COMPLEMENTARY RELATIVITY
Beyond the Lorentz Transformations

Leonardo ***Rubino***

February 2022

Abstract

The Theory of Relativity treats the effects of the supply of energy to a particle. This is what they usually do with the particle accelerators.
Nobody cares about particles losing energy and if particles also have their own motion, such as their free fall in the universe. All in all, we all are free falling in the universe. Well, there is now a Complementary Relativity which cares about losing potential energy by a particle, while it is free falling in the universe. At a small size, all that can be analyzed also on the atom, where the electrons can drop to lower levels, so releasing energy. And at the end of this paper the Complementary Relativity will be tested really on the atom.

Complementary Lorentz Transformations

We will reach the following transformations:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\gamma}(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\gamma}[t + \dfrac{V}{(c^2 - V^2)}x] \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\gamma}(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{1}{\gamma}[t' - \dfrac{V}{(c^2 - V^2)}x'] \end{cases} \qquad \gamma = 1\Big/\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \tag{1.2}$$

(Rubino T.)

Lorentz Transformations

Let's start by reminding the classic Lorentz Transformations.
We know that the Lorentz transformations were born before the Theory of Relativity (which is founded on them) and on an electromagnetic basis.
They correspond to the Galilean ones, but on a relativistic basis and they are in force as long as we say that the speed of light is an upper limit in the Universe and it's c for (~)every observer.

-<u>FIRST PROOF</u>:

if we suppose a relative motion along x, we correct the x components of the Galilean Transformations through a coefficient k, as follows:

$$x' = k(x - Vt) \tag{1.3}$$
$$x = k(x' + Vt') \tag{1.4}$$

Now, for a photon, we obviously have:
$ct' = k(c-V)t$ and $ct = k(c+V)t$, as light has the same speed c in both reference systems, from which, by mutual multiplication of the corresponding sides:

$c^2 tt' = k^2 tt' c^2 (1-\frac{V^2}{c^2})$, from which:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.5)$$

Moreover, from (1.4) we have: $t' = \frac{1}{V}(\frac{x}{k} - x')$ and using (1.3) in it, we have:

$$t' = \frac{1}{V}[\frac{x}{k} - k(x-Vt)] = \frac{1}{kV}x - \frac{kx}{V} + kt = k[t - \frac{x}{V}(1-\frac{1}{k^2})] = k[t - \frac{V}{c^2}x] \qquad (1.6)$$

as, for (1.5), we have: $(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{V^2}{c^2}$.

By the same way which led us to (1.6), we also get the expression for t.
Finally, here are the Lorentz Transformations:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(x-Vt)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{(t - \frac{V}{c^2}x)}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad (1.7)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{(x'+Vt')}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{(t' + \frac{V}{c^2}x')}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad (1.8)$$

-<u>SECOND PROOF</u>:
We know that c=const in all inertial reference systems. Now, when both origins of two reference systems correspond each other, 0=0' and t=t', from the origin light is emitted through spherical waves and isotropically and so we can write that:

$c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2) = 0$ and $c^2t'^2 - (x'^2+y'^2+z'^2) = 0$

as light has the same speed c in both reference systems. Therefore:

$c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2) = c^2t'^2 - (x'^2+y'^2+z'^2)$ and for rays along x (y=y' and z=z'):

$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$. Now we say ($i = \sqrt{-1}$): $ix = \xi$, $ix' = \xi'$, $ct = \eta$ and $ct' = \eta'$; we have:

$\xi^2 + \eta^2 = \xi'^2 + \eta'^2$, whose solution is:

$$\begin{cases} \xi' = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta \\ \eta' = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta \end{cases} \qquad (1.9)$$

and in a differential form:

$$\begin{cases} d\xi' = d\xi\cos\theta - d\eta\sin\theta \\ d\eta' = d\xi\sin\theta + d\eta\cos\theta \end{cases} \tag{1.10}$$

Now we notice that with respect to the origin "0", $\frac{dx}{dt}=0$, as the reference system (0,x,y,z) is not moving with respect to itself. On the contrary, $\frac{dx'}{dt'}=-V$, as the system (0',x',y',z') moves with speed V with respect to "0" and, as a consequence: $\frac{d\xi}{d\eta}=0$ and $\frac{d\xi'}{d\eta'}=-i\frac{V}{c}$, but from the ratios between the (1.10) we have that:

$$\frac{d\xi'}{d\eta'}=\frac{d\xi\cos\theta-d\eta\sin\theta}{d\xi\sin\theta+d\eta\cos\theta}=\frac{\frac{d\xi}{d\eta}\cos\theta-\sin\theta}{\frac{d\xi}{d\eta}\sin\theta+\cos\theta}=\frac{0-\sin\theta}{0+\cos\theta}=-tg\theta$$ and so: $tg\theta=i\frac{V}{c}=i\beta$

but we know from trigonometry that: $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ and:

$\sin\theta=\frac{tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}}=\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ and so the (1.9) become:

$\xi'=\frac{\xi-i\eta\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ and $\eta'=\frac{i\xi\beta+\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, that is:

$$\begin{cases} x'=\frac{(x-Vt)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\frac{(t-\frac{\beta}{c}x)}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

and so (1.7) again. By the same way, we also get (1.8).

Then, we also know that the 4-vector position is invariant:

$(x,ct)=x^2-c^2t^2=(x',ct')=x'^2-c^2t'^2$; in fact, according to the Lorentz Transformations:

$$x^2-c^2t^2=\gamma^2(x'+Vt')^2-c^2\gamma^2(t'+\frac{V}{c^2}x')^2=\gamma^2(x'^2+V^2t'^2+2x'Vt'-c^2t'^2-\frac{V^2x'^2}{c^2}-2Vx't')=$$

$=\gamma^2x'^2(1-\frac{V^2}{c^2})+\gamma^2t'^2(V^2-c^2)=x'^2-c^2t'^2$, qed.

Complementary Lorentz Transformations

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\gamma}(x-Vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\frac{1}{\gamma}[t+\frac{V}{(c^2-V^2)}x] \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\gamma}(x'+Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{1}{\gamma}[t' - \frac{V}{(c^2 - V^2)}x'] \end{cases} \qquad \gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{1.12}$$

As well as in an opposite universe, when a particle collapses in the universe, so losing potential energy, its mass decreases (instead of increasing), time contracts (instead of dilating) and the lengths dilate (instead of contracting). Then, one rewrites the first of the (1.7) and the first of the (1.8) with a reverse γ :

$x' = \frac{1}{\gamma}(x - Vt)$ and (1.13)

$x = \frac{1}{\gamma}(x'+Vt')$. (1.14)

Now, let's get t' from (1.14) and, after some simple steps we have:

$t' = (\gamma x - x')\frac{1}{V}$. Now, in this last equation, we use the (1.13), so getting:

$t' = (\gamma x - x')\frac{1}{V} = \frac{1}{V}(\gamma x - \frac{1}{\gamma}x + \frac{1}{\gamma}Vt) = \frac{1}{\gamma}[t + \frac{x}{V}(\gamma^2 - 1)]$, but $(\gamma^2 - 1) = \frac{V^2}{c^2 - V^2}$, so obtaining the last of the (1.11). In a similar way we will get the last of the (1.12), for t.

Also here, as well as for the 4-vector position of the classic relativity, the complementary 4-vector of the Complementary Relativity is an invariant:

$\{x', \frac{1}{\gamma}ct'\} = x'^2 + \frac{1}{\gamma^2}c^2t'^2 = \{x, \frac{1}{\gamma}ct\} = x^2 + \frac{1}{\gamma^2}c^2t^2$;in fact, according to the Complementary Transformations:

$$x'^2 + \frac{1}{\gamma^2}c^2t'^2 = \frac{1}{\gamma^2}(x - Vt)^2 + \frac{1}{\gamma^4}c^2(t + \frac{V}{(c^2 - V^2)}x)^2 = \frac{1}{\gamma^2}x^2 + \frac{1}{\gamma^2}V^2t^2 - \frac{2}{\gamma^2}xVt + \frac{c^2}{\gamma^4}t^2 + \frac{c^2V^2x^2}{\gamma^4(c^2 - V^2)^2} +$$

$$+ \frac{2c^2xVt}{\gamma^4(c^2 - V^2)} = x^2[\frac{1}{\gamma^2}(1 + \frac{c^2V^2}{\gamma^2(c^2 - V^2)^2})] + c^2t^2[\frac{1}{\gamma^2}(\frac{V^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2})] - \frac{2}{\gamma^2}xVt(1 - \frac{c^2}{\gamma^2(c^2 - V^2)}) =$$

$$= x^2 + \frac{1}{\gamma^2}c^2t^2$$, qed.

Theorem of Addition of Complementary Velocities

Let's rewrite the Complementary T. in a differential form:

$$\begin{cases} dx' = \frac{1}{\gamma}(dx - Vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \frac{1}{\gamma}[dt + \frac{V}{(c^2 - V^2)}dx] \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\gamma}(dx'+Vdt') \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \frac{1}{\gamma}[dt' - \frac{V}{(c^2 - V^2)}dx'] \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{1.17}$$

and by ratio:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\frac{1}{\gamma}(dx'+Vdt')}{\frac{1}{\gamma}[dt'-\frac{V}{(c^2-V^2)}dx']} = \dfrac{v'_x+V}{1-\frac{v'_x V}{(c^2-V^2)}} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{\frac{1}{\gamma}[dt'-\frac{V}{(c^2-V^2)}dx']} = \gamma\dfrac{v'_y}{1-\frac{v'_x V}{(c^2-V^2)}} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{\frac{1}{\gamma}[dt'-\frac{V}{(c^2-V^2)}dx']} = \gamma\dfrac{v'_z}{1-\frac{v'_x V}{(c^2-V^2)}} \end{cases} \tag{1.18}$$

moreover:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{\frac{1}{\gamma}(dx-Vdt)}{\frac{1}{\gamma}[dt+\frac{V}{(c^2-V^2)}dx]} = \dfrac{v_x-V}{1+\frac{v_x V}{(c^2-V^2)}} \\ v'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{\frac{1}{\gamma}[dt+\frac{V}{(c^2-V^2)}dx]} = \gamma\dfrac{v_y}{1+\frac{v_x V}{(c^2-V^2)}} \\ v'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{\frac{1}{\gamma}[dt+\frac{V}{(c^2-V^2)}dx]} = \gamma\dfrac{v_z}{1+\frac{v_x V}{(c^2-V^2)}} \end{cases} \tag{1.19}$$

Invariance under the Lorentz Transformations of the d'Alembert Wave Equation

We know, from the equations (1.7), that:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma \;,\; \frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma V \;,\; \frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma\frac{V}{c^2} \;,\; \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma \;,\; \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 \;,\; \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = ... = 0$$

Moreovere, here is the d'Alembert Wave Equation:

(in the system k', we have: $\Phi = \Phi(\vec{r}', t')$):

$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$; then, from the math we know that:

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial x} = \gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial x'} + (-\dfrac{V}{c^2})\gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial t'}$; and also:

$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \gamma^2(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \dfrac{V^2}{c^4}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}) - \dfrac{2V}{c^2-V^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'}$. Similarly: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = -V\gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial x'} + \gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial t'}$,

$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \gamma^2(V^2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}) - 2V\gamma^2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'}$,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}\ ,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}$$, and by substitution:

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}}=\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}}$$ qed

(we have the same form in both the reference systems!).

Invariance under the Complementary Lorentz T. of the Complementary Wave Equation

We have, from system (1.11), that:

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=1\Big/\gamma\ ,\quad \frac{\partial x'}{\partial t}=-V\Big/\gamma\ ,\quad \frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{V}{\gamma(c^2-V^2)}\ ,\quad \frac{\partial t'}{\partial t}=1\Big/\gamma\ ,\quad \frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial z}=1\ ,\quad \frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial z}=\frac{\partial y'}{\partial x}=....=0$$

Now, in place of the d'Alembert Equation, let's consider the Complementary Wave Equation

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0\,; \qquad (1.20)$$

In fact, it is invariant under the new Transformations of the Complementary Relativity.

Moreover, from the math, we have:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+\frac{V}{\gamma(c^2-V^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$; and also:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+\frac{V^2}{\gamma^2(c^2-V^2)^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}+\frac{2V}{\gamma^2(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'}\ .$$

Similarly:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{V}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\ ,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{V^2}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}-\frac{2V}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'}\ ,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}\ ,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}$$

and by substitution:

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}}=0=\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}+\frac{1}{(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}=0}$$ qed

(we have the same form in both the reference systems!).

Now, out of simplicity, let's consider the Complementary Wave Equation in one dimension, or:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$$, or also: $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}=0$, with: $\tau=\frac{1}{\gamma}t$ (proper time), or also:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{(w)^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}=0$$, where $w=ic$.

The solution for such an equation is:

$$\Phi = A \cdot e^{i(x-w\tau)}$$, or also: $$\Phi = A \cdot e^{ix} e^{-iw\tau} = A \cdot e^{c\tau} e^{ix}$$, or:

$$\Phi = A \cdot e^{c\tau} e^{ix} = A \cdot e^{\frac{c}{\gamma}t} e^{ix} = A \cdot e^{\sqrt{(1-\frac{V^2}{c^2})}ct} e^{ix}$$ (Complementary Waves).

Energy balance

Preamble: if a particle is at rest in (O',x',y',z'), i.e. if it moves in O', indeed, i.e. if O' is its "proper" reference system, then: dx'= dy'= dz'=0 and:

$(\underline{ds})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0 + 0 + 0 - c^2dt'^2 = -c^2dt'^2$, from which:

$dt' = d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}}dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\frac{dl}{dt})^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$ (proper time, invariant, as so is $\frac{ds}{c}$).

Therefore, when you make calculations on a particle, you are led to use for it its proper time, indeed:

$d\tau = \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}dt = \frac{dt}{\gamma}$.

End of the preamble.

We know from the relativity that the total energy E is:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad (1.21)$$

This is the most general formula we have for the energy and is suitable for a relativistic particle indeed.

Now, for a photon (a particle whose rest mass is equal to zero), we have: $E^2 = p^2c^2$, and:

$$E = pc \qquad (1.22)$$

For a non relativistic particle, we know its kinetic energy is: $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$, but this is hidden in (1.21), which is more general, indeed. In fact, (1.21) can be rewritten in this way:

$$E = m_0c^2(1 + \frac{p^2}{m_0^2c^2})^{1/2} \qquad (1.23)$$

and for the developments of Taylor, we have:

$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, from this, for the (1.23):

$E = m_0c^2(1 + \frac{p^2}{m_0^2c^2})^{1/2} \approx m_0c^2(1 + \frac{p^2}{2m_0^2c^2}) = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$ and, for the kinetic energy, we have:

$E_k = E - m_0c^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2}m_0v^2$ qed.

The (1.21) comes from the following reasoning on the energy-momentum 4-vector (or linear momentum):

we know from classic physics that the linear momentum is given by the product of the mass by the velocity. Now, in the relativistic case, for what has been said so far, we will define a four-vector and then the velocity as dx/dt will have the proper time $d\tau$ instead of dt, which is typical of the particle, indeed, for which we are going to define the four-vector:

$$\underline{p} = (m_0 \frac{dx_1}{d\tau}, m_0 \frac{dx_2}{d\tau}, m_0 \frac{dx_3}{d\tau}, m_0 \frac{dx_4}{d\tau}) = (\frac{m_0}{1/\gamma}\frac{dx_1}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma}\frac{dx_2}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma}\frac{dx_3}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma}\frac{dx_4}{dt}) =$$

$$= (m\frac{dx_1}{dt}, m\frac{dx_2}{dt}, m\frac{dx_3}{dt}, m\frac{dx_4}{dt}) = (m\vec{v}, mc) = (\vec{p}, mc) = \underline{p}$$

where $\vec{v}$ is the (three-dimension) velocity vector, $\vec{p}$ is the three-dimension linear momentum,

$mc = m\frac{dx_4}{dt}$ is the 4-dimension component, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ is the proper time and $m = \frac{m_0}{1/\gamma} = \gamma m_0$ is the dynamic mass, which is the rest mass only if v=0.

We have just begun to introduce the concept of relative mass, which is increasing with speed, and becoming infinite when v=c.

As already said before, the modules of 4-vectors are "absolute", i.e. they are invariant for Lorentz T.; in fact:

$$\left|\underline{p}\right|^2 = \left|\vec{p}\right|^2 - p_4^2 = m^2v^2 - m^2c^2 = -m^2(c^2 - v^2) = -\frac{m_0^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})}(c^2 - v^2) = -m_0^2c^2 = \qquad (1.24)$$

constant, i.e. it's not depending on v.

Let's write again the (1.24) :

$m^2v^2 - m^2c^2 = -m_0^2c^2$ or:

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2 \quad , \qquad (1.25)$$

but mc^2 , where m as the dynamic mass, is the total energy of the particle, as in the dynamic mass the rest mass is already included, as well as the increase of mass coming from the energy given to the particle.

By multiplying both sides of the (1.25) by c^2 , we get:

$$m^2c^4 = (m^2v^2)c^2 + m_0^2c^4 \qquad (1.25b)$$

or: $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$, which is exactly the (1.21).

On the contrary, if we have a particle m0 at rest (with respect to us), that, being in free fall in the universe, loses potential energy and irradiates, we will have, in place of the (1.21), the following :

$\frac{1}{\gamma^2}m_0^2c^4 = m_0^2c^4 - (m_0^2v^2)c^2$ or,

$$E_{irr}^2 = m_0^2c^4 - p^2c^2 . \qquad (1.26)$$

In Complementary Relativity we have a new complementary 4-vector for the impulse, whose modulus is still an invariant:

$\{m_0v, \frac{1}{\gamma}m_0c\}$, whose square modulus is indeed: $m_0^2v^2 + \frac{1}{\gamma^2}m_0^2c^2$, (see the +) which is (after a simple calculation) $m_0^2c^2$ (invariant).

Therefore:

$$m_0^2v^2 + \frac{1}{\gamma^2}m_0^2c^2 = m_0^2c^2 \quad , \qquad (1.26b)$$

which is really the (1.26). We also realize that, by a simple calculation, the (1.26b) can become the (1.25b).

For the energy we have : $E_{irr} = \frac{1}{\gamma}m_0c^2$ and by removing such an energy from the energy of the mass m0 which released it, we have what's left:

$$E = m_0c^2 - m_0c^2\frac{1}{\gamma} = m_0c^2(1-\frac{1}{\gamma}) = m_0c^2(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}) \quad (1.26c)$$

A more intuitive approach to the Complementary Relativity

When a physical system loses energy instead of gaining it, a new type of relativity holds: that of the lost energies and, as we will see, the atom will confirm all that.
In one of my previous publications, I have obtained the equations of relativity from a classic Newtonian reasoning, which is here reported again.
When I push from the back a car, by my hands, a mechanical contact between my hands and the trunk of the car is just apparent, as between the matter of my hand and that of the trunk there is an electromagnetic field; one pushes the other by photons. Electrons do not push one another directly.

Let's start from the definition of energy:
$dE = dL = Fds$,

but $ds = vdt$ and $F = ma = m\frac{dv}{dt}$, so:

$$dE = dL = Fds = m\frac{dv}{dt}vdt = mvdv \quad (1.27)$$

Even if this is not going to be our case, we know that in case the mass is constant, it can get out of the integral and then we have the well known expression for the classic kinetic energy:

((($E = \int dE = \int mvdv = m\int vdv = \frac{1}{2}mv^2$)))

Moreover, we know that from the definition of force above given, $dq = fdt = mdv$, but out of generalization, we can also write: $dq = fdt = mdv = d(mv)$, where $d(mv) = mdv$ and nothing more if the mass is constant and so if it can get out of the derivative. Therefore, we can write: $dq = d(mv) = mdv + vdm$ (now we no more exclude the variation of the mass) and $q = mv$. So, still out of generalization, from the less general (1.27), that is $dE = mvdv = mdv \cdot v$ we jump to the following:

$$dE = (mdv + dm \cdot v) \cdot v \quad (1.28)$$

The small photon is carrying a small energy dE: $dE = hf$, but we can believe it also have a small mass dm, somehow, due to its corpuscular properties and not only like a wave, and dm is a dynamic mass (and let's take into account the (1.28)) : $dE = hf = (dm \cdot c + m \cdot dc)c = (dm \cdot c + 0)c = dm \cdot c^2 = dE$
The photon cannot be accelerated or decelerated, as it is, in the universe, like an insect that can be caught by a net (absorbed by matter), but in the net it can go on flying with its speed c (photon orbiting around an electron, as an example). In fact, a non moving body can absorb (incorporate) a photon and later it can emit it back with speed c. As the photon cannot be caught in an absolute sense, it keeps the speed it has since its birth, due to the universe, that is c. And, as a consequence, dc=0.
As a further example, also a propagating wave, if it interferes with its reflection, can hide into a "standing" wave. But after that, if we mathematically subtract the reflected wave, the original wave is back what it was at the beginning and takes up propagating again as before.

Now, let's imagine a simple and naive situation of a photon whose mass is dm and it bumps against the above car, whose mass is M_0, initially not moving. Let's evaluate the energy before and after the meeting.
Before (due to the (1.28)):

$$dE_{photon} + dE_{car} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(dM_0v_0 + M_0dv_0)v_0] = [(dm \cdot c + 0)c] + [0] = dm \cdot c^2 = dE_{photon}$$

as $dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$ (car still not moving, with a constant mass and speed)
After the meeting between the photon and the car, M_0 will become M, as it will catch dm inside and v_0 will be a certain v; in other words, just a body will exsist: the car with the photon on board:

$dE_{car+photon} = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Now, we notice that $dM = dm$, as the change of mass of the car is due to having taken on board the dm of the photon and then both energies, before and after, must be the same, for the conservation of the energy:

$dE_{photon} + dE_{car} = dE_{car+photon}$, that is:

$dm \cdot c^2 = dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Let's write it again:

$$dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v \tag{1.29}$$

Now, if we integrate this differential equation:

$dM(c^2 - v^2) = Mvdv$, that is: $\dfrac{dM}{M} = \dfrac{1}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} vdv$.

Now, let's integrate indeed between M_0 and M and between 0 and v:

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} = \int_0^v \frac{1}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} vdv$$

$\ln\dfrac{M}{M_0} = -\dfrac{1}{2}\ln(1-\dfrac{v^2}{c^2})$, that is:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.30}$$

which is the well known relativistic equation for the dynamic mass!

((We had to write the conservation of the energy in a differential form, like in (1.29) and not like a sum of terms like $\frac{1}{2}mv^2$, like in the theory of collision, as expressions like $\frac{1}{2}mv^2$ presuppose the integral has been already carried out and that the mass m was constant, so getting out of the integral and giving energies like $\frac{1}{2}mv^2$, indeed.))

In terms of energy, from (1.30) we can write that:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} M_0 c^2 = \gamma \cdot M_0 c^2$$

and it holds in particle accelerators, where the operators give energy to the particles.

Now, you get the kinetic energy by removing the rest energy from the total one:

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} M_0 c^2 - M_0 c^2 = M_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right) = M_0 c^2 (\gamma - 1) \tag{1.31}$$

Now, still taking into account the (1.28), let's consider the car as not moving and then it suddenly loses a photon. Let's not forget that the change of state by losing energy is normally happening in atoms, or in a collapsing universe, where all the matter is falling.

Then, before the losing of the photon by the car, we have no photon and the car is still unchanged, so:

$$dE_{photon} + dE_{car} = 0 + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0)v_0] = 0 + 0 = 0 \qquad \text{(BEFORE)} \tag{1.32}$$

($dE_{photon} = dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$)

while after that the car releases a photon, we have:

$$dE_{photon} + dE_{car} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(-vdM + Mdv)v] = dm \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v \qquad \text{(AFTER)} \tag{1.33}$$

(we have $-dM$ in place of dM , as now the car lost mass)

By making the two energies "before" and "after" equal, that is (1.32) and (1.33), and by taking into account that $dm = dM$, as lost mass by the car is that of the photon just created, we have:

$0 = dm \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v = dM \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v = 0$, that is:

$dM \cdot c^2 = v(vdM - Mdv)$

from which: $dM(c^2 - v^2) = -vMdv$, that is:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{v}{(c^2 - v^2)}dv \tag{1.34}$$

Now, by integrating (1.8) between M_0 – M and 0 - v , we get:

$M = M_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}M_0$. Once again, for the energy we have: $E = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}M_0c^2$ and by subtracting such an energy by the energy of the mass M which lost it, that's what's left:

$$E = M_0c^2 - M_0c^2\frac{1}{\gamma} = M_0c^2(1 - \frac{1}{\gamma}) = M_0c^2(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}) \tag{1.35}$$

or, once again, the (1.26c).

<u>Or, still at an intuitive level:</u>

A system made of a particle and an antiparticle, as well as a hydrogen atom, and as well as a gravitational system, as the whole Universe is, behaves as springs which follow the Hooke's Law.

If in our reference system I, where we (the observers) are at rest, there is a body whose mass is m and it's at rest, we can say:

$v_1 = 0$ and $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$. If now I give kinetic energy to it, it will jump to speed v_2, so that, obviously:

$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ and its delta energy of GAINED energy $\Delta_\uparrow E$ (delta up) is:

$\Delta_\uparrow E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = \frac{1}{2}m(v_2 - 0)^2 = \frac{1}{2}m(\Delta v)^2$, with $\Delta v = v_2 - v_1$.

Now, we've obtained a Δv which is simply $v_2 - v_1$, but this is a PARTICULAR situation and it's true only when it starts from rest, that is, when $v_1 = 0$.

On the contrary: $\Delta_\uparrow E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(\Delta_V v)^2$, where Δ_V is a vectorial delta: $\Delta_V v = \sqrt{(v_2^2 - v_1^2)}$; therefore, we can say that, apart from the particular case when we start from rest ($v_1 = 0$), if we are still moving, we won't have a simple delta, but a vectorial one; this is simple base physics.

Now, in our reference system I, where we (the observers) are at rest, if we want to make a body, whose mass is m_0 and originally at rest, get speed V, we have to give it a delta v indeed, but for all what has been said so far, as we are already moving in the Universe, (and with speed c), such a delta v must withstand the following (vectorial) equality:

$$V = \Delta_V v = \sqrt{(c^2 - v^2_{New-Abs-Univ-Speed})}\,, \tag{1.36}$$

where $v_{New-Abs-Univ-Speed}$ is the new absolute speed the body (m_0) looks to have, not with respect to us, but with respect to the Universe and its center of mass.
As a matter of fact, a body is inexorably linked to the Universe where it is, in which, as chance would have it, it already moves with speed c and therefore has got an intrinsic energy m_0c^2 .
In more details, as we want to give the body (m_0) a kinetic energy E_k , in order to make it gain speed V (with respect to us), and considering that, for instance, in a spring which has a mass on one of its ends, for the harmonic motion law, the speed follows a harmonic law like:

$v = (\omega X_{Max}) \sin\alpha = V_{Max} \sin\alpha$ ($v_{New-Abs-Univ-Speed} = c\sin\alpha$, in our case),

and for the harmonic energy we have, for instance, a harmonic law like:

$E = E_{Max} \sin\alpha$ ($m_0c^2 = (m_0c^2 + E_K)\sin\alpha$, in our case),

we get $\sin\alpha$ from the two previous equations and equal them, so getting:

$$v_{New-Abs-Univ-Speed} = c\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + E_K} \text{ ,}$$

now we put this expression for $v_{New-Abs-Univ-Speed}$ in (1.36) and get:

$V = \Delta_V v = \sqrt{(c^2 - v^2_{New-Abs-Univ-Speed})} = \sqrt{[c^2 - (c\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + E_K})^2]} = V$, and we report it below:

$$V = \sqrt{[c^2 - (c\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + E_K})^2]} \tag{1.37}$$

If now we get E_K from (1.37), we have:

$\boxed{E_K = m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1)}$! which is exactly the Einstein's relativistic kinetic energy!

If now we add to E_K such an intrinsic kinetic energy of m_0 (which also stands "at rest" – rest with respect to us, not with respect to the center of mass of the Universe), we get the total energy:

$E = E_K + m_0c^2 = m_0c^2 + m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} m_0c^2 = \gamma \cdot m_0c^2$, that is the well known

$E = \gamma \cdot m_0c^2$ (of the Special Theory of Relativity).

All this after that we supposed to bring kinetic energy to a body at rest (with respect to us). In case of lost energies (further phase of the harmonic motion), such as galaxies which fall towards the center of mass of the Universe and lose potential energy, the following NEW equation must be used:

$$E = \frac{1}{\gamma} \cdot m_0c^2 \tag{1.38}$$

that is:

$$E = \frac{1}{\gamma} m_0c^2 = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} m_0c^2$$

which is intuitive just for the simple reason that, with the increase of the speed, the coefficient $1/\gamma$ lowers m_0 in favour of the radiation, that is of the loss of energy; unfortunately, this is not provided for by the ordinary Theory of Relativity, like in (1.38).
In order to give proof of the equation (1.38), we repeat a reasoning which is similar to that just made:
if in our reference system I, where we (the observers) are at rest, there is a body whose mass is m and it's moving at speed v_1=0, we can say:

$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$. If now a falling removes energy from it, it will jump to speed v_2, so that, obviously: $E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

and its delta energy of LOST energy $\Delta_{\downarrow}E$ (delta down) is:

$\Delta_{\downarrow}E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = \frac{1}{2}m(v_2 - 0)^2 = \frac{1}{2}m(\Delta v)^2$, with $\Delta v = v_2 - v_1$.

Now, we've obtained a Δv which is simply $v_2 - v_1$, but this is a PARTICULAR situation and it's true only when it starts from a v_1 = 0.

On the contrary, in general: $\Delta_{\downarrow}E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(\Delta_V v)^2$, where Δ_V is a vectorial delta: $\Delta_V v = \sqrt{(v_2^2 - v_1^2)}$; therefore, we can say that, apart from the particular case when we start from zero (v_1 = 0), if we start from a $v_1 \neq 0$, we won't have a simple delta, but a vectorial one; this is simple base physics.
Now, in our reference system I, where we (the observers) are at rest, if we want to make a body, whose mass is m_0 and originally at (falling) speed v_1 , gain speed V with respect to us, we have to give it a delta v indeed, but for all what has been said so far, as we are already moving in the Universe, (and with speed c), such a delta v must withstand the following (vectorial) equality:

$$V = \Delta_V v = \sqrt{(c^2 - v_{New-Abs-Univ-Speed}^2)} \text{ ,} \tag{1.39}$$

where $v_{New-Abs-Univ-Speed}$ is the new absolute speed the body (m_0) looks to have, not with respect to us, but with respect to the Universe and its center of mass.
As a matter of fact, a body is inexorably linked to the Universe where it is, in which, as chance would have it, it already moves with speed c and therefore has got an intrinsic energy m_0c^2 .
In more details, as we see a removed potential energy E_R from the falling body (m_0), in order to make it gain speed V (with respect to us), and considering that, for instance, <u>in a spring</u> which has a mass on one of its ends, for the <u>harmonic motion</u> law, the speed follows a harmonic law like:

$v = (\omega X_{Max})\sin\alpha = V_{Max}\sin\alpha$ ($v_{New-Abs-Univ-Speed} = c\sin\alpha$, in our case),

and for the harmonic energy we have, for instance, a harmonic law like:

$E = E_{Max}\sin\alpha$ ($(m_0c^2 - E_R) = m_0c^2\sin\alpha$, in our case, as we are now considering a losing energy system),

we get $\sin\alpha$ from the two previous equations and equal them, so getting:

$$v_{New-Abs-Univ-Speed} = c\frac{(m_0c^2 - E_R)}{m_0c^2} \text{ ,}$$

now we put this expression for $v_{New-Abs-Univ-Speed}$ in (1.39) and get:

$V = \Delta_V v = \sqrt{(c^2 - v_{New-Abs-Univ-Speed}^2)} = \sqrt{c^2 - [c\frac{(m_0c^2 - E_R)}{m_0c^2}]^2} = V$, and we report it below:

$$V = \sqrt{c^2 - [c\frac{(m_0c^2 - E_R)}{m_0c^2}]^2} \tag{1.40}$$

If now we get E_R from (1.40), we have:

$$E_R = m_0c^2(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}) = m_0c^2(1-\frac{1}{\gamma})$$ which is still the (1.26c).

Lorentz Tensor in General Relativity and its corresponding in Complementary Relativity

Let's write again the Lorentz T. in a differential form:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - Vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx) \end{cases} \quad (1.41)$$

Moreover, the (1.41), in a tensor form can be written as follows:

$$dx'^i = \Lambda^i_\beta dx^\beta \quad . \quad (1.42)$$

Let's evaluate the components of the Lorentz matrix (or of the Lorentz Tensor) Λ^α_γ :

From the Lorentz Transformations we have (// and $\perp$ are referred to the direction of the motion):

$\vec{x}'_{//} = \gamma(\vec{x}_{//} - \vec{V}t)$, $\vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp$, $t' = \gamma(t - \frac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{c^2})$; moreover, obviously, we have:

$\vec{x}_{//} = (\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{\vec{V}}{V^2}$ e $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_{//}$, and so:

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma-1)(\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{\vec{V}}{V^2} - \gamma\vec{V}t \quad (1.43)$$

and $t' = \gamma(t - \frac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{c^2})$

while for the (1.42), we have: $dx'^i = \Lambda^i_\beta dx^\beta$, from which, after leaving the standard alphabete (i,j etc) for the three spatial components, 0 as the fourth time coefficient and the greek one for all:

$$dx'^i = \Lambda^i_j dx^j + \Lambda^i_0 dx^0 \quad \text{(for the (1.42))} \quad (1.44)$$

$$dx'^i = dx^i + (\gamma-1)(d\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{V^i}{V^2} + \gamma\frac{1}{c}V^i dx^0 \quad \text{(for the (1.43))} \quad (1.45)$$

(here the last term has the + and not the – because $dx^0 = -cdt$)

By comparing the (1.44) and the (1.45), we get:

$\Lambda^i_0 = +\gamma\frac{1}{c}V^i$ and $\Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{(\gamma-1)}{V^2}V^iV_j$, that is:

$$\boxed{\Lambda^i_0 = +\gamma\frac{1}{c}V^i \quad \text{and} \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{(\gamma-1)}{V^2}V^iV_j}$$ (Lorentz Tensor)

where the product $d\vec{x}\cdot\vec{V}$ of the (1.45) has supplied just the component $dx^j V_j$ in the (1.45), as in the (1.44) only dx^j appeared.

If the direct Lorentz T. is given by the (1.42): $dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} dx^{\gamma}$ the reciprocal one, of course, will be so named: $dx^{\gamma} = \Lambda'^{\lambda}_{\alpha} dx'^{\alpha}$.

Not only the space (x) and time (ct) components can be transformed according to Lorentz, but also 4-vectors and 4-tensors can:

$V'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} V^{\beta}$

$T'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Lambda^{\gamma}_{\delta}\Lambda^{\varepsilon}_{\alpha}\Lambda^{\xi}_{\beta}T^{\delta}_{\varepsilon\xi}$ (we remind that the components of a tensor come from multiplying those of vectors)

Let's write again the Lorentz Complementary T. in a differential form:

$$\begin{cases} dx' = \dfrac{1}{\gamma}(dx - Vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \dfrac{1}{\gamma}[dt + \dfrac{V}{(c^2 - V^2)}dx] \end{cases} \tag{1.46}$$

Moreover, the (1.46), in a tensor form, can be so written:

$$dx'^{i} = \mathrm{P}^{i}_{\beta} dx^{\beta} \ . \tag{1.47}$$

Let's calculate now the components of the Complementary matrix (or of the Complementary Tensor) $\mathrm{P}^{\alpha}_{\gamma}$:

From the Lorentz Complementary T. we have (// and $\perp$ are referred to the direction of the motion):

$\vec{x}'_{//} = \dfrac{1}{\gamma}(\vec{x}_{//} - \vec{V}t)$, $\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$, $t' = \dfrac{1}{\gamma}(t + \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{(c^2 - V^2)})$; moreover, we obviously have:

$\vec{x}_{//} = (\vec{x}\cdot\vec{V})\dfrac{\vec{V}}{V^2}$ and $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{//}$, and so:

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\frac{1}{\gamma} - 1)(\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{\vec{V}}{V^2} - \frac{1}{\gamma}\vec{V}t \tag{1.48}$$

and $t' = \dfrac{1}{\gamma}(t + \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{(c^2 - V^2)})$

while for the (1.47), we have: $dx'^{i} = \mathrm{P}^{i}_{\beta} dx^{\beta}$, from which, after leaving the standard alphabete (i,j etc) for the three spatial components, 0 as the fourth time coefficient and the greek one for all:

$$dx'^{i} = \mathrm{P}^{i}_{j} dx^{j} + \mathrm{P}^{i}_{0} dx^{0} \quad \text{(for the (1.47))} \tag{1.49}$$

$$dx'^{i} = dx^{i} + (\frac{1}{\gamma} - 1)(d\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{V^{i}}{V^2} - \frac{1}{c}V^{i}dx^{0} \quad \text{(for the (1.48))} \tag{1.50}$$

(because $dx^0 = \dfrac{1}{\gamma}cdt$)

By comparing the (1.49) and the (1.50), we get:

$\mathrm{P}^{i}_{0} = -\dfrac{1}{c}V^{i}$ and $\mathrm{P}^{i}_{j} = \delta^{i}_{j} + \dfrac{(1/\gamma - 1)}{V^2}V^{i}V_{j}$, that is:

$$\boxed{P_0^i = +\gamma \frac{1}{c} V^i \text{ and } P_j^i = \delta_j^i + \frac{(1/\gamma - 1)}{V^2} V^i V_j}$$ (Complementary Lorentz Tensor)

where the product $\vec{dx} \cdot \vec{V}$ of the (1.50) has given only the component $dx^j V_j$ in the (1.50), as in the (1.49) only dx^j appeared. If the direct Complementary Lorentz T. is given by the (1.50): $dx'^i = P_\beta^i dx^\beta$, the reciprocal one will be so named: $dx^\gamma = P'^\lambda_\alpha dx'^\alpha$. Not only the space (x) and time (ct) components can be transformed according to the Complementary Lorentz T., but also the 4-vectors and 4-tensors can:

$V'^\alpha = P_\beta^\alpha V^\beta$ $\quad T'^\gamma_{\alpha\beta} = P_\delta^\gamma P_\alpha^\varepsilon P_\beta^\xi T_{\varepsilon\xi}^\delta$ (we remind that the components of a tensor come from multiplying those of vectors)

Complementary Relativity tested with the atom

Let's test the (1.26c) with the atom. We know that the total energy in Bohr's atom is:

$$E_{n-Bohr} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} \tag{1.51}$$

and the speed of the electron is:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \tag{1.52}$$

and (1.26c) gives the same values as (1.51) does, for sure at non relativistic speeds:

$$E_{RC} = m_e c^2 [1 - \sqrt{1 - (\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0 c})^2}] \tag{1.53}$$

and we will soon explain what $E_{n-Dirac}$ is:

$$E_{n-Dirac} = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon^2 h^2} [1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} (\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4})] \tag{1.54}$$

At relativistic speeds (high Z and low n) Bohr and Complementary Relativity-RC (Lost Energies), values, as expected, are a bit different; in fact, we see that:

a)n=1 and Z=80:

$$E_{1-Bohr-80} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{80^2 (1{,}6)^4 (10^{-19})^4 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{8(8{,}85)^2 (10^{-12})^2 (6{,}625)^2 (10^{-34})^2} = \boxed{-13{,}879 \cdot 10^{-15} J} \tag{1.55}$$

$$E_{1-RC-80} = -m_e c^2 [1 - \sqrt{1 - (\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0 c})^2}] = -81{,}7867 \cdot 10^{-15} [1 - 0{,}8127734] = \boxed{-15{,}313 \cdot 10^{-15} J} \tag{1.56}$$

$$E_{n-Dirac} = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon^2 h^2} [1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} (\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4})]$$

which, with n=1 and j=l+1/2=0+1/2 (and α as the Fine Structure Constant), yields:

$$E_{1-Dirac-80} = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon^2 h^2} [1 + \alpha^2 Z^2 (1 - \frac{3}{4})] = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon^2 h^2} (1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{4}) = E_{1-Bohr-80} \cdot (1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{4}) =$$

$$= E_{1-RC-80} \cdot (1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{4}) = -13{,}879 \cdot 10^{-15} (1 + \frac{(\frac{1}{137})^2 80^2}{4}) = \boxed{-15{,}063 \cdot 10^{-15} J} \tag{1.57}$$

b)n=1 and Z=60:

$$E_{1-Bohr-60} = -7{,}872 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-RC-60} = -8{,}220 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-Dirac-60} = -8{,}250 \cdot 10^{-15} J$$

c)n=1 and Z=70:

$$E_{1-Bohr-70} = -10{,}626 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-RC-70} = -11{,}424 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-Dirac-70} = -11{,}320 \cdot 10^{-15} J$$

but we notice there is also a matching with $E_{n-Dirac}$.

$E_{n-Dirac}$ is the Bohr's energy corrected by the official and ordinary Relativity; although there is also an exact Dirac/Sommerfeld equation about, here we use the above one, which comes from the perturbation theory, but gives good values which match the real situations. You can find it in many books of spectroscopy and structure of matter, or also at the link: http://en.wikipedia.org/wiki/Fine_structure etc.

At low values of Z, no relativistic situations hold and everything is as expected:

d)n=1 and Z=10:

$$E_{1-Bohr-10} = -2{,}169 \cdot 10^{-16} J$$
$$E_{1-RC-10} = -2{,}172 \cdot 10^{-16} J$$
$$E_{1-Dirac-10} = -2{,}172 \cdot 10^{-16} J$$

e)n=1 and Z=20:

$$E_{1-Bohr-20} = -8{,}675 \cdot 10^{-16} J$$
$$E_{1-RC-20} = -8{,}721 \cdot 10^{-16} J$$
$$E_{1-Dirac-20} = -8{,}721 \cdot 10^{-16} J$$

f)n=1 and Z=30:

$$E_{1-Bohr-30} = -1{,}952 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-RC-30} = -1{,}976 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-Dirac-30} = -1{,}975 \cdot 10^{-15} J$$

g)n=1 and Z=40:

$$E_{1-Bohr-40} = -3{,}470 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-RC-40} = -3{,}546 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-Dirac-40} = -3{,}544 \cdot 10^{-15} J$$

and here are other values:

h)n=1 and Z=50:

$$E_{1-Bohr-50} = -5{,}422 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-RC-50} = -5{,}614 \cdot 10^{-15} J$$
$$E_{1-Dirac-50} = -5{,}602 \cdot 10^{-15} J$$

i)n=1 and Z=90:

$$E_{1-Bohr-90} = -17{,}566 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-90} = -20{,}015 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-90} = -19{,}461 \cdot 10^{-15} J$$

j)n=1 and Z=100:

$$E_{1-Bohr-100} = -21{,}687 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-100} = -25{,}736 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-100} = -24{,}575 \cdot 10^{-15} J$$

k)n=1 and Z=108:

$$E_{1-Bohr-108} = -25{,}295 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-108} = -31{,}275 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-108} = -29{,}216 \cdot 10^{-15} J$$

l)n=1 and Z=137:

$$E_{1-Bohr-137} = -40{,}704 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-137} = -76{,}203 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-137} = -50{,}880 \cdot 10^{-15} J$$

You can see from the above calculations that the equation of the energy of the Complementary Relativity-Relativity of Lost Energies, apart from the case Z=137 and with very high Z (and this must make you think…), matches somewhat well the $E_{n-Dirac}$ and so, as previously predicted, as its structure is exact and not corrected, it proves to work well with systems which collapse and lose energy, while $E_{n-Dirac}$ does it in an unnatural and corrective way, as to put back to rails a train which always wants to go off the rails… Moreover, although also (1.35), as well as (1.31), at low speeds gives the Newton's kinetic energy, when developed in series of Taylor, on the contrary, it will not give acceptable values with small n and high Z values (relativistic situations), if it is used as a relativistic equation for the calculation of the energy levels of the atom.
Next possible studies on Z values higher than those we have today, will be very fruitful…

APPENDIX:

Bohr's atom:

In an atom, we make equal the coulombian attraction force and the centrifugal one:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}, \qquad \text{(A)}$$

from which:

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = m_e v^2$. By multiplying, now, by 1/2:

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2}m_e v^2 = E_k \qquad \text{(B)}$$

Now, we remind that, in general, in physics we have, for the energy, the following formulas:

$E = hf$ and also $E = m_e c^2$, from which, by equalling: $hf = m_e c^2$, so: $\frac{c}{f} = \frac{h}{m_e c}$, but we know that c/f is the wavelength λ, and so: $\lambda = \frac{h}{m_e c}$; now, according to De Broglie, we extend such an equation and we also give the orbiting electron a wavelength:

$\lambda_e = \frac{h}{m_e v}$ (De Broglie). Now, we multiply numerator and denominator by $\frac{1}{2}v$, so getting:

$$\lambda_e = \frac{\frac{1}{2}vh}{\frac{1}{2}m_e v^2} = \frac{hv}{2E_k}. \tag{C}$$

Now, the Quantization Condition of Bohr requires the quantization of the angular moment:

$$m_e vr = n\frac{h}{2\pi}, \tag{D}$$

where n is the Principal Quantum Number.
Such a Bohr condition is the will to have the circumference of the orbit to be equal to n times the De Broglie wavelength; in fact, equation (D) can be read also like this:

$$2\pi r = n\frac{h}{m_e v} = n\lambda_e. \tag{E}$$

Now, by using (C) in (E), we get:

$$2\pi r = n\frac{hv}{2E_k} \tag{F}$$

but from (B) we see that 2πr is also:

$$2\pi r = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{E_k}, \tag{G}$$

so, by equaling (F) to (G), we have:

$n\frac{hv}{2E_k} = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{E_k}$, that is:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \tag{H}$$

and, so far, we have used absolutely well established physics, almost a century old!

Bohr also figured out the total energy of the electron (kinetic + potential):

$$E = E_k + V = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \tag{I}$$

in fact, in order to evaluate V, by considering a v=0 at an infinite distance from the nucleus, then the wotk to bring the electron from r to infinite is:

$V(r) = \int_{R=r}^{R=\infty} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R=r}^{R=\infty} \frac{Ze^2}{R^2}dR = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$, from which you have the (I), after having well considered signs.

(force F is that of Coulomb, of course)

Now, thanks to (B), (I) becomes:

$$E = E_k + V = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}, \qquad \text{(J)}$$

and, by reminding of (A): ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$) and of (D): ($m_e v r = n\frac{h}{2\pi}$), according to which: $v = n\frac{1}{m_e}\frac{h}{2\pi r}$

we get:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = m_e v^2 = m_e \left(n\frac{1}{m_e}\frac{h}{2\pi r}\right)^2,$$

and so: $r = \frac{n^2\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2}$, (K)

and this one, that is (K), when is put into (J) (i.e. in: $E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$), yields:

$E = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8 n^2 \varepsilon_0^2 h^2}$; now, as E is depending on n, we rewrite it as follows:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} \qquad \text{(L)}$$

This equation, well known in physics, provides the energies corresponding to levels, in the atom.

Thank you for your attention.
Leonardo RUBINO.

RELATIVITÀ COMPLEMENTARE
Al di là delle Trasformazioni di Lorentz

di Leonardo ***Rubino***

Febbraio 2022

Abstract

La Teoria della Relatività verte sugli effetti del conferimento di energia ad un corpo fermo (rispetto a noi). Ciò è quanto fanno, ad esempio, negli acceleratori di particelle.
Nessuno però si è mai chiesto se quel corpo, fermo rispetto a noi, sia dotato di un moto "proprio", "assoluto", nell'universo in cui si trova. Del resto siamo tutti in caduta libera, nel nostro universo. Ebbene, c'è una Relatività (Complementare) che si interessa della perdita di energia potenziale di un corpo, nel cadere liberamente nell'universo. In piccolo, tale fenomeno può essere analizzato anche nell'atomo, dove gli elettroni possono scendere di livello, rilasciando energia. E al fondo di questo paper la Relatività Complementare verrà messa alla prova proprio sull'atomo.

Trasformazioni di Lorentz Complementari

Giungeremo alle seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\gamma}(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\gamma}[t + \dfrac{V}{(c^2 - V^2)}x] \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\gamma}(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{1}{\gamma}[t' - \dfrac{V}{(c^2 - V^2)}x'] \end{cases} \qquad \gamma = 1\Big/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{1.2}$$

(T. di Rubino)

Trasformazioni di Lorentz

Iniziamo col ricordare le Trasformazioni di Lorentz classiche.
Premettiamo che le Trasformazioni di Lorentz nascono prima della Teoria della Relatività (su cui la stessa si fonda) ed in un contesto tutto elettromagnetico.
Le stesse sono dunque l'equivalente relativistico di quelle di Galilei e valgono dunque nel momento in cui si ammette che la velocità della luce è un limite massimo di velocità nell'Universo e che vale c per (~)ogni osservatore.

-<u>PRIMA DEDUZIONE</u>:
supponendo un moto relativo lungo x, correggiamo le componenti x delle Trasformazioni di Galilei tramite un coefficiente γ, come segue:

$$x' = \gamma(x - Vt) \tag{1.3}$$

$$x = \gamma(x' + Vt') \tag{1.4}$$

Ora, per un fotone si ha, ovviamente:
$ct' = \gamma(c - V)t$ e $ct = \gamma(c + V)t$, in quanto la luce ha la stessa velocità c nei due sistemi di riferimento, da cui, moltiplicando membro a membro:

$c^2tt'=\gamma^2tt'c^2(1-\frac{V^2}{c^2})$, da cui:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.5)$$

Inoltre, dalla (1.4) si ha: $t'=\frac{1}{V}(\frac{x}{\gamma}-x')$ ed usando in quest'ultima la (1.3), si ha:

$$t'=\frac{1}{V}[\frac{x}{\gamma}-\gamma(x-Vt)]=\frac{1}{\gamma V}x-\frac{\gamma x}{V}+\gamma t=\gamma[t-\frac{x}{V}(1-\frac{1}{\gamma^2})]=\gamma[t-\frac{V}{c^2}x] \qquad (1.6)$$

in quanto, per la (1.5), si ha che: $(1-\frac{1}{\gamma^2})=\frac{V^2}{c^2}$.

Con lo stesso procedimento che ci ha condotti alla (1.6) si deduce poi anche l'espressione per t.
In conclusione, ecco le Trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-Vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma(t-\frac{V}{c^2}x) \end{cases} \qquad (1.7)$$

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+Vt') \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\gamma(t'+\frac{V}{c^2}x') \end{cases} \qquad (1.8)$$

-<u>SECONDA DEDUZIONE</u>:
Sappiamo che c=cost in tutti i sistemi di riferimento. Ora, nel momento in cui le origini di due sistemi di riferimento coincidono, 0=0' e t=t', dall'origine viene emessa luce per onde sferiche ed in modo isotropico e si può dunque scrivere che:

$c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=0$ e $c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)=0$

in quanto la luce ha la stessa velocità c nei due sistemi di riferimento. Dunque:

$c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)$ e per raggi propagantisi lungo x (y=y' e z=z'):

$c^2t^2-x^2=c^2t'^2-x'^2$. Poniamo ora ($i=\sqrt{-1}$): $ix=\xi$, $ix'=\xi'$, $ct=\eta$ e $ct'=\eta'$; si ha:

$\xi^2+\eta^2=\xi'^2+\eta'^2$, la cui soluzione è:

$$\begin{cases} \xi'=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta \\ \eta'=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta \end{cases} \qquad (1.9)$$

ed in forma differenziale:

$$\begin{cases} d\xi'=d\xi\cos\theta-d\eta\sin\theta \\ d\eta'=d\xi\sin\theta+d\eta\cos\theta \end{cases} \qquad (1.10)$$

Notiamo ora che rispetto all'origine "0", $\frac{dx}{dt}=0$, in quanto il sistema di riferimento (0,x,y,z) è fermo rispetto a se stesso. Invece, $\frac{dx'}{dt'}=-V$, in quanto il sistema (0',x',y',z') si muove con velocità V rispetto a "0" e di conseguenza: $\frac{d\xi}{d\eta}=0$ e $\frac{d\xi'}{d\eta'}=-i\frac{V}{c}$, ma dal rapporto tra le (1.10) si ha che:

$$\frac{d\xi'}{d\eta'}=\frac{d\xi\cos\theta-d\eta\sin\theta}{d\xi\sin\theta+d\eta\cos\theta}=\frac{\frac{d\xi}{d\eta}\cos\theta-\sin\theta}{\frac{d\xi}{d\eta}\sin\theta+\cos\theta}=\frac{0-\sin\theta}{0+\cos\theta}=-tg\theta$$ e dunque: $tg\theta=i\frac{V}{c}=i\beta$

ma sappiamo dalla trigonometria che: $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma$ e:

$\sin\theta=\frac{tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}}=\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e dunque le (1.9) diventano:

$\xi'=\frac{\xi-i\eta\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $\eta'=\frac{i\xi\beta+\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ossia:

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-Vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma(t-\frac{\beta}{c}x) \end{cases}$$

e cioè ancora le (1.7). In modo analogo si giunge poi alle (1.8).

E' poi noto che il quadrivettore posizione è un invariante:

$(x,ct)=x^2-c^2t^2=(x',ct')=x'^2-c^2t'^2$; infatti, per le Trasformazioni di Lorentz:

$$x^2-c^2t^2=\gamma^2(x'+Vt')^2-c^2\gamma^2(t'+\frac{V}{c^2}x')^2=\gamma^2(x'^2+V^2t'^2+2x'Vt'-c^2t'^2-\frac{V^2x'^2}{c^2}-2Vx't')=$$

$$=\gamma^2x'^2(1-\frac{V^2}{c^2})+\gamma^2t'^2(V^2-c^2)=x'^2-c^2t'^2$$, cvd.

Trasformazioni Complementari di Lorentz

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\gamma}(x-Vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\frac{1}{\gamma}[t+\frac{V}{(c^2-V^2)}x] \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\gamma}(x'+Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{1}{\gamma}[t' - \frac{V}{(c^2-V^2)}x'] \end{cases} \qquad \gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad (1.12)$$

Proprio come in un universo rovesciato, quando un corpo collassa nell'universo perdendo energia potenziale, la sua massa si riduce (invece che aumentare), il tempo si contrae (invece che dilatarsi) e le lunghezze si dilatano (invece che contrarsi). Allora, viene spontaneo riscrivere la prima delle (1.7) e la prima delle (1.8) col γ rovesciato:

$$x' = \frac{1}{\gamma}(x - Vt) \quad \text{e} \qquad (1.13)$$

$$x = \frac{1}{\gamma}(x'+Vt'). \qquad (1.14)$$

Ricaviamo ora t' dalla (1.14) e, con alcuni semplici passaggi otteniamo:

$t' = (\gamma x - x')\frac{1}{V}$. A questo punto, in quest'ultima equazione, usiamo la (1.13), ottenendo:

$t' = (\gamma x - x')\frac{1}{V} = \frac{1}{V}(\gamma x - \frac{1}{\gamma}x + \frac{1}{\gamma}Vt) = \frac{1}{\gamma}[t + \frac{x}{V}(\gamma^2 - 1)]$, ma $(\gamma^2 - 1) = \frac{V^2}{c^2 - V^2}$, ottenendo così l'ultima delle (1.11). In modo analogo si otterrà l'ultima delle (1.12), per t.

Anche qui, come per il quadrivettore posizione della Relatività ordinaria, è un invariante il quadrivettore complementare della Relatività Complementare:

$\{x', \frac{1}{\gamma}ct'\} = x'^2 + \frac{1}{\gamma^2}c^2t'^2 = \{x, \frac{1}{\gamma}ct\} = x^2 + \frac{1}{\gamma^2}c^2t^2$; infatti, per le T. Complementari di Lorentz:

$$x'^2 + \frac{1}{\gamma^2}c^2t'^2 = \frac{1}{\gamma^2}(x - Vt)^2 + \frac{1}{\gamma^4}c^2(t + \frac{V}{(c^2-V^2)}x)^2 = \frac{1}{\gamma^2}x^2 + \frac{1}{\gamma^2}V^2t^2 - \frac{2}{\gamma^2}xVt + \frac{c^2}{\gamma^4}t^2 + \frac{c^2V^2x^2}{\gamma^4(c^2-V^2)^2} +$$

$$+ \frac{2c^2xVt}{\gamma^4(c^2-V^2)} = x^2[\frac{1}{\gamma^2}(1 + \frac{c^2V^2}{\gamma^2(c^2-V^2)^2})] + c^2t^2[\frac{1}{\gamma^2}(\frac{V^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2})] - \frac{2}{\gamma^2}xVt(1 - \frac{c^2}{\gamma^2(c^2-V^2)}) =$$

$$= x^2 + \frac{1}{\gamma^2}c^2t^2 \text{ , cvd.}$$

Teorema di Addizione delle Velocità Complementari

Riscriviamo le T. Complementari in forma differenziale:

$$\begin{cases} dx' = \frac{1}{\gamma}(dx - Vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \frac{1}{\gamma}[dt + \frac{V}{(c^2-V^2)}dx] \end{cases} \qquad (1.15)$$

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{\gamma}(dx'+Vdt') \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \frac{1}{\gamma}[dt' - \frac{V}{(c^2-V^2)}dx'] \end{cases} \qquad (1.16)$$

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{1.17}$$

da cui, per rapporto:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\frac{1}{\gamma}(dx'+Vdt')}{\frac{1}{\gamma}[dt'-\frac{V}{(c^2-V^2)}dx']} = \dfrac{v'_x+V}{1-\frac{v'_x V}{(c^2-V^2)}} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{\frac{1}{\gamma}[dt'-\frac{V}{(c^2-V^2)}dx']} = \gamma\dfrac{v'_y}{1-\frac{v'_x V}{(c^2-V^2)}} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{\frac{1}{\gamma}[dt'-\frac{V}{(c^2-V^2)}dx']} = \gamma\dfrac{v'_z}{1-\frac{v'_x V}{(c^2-V^2)}} \end{cases} \tag{1.18}$$

e, analogamente:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{\frac{1}{\gamma}(dx-Vdt)}{\frac{1}{\gamma}[dt+\frac{V}{(c^2-V^2)}dx]} = \dfrac{v_x-V}{1+\frac{v_x V}{(c^2-V^2)}} \\ v'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{\frac{1}{\gamma}[dt+\frac{V}{(c^2-V^2)}dx]} = \gamma\dfrac{v_y}{1+\frac{v_x V}{(c^2-V^2)}} \\ v'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{\frac{1}{\gamma}[dt+\frac{V}{(c^2-V^2)}dx]} = \gamma\dfrac{v_z}{1+\frac{v_x V}{(c^2-V^2)}} \end{cases} \tag{1.19}$$

Invarianza per T. di Lorentz dell'Equazione delle Onde di d'Alembert

Si ha, dal sistema (1.7), che:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma \ , \ \frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma V \ , \ \frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma\frac{V}{c^2} \ , \ \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma \ , \ \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 \ , \ \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = ... = 0$$

Ricordiamo poi ancora l'Equazione delle onde di d'Alembert (nel sistema k', si ha: $\Phi = \Phi(\vec{r}\,',t')$):

$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$; in più, dall'analisi matematica si ha:

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial x} = \gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial x'} + (-\dfrac{V}{c^2})\gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial t'}$; inoltre:

$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \gamma^2(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \dfrac{V^2}{c^4}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}) - \dfrac{2V}{c^2-V^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'}$. Similmente: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = -V\gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial x'} + \gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial t'}$,

$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \gamma^2(V^2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}) - 2V\gamma^2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'}$,

$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}$, $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}$, da cui, per sostituzione:

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}}=\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}} \quad \text{cvd}$$

(si ha la stessa forma in entrambi i sistemi di riferimento!).

Invarianza per le T. Complementari di Lorentz dell'Equazione delle Onde Complementari

Si ha, dal sistema (1.11), che:

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=1/\gamma\;,\quad \frac{\partial x'}{\partial t}=-V/\gamma\,,\quad \frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{V}{\gamma(c^2-V^2)}\,,\quad \frac{\partial t'}{\partial t}=1/\gamma\,,\quad \frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial z}=1\;,\quad \frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial z}=\frac{\partial y'}{\partial x}=....=0$$

Ora, in luogo dell'Equazione delle onde di d'Alembert, consideriamo l'Eq. delle Onde Complementari

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0\,; \tag{1.20}$$

Per le nuove Trasformazioni della Relatività Complementare, vediamo che quest'ultima equazione è invariante.

Dall'analisi matematica si ha poi:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+\frac{V}{\gamma(c^2-V^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial t'} \quad \text{; inoltre:}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+\frac{V^2}{\gamma^2(c^2-V^2)^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}+\frac{2V}{\gamma^2(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'}\;.$$

Similmente:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{V}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\;,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{V^2}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}-\frac{2V}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'}\;,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}\;,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}$$

da cui, per sostituzione:

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}}=0=\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}+\frac{1}{(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}=0} \quad \text{cvd}$$

(si ha la stessa forma in entrambi i sistemi di riferimento!).
Ora, per semplicità, rifacciamoci al caso unidimensionale della Eq. Delle Onde Complementari, ossia:

$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{(c^2-V^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$, o anche: $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \tau^2}=0$, con: $\tau=\frac{1}{\gamma}t$ (tempo proprio), oppure ancora:

$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{(w)^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \tau^2}=0$, con $w=ic$.

La soluzione di una simile equazione d'onda è:

$\Phi=A\cdot e^{i(x-w\tau)}$, oppure ancora: $\Phi=A\cdot e^{ix}e^{-iw\tau}=A\cdot e^{c\tau}e^{ix}$, ossia:

$$\Phi = A \cdot e^{c\tau} e^{ix} = A \cdot e^{\frac{c}{\gamma}t} e^{ix} = A \cdot e^{\sqrt{(1-\frac{V^2}{c^2})}ct} e^{ix}$$ (Onde Complementari).

Bilancio energetico

Premessa: il Tempo Proprio $d\tau$ di una particella:
Se una particella è ferma in (O',x',y',z'), ossia se la stessa si muove appunto con O', ossia se O' è il suo sistema di riferimento "proprio", allora: dx'= dy'= dz'=0 e:

$(\underline{ds})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0 + 0 + 0 - c^2dt'^2 = -c^2dt'^2$, da cui:

$dt' = d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}}dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\frac{dl}{dt})^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$ (tempo proprio, invariante, in quanto tale è $\frac{ds}{c}$). Dunque, quando si eseguono calcoli riguardanti una particella, viene spontaneo utilizzare per essa appunto il suo tempo proprio:

$$d\tau = \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}dt = \frac{dt}{\gamma} \ .$$

Fine premessa.

Sappiamo ora dalla relatività ordinaria che, per l'energia totale E, si ha:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \quad (1.21)$$

Questa è l'espressione, per l'energia, più generale che abbiamo e vale appunto per una particella anche relativistica.
Ora, per un fotone, che è poi una « particella » con massa a riposo nulla, si ha $E^2 = p^2c^2$, ossia:

$$E = pc \quad (1.22)$$

Per una particella non relativistiva, sappiamo invece che vale, per la sua energia cinetica, la seguente espressione: $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$, ma quest'ultima è nascosta proprio nella (1.21), che è di valore più generale, appunto. Infatti, la (1.21) può essere così riscritta:

$$E = m_0c^2(1 + \frac{p^2}{m_0^2c^2})^{1/2} \quad (1.23)$$

e ricordando che, per gli sviluppi di Taylor, si ha:

$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, segue che, per la (1.23):

$E = m_0c^2(1 + \frac{p^2}{m_0^2c^2})^{1/2} \approx m_0c^2(1 + \frac{p^2}{2m_0^2c^2}) = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$ e, per l'energia cinetica, si ha dunque:

$$E_k = E - m_0c^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2}m_0v^2 .$$

La (1.21) deriva dal seguente ragionamento sul quadrivettore momento-energia (o momento lineare):
sappiamo dalla fisica classica che il momento lineare, o quantità di moto, è dato dal prodotto della massa per la velocità. Ora, nel caso relativistico, si definisce innanzitutto un quadrivettore e poi la velocità intesa come dx/dt avrà come dt il tempo proprio $d\tau$, che è caratteristico appunto della particella in esame, per la quale si va a definire il quadrivettore:

$$\underline{p} = (m_0\frac{dx_1}{d\tau}, m_0\frac{dx_2}{d\tau}, m_0\frac{dx_3}{d\tau}, m_0\frac{dx_4}{d\tau}) = (\frac{m_0}{1/\gamma}\frac{dx_1}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma}\frac{dx_2}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma}\frac{dx_3}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma}\frac{dx_4}{dt}) =$$

$$= (m\frac{dx_1}{dt}, m\frac{dx_2}{dt}, m\frac{dx_3}{dt}, m\frac{dx_4}{dt}) = (m\vec{v}, mc) = (\vec{p}, mc) = \underline{p}$$

dove $\vec{v}$ è il vettore (tridimensionale) velocità, $\vec{p}$ è il momento lineare tridimensionale, $mc = m\frac{dx_4}{dt}$ è la componente quadridimensionale, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ è il tempo proprio e $m = \frac{m_0}{1/\gamma} = \gamma m_0$ è la massa dinamica, che coincide con la massa a riposo m_0 solo se v=0.
Si inizia quindi ad introdurre già il concetto di massa relativa, che cresce con la velocità, divenendo infinita per v=c.

I moduli dei quadrivettori sono "assoluti", cioè invarianti per trasformazioni di Lorentz; infatti:

$$\left|\underline{p}\right|^2 = |\vec{p}|^2 - p_4^2 = m^2v^2 - m^2c^2 = -m^2(c^2 - v^2) = -\frac{m_0^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})}(c^2 - v^2) = -m_0^2c^2 = \quad (1.24)$$

=costante, cioè non funzione di v.

Riscriviamo un attimo la (1.24) :

$m^2v^2 - m^2c^2 = -m_0^2c^2$ ossia:

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2 \quad , \quad (1.25)$$

ma mc^2 , con m che è la massa dinamica, è l'energia totale E della particella, in quanto nella massa dinamica è già inclusa sia la massa a riposo che l'incremento di massa dovuto all'energia conferita alla particella.
Moltiplicando dunque entrambi i membri della (1.25) per c^2 otteniamo:

$$m^2c^4 = (m^2v^2)c^2 + m_0^2c^4 \quad (1.25b)$$

ossia: $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$, che altro non è che la (1.21).

Nel caso invece di un corpo con massa (relativamente a noi) a rposo m_0 che, essendo in caduta libera nell'universo, perde energia potenziale ed irradia, e in luogo della (1.21) si avrà la seguente:

$\frac{1}{\gamma^2}m_0^2c^4 = m_0^2c^4 - (m_0^2v^2)c^2$ ossia,

$$E_{irr}^2 = m_0^2c^4 - p^2c^2 . \quad (1.26)$$

In Relatività Complementare si ha quindi un nuovo quadrivettore complementare dell'impulso (il cui modulo è anche qui invariante) del seguente tipo:

$\{m_0v, \frac{1}{\gamma}m_0c\}$, con modulo quadro appunto: $m_0^2v^2 + \frac{1}{\gamma^2}m_0^2c^2$, (notare il +) che vale (come si può facilmente verificare) $m_0^2c^2$ (invariante). In conclusione:

$$m_0^2v^2 + \frac{1}{\gamma^2}m_0^2c^2 = m_0^2c^2 \quad , \quad (1.26b)$$

ossia proprio la (1.26). Notiamo che con alcuni semplici passaggi algebrici, la (1.26b) diventa la (1.25b).

Per l'energia, si ha dunque: $E_{irr} = \frac{1}{\gamma}m_0c^2$ e togliendo tale energia dalla energia della massa m_0 che l'ha ceduta, si ha ciò che rimane:

$$E = m_0c^2 - m_0c^2\frac{1}{\gamma} = m_0c^2(1 - \frac{1}{\gamma}) = m_0c^2(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}) \quad (1.26c)$$

Approccio più intuitivo alla Relatività Complementare

Quando un sistema fisico cede energia invece che guadagnarla, si applica un altro tipo di relatività, ossia quella delle energie cedute e, come vedremo, l'atomo ci dà la conferma numerica di tutto ciò.

In una mia precedente pubblicazione, ho fatto scaturire le formule della relatività da un ragionamento newtoniano classico che qui ripetiamo brevemente.
Quando io spingo da dietro un'automobile, con le mani, il contatto meccanico tra le mie mani ed il baule della macchina è solo apparente, perché, in realtà, tra la materia della mia mano e quella del baule c'è campo elettromagnetico; una spinge l'altra con dei fotoni. Non è che gli elettroni si spingono direttamente l'un l'altro.

Partiamo dalla definizione di energia:

$dE = dL = Fds$,

ma $ds = vdt$ e $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$, da cui:

$$dE = dL = Fds = m\frac{dv}{dt}vdt = mvdv \qquad (1.27)$$

Anche se non sarà il nostro caso, notiamo che nel caso di massa costante, la massa può uscire dall'integrale e si ha la nota espressione dell'energia cinetica classica:

((($E = \int dE = \int mvdv = m\int vdv = \frac{1}{2}mv^2$)))

Ricordiamo inoltre che, dalla definizione di forza di cui sopra, $dq = fdt = mdv$, ma per generalizzare, possiamo anche scrivere che: $dq = fdt = mdv = d(mv)$, dove $d(mv) = mdv$ e basta se la massa è costante e dunque se può uscire dalla derivata. Più in generale, scriviamo dunque: $dq = d(mv) = mdv + vdm$ (dove ora non si esclude più la variazione della massa) e $q = mv$. Allora, sempre per motivi di maggior generalità, dalla meno generale (1.27), ossia da $dE = mvdv = mdv \cdot v$ si passa alla:

$$dE = (mdv + dm \cdot v) \cdot v \qquad (1.28)$$

Il piccolo fotone è portatore di una piccola energia dE: $dE = hf$, ma possiamo riconoscergli, per le sue qualità non solo ondulatorie, ma anche corpuscolari, una piccola massa dm, che sappiamo essere dinamica (e si ricordi la (1.28)):

$dE = hf = (dm \cdot c + m \cdot dc)c = (dm \cdot c + 0)c = dm \cdot c^2 = dE$

Il fotone, evidentemente, è inaccelerabile ed indecelerabile, in quanto è, nell'universo, come un insetto che può sì essere catturato con un retino (assorbito dalla materia), ma nel retino continua a volare con la sua velocità c (fotone in orbita intorno all'elettrone, ad esempio). Infatti, un corpo per noi fermo può assorbire (inglobare) un fotone e poi riemetterlo a velocità c. Essendo il fotone non catturabile in senso assoluto, esso conserva la velocità che ha alla nascita, dettata dall'universo, ossia c. E, di conseguenza, dc=0.
Come ulteriore esempio, anche un'onda che si propaga può, se interagisce con la sua riflessa, nascondersi dentro l'onda "stazionaria" che ne scaturisce. Ma poi, se matematicamente si risottrae la riflessa, l'onda originaria torna ad essere quella di prima ed a ripropagarsi come prima.
Immaginiamo ora il semplice ed ingenuo esempio di un fotone di massa dm che urta la macchina di prima, di massa M_0, inizialmente ferma. Valutiamo l'energia prima e dopo l'incontro.
Prima (in forza della (1.28)):

$dE_{fotone} + dE_{macchina} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0)v_0] = [(dm \cdot c + 0)c] + [0] = dm \cdot c^2 = dE_{fotone}$

poiché $dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$ (macchina ancora ferma, che non varia né di massa, né di velocità)

Dopo l'incontro del fotone con la macchina, M_0 diventerà M, in quanto avrà incapsulato la dm del fotone, e v_0 diventerà una certa v; in altre parole, esiste solo un corpo, ossia la macchina con a bordo il fotone:

$dE_{macchina+fotone} = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Ora, innanzitutto notiamo che $dM = dm$, in quanto la variazione di massa della macchina è causata dall'aver conglobato la dm del fotone, e poi le due energie, prima e dopo, devono eguagliarsi, per la conservazione dell'energia:

$dE_{fotone} + dE_{macchina} = dE_{macchina+fotone}$, ossia:

$dm \cdot c^2 = dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Riscriviamola:

$$dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v \qquad (1.29)$$

Ora, integriamo questa equazione differenziale:

$dM(c^2 - v^2) = Mvdv$, ossia: $\dfrac{dM}{M} = \dfrac{1}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} vdv$. Integriamo appunto tra M_0 ed M e tra 0 e v:

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} = \int_0^v \frac{1}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} vdv$$

$\ln \dfrac{M}{M_0} = -\dfrac{1}{2}\ln(1-\dfrac{v^2}{c^2})$, ossia:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma M_0 , \qquad (1.30)$$

che è la ben nota equazione relativistica per la massa dinamica!

((La conservazione dell'energia la si è dovuta scrivere in termini differenziali, come nella (1.29) e non come somma di termini del tipo $\frac{1}{2}mv^2$, come avviene ordinariamente in teoria dell'urto, in quanto espressioni del tipo $\frac{1}{2}mv^2$ presuppongono che l'integrale è già stato fatto e che la massa m era costante, così uscendo dall'integrale e fornendo appunto energie del tipo $\frac{1}{2}mv^2$.))

In termini di energia, dunque, dalla (1.30), possiamo scrivere che:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} M_0 c^2 = \gamma \cdot M_0 c^2$$

che, palesemente, vale negli acceleratori di particelle, dove gli addetti conferiscono energia alle particelle.

Si ottiene l'energia cinetica, notoriamente, togliendo l'energia di riposo da quella totale:

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} M_0 c^2 - M_0 c^2 = M_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right) = M_0 c^2(\gamma - 1) \qquad (1.31)$$

Adesso, sempre tenendo a mente la (1.28), facciamo che la macchina sia ferma e, ad un certo punto, emetta (perda) un fotone. Non dimentichiamo che il cambiamento di stato per perdita di energia avviene ordinariamente negli atomi, oppure in un universo collassante, dove tutta la materia precipita.

Allora, dicevamo, prima della perdita del fotone da parte della macchina, non vi sono fotoni e la macchina è ancora integra, dunque:

$$dE_{fotone} + dE_{macchina} = 0 + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0)v_0] = 0 + 0 = 0 \quad \text{(PRIMA)} \qquad (1.32)$$

($dE_{fotone} = dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$)

mentre, dopo che l'auto cede un fotone, si ha:

$$dE_{fotone} + dE_{macchina} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(-vdM + Mdv)v] = dm \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v \quad \text{(DOPO)} \qquad (1.33)$$

(si ha $-dM$ in luogo di dM , in quanto la macchina, questa volta, ha perso massa)

Eguagliando dunque le due energie "prima" e "dopo", ossia le (1.32) e (1.33), e tenendo conto che $dm = dM$, in quanto la massa ceduta dalla macchina è quella che si ritrova nella creazione del fotone emesso, si ottiene:

$0 = dm \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v = dM \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v = 0$, ossia:

$dM \cdot c^2 = v(vdM - Mdv)$

da cui: $dM(c^2 - v^2) = -vMdv$, ossia:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{v}{(c^2 - v^2)}dv \tag{1.34}$$

Integrando ora la (1.34) tra M_0 – M e 0 - v, si ottiene:

$M = M_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}M_0$. Ancora una volta, per l'energia, si ha: $E = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}M_0c^2$ e togliendo tale energia dalla energia della massa M che l'ha ceduta, si ha ciò che rimane:

$$E = M_0c^2 - M_0c^2\frac{1}{\gamma} = M_0c^2(1 - \frac{1}{\gamma}) = M_0c^2(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}) \tag{1.35}$$

ossia ancora la (1.26c).

<u>Oppure ancora, sempre a livello intuitivo:</u>

Sia un sistema composto da particella ed antiparticella che un atomo di idrogeno che un sistema gravitazionale, come tutto l'Universo, si comportano come una molla sottoposta alla Legge di Hooke.
Se in un mio sistema di riferimento I, in cui io osservatore sono in quiete, ho un corpo di massa m in quiete, potrò scrivere:

$v_1 = 0$ e $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$. Se ora gli conferisco energia cinetica, esso passerà alla velocità v_2, tale che, ovviamente:

$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ ed il suo delta energia di energia GUADAGNATA $\Delta_\uparrow E$ (delta up) sarà:

$\Delta_\uparrow E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = \frac{1}{2}m(v_2 - 0)^2 = \frac{1}{2}m(\Delta v)^2$, con $\Delta v = v_2 - v_1$.

Ora, il fatto che ho ottenuto un Δv che è semplicemente pari a $v_2 - v_1$ è un caso del tutto PARTICOLARE e vale solo quando si parte da fermi, e cioè quando $v_1 = 0$.

In caso contrario: $\Delta_\uparrow E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(\Delta_V v)^2$, dove Δ_V è un delta vettoriale: $\Delta_V v = \sqrt{(v_2^2 - v_1^2)}$; possiamo dunque affermare che, a parte il caso particolare in cui si parta da fermi ($v_1 = 0$), se si è già in moto, non si avrà un delta semplice, ma bensì uno vettoriale; ma questa è semplice fisica di base.
Ora, in un mio sistema di riferimento I, in cui io osservatore sono in quiete, se ad un corpo di massa m_0 che mi appare in quiete voglio fargli raggiungere la velocità V, devo conferirgli un delta v appunto, ma per quanto esposto in precedenza, essendo noi già in movimento nell'Universo (ed a velocità c), tale delta v deve sottostare alla seguente eguaglianza (vettoriale):

$$V = \Delta_V v = \sqrt{(c^2 - v_{New-Abs-Univ-Speed}^2)}, \tag{1.36}$$

dove $v_{New-Abs-Univ-Speed}$ è la nuova velocità assoluta che il corpo di massa m_0 risulta avere non rispetto a noi, ma nel contesto dell'Universo e rispetto al suo centro di massa. Infatti, un corpo è inesorabilmente legato all'Universo in cui si trova, nel quale, guarda caso, esso, già di suo si muove con velocità c e possiede dunque una energia intrinseca m_0c^2.
Nella fattispecie, dovendo io apportare energia cinetica E_k al corpo m_0 per fargli acquisire velocità V (rispetto a me), e considerando che, ad esempio, <u>in una molla</u> con una massa attaccata ad un'estremità, per la legge del <u>moto armonico</u> ho, per la velocità, una legge armonica del tipo:

$v = (\omega X_{Max})\sin\alpha = V_{Max}\sin\alpha$ ($v_{New-Abs-Univ-Speed} = c\sin\alpha$, nel nostro caso),

e per l'energia armonica si ha una legge armonica, ad esempio, del tipo:

$E = E_{Max}\sin\alpha$ ($m_0c^2 = (m_0c^2 + E_K)\sin\alpha$, nel nostro caso),

ricavando $\sin\alpha$ dalle due equazioni precedenti ed eguagliando, si ottiene:

$$v_{New-Abs-Univ-Speed} = c\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + E_K} ,$$

e sostituendo tale valore di $v_{New-Abs-Univ-Speed}$ nella (1.36), otterrò:

$V = \Delta_V v = \sqrt{(c^2 - v^2_{New-Abs-Univ-Speed})} = \sqrt{[c^2 - (c\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + E_K})^2]} = V$, che riscrivo:

$$V = \sqrt{[c^2 - (c\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + E_K})^2]} \tag{1.37}$$

Se ora ricavo E_K dalla (1.37), ottengo:

$\boxed{E_K = m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1)}$! che è esattamente l'energia cinetica relativistica di Einstein!!!

Aggiungendo ora a tale E_K cinetica l'energia intrinseca (che il corpo ha anche a "riposo" – riposo rispetto a noi, non rispetto al centro di massa dell'Universo) del corpo m_0, ottengo l'energia totale:

$E = E_K + m_0c^2 = m_0c^2 + m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} m_0c^2 = \gamma \cdot m_0c^2$, e cioè la ben nota

$E = \gamma \cdot m_0c^2$ (della TRR).

Tutto ciò dopo che abbiamo supposto di apportare energia cinetica ad un corpo in quiete (rispetto a noi).

In caso di energie rimosse, o perse (fase ulteriore del moto armonico), come, ad esempio, le galassie, che cadono verso il centro di massa dell'Universo, perdendo energia potenziale, vale la seguente NUOVA equazione:

$$E = \frac{1}{\gamma} \cdot m_0c^2 \tag{1.38}$$

ossia:

$$E = \frac{1}{\gamma} m_0c^2 = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} m_0c^2$$

che è intuitiva già solo per il fatto che, con l'aumentare della velocità, il coefficiente $1/\gamma$ mi abbassa m_0, riducendola appunto, a favore della irradiazione, e cioè della perdita, di energia, cosa purtroppo non prevista, nei termini della (1.38), nella Teoria della Relatività ordinaria.

Al fine di dare prova della (1.38), ripetiamo un ragionamento simile a quello appena fatto:

se in un mio sistema di riferimento I, in cui io osservatore sono in quiete, ho un corpo di massa m a velocità $v_1=0$, potrò scrivere:

$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$. Se ora consideriamo l'energia potenziale persa per caduta (invece che energia cinetica direttamente aggiunta), esso passerà alla velocità v_2, tale che, ovviamente: $E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ ed il suo delta energia di energia PERSA $\Delta_{\downarrow}E$ (delta down) sarà: $\Delta_{\downarrow}E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = \frac{1}{2}m(v_2 - 0)^2 = \frac{1}{2}m(\Delta v)^2$, con $\Delta v = v_2 - v_1$.

Ora, il fatto che ho ottenuto un Δv che è semplicemente pari a $v_2 - v_1$ è un caso del tutto PARTICOLARE e vale solo quando si parte da fermi, e cioè quando $v_1 = 0$.

In caso contrario: $\Delta_{\downarrow}E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(\Delta_V v)^2$, dove Δ_V è un delta vettoriale: $\Delta_V v = \sqrt{(v_2^2 - v_1^2)}$; possiamo dunque affermare che, a parte il caso particolare in cui si parta da fermi (v_1

= 0), se si parte da una $v_1 \neq 0$, non si avrà un delta semplice, ma bensì uno vettoriale; ma questa è semplice fisica di base.
Ora, in un mio sistema di riferimento I, in cui io osservatore sono in quiete, se un corpo di massa m_0 che mi appare fermo acquista la velocità V per caduta e, dunque, per perdita di energia potenziale, vedo conferirgli un delta v appunto, ma per quanto esposto in precedenza, essendo noi già in movimento nell'Universo (ed a velocità c), tale delta v deve sottostare alla seguente eguaglianza (vettoriale):

$$V = \Delta_V v = \sqrt{(c^2 - v^2_{New-Abs-Univ-Speed})}\,, \tag{1.39}$$

dove $v_{New-Abs-Univ-Speed}$ è la nuova velocità assoluta che il corpo di massa m_0 risulta avere non rispetto a noi, ma nel contesto dell'Universo e rispetto al suo centro di massa. Infatti, un corpo è inesorabilmente legato all'Universo in cui si trova, nel quale, guarda caso, esso, già di suo si muove con velocità c e possiede dunque una energia intrinseca $m_0 c^2$.
Nella fattispecie, vedendo rimossa un'energia E_R dal corpo m_0 per fargli acquistare una velocità V (rispetto a me), e considerando che, ad esempio, in una molla con una massa attaccata ad un'estremità, per la legge del moto armonico ho, per la velocità, una legge armonica del tipo:

$v = (\omega X_{Max})\sin\alpha = V_{Max}\sin\alpha$ ($v_{New-Abs-Univ-Speed} = c\sin\alpha$, nel nostro caso),

e per l'energia armonica si ha una legge armonica, ad esempio, del tipo:

$E = E_{Max}\sin\alpha$ ($(m_0c^2 - E_R) = m_0c^2\sin\alpha$, nel nostro caso), ricavando $\sin\alpha$ dalle due equazioni precedenti ed eguagliando, si ottiene:

$v_{New-Abs-Univ-Speed} = c\dfrac{m_0c^2 - E_R}{m_0c^2}$, e sostituendo tale valore di $v_{New-Abs-Univ-Speed}$ nella (1.39), otterrò:

$V = \Delta_V v = \sqrt{(c^2 - v^2_{New-Abs-Univ-Speed})} = \sqrt{[c^2 - (c\dfrac{m_0c^2 - E_R}{m_0c^2})^2]} = V$, che riscrivo:

$$V = \sqrt{[c^2 - (c\frac{m_0c^2 - E_R}{m_0c^2})^2]} \tag{1.40}$$

Se ora ricavo E_R dalla (1.40), ottengo:

$E_R = m_0c^2(1 - \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}) = m_0c^2(1 - \dfrac{1}{\gamma})$ ossia ancora la (1.26c).

Tensore di Lorentz in Relatività Generale ed omologo in Relatività Complementare

Riscriviamo le T. di Lorentz in forma differenziale:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - Vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \dfrac{V}{c^2}dx) \end{cases} \tag{1.41}$$

Inoltre, le (1.41), in forma tensoriale possono essere scritte come:

$$dx'^i = \Lambda^i_\beta dx^\beta \ . \tag{1.42}$$

Valutiamo ora gli elementi della matrice di Lorentz (o del tensore di Lorentz) Λ^α_γ :
Dalle Trasformazioni di Lorentz abbiamo che (// e $\perp$ si riferiscono alla direzione di moto):

$\vec{x}'_{//} = \gamma(\vec{x}_{//} - \vec{V}t)$, $\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$, $t' = \gamma(t - \frac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{c^2})$; inoltre, ovviamente, si ha che:

$\vec{x}_{//} = (\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{\vec{V}}{V^2}$ e $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{//}$, sicchè:

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)(\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{\vec{V}}{V^2} - \gamma\vec{V}t \quad \text{e} \tag{1.43}$$

$$t' = \gamma(t - \frac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{c^2})$$

mentre per la (1.42), si ha: $dx'^i = \Lambda^i_{\ \beta} dx^\beta$, da cui, lasciando l'alfabeto comune (i,j ecc) per le tre componenti spaziali, 0 come quarto coefficiente temporale e quello greco per tutto:

$$dx'^i = \Lambda^i_{\ j} dx^j + \Lambda^i_{\ 0} dx^0 \quad \text{(per la (1.42))} \tag{1.44}$$

$$dx'^i = dx^i + (\gamma - 1)(d\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{V^i}{V^2} + \gamma\frac{1}{c}V^i dx^0 \quad \text{(per le (1.43))} \tag{1.45}$$

(qui l'ultimo termine ha segno + e non – perché $dx^0 = -cdt$)

Dal confronto tra le (1.44) e (1.45), si ha:

$\Lambda^i_0 = +\gamma\frac{1}{c}V^i$ e $\Lambda^i_{\ j} = \delta^i_j + \frac{(\gamma-1)}{V^2}V^i V_j$, ossia:

$$\boxed{\Lambda^i_0 = +\gamma\frac{1}{c}V^i \quad \text{e} \quad \Lambda^i_{\ j} = \delta^i_j + \frac{(\gamma-1)}{V^2}V^i V_j} \qquad \text{(Tensore di Lorentz)}$$

dove il prodotto $d\vec{x}\cdot\vec{V}$ della (1.45) ha reso solo la componente $dx^j V_j$ nella (1.45), in quanto nella (1.44) compariva solo dx^j .

Se la T. di Lorentz diretta è data dalla (2.24): $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\gamma dx^\gamma$ quella inversa, evidentemente, la indichiamo così: $dx^\gamma = \Lambda'^\lambda_\alpha dx'^\alpha$.

Non solo le componenti spaziali (x) e temporali (ct) si possono trasformare con Lorentz, ma anche i quadrivettori ed i quadritensori lo fanno:

$$V'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta$$

$T'^\gamma_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma_\delta \Lambda^\varepsilon_\alpha \Lambda^\xi_\beta T^\delta_{\varepsilon\xi}$ (ricordando che le componenti di un tensore si ottengono moltiplicando quelle dei vettori)

Riscriviamo ora le T. di Lorentz Complementari in forma differenziale:

$$\begin{cases} dx' = \frac{1}{\gamma}(dx - Vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \frac{1}{\gamma}[dt + \frac{V}{(c^2 - V^2)}dx] \end{cases} \tag{1.46}$$

Inoltre, le (1.46), in forma tensoriale possono essere scritte come:

$$dx'^i = \mathrm{P}^i_\beta dx^\beta \ . \tag{1.47}$$

Valutiamo ora gli elementi della matrice Complementare di Lorentz (o del tensore Complementare di Lorentz) P^α_γ :

Dalle T. Complementari di Lorentz abbiamo che (// e $\perp$ si riferiscono alla direzione di moto):

$\vec{x}'_{//} = \frac{1}{\gamma}(\vec{x}_{//} - \vec{V}t)$, $\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$, $t' = \frac{1}{\gamma}(t + \frac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{(c^2 - V^2)})$; inoltre, ovviamente, si ha che:

$\vec{x}_{//} = (\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{\vec{V}}{V^2}$ e $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{//}$, sicchè:

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\frac{1}{\gamma} - 1)(\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{\vec{V}}{V^2} - \frac{1}{\gamma}\vec{V}t \quad \text{e} \tag{1.48}$$

$$t' = \frac{1}{\gamma}(t + \frac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{(c^2 - V^2)})$$

mentre per la (1.47), si ha: $dx''^{i} = \mathrm{P}^{i}_{\beta}dx^{\beta}$, da cui, lasciando l'alfabeto comune (i,j ecc) per le tre componenti spaziali, 0 come quarto coefficiente temporale e quello greco per tutto:

$$dx''^{i} = \mathrm{P}^{i}_{j}dx^{j} + \mathrm{P}^{i}_{0}dx^{0} \quad \text{(per la (1.47))} \tag{1.49}$$

$$dx''^{i} = dx^{i} + (\frac{1}{\gamma} - 1)(d\vec{x}\cdot\vec{V})\frac{V^{i}}{V^2} - \frac{1}{c}V^{i}dx^{0} \quad \text{(per le (1.48))} \tag{1.50}$$

(perché $dx^{0} = \frac{1}{\gamma}cdt$)

Dal confronto tra le (1.49) e (1.50), si ha:

$\mathrm{P}^{i}_{0} = -\frac{1}{c}V^{i}$ e $\mathrm{P}^{i}_{j} = \delta^{i}_{j} + \frac{(1/\gamma - 1)}{V^2}V^{i}V_{j}$, ossia:

$$\boxed{\mathrm{P}^{i}_{0} = +\gamma\frac{1}{c}V^{i} \quad \text{e} \quad \mathrm{P}^{i}_{j} = \delta^{i}_{j} + \frac{(1/\gamma - 1)}{V^2}V^{i}V_{j}} \qquad \text{(Tensore Complementare di Lorentz)}$$

dove il prodotto $d\vec{x}\cdot\vec{V}$ della (1.50) ha reso solo la componente $dx^{j}V_{j}$ nella (1.50), in quanto nella (1.49) compariva solo dx^{j}. Se le T. Complementari di Lorentz dirette sono date dalla (1.50): $dx''^{i} = \mathrm{P}^{i}_{\beta}dx^{\beta}$, quelle inverse, evidentemente, le indichiamo così: $dx^{\gamma} = \mathrm{P}'^{\lambda}_{\alpha}dx'^{\alpha}$. Non solo le componenti spaziali (x) e temporali (ct) si possono trasformare in complementare con Lorentz, ma anche i quadrivettori complementari ed i quadri tensori complementari lo fanno:

$V'^{\alpha} = \mathrm{P}^{\alpha}_{\beta}V^{\beta}$ $\qquad T'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \mathrm{P}^{\gamma}_{\delta}\mathrm{P}^{\varepsilon}_{\alpha}\mathrm{P}^{\xi}_{\beta}T^{\delta}_{\varepsilon\xi}$ (ricordando che le componenti di un tensore si ottengono moltiplicando quelle dei vettori)

Relatività Complementare alla prova dell'atomo

Mettiamo ora alla prova la (1.26c) con l'atomo. Sappiamo che l'energia totale nell'atomo di Bohr è (vedere oltre):

$$E_{n-Bohr} = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon_0^2h^2} \tag{1.51}$$

e la velocità dell'elettrone è:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \tag{1.52}$$

e la (1.26c) fornisce gli stessi valori della (1.51), sicuramente per velocità non relativistiche:

$$E_{RC} = m_ec^2[1 - \sqrt{1 - (\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0c})^2}\,] \tag{1.53}$$

e, tra breve, spiegheremo anche cosa è la $E_{n-Dirac}$:

$$E_{n-Dirac} = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}[1+\frac{\alpha^2Z^2}{n^2}(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4})] \quad (1.54)$$

Per velocità relativistiche (alto Z e basso n) i valori Bohr e Relatività Complementare-RC (Energie Cedute), come atteso, differiscono un po'; vediamo infatti che:

a)n=1 e Z=80:

$$E_{1-Bohr-80} = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon_0^2h^2} = -\frac{80^2(1{,}6)^4(10^{-19})^4 9{,}1\cdot10^{-31}}{8(8{,}85)^2(10^{-12})^2(6{,}625)^2(10^{-34})^2} = \boxed{-13{,}879\cdot10^{-15}J} \quad (1.55)$$

$$E_{1-RC-80} = -m_ec^2[1-\sqrt{1-(\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0c})^2}] = -81{,}7867\cdot10^{-15}[1-0{,}8127734] = \boxed{-15{,}313\cdot10^{-15}J} \quad (1.56)$$

$$E_{n-Dirac} = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}[1+\frac{\alpha^2Z^2}{n^2}(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4})]$$

che, con n=1 e j=l+1/2=0+1/2 (e α Costante di Struttura Fine) dà:

$$E_{1-Dirac-80} = -\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}[1+\alpha^2Z^2(1-\frac{3}{4})] = -\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) = E_{1-Bohr-80}\cdot(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) =$$

$$= E_{1-RC-80}\cdot(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) = -13{,}879\cdot10^{-15}(1+\frac{(\frac{1}{137})^2 80^2}{4}) = \boxed{-15{,}063\cdot10^{-15}J} \quad (1.57)$$

b)n=1 e Z=60:

$$E_{1-Bohr-60} = -7{,}872\cdot10^{-15}J$$

$$E_{1-RC-60} = \boxed{-8{,}220\cdot10^{-15}J}$$

$$E_{1-Dirac-60} = \boxed{-8{,}250\cdot10^{-15}J}$$

c)n=1 e Z=70:

$$E_{1-Bohr-70} = -10{,}626\cdot10^{-15}J$$

$$E_{1-RC-70} = \boxed{-11{,}424\cdot10^{-15}J}$$

$$E_{1-Dirac-70} = \boxed{-11{,}320\cdot10^{-15}J}$$

ma vediamo che c'è corrispondenza con $E_{n-Dirac}$.

$E_{n-Dirac}$ è l'energia di Bohr corretta con la Relatività ufficiale, ordinaria; sebbene ci sia anche una equazione esatta di Dirac/Sommerfeld, noi qui utilizziamo questa, che scaturisce dalla teoria delle perturbazioni, ma che fornisce valori soddisfacenti e che rispecchiano la realtà. La stessa può, ad esempio, essere trovata su vari libri di spettroscopia e di struttura della materia, oppure ancora al link: http://it.wikipedia.org/wiki/Struttura_fine ecc.

Per bassi valori di Z, nulla di relativistico e tutto come atteso:

d)n=1 e Z=10:

$$E_{1-Bohr-10} = -2{,}169\cdot10^{-16}J$$

$$E_{1-RC-10} = -2{,}172\cdot10^{-16}J$$

$$E_{1-Dirac-10} = -2{,}172\cdot10^{-16}J$$

e)n=1 e Z=20:

$$E_{1-Bohr-20} = -8{,}675 \cdot 10^{-16} J$$

$$E_{1-RC-20} = -8{,}721 \cdot 10^{-16} J$$

$$E_{1-Dirac-20} = -8{,}721 \cdot 10^{-16} J$$

f)n=1 e Z=30:

$$E_{1-Bohr-30} = -1{,}952 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-30} = -1{,}976 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-30} = -1{,}975 \cdot 10^{-15} J$$

g)n=1 e Z=40:

$$E_{1-Bohr-40} = -3{,}470 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-40} = -3{,}546 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-40} = -3{,}544 \cdot 10^{-15} J$$

ed ecco altri valori:

h)n=1 e Z=50:

$$E_{1-Bohr-50} = -5{,}422 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-50} = -5{,}614 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-50} = -5{,}602 \cdot 10^{-15} J$$

i)n=1 e Z=90:

$$E_{1-Bohr-90} = -17{,}566 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-90} = -20{,}015 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-90} = -19{,}461 \cdot 10^{-15} J$$

j)n=1 e Z=100:

$$E_{1-Bohr-100} = -21{,}687 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-100} = -25{,}736 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-100} = -24{,}575 \cdot 10^{-15} J$$

k)n=1 e Z=108:

$$E_{1-Bohr-108} = -25{,}295 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-108} = -31{,}275 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-108} = -29{,}216 \cdot 10^{-15} J$$

l)n=1 e Z=137:

$$E_{1-Bohr-137} = -40{,}704 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-RC-137} = -76{,}203 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-137} = -50{,}880 \cdot 10^{-15} J$$

Si vede, dai calcoli qui sopra, che l'equazione dell'energia della Relatività Complementare, a parte il caso Z=137 e con Z altissimi (e ciò deve far riflettere…), per il resto rispecchia abbastanza bene la $E_{n-Dirac}$ e, dunque, come preannunciato in passato, la sua espressione, essendo una forma esatta, non corretta, dimostra di funzionare bene per i sistemi che collassano perdendo energia, mentre la $E_{n-Dirac}$ lo fa in modo artificioso e correttivo, come a voler rimettere sui binari

un treno che tende continuamente a deragliare …… Inoltre, sebbene anche la (1.35), come la (1.31), per basse velocità dà l'energia cinetica di Newton se sviluppata in serie di Taylor, non fornisce però assolutamente valori accettabili, per n piccoli e Z elevati (casi relativistici), qualora venga usata come formula relativistica per il calcolo dei livelli energetici dell'atomo.
Studi futuri con eventuali Z più elevati di quelli odierni risulteranno molto interessanti….

APPENDICE:

L'atomo di Bohr:

In un atomo si eguaglia banalmente la forza di attrazione coulombiana con la forza centrifuga:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}, \qquad \text{(A)}$$

da cui:

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = m_e v^2$. Moltiplico ora per 1/2:

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2}m_e v^2 = E_k \qquad \text{(B)}$$

Ora, ricordiamo che, in generale, in fisica, si hanno, per l'energia, le seguenti espressioni:
$E = hf$ ed anche $E = m_e c^2$, da cui, eguagliando: $hf = m_e c^2$, da cui: $\frac{c}{f} = \frac{h}{m_e c}$, ma sappiamo che c/f altro non è che la lunghezza d'onda λ, da cui: $\lambda = \frac{h}{m_e c}$; ora, con De Broglie, estendiamo tale equazione ed attribuiamo anche all'elettrone orbitante una lunghezza d'onda:
$\lambda_e = \frac{h}{m_e v}$ (De Broglie). Ora, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\frac{1}{2}v$, ottenendo:

$$\lambda_e = \frac{\frac{1}{2}vh}{\frac{1}{2}m_e v^2} = \frac{hv}{2E_k}. \qquad \text{(C)}$$

Ora, la Condizione di Quantizzazione di Bohr, notoriamente, vuole la quantizzazione, appunto, del momento angolare:

$$m_e vr = n\frac{h}{2\pi}, \qquad \text{(D)}$$

dove n è il Numero Quantico Principale.
Tale condizione di Bohr altro non è che il voler imporre che la circonferenza dell'orbitale deve essere n volte la lunghezza d'onda di De Broglie; infatti, la (D) può essere anche letta così:

$$2\pi r = n\frac{h}{m_e v} = n\lambda_e. \qquad \text{(E)}$$

Tornando a noi, usando la (C) nella (E), si ottiene:

$$2\pi r = n\frac{hv}{2E_k} \qquad \text{(F)}$$

ma dalla (B) si evince che 2πr vale anche:

$$2\pi r = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{E_k}, \qquad \text{(G)}$$

da cui, eguagliando la (F) con la (G), si ha:

$$n\frac{hv}{2E_k}=\frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{E_k}$$, ossia:

$$v=\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \tag{H}$$

e, fin qui, abbiamo usato fisica assolutamente consolidata, vecchia di quasi un secolo!

Bohr valutò poi anche l'energia totale dell'elettrone (cinetica + potenziale):

$$E=E_k+V=\frac{1}{2}m_e v^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \tag{I}$$

infatti, per valutare V, considerando una v=0 a distanza infinita dal nucleo, segue che il lavoro necessario per portare l'elettrone da r ad infinito è:

$$V(r)=\int_{R=r}^{R=\infty}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R=r}^{R=\infty}\frac{Ze^2}{R^2}dR=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$$, da cui la (I), considerando bene i segni.

(la forza F è quella data da Coulomb, ovviamente)

Ora, grazie alla (B), la (I) diventa:

$$E=E_k+V=\frac{1}{2}m_e v^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}=-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}, \tag{J}$$

e, ricordando la (A): ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}=m_e\frac{v^2}{r}$) e la (D): ($m_e vr=n\frac{h}{2\pi}$), che vuole che: $v=n\frac{1}{m_e}\frac{h}{2\pi r}$, si ha:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}=m_e v^2=m_e\left(n\frac{1}{m_e}\frac{h}{2\pi r}\right)^2,$$

da cui: $r=\frac{n^2\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e Ze^2}$, (K)

e quest'ultima equazione, ossia la (K), inserita nella (J) (ossia, nella: $E=-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$), dà:

$E=-\frac{Z^2e^4m_e}{8n^2\varepsilon_0^2h^2}$, ed essendo, così, E dipendente da n, riscriviamo quest'ultima equazione così:

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon_0^2h^2} \tag{L}$$

Questa equazione, notissima in fisica, fornisce le energie corrispondenti ai vari livelli, nell'atomo.

Grazie per l'attenzione.
Leonardo RUBINO.