de réduire les altérations linéaires dans les zones extrêmes de part et d'autre du méridien central de la représentation plane.

6.1 Expression de la Transformation conforme de Gauss

Une transformation conforme entre E et S est donnée par :

$$Z = f(z) \quad (62)$$

où f est une fonction analytique. Le cas le plus simple est :

$$Z = \alpha z + \beta \quad (63)$$

$$\alpha = c_1 + ic_2 \quad (64)$$

$$\beta = b_1 + ib_2 \quad (65)$$

les c_1, c_2, b_1, b_2 sont des constantes réelles. Ce qui donne :

$$\mathcal{L} + i\Lambda = \alpha(L_e + i\lambda) + \beta = (c_1 + ic_2)(L_e + i\lambda) + b_1 + ib_2 \quad (66)$$

soit :

$$\mathcal{L} = c_1 L_e - c_2 \lambda + b_1 \quad (67)$$

$$\Lambda = c_1 \lambda + c_2 L_e + b_2 \quad (68)$$

Pour que cette transformation transforme les méridiens et les parallèles de l'ellipsoïde respectivement en méridiens et parallèles de la sphère, on doit avoir :

$$c_2 = 0$$

D'où :

$$\mathcal{L} = c_1 L_e + b_1 \quad (69)$$

$$\Lambda = c_1 \lambda + b_2 \quad (70)$$

Et si on veut que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ soit le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$, alors, on obtient :

$$0 = 0 + b_2 \Rightarrow b_2 = 0$$

Il reste alors :

$$\mathcal{L} = c_1 L_e + b_1 \quad (71)$$

$$\Lambda = c_1 \lambda \quad (72)$$

Pour avoir la même orientation en longitude, on prendra :

$$c_1 > 0 \quad (73)$$

6.2 Le problème posé

A partir des conditions (71,72) et (73), on cherchera la transformation conforme de Gauss à déformation minimale :

$$\mathcal{L} = c_1 L_e + b_1 \quad (74)$$

$$\Lambda = c_1 \lambda, \quad c_1 > 0 \quad (75)$$

qui autour d'un parallèle telque le parallèle $\varphi = \varphi_0$ est automécoïque et le module linéaire m_1 est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, c'est-à-dire :

$$m_1(\varphi_0) = 1 \text{ le parallèle } \varphi = \varphi_0 \text{ est automécoïque} \quad (76)$$

$$\frac{dm_1}{d\varphi}(\varphi_0) = 0 \text{ le module linéaire est stationnaire pour } \varphi = \varphi_0 \quad (77)$$

Ayant trois constantes à déterminer, on considère aussi la condition :

$$\frac{d^2m}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 0 \quad (78)$$

Pour faciliter les notations, on prendra $b = b_1, c = c_1$. Le problème revient donc à déterminer les constantes b, c et R telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées :

$$\mathcal{L} = cL_e + b \quad (79)$$

$$\Lambda = c\lambda, \text{ avec } c > 0 \quad (80)$$

6.3 Recherches des Solutions

Rappelons l'expression du module linéaire m_1 :

$$m_1 = \frac{dS}{ds} = \sqrt{\frac{R^2 \cos^2 \Phi (d\mathcal{L}^2 + d\Lambda^2)}{r^2 (dL_e^2 + d\lambda^2)}}$$

avec $r = N \cos \varphi$. Or $d\mathcal{L} = c dL_e$ et $d\Lambda = c d\lambda$ d'où :

$$m_1 = \frac{dS}{ds} = \sqrt{\frac{c^2 R^2 \cos^2 \Phi (d\mathcal{L}^2 + d\Lambda^2)}{r^2 (dL_e^2 + d\lambda^2)}} = \frac{c R \cos \Phi}{r} = \frac{c R \cos \Phi}{N \cos \varphi} \quad (81)$$

car $\cos \Phi > 0, \cos \varphi > 0$ et $c > 0$.

6.3.1 La 1ère condition

$$m_1(\varphi_0) = 1 \Rightarrow c R \cos \Phi_0 = N(\varphi_0) \cos \varphi_0 \quad (82)$$

6.3.2 La 2ème condition

Prenons la dérivée logarithmique de m_1 :

$$\frac{dm_1}{m_1} = \frac{d \cos \Phi}{\cos \Phi} - \frac{dr}{r} = -t g \Phi d\Phi + \frac{\rho \sin \varphi d\varphi}{r} \quad (83)$$

D'où :

$$\frac{dm_1}{d\varphi} = m_1 \left(\frac{\rho \sin \varphi}{r} - t g \Phi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) \quad (84)$$

Comme :

$$d\mathcal{L} = c \cdot dL_e \Rightarrow \frac{d\Phi}{\cos \Phi} = c \frac{\rho d\varphi}{r} \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{c \rho \cos \Phi}{r}$$

Ce qui donne :

$$\frac{dm_1}{d\varphi} = m_1 \left(\frac{\rho \sin \varphi}{r} - \operatorname{tg} \Phi \frac{c \rho \cos \Phi}{r} \right) = \frac{m_1 \rho}{r} (\sin \varphi - c \sin \Phi) \quad (85)$$

La deuxième condition (77) donne :

$$\frac{dm_1}{d\varphi}(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \sin \varphi_0 - c \sin \Phi_0 = 0 \quad (86)$$

6.3.3 La 3ème Condition

Calculons $\frac{d^2 m_1}{d\varphi^2}$. A partir de (85), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} &= \left(\frac{dm_1}{d\varphi} \frac{\rho}{r} + m_1 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \right) (\sin \varphi - c \sin \Phi) + \frac{m_1 \rho}{r} \left(\cos \varphi - c \cos \Phi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) \\ &= \left(\frac{dm_1}{d\varphi} \frac{\rho}{r} + m_1 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \right) (\sin \varphi - c \sin \Phi) + \frac{m_1 \rho}{r} \left(\cos \varphi - c^2 \frac{\rho \cos^2 \Phi}{r} \right) \end{aligned} \quad (87)$$

La troisième condition (78) donne en utilisant (76) et (77) :

$$\cos \varphi_0 - c^2 \frac{\rho(\varphi_0) \cos^2 \Phi_0}{r(\varphi_0)} = 0 \quad (88)$$

De (86), on tire c :

$$c = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \Phi_0} \quad (89)$$

En remplaçant c dans (88), on obtient la valeur de Φ_0 en fonction de la donnée φ_0 :

$$\operatorname{tg}^2 \Phi_0 = \frac{\rho_0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \Rightarrow \operatorname{tg} \Phi_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{r_0}} \operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} \varphi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0}}$$

φ_0 et Φ_0 de même signe.

Soit :

$$\operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} \varphi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0}} \quad (90)$$

L'équation précédente permet de calculer Φ_0 .

La valeur de R est déterminée à partir de (82) en utilisant l'expression de c donnée par (89) :

$$R = \frac{N_0 \cos \varphi_0}{c \cos \Phi_0} = N_0 \frac{\operatorname{tg} \Phi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0} \quad (91)$$

Or R est égal à :

$$R = \sqrt{\rho(\varphi_0) N(\varphi_0)} \quad (92)$$

Donc $1/R$, la courbure de la sphère image, vaut la racine carré de la courbure totale de l'ellipsoïde modèle au parallèle φ_0 .

Exprimons maintenant c en fonction de φ_0 . De (89), on a :

$$c^2 = \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \Phi_0} = \frac{1 - \cos^2 \varphi_0}{1 - \cos^2 \Phi_0} = \frac{1 - \cos^2 \varphi_0}{1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi_0}} = \frac{1 - \cos^2 \varphi_0}{\operatorname{tg}^2 \Phi_0} (1 + \operatorname{tg}^2 \Phi_0)$$

Calculons $1 + \operatorname{tg}^2 \Phi_0$ en utilisant (90) :

$$1 + \operatorname{tg}^2 \Phi_0 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} = \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^4 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)}$$

D'où :

$$c^2 = \frac{1 - \cos^2 \varphi_0}{\operatorname{tg}^2 \Phi_0} \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^4 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)}$$

En remplaçant $\operatorname{tg} \Phi_0$ par son expression (90), on obtient :

$$c^2 = \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^4 \varphi_0}{1 - e^2} = 1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^4 \varphi_0 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{c = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0}} \quad (93)$$

avec e' la deuxième excentricité :

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (94)$$

De la valeur de c , on constate que $c > 1$, ce qui veut dire que $\lambda \in [0, 2\pi]$ et que $\Lambda \in [0, 2c\pi]$ avec $[0, 2\pi] \subset [0, 2c\pi]$ c'est-à-dire, il y'aura chevauchement.

c étant supérieur à 1, (89) montre que :

$$\varphi_0 > \Phi_0 \quad (95)$$

La relation (90) vérifie aussi $\varphi_0 > \Phi_0$.

6.4 Calcul du coefficient b

On a :

$$\mathcal{L} = cL_e + b$$

Pour $\varphi = \varphi_0$, on obtient b :

$$b = \mathcal{L}(\Phi_0) - cL_e(\varphi_0) = \mathcal{L}_0 - cL_{e_0} \Rightarrow \boxed{b = \mathcal{L}_0 - cL_{e_0}} \quad (96)$$

en notant $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(\Phi_0)$ et $L_{e_0} = L_e(\varphi_0)$.

Par suite, on a alors :

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0} \cdot (L_e - L_{e_0}) + \mathcal{L}_0 \quad (97)$$

$$\Lambda = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0} \cdot (\lambda - \lambda_0) \quad (98)$$

où λ_0 est la longitude du méridien origine. L'expression du module linéaire m_1 vaut :

$$m_1(\varphi) = m_1 = R \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0} \frac{\cos \Phi}{N \cos \varphi} \quad (99)$$

6.4.1 Expression de $m_1(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle φ_0

L'expression de $m_1(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle φ_0 est donnée par :

$$\begin{aligned} m_1(\varphi) = m_1(\varphi_0) + (\varphi - \varphi_0) \frac{dm_1}{d\varphi}(\varphi_0) + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)^2 \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2}(\varphi_0) + \\ \frac{1}{6}(\varphi - \varphi_0)^3 \frac{d^3 m_1}{d\varphi^3}(\varphi_0) + o((\varphi - \varphi_0)^4) \end{aligned} \quad (100)$$

Utilisant les 3 conditions (76),(77) et (78), il reste :

$$m_1(\varphi) = 1 + \frac{1}{6}(\varphi - \varphi_0)^3 \frac{d^3 m_1}{d\varphi^3}(\varphi_0) + o((\varphi - \varphi_0)^4) \quad (101)$$

Calculons alors $\frac{d^3 m_1}{d\varphi^3}$. On part de :

$$\frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} = \left(\frac{dm_1}{d\varphi} \frac{\rho}{r} + m_1 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \right) (\sin \varphi - c \cdot \sin \Phi) + \frac{m_1 \rho}{r} \left(\cos \varphi - c^2 \cdot \frac{\rho \cos^2 \Phi}{r} \right)$$

Le terme qui ne s'annule pas pour $\varphi = \varphi_0$ est le dernier terme entre parenthèses, d'où :

$$\frac{d^3 m_1}{d\varphi^3}(\varphi = \varphi_0) = \frac{1 \cdot \rho_0}{r_0} \frac{d}{d\varphi} \left(\cos \varphi - c^2 \cdot \frac{\rho \cos^2 \Phi}{r} \right) (\varphi = \varphi_0) \quad (102)$$

D'où :

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\cos \varphi - c^2 \cdot \frac{\rho \cos^2 \Phi}{r} \right) = -\sin \varphi - c^2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \cos^2 \Phi + 2c^2 \frac{\rho}{r} \cdot \cos \Phi \cdot \sin \Phi \cdot \frac{d\Phi}{d\varphi}$$

comme :

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1 - e^2}{\cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2) \cos \varphi + e^2 \cos^3 \varphi}$$

On a alors :

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) = \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{(1 - e^2 + 3e^2 \cos^2 \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}$$

Or :

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{c\rho\cos\Phi}{r}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left(\cos\varphi - c^2 \cdot \frac{\rho\cos^2\Phi}{r} \right) &= -\sin\varphi - c^2 \cos^2\Phi \frac{(1-e^2)\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{(1-e^2+3e^2\cos^2\varphi)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} \\ &\quad + 2c^3 \frac{\rho^2}{r^2} \cdot \cos^2\Phi \cdot \sin\Phi \end{aligned} \quad (103)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d^3 m_1}{d\varphi^3}(\varphi_0) &= \frac{\rho_0}{r_0} \left[-\sin\varphi_0 - c^2 \cos^2\Phi_0 \frac{(1-e^2)\sin\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} \cdot \frac{(1-e^2+3e^2\cos^2\varphi_0)}{(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2} + 2c^3 \frac{\rho_0^2}{r_0^2} \cdot \cos^2\Phi_0 \cdot \sin\Phi_0 \right] \\ &= \frac{-4e^2(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2} \end{aligned} \quad (104)$$

On obtient alors la formule :

$$m_1(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4) \quad (105)$$

Si on fait intervenir la deuxième excentricité e' , on a l'équation :

$$m_1(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1+e'^2\cos^2\varphi_0)^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4) \quad (106)$$

Pour réduire les altérations linéaires, m_1 sera multiplié par le facteur $K_0 = 0.9995$, l'expression de m_1 ci-dessus devient :

$$m_1(\varphi) = K_0 \left(1 - \frac{2e'^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1+e'^2\cos^2\varphi_0)^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4) \right) \quad (107)$$

L'expression du module linéaire donnée par l'équation (99) tient compte du facteur K_0 en choisissant la valeur du rayon de la sphère $K_0 \cdot R = K_0 \sqrt{N_0 \cdot \rho_0}$ au lieu de $\sqrt{N_0 \rho_0}$.

Dans la suite R vaut donc $K_0 \cdot \sqrt{N_0 \rho_0}$.

7 Etude de la représentation (2) de la sphère $S \implies$ la sphère S

La deuxième représentation plane est une représentation d'un modèle sphérique direct à un modèle sphérique transverse.

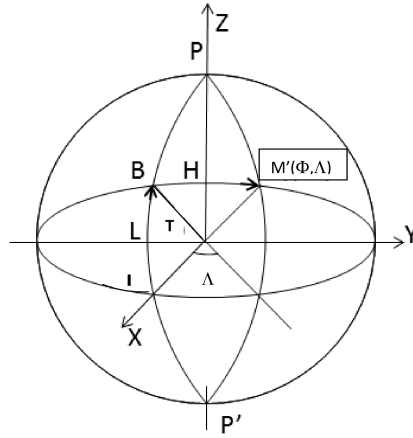


FIGURE 12 – Coordonnées Cassini-Soldner (H, L)

7.1 Expression des coordonnées images

Au point $M'(\Phi, \Lambda)$, on lui associe ses coordonnées Cassini-Soldner correspondantes $M'(H, L)$ (Fig. 12). La trigonométrie sphérique donne les relations entre Φ, Λ et H, L à savoir :

i) - $(\Phi, \Lambda) \longrightarrow (H, L)$: On obtient :

$$\sin H = \cos \Phi \cdot \sin \Lambda \quad (108)$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\cos \Lambda} \quad (109)$$

ii) - $(H, L) \longrightarrow (\Phi, \Lambda)$: Pour le calcul inverse, on utilise les relations suivantes :

$$\sin \Phi = \frac{\operatorname{tg} H}{\operatorname{tg} L} \quad (110)$$

$$\operatorname{tg} \Lambda = \frac{\operatorname{tg} H}{\cos L} \quad (111)$$

La variable L est calculée par rapport au point central I (Fig. 12).

8 Etude de la représentation (3) de sphère de courbure totale \implies le plan

De $M'(H,L)$ de la sphère S , on associe le point M'' sur le plan par la représentation conforme de Mercator, c'est la représentation (3) :

$$E(\text{East}) = R.L \quad (112)$$

$$N(\text{North}) = R \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{H}{2} \right) \quad (113)$$

Les formules ci-dessus sont valables en considérant que le centre de la représentation est le point I sur l'équateur. Or pour le Madagascar, le point central est le point O défini par ses coordonnées géodésiques (φ_0, λ_0) données par (54). Soit la figure (Fig. 13) où le point p

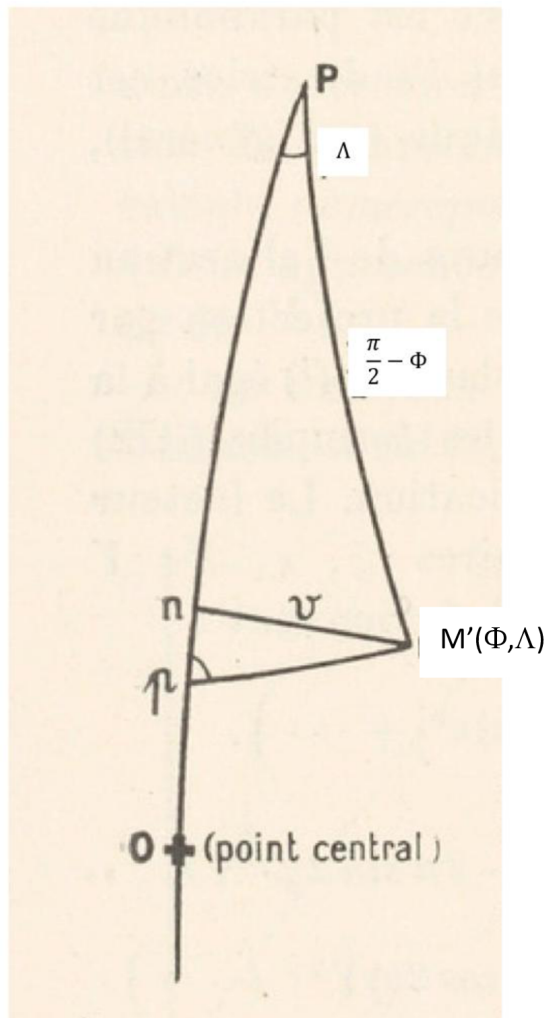


FIGURE 13 – Calcul des coordonnées de Cassini-Soldner (u, v)

a pour latitude sphérique Φ comme le point M' situé sur le méridien passant par les points

I et O. On peut écrire :

$$v = H \quad (114)$$

$$n = B, \quad u = pn = pB \quad (115)$$

$$w = On = Op + pn = \Phi_0 + u \quad (116)$$

8.1 Calcul des nouvelles coordonnées de Cassini-Soldner (u, v)

Comme $v = H$, d'après l'équation (108), on a :

$$\sin v = \cos \Phi \cdot \sin \Lambda \quad (117)$$

Dans le triangle sphérique isocèle Pnm ou PBM' , on applique la règle de Neper à la moitié gauche du triangle qui donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) = \cot g \frac{\Lambda}{2} \cdot \cot gp \implies \operatorname{tg} p = \frac{\cot g \frac{\Lambda}{2}}{\sin \Phi}$$

Le triangle sphérique mnp , rectangle en n , donne par la même règle :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot g\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \cdot \cot gp \implies \operatorname{tg} p = \frac{\operatorname{tg} v}{\sin u}$$

Par suite, on obtient les relations :

$$\sin u = \sin \Phi \cdot \operatorname{tg} \frac{\Lambda}{2} \cdot \operatorname{tg} v \quad (118)$$

$$w = On = Op + pn = \Phi - \Phi_0 + u = \frac{x_0}{R} + u, \quad x_0 = (\Phi - \Phi_0) \cdot R \quad (119)$$

Dans le plan OXY (voir **Fig. 14**), on a alors les coordonnées du point $M''(\Phi, \Lambda)$ comme suit :

$$\begin{cases} X = R \cdot \operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) \\ Y = (\Phi - \Phi_0) \cdot R + u \cdot R = x_0 + R \cdot u \end{cases} \quad (120)$$

Au lieu d'exprimer les coordonnées de $M''(\Phi, \Lambda)$ dans le repère OXY , on va les exprimer dans le repère OEN où la direction ON a un gisement d'un angle $\theta = +21 \text{ gr}$ comme il a été cité ci-dessus par J. Laborde dans le paragraphe 'Choix de la projection' (voir **Fig. 15**). On obtient alors :

$$M'' = \begin{cases} E = X \cdot \cos \theta - Y \cdot \sin \theta \\ N = X \cdot \sin \theta + Y \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (121)$$

On obtient l'expression définitive des coordonnées en ajoutant les constantes X_0, Y_0 pour avoir des coordonnées positives, soit :

$$M'' = \begin{cases} E' = X_0 + X \cdot \cos \theta - Y \cdot \sin \theta \\ N' = Y_0 + X \cdot \sin \theta + Y \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (122)$$

avec :

$$X_0 = +400\,000.00 \text{ m}, \quad Y_0 = +800\,000.00 \text{ m}$$

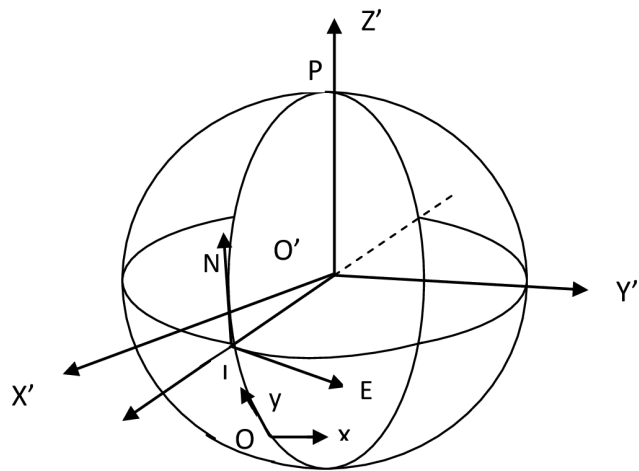


FIGURE 14 – Calcul des coordonnées de $M''(\Phi, \Lambda)$ dans OXY

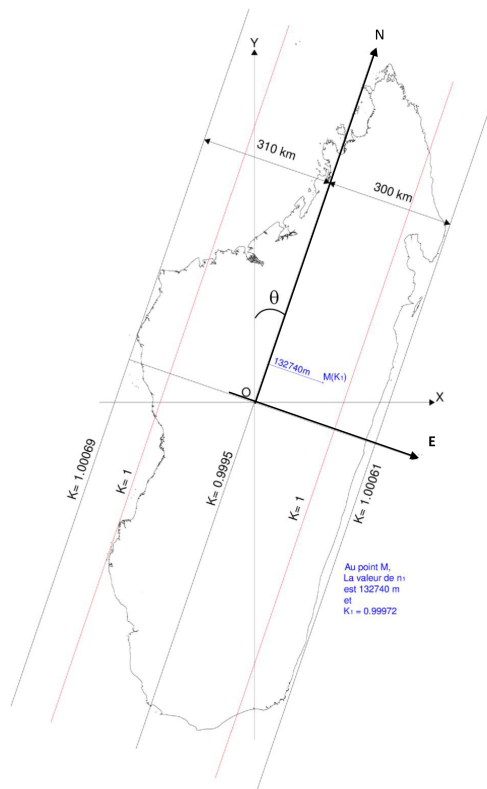


FIGURE 15 – Orientation du pseudo-méridien central

Références

- [1] J. DIEUDONNÉ. 1968. Calcul Infinitésimal. 1ère édition. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris, 479 pages.
- [2] L. DRIENCOURT. 1932. Théorie Générale des Projections. Fascicule 1 du Traité des Projections des Cartes Géographiques, à l'Usage des Cartographes et des Géodésiens édité par MM. L. Driencourt et J. Laborde. HERMANN ET C^{ie} ÉDITEURS, PARIS, 260 pages.
- [3] L. DRIENCOURT. 1932. Choix et Mode d'Emploi des Projections Pour la Construction des Cartes Géographiques. Fascicule 2 du Traité des Projections des Cartes Géographiques, à l'Usage des Cartographes et des Géodésiens édité par MM. L. Driencourt et J. Laborde. HERMANN ET C^{ie} ÉDITEURS, PARIS, 381 pages.
- [4] L. DRIENCOURT. 1932. Emploi des Projections Limitées aux Termes du Troisième Ordre en Géodésie. Fascicule 3 du Traité des Projections des Cartes Géographiques, à l'Usage des Cartographes et des Géodésiens édité par MM. L. Driencourt et J. Laborde. HERMANN ET C^{ie} ÉDITEURS, PARIS, 168 pages.
- [5] J. LABORDE. 1932. Théorie de la Représentation Conforme, Emploi des Projections Rigoureusement Conformes en Géodésie. Fascicule 4 du Traité des Projections des Cartes Géographiques, à l'Usage des Cartographes et des Géodésiens édité par MM. L. Driencourt et J. Laborde. HERMANN ET C^{ie} ÉDITEURS, PARIS, 408 pages.
- [6] A. Ben Hadj Salem. 2021. La représentation de Bonne. Version 2., <https://vixra.org/pdf/1802.0071v2.pdf>, 15 pages.