

Un percorso nel formalismo hamiltoniano - A path through the Hamiltonian formalism (in italian)

F. Talamucci - DIMAI, Dipartimento di Matematica e Informatica “Ulisse Dini”,
Università degli Studi di Firenze, Italy*

2010 Mathematics Subject Classification: 70-00, 70H05, 70F20

Keywords: Equazioni canoniche di Hamilton, sistemi hamiltoniani, integrale di Hilbert, invariante integrale di Poincaré–Cartan, trasformazioni canoniche, equazione di Hamilton–Jacobi (*Canonical equations of Hamilton, Hamiltonian systems, Hilbert’s integral, invariant integral of Poincaré–Cartan, canonical transformations, Hamilton–Jacobi equation*).

Sommario. Partendo dai classici argomenti delle equazioni canoniche di Hamilton (ottenute tramite la trasformazione di Legendre) e dei campi vettoriali hamiltoniani, il manuale intende proseguire il percorso sul formalismo hamiltoniano presentando l’approccio variazionale collegato all’integrale di Hilbert e i campi di Weierstrass. In questo modo si ottiene l’invariante integrale di Poincaré–Cartan che caratterizza i sistemi hamiltoniani e si ha accesso alla teoria delle trasformazioni canoniche e delle funzioni generatrici. Si conclude presentando l’equazione di Hamilton–Jacobi e accennando alla definizione di sistema integrabile.

Abstract. Starting from the classic arguments of Hamilton’s canonical equations (obtained through Legendre’s transformation) and Hamiltonian vector fields, the manual intends to continue the path on Hamiltonian formalism presenting the variational approach linked to the Hilbert’s integral and the Weierstrass fields. In this way the invariant integral of Poincaré–Cartan that characterizes Hamiltonian systems is obtained and one can access to the theory of canonical transformations and generating functions. We conclude by presenting the Hamilton-Jacobi equation and mentioning the definition of an integrable system.

*corresponding author e-mail: federico.talamucci@unifi.it

Indice

1	Le equazioni canoniche di Hamilton	3
1.1	La trasformazione duale di Legendre	3
1.2	La funzione Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton	5
1.3	Equazioni di Routh	11
1.4	Spazi simplettici e parentesi di Poisson	14
2	Sistemi Hamiltoniani	20
2.1	Campi vettoriali Hamiltoniani	20
2.2	Il teorema del trasporto	22
2.3	Invarianti integrali	24
2.4	La conservazione del volume in un sistema hamiltoniano	25
2.5	Il teorema di ricorrenza di Poincaré	25
2.6	Sistemi Hamiltoniani autonomi	26
3	L'approccio variazionale	27
3.1	Funzionali ed equazioni di Eulero	27
3.2	L'integrale di Hilbert	32
3.3	Campi di Weierstrass e caratterizzazione degli estremali	34
3.4	Il principio variazionale di Hamilton	37
3.5	L'invariante integrale di Poincaré–Cartan	38
3.6	L'invarianza dell'integrale di Poincaré–Cartan come caratterizzazione dei sistemi Hamiltoniani	41
3.7	Restrizione a stati simultanei e invariante universale	44
3.8	Il teorema di Lee Wha–Chung	46
3.9	Energia e tempo come variabili coniugate	47
3.10	Equazioni Whittaker, di Jacobi e Principio di Maupertuis	50
4	Trasformazioni canoniche	53
4.1	Definizione e trasformazioni di punto estese allo spazio delle fasi Hamiltoniano	53
4.2	Una condizione sufficiente di canonicità	56
4.3	Trasformazioni canoniche e invariante integrale di Poincaré–Cartan	57
4.4	Condizioni equivalenti di canonicità	60
4.5	Trasformazioni libere	62
4.6	Altri tipi di funzioni generatrici	64
4.7	Matrici simplettiche e matrici simplettiche generalizzate	67
4.8	Matrice Jacobiana di una trasformazione canonica	68
4.9	Trasformazioni canoniche e parentesi di Poisson	70
4.10	Il teorema di Noether nel formalismo hamiltoniano	71
5	Equazione di Hamilton–Jacobi, sistemi integrabili	73
5.1	L'equazione di Hamilton–Jacobi	73
5.2	La funzione principale di Hamilton	74
5.3	Canonicità del flusso hamiltoniano	75
5.4	Alcune considerazioni sull'equazione di Hamilton–Jacobi	77
5.5	Il metodo di separazione delle variabili	79
5.6	Il teorema di Liouville sull'integrabilità	84
6	Alcuni richiami	88
6.1	Promemoria di formule utili	88
6.2	Cambiamento di variabili in un sistema differenziale in forma normale	90
6.3	1–forme differenziali in \mathbb{R}^N	91

1 Le equazioni canoniche di Hamilton

Come si è visto, la specificazione della funzione lagrangiana \mathcal{L} in funzione delle variabili lagrangiane q_1, \dots, q_ℓ , delle velocità generalizzate $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell$ e del tempo t in caso di vincoli mobili determina univocamente il moto del sistema, una volta fissato lo stato iniziale del sistema (posizione iniziale e velocità iniziale).

W. R. Hamilton introdusse nel 1834 un modo equivalente di scrivere le equazioni di moto, utilizzando un nuovo insieme di variabili, dette **variabili hamiltoniane**. Il sistema di equazioni di Hamilton, dette anche **equazioni canoniche** è il punto di partenza del vastissimo studio teorico del moto degli anni successivi.

1.1 La trasformazione duale di Legendre

Alla base del formalismo di Hamilton sta una procedura di trasformazione di una funzione introdotta da Legendre (1752–1833), che ora viene discussa. Consideriamo una funzione F di ℓ variabili a valori reali:

$$F = F(u_1, \dots, u_\ell) = F(\mathbf{u})$$

con la proprietà che la matrice Hessiana $H_{\mathbf{u}}f$ di elementi $\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}$, $i, j = 1, \dots, \ell$ (vedi (6.3)) abbia determinante non nullo:

$$\det H_{\mathbf{u}}f \neq 0 \quad (1.1)$$

Definiamo un set di nuove variabili nel modo seguente:

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (1.2)$$

o, in forma compatta, $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}}F(\mathbf{u})$. Osserviamo che lo Jacobiano $J_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u})$ coincide con l'Hessiano $H_{\mathbf{u}}F(\mathbf{u})$, dunque il sistema (1.2) è invertibile, nel senso che le u_i , $i = 1, \dots, \ell$, possono essere espresse come funzioni delle v_1, \dots, v_ℓ :

$$u_i = u_i(v_1, \dots, v_\ell), \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Si definisce la funzione G nel modo seguente

$$G(v_1, \dots, v_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} u_i(v_1, \dots, v_\ell) v_i - F(u_1(v_1, \dots, v_\ell), \dots, u_\ell(v_1, \dots, v_\ell)) \quad (1.3)$$

ovvero $G(\mathbf{v}) = \mathbf{u}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - F(\mathbf{u}(\mathbf{v}))$ e la chiamiamo **trasformata di Legendre** della funzione F .

Calcoliamo la trasformata di Legendre della funzione G . Seguendo la regola (1.2), dobbiamo definire le variabili $y_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}$, $i = 1, \dots, \ell$ e ricavare le v_i in funzione delle y_1, \dots, y_ℓ .

D'altra parte, se deriviamo la (1.3) rispetto a v_i , abbiamo

$$y_i = \frac{\partial G}{\partial v_i} = \sum_{j=1}^{\ell} \left(v_j - \frac{\partial F}{\partial u_j} \right) \frac{\partial u_j}{\partial v_i} + u_i, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.4)$$

La (1.4) mostra che $y_i = u_i$, $i = 1, \dots, \ell$, in virtù della (1.2). Dunque:

$$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (1.5)$$

Osserviamo ora che la matrice Hessiana $H_{\mathbf{v}}G(\mathbf{v})$ ha determinante non nullo, dato che essa corrisponde alla matrice Jacobiana $J_{\mathbf{v}}\mathbf{u}(\mathbf{v})$, a sua volta coincidente con l'inversa dell'Hessiana $H_{\mathbf{u}}F(\mathbf{u})$, che per l'ipotesi (1.1) ha determinante non nullo. Pertanto, la funzione G è anch'essa trasformabile secondo Legendre. Dalle (1.5) si possono quindi ricavare le variabili v_i in funzione delle u_1, \dots, u_ℓ e calcolare la trasformata di G come $\mathbf{u}\mathbf{v}(\mathbf{u}) - G\mathbf{v}(\mathbf{u})$ che coincide con $F(\mathbf{u})$, per la (1.3).

Assumiamo ora che la funzione F contenga i parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, oltre alle variabili u_1, \dots, u_ℓ :

$$F = F(u_1, \dots, u_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

I parametri compariranno nella trasformazione (1.2) e, conseguentemente, nella trasformazione inversa (1.5):

$$u_i = u_i(v_1, \dots, v_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Dalla (1.3) si trova, per ogni $k = 1, \dots, m$:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_k}(v_1, \dots, v_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_k} v_i - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \quad (1.6)$$

Osserviamo che le variabili v_i non vengono derivate rispetto a α_k perché compaiono in G come variabili indipendenti. Ricordando la (1.2), si conclude che

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}, \quad k = 1, \dots, m \quad (1.7)$$

Riassumiamo il procedimento descritto nel seguente teorema, dovuto a **Donkin** (Philosoph. Trans., 1854)

Teorema 1.1 *Sia $F(u_1, \dots, u_\ell)$ una funzione a valori reali con derivate seconde continue che verifica l'ipotesi (1.1) e si consideri la trasformazione di coordinate (1.2) generata dalla funzione F . Allora esiste una trasformazione, inversa della (1.2), che è generata da una funzione $G(v_1, \dots, v_\ell)$ e che è definita dalla (1.5). Le due funzioni generatrici sono legate dalle formule*

$$G(v_1, \dots, v_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} u_i(v_1, \dots, v_\ell) v_i - F(u_1(v_1, \dots, v_\ell), \dots, u_\ell(v_1, \dots, v_\ell)),$$

$$F(u_1, \dots, u_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} u_i v_i(u_1, \dots, u_\ell) - G(v_1(u_1, \dots, u_\ell), \dots, v_\ell(u_1, \dots, u_\ell)).$$

Se la funzione F contiene i parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, allora anche G contiene i medesimi parametri e vale

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_k}(v_1, \dots, v_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}(u_1, \dots, u_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (1.8)$$

Nella (1.8) le variabili u_i , $i = 1, \dots, \ell$ vanno intese come funzioni delle v_1, \dots, v_ℓ (o viceversa).

Osserviamo infine che due funzioni $F(u_1, \dots, u_\ell)$ e $G(v_1, \dots, v_\ell)$, l'una trasformata di Legendre dell'altra e con matrice $\partial^2 F / \partial u_i \partial u_j$, $i, j = 1, \dots, \ell$ definita positiva verificano

$$\sum_{i=1}^{\ell} u_i v_i \leq F(u_1, \dots, u_\ell) + G(v_1, \dots, v_\ell) \quad (1.9)$$

che viene detta **disuguaglianza di Young**.

La (1.9) si dimostra verificando che la funzione $\sum_{i=1}^{\ell} u_i v_i \leq F(u_1, \dots, u_\ell)$, per ogni ℓ -upla fissata (v_1, \dots, v_ℓ) ,

ha un massimo per $\frac{\partial F}{\partial u_i} = v_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Esercizio 1.1 *Nel caso di una funzione ad una sola variabile $f(u)$, la trasformazione di Legendre è interpretabile mediante una costruzione geometrica. Considerare dapprima il caso $f'' > 0$ (vedi (1.1)).*

Definire la funzione $r(u, v) = uv - f(u)$. Per ogni valore v fissato $r(u, v)$ rappresenta al variare di u lo scarto (con segno) fra la retta passante per l'origine di pendenza v e la funzione f .

Mostrare che la massima distanza (con segno) fra la retta e la funzione si realizza per il valore u^ che verifica $u^* = u(v)$, con $u(v)$ determinata invertendo $v = f'(u)$.*

Enunciare il risultato analogo nel caso $f'' < 0$.

Esercizio 1.2 *Sempre nel caso della funzione ad una variabile $f(u)$, considerare la retta tangente al grafico di f per un certo valore $u = u^*$. Determinare il legame fra l'intercetta della retta e il valore della trasformata $g(v^*)$, con $v^* = f'(u^*)$.*

1.2 La funzione Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton

I sistemi vincolati di tipo olonomo che abbiamo considerato nel capitolo I soggetti a forze conservative di potenziale $U(q_1, \dots, q_\ell, t)$ o forze con potenziale generalizzato $U_G(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t)$ sono detti **sistemi naturali**.

Per questi sistemi la funzione Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t)$ è una funzione quadratica rispetto alle velocità generalizzate $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell$.

Osserviamo che per un sistema naturale di Lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$ la matrice Hessiana della funzione \mathcal{L} rispetto alle \dot{q}_i corrisponde a

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = a_{i,j}(q_1, \dots, q_\ell), \quad (1.10)$$

dove $(a_{i,j})$ è una matrice definita positiva. In base poi a quanto visto nel Capitolo 7 della I parte, la presenza di un potenziale generalizzato $\mathcal{L} = T + U^{(G)}$ non altera la struttura (1.10).

Siamo dunque nella possibilità di applicare il Teorema (1.1), considerando come funzione F la Lagrangiana \mathcal{L} e come set di variabili u_1, \dots, u_ℓ da trasformare le velocità generalizzate $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell$.

Oltre ai sistemi naturali, possiamo considerare una funzione di tipo generale

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t)$$

che verifica l'ipotesi di hessiano rispetto alle velocità generalizzate non nullo:

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0. \quad (1.11)$$

In tal modo, è possibile determinare la trasformata di Legendre H della funzione \mathcal{L} .

Il nuovo insieme di variabili, che indichiamo con p_i e che corrisponde alle v_i del teorema (1.1), è definito da (vedi la (1.2))

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.12)$$

Le variabili p_i , $i = 1, \dots, \ell$, sono dette **momenti cinetici coniugati alle variabili q_i , o momenti generalizzati**.

Le (1.12) possono essere risolte rispetto alle \dot{q}_i in modo da ottenere

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t), \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.13)$$

E' importante sottolineare che le q_1, \dots, q_ℓ e il tempo t giocano il ruolo di parametri nella trasformazione dalle variabili $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell$ alle variabili p_1, \dots, p_ℓ .

Il formalismo Hamiltoniano utilizza dunque al posto delle variabili Lagrangiane $(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t)$ le **variabili Hamiltoniane** $(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t)$.

La funzione trasformata di \mathcal{L} , definita dalla (1.3), è detta **funzione Hamiltoniana**:

$$H(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q}_i(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t) - L(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t), \dots, \dot{q}_\ell(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t), t) \quad (1.14)$$

ovvero

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t) \quad (1.15)$$

dove $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\ell)$.

Nel caso dei sistemi naturali, si ha

$$p_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_{i,j} \dot{q}_j + b_i + \alpha_i, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (1.16)$$

con α_i dovuta alla presenza di potenziali generalizzati. L'inversione delle (1.16) comporta

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{\ell} \eta_{i,j} p_j + \zeta_i \quad (1.17)$$

dove le funzioni $\eta_{i,j}$, ζ_i , $i, j = 1, \dots, \ell$, dipendono dalle q_1, \dots, q_ℓ e da t .

Ogni funzione delle variabili lagrangiane $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, dopo la sostituzione (1.13) si converte in una funzione delle variabili Hamiltoniane

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t) \quad (1.18)$$

che chiameremo **funzione associata** alla funzione \mathcal{F} .

La **disuguaglianza di Young** (1.9) applicata a \mathcal{L} e H (ricordiamo che la matrice Hessiana di \mathcal{L} è definita positiva) si scrive

$$\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} \leq \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (1.19)$$

Riassumiamo nel seguente schema i principali caratteri della trasformazione dal formalismo Lagrangiano a quello Hamiltoniano (e viceversa):

(a)	<i>funzione di partenza:</i>	Lagrangiana L	Hamiltoniana H
(b)	<i>variabili della trasformazione:</i>	$\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell$	p_1, \dots, p_ℓ
(c)	<i>altre variabili della funzione:</i>	q_1, \dots, q_ℓ, t	q_1, \dots, q_ℓ, t
(d)	<i>cambiamento di coordinate:</i>	$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, i = 1, \dots, \ell$	$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, i = 1, \dots, \ell$
(e)	<i>funzione trasformata:</i>	$H = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$	$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q}_i - H$
(f)	<i>variabili della funzione trasformata:</i>	$H = H(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t)$	$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t)$

Lo schema è completamente simmetrico e può essere letto da destra verso sinistra: se partiamo dalla funzione H , otteniamo la funzione trasformata \mathcal{L} . Il punto (d) mette in evidenza che le nuove variabili sono le derivate parziali della funzione che genera la trasformazione rispetto alla vecchie variabili, e viceversa. Le funzioni trasformate (punto (e)) vanno considerate in dipendenza delle variabili che compaiono nel punto (f).

A questo punto è semplice ricavare le equazioni di moto scritte nel formalismo Hamiltoniano, usando cioè la funzione H e le variabili $p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell$ e t .

Le ℓ equazioni di moto di Lagrange, in virtù della (1.12), assumono la forma

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (1.20)$$

D'altra parte, essendo le variabili q_i da considerare come parametri nella trasformazione di L , il teorema (1.1) permette di scrivere (vedi (1.8))

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.21)$$

I legami invece fra le \dot{q}_i , $i = 1, \dots, \ell$ e la variabili Hamiltoniane sono forniti direttamente dalla definizione delle variabili nella trasformazione inversa da H a \mathcal{L} (vedi (d) della tabella precedente):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.22)$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto le 2ℓ equazioni (1.20) e (1.22)

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & i = 1, \dots, \ell \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = 1, \dots, \ell \end{cases} \quad (1.23)$$

che sono dette **equazioni di moto di Hamilton** ovvero **equazioni canoniche**.

Utilizzando i vettori $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\ell)$ e $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, possiamo scrivere le (1.23) nella forma vettoriale

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \\ \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \end{cases} \quad (1.24)$$

E' importante ribadire come lo stato del sistema può essere descritto in maniera equivalente come un insieme di valori delle variabili Lagrangiane $(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t)$, la cui evoluzione è retta dalle ℓ equazioni del secondo ordine di Lagrange, oppure come un insieme di valori delle variabili Hamiltoniane $(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t)$, e in tal caso l'evoluzione del sistema viene descritto dalle 2ℓ equazioni del primo ordine di Hamilton (1.23).

I due formalismi sono del tutto equivalenti, una volta che si esprima le variabili Lagrangiane in funzione di quelle Hamiltoniane e viceversa.

Esercizio 1.3 Determinare la funzione Hamiltoniana di un sistema scleronomo e olonomo ℓ -dimensionale, di energia cinetica $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot A \dot{\mathbf{q}}$, con $A = (a_{i,j})$, $i, j = 1, \dots, \ell$, e di energia potenziale $V(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^\ell$.

Esercizio 1.4 Data la Lagrangiana \mathcal{L} con trasformata H , determinare l'Hamiltoniana corrispondente alla Lagrangiana $c\mathcal{L}$, con c costante non nulla.

Esercizio 1.5 Data una Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ con corrispondente Hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, determinare l'Hamiltoniana H_1 corrispondente alla Lagrangiana $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t)$. Considerare anche il caso particolare in cui $F = F(\mathbf{q})$.

Esercizio 1.6 Considerare la trasformazione di coordinate $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t)$ invertibile, con trasformazione inversa $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$.

Verificare che

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} \dot{\mathbf{Q}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = J_{\mathbf{q}\mathbf{Q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \quad (1.25)$$

dove $J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}}$ è la matrice Jacobiana di elementi $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$, $i, j = 1, \dots, \ell$, mentre $J_{\mathbf{q}\mathbf{Q}} = (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^{-1}$ è la matrice Jacobiana della trasformazione inversa.

Assegnata poi la funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, si chiami $\tilde{\mathcal{L}}$ la Lagrangiana espressa nelle nuove variabili:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t). \quad (1.26)$$

Definendo $\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}$, $\mathbf{P} = \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}} \tilde{\mathcal{L}}$, si verifichi che

$$\mathbf{P} = (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = (J_{\mathbf{q}\mathbf{Q}})^T \mathbf{P} \quad (1.27)$$

con $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_\ell)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\ell)$, per concludere che

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} + (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}, \quad (1.28)$$

e che le trasformate di Legendre H, K delle due funzioni sono legate dalle relazioni

$$K = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathcal{L}} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} - \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = H - \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad H = K - \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}. \quad (1.29)$$

Verificare infine che la trasformazione nel piano delle fasi $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$, $\mathbf{P} = (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p}$, con $J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}}$ calcolato nelle variabili \mathbf{q}, t , è invertibile.

Discutiamo il caso in cui la trasformazione riguardi anche il tempo. Applichiamo un cambiamento invertibile di variabili del tipo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t), \quad \tau = \tau(\mathbf{q}, t) \quad (1.30)$$

con trasformazione inversa

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \tau), \quad t = t(\mathbf{Q}, \tau). \quad (1.31)$$

Stiamo dunque supponendo che la matrice (vedi (6.19))

$$J_{(\mathbf{q}, t)}(\mathbf{Q}, \tau) = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{q}\mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \\ (\nabla_{\mathbf{q}\tau})^T & \frac{\partial \tau}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

sia invertibile.

La formula (1.25) si generalizza in

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \tau) = \left[J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} \mathbf{Q}' + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} \right] \frac{d\tau}{dt}, \quad \mathbf{Q}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \left[J_{\mathbf{q}\mathbf{Q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right] \frac{dt}{d\tau}, \quad (1.33)$$

dove il punto $\dot{}$ indica la derivata $\frac{d}{dt}$, mentre l'apice $'$ la derivata $\frac{d}{d\tau}$ e

$$\dot{\tau}(t) = \frac{d\tau}{dt}(\mathbf{q}(t), t) = \nabla_{\mathbf{q}\tau} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) + \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad t'(\tau) = \frac{dt}{d\tau}(\mathbf{Q}(\tau), \tau) = \nabla_{\mathbf{Q}t} \cdot \mathbf{Q}'(\tau) + \frac{\partial t}{\partial \tau} = \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1}. \quad (1.34)$$

La Lagrangiana nelle nuove variabili è definita come

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \tau) &= \mathcal{L} \left(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \tau), \left[J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} \mathbf{Q}' + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} \right] \frac{d\tau}{dt}, t(\mathbf{Q}, \tau) \right) \frac{dt}{d\tau} = \\ &= \mathcal{L} \left(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \tau), \frac{J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} \mathbf{Q}' + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau}}{\nabla_{\mathbf{Q}t} \cdot \mathbf{Q}' + \frac{\partial t}{\partial \tau}}, t(\mathbf{Q}, \tau) \right) \left(\nabla_{\mathbf{Q}t} \cdot \mathbf{Q}' + \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = \hat{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \tau) \left(\nabla_{\mathbf{Q}t} \cdot \mathbf{Q}' + \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

essendo $\hat{\mathcal{L}}$ la Lagrangiana \mathcal{L} calcolata nelle nuove variabili.

Si sarà notato che la nuova Lagrangiana non è semplicemente quella vecchia calcolata nelle nuove variabili, ma occorre moltiplicare per il fattore $dt/d\tau$: il motivo risulterà chiaro dopo aver definito l'approccio variazionale allo studio del moto.

Vediamo come si modifica la relazione (1.27), dove stavolta le variabili cinetiche sono $\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}$ e $\nabla_{\mathbf{Q}'}\tilde{\mathcal{L}}$.

Notando che (vedi (1.34)) $\nabla_{\mathbf{Q}'} \left(\frac{dt}{d\tau} \right) = \nabla_{\mathbf{Q}t}$ e ricordando la (6.8), si ha:

$$\mathbf{P} = \nabla_{\mathbf{Q}'} \left(\hat{\mathcal{L}} \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{dt}{d\tau} (J_{\mathbf{Q}'\dot{\mathbf{q}}})^T \mathbf{p} + \mathcal{L} \nabla_{\mathbf{Q}t}. \quad (1.36)$$

Da (1.33) e (1.34), utilizzando (6.13) e (6.16), si trova:

$$J_{\mathbf{Q}'} \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\tau}{dt} J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} + \frac{dt}{d\tau} \dot{\mathbf{q}} \otimes \nabla_{\mathbf{Q}'} \left(\frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{d\tau}{dt} [J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} \otimes \nabla_{\mathbf{Q}'} t].$$

Sostituendo in (1.36) e sfruttando la proprietà (6.15) e le (6.24), otteniamo la formula che generalizza (1.27):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [(J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T - \nabla_{\mathbf{Q}'} t \otimes \dot{\mathbf{q}}] \mathbf{p} + \mathcal{L} \nabla_{\mathbf{Q}'} t = (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}) \nabla_{\mathbf{Q}'} t = \\ &= (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p} - H \nabla_{\mathbf{Q}'} t = (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \left[\mathbf{p} + H \frac{\partial t}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{q}} \tau \right], \end{aligned} \quad (1.37)$$

essendo $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}$ la trasformata di Legendre di \mathcal{L} .

La (1.37) estende la trasformazione (1.30) allo spazio delle fasi esteso $\Pi : (\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$: complessivamente, le (1.30), (1.37) definiscono una trasformazione da Π in $\Pi_1 : (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau)$.

La trasformazione inversa è definita dalle (1.31) e da

$$\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau) = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T \mathbf{P} - K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau) \nabla_{\mathbf{q}} \tau = (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T \left[\mathbf{P} + K \frac{\partial \tau}{\partial t} \nabla_{\mathbf{Q}'} t \right], \quad (1.38)$$

essendo K la trasformata di Legendre di $\tilde{\mathcal{L}}$: $K = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}' - \tilde{\mathcal{L}}$.

Esercizio 1.7 *Supponendo (1.30), invertibile, discutere le condizioni di invertibilità della trasformazione estesa e Π .*

Stabiliamo ora il legame fra le due Hamiltoniane H e K . Eseguendo il prodotto fra \mathbf{P} e \mathbf{Q}' , la cui espressione è in (1.33), si trova:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}' = \frac{dt}{d\tau} \left[(J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p} \cdot (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q}) \dot{\mathbf{q}} + (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right] - H \nabla_{\mathbf{Q}'} t \cdot \mathbf{Q}'.$$

Osservando che (vedi (1.34)) $\nabla_{\mathbf{Q}'} t \cdot \mathbf{Q}' = \frac{dt}{d\tau} - \frac{\partial t}{\partial \tau}$ e che (vedi (1.34), (6.24), (6.15))

$$J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = -\frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau}, \quad (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p} \cdot (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q}) \dot{\mathbf{q}} = \left[I_{\ell \times \ell} - \left(\nabla_{\mathbf{q}} \tau \otimes \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} \right) \right] \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p} \left(\frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau},$$

si trova la generalizzazione di (1.28):

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}' = (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H) \frac{dt}{d\tau} - \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} - H \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = (\mathbf{p}, -H) \cdot \left(\frac{d}{d\tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (\mathbf{q}, t) \quad (1.39)$$

(il prodotto scalare nell'ultimo passaggio è in $\mathbb{R}^{\ell+1}$) e di (1.29) (ricordiamo che $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(dt/d\tau)$):

$$K = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}' - \tilde{\mathcal{L}} = H \frac{\partial t}{\partial \tau} - \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} = -(\mathbf{p}, -H) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{q}, t). \quad (1.40)$$

Osservazione 1.1 *Un modo alternativo, e sicuramente più rapido, di ottenere la (1.40) consiste nello scrivere la (1.37) come*

$$\begin{aligned} (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T \mathbf{P} &= (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p} - H (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T \nabla_{\mathbf{Q}'} t = \left[I_{\ell \times \ell} - \nabla_{\mathbf{q}} \tau \otimes \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} \right] \mathbf{p} + H \frac{\partial t}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{q}} \tau = \\ &= \mathbf{p} - \left[\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} - H \frac{\partial t}{\partial \tau} \right] \nabla_{\mathbf{q}} \tau. \end{aligned}$$

Per confronto con la (1.38), si deduce che $-K = \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} - H \frac{\partial t}{\partial \tau}$, ovvero la (1.40).

Torniamo ora alla struttura del sistema di equazioni di Hamilton e troviamone una ulteriore possibile scrittura.

Se introduciamo la matrice $2\ell \times 2\ell$

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità di ordine ℓ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla di ordine ℓ , il sistema (1.23) assume la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t) \quad (1.42)$$

con $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2\ell}$.

Esercizio 1.8 Verificare le seguenti proprietà della matrice \mathcal{I} :

$$\mathcal{I}^T = -\mathcal{I}, \quad \mathcal{I}^2 = -\mathbf{I}, \quad \mathcal{I}^{-1} = -\mathcal{I}. \quad (1.43)$$

Convienne anche osservare che l'effetto del prodotto della matrice \mathcal{I} per un vettore \mathbf{y} di dimensione 2ℓ è quello di invertire i due blocchi di lunghezza ℓ delle componenti, il secondo dei quali cambiato di segno:

$$\mathcal{I}\mathbf{y} = (-y_{\ell+1}, \dots, -y_{2\ell}, y_1, \dots, y_\ell) \quad (1.44)$$

Ricordiamo la definizione dell'operatore **divergenza** che agisce su un vettore $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N$:

$$\text{div } \mathbf{w} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial w_k}{\partial x_k}$$

dove $w_k = w_k(x_1, \dots, x_N)$, $k = 1, \dots, N$ sono le componenti del vettore \mathbf{w} e $(x_1, \dots, x_N) = \mathbf{x}$.

La divergenza del vettore $\mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t)$ vale:

$$\text{div } (\mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t)) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0$$

Dunque, un sistema Hamiltoniano ha la proprietà, che verrà sviluppata in seguito, di avere divergenza nulla:

$$\text{div } \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.45)$$

Le prossime considerazioni portano a collegare la funzione Hamiltoniana al concetto di energia del sistema. Osserviamo che la formula (1.8) applicata pensando al parametro α_k come il tempo t (se appare esplicitamente), porta alla relazione

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.46)$$

Pertanto, se la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, anche la corrispondente Hamiltoniana ha la medesima proprietà. D'altra parte, la funzione H verifica la seguente importante formula:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.47)$$

La dimostrazione di (1.47) segue subito da

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

in virtù delle (1.23).

Una prima conseguenza importante della (1.47) è la

Proposizione 1.1 Se la funzione Lagrangiana del sistema è indipendente esplicitamente dal tempo, allora la corrispondente Hamiltoniana H rimane costante durante il moto:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(\mathbf{p}(0), \mathbf{q}(0)), \quad (1.48)$$

con $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\ell)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$.

La relazione (1.48) viene detta **integrale generalizzato dell'energia**.

In effetti, la (1.47) non è altro che la (6.12), Parte I, ovvero il **teorema dell'energia generalizzata**, nella formulazione Hamiltoniana: è evidente che (vedi (6.16), Parte I), utilizzando la notazione (1.18)

$$H = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \widetilde{q}_k} \widetilde{q}_k - \widetilde{\mathcal{L}}.$$

Avendo in mente la struttura $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$ della lagrangiana, possiamo scrivere

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \widetilde{q}_i - \widetilde{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_2}{\partial \widetilde{q}_i} + \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_1}{\partial \widetilde{q}_i} \right) \widetilde{q}_i - (\widetilde{\mathcal{L}}_2 + \widetilde{\mathcal{L}}_1 + \mathcal{L}_0).$$

Per quanto visto nei Paragrafi 6.1 e 7.1, Parte I, troviamo finalmente il legame fra Hamiltoniana e le funzioni specifiche del sistema assegnato:

$$H = \widetilde{\mathcal{L}}_2 - \mathcal{L}_0 = \widetilde{T}_2 - T_0 - U_0^{(G)}. \quad (1.49)$$

In particolare, per un sistema scleronomo l'Hamiltoniana è

$$H = \widetilde{T} - U_0^{(G)}. \quad (1.50)$$

Dato che $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$ se e solo se $\partial H / \partial t = 0$, gli integrali primi di Jacobi (7.10), (7.14), Parte I, equivalgono alla conservazione dell'Hamiltoniana H durante il moto, in conseguenza della (1.47).

Se infine il sistema è soggetto a forze posizionali con potenziale U , le formule precedenti vanno lette con $U_0^{(G)} = U$, $U_1^{(G)} \equiv 0$ e si recuperano le formule (6.13), (6.14) della Parte I.

1.3 Equazioni di Routh

In alcuni casi può essere conveniente utilizzare un formalismo misto fra variabili lagrangiane e variabili hamiltoniane. Supponiamo di partire da un sistema olonomo con Lagrangiana $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t)$ e determiniamo i momenti generalizzati solo di un sottoinsieme delle variabili lagrangiane:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \lambda + 1, \dots, \ell \quad (1.51)$$

con $1 \leq \lambda < \ell$.

Stiamo dunque supponendo che il minore della matrice Hessiana rappresentato da $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$, $i, j = \lambda + 1, \dots, \ell$, abbia determinante non nullo. Per un sistema naturale, la condizione richiesta è sicuramente verificata, essendo la matrice completa definita positiva.

Applicando il teorema (1.1), si ottiene la trasformazione inversa della (1.51):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i}, \quad i = \lambda + 1, \dots, \ell \quad (1.52)$$

dove \mathcal{R} è la **funzione di Routh** definita da

$$\mathcal{R}(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\lambda, p_{\lambda+1}, \dots, p_\ell, t) = \sum_{j=\lambda+1}^{\ell} p_j \widetilde{q}_j - \widetilde{\mathcal{L}}. \quad (1.53)$$

Il simbolo $\widetilde{}$ indica il fatto che le \dot{q}_i , $i = \lambda + 1, \dots, \ell$, sono espresse mediante le **variabili di Routh**

$$(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\lambda, p_{\lambda+1}, \dots, p_\ell, t)$$

tramite le (1.52).

Le variabili non coinvolte nella trasformazione (1.51) sono da considerarsi come parametri e, in virtù della (1.8), si ha

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, \lambda \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (1.56)$$

Le (1.54) e (1.55) permettono di riscrivere le equazioni di Lagrange per le variabili q_1, \dots, q_λ nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, \lambda. \quad (1.57)$$

D'altra parte, per quanto riguarda le variabili $q_{\lambda+1}, \dots, q_\ell$ le equazioni di Lagrange si scrivono, in virtù della (1.54)

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i}, \quad i = \lambda + 1, \dots, \ell.$$

Queste ultime equazioni, unitamente alle (1.52) e alle (1.57), danno luogo alle **equazioni di Routh** del moto:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} = 0, & i = 1, \dots, \lambda \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i}, & i = \lambda + 1, \dots, \ell. \end{cases} \quad (1.58)$$

L'insieme è costituito da λ equazioni del secondo ordine del tipo lagrangiano e da $2(\ell - \lambda)$ equazioni del primo ordine di tipo hamiltoniano. La funzione $-\mathcal{R}$ gioca il ruolo di Lagrangiana nelle prime λ equazioni, dato che

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, \lambda,$$

mentre nelle restanti equazioni \mathcal{R} gioca il ruolo di funzione Hamiltoniana.

Una coordinata q_i , $1 \leq i \leq \ell$, viene detta **ciclica** se non compare esplicitamente nella funzione Lagrangiana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (1.59)$$

In base alle (1.21) e (1.54), si trova

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i}.$$

Dunque, la derivata parziale delle funzioni Lagrangiana, Hamiltoniana e di Routh rispetto ad una variabile si può annullare solo simultaneamente per le tre funzioni. Le variabili cicliche possono pertanto essere definite equivalentemente come variabili che non compaiono in una delle tre funzioni.

La prima conseguenza di (1.59) è l'invarianza del momento generalizzato corrispondente a q_i :

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \quad (1.60)$$

Supponiamo ora di avere $\nu = \ell - \lambda$ coordinate cicliche q_i , $i = \lambda + 1, \dots, \ell$. Allora $p_i = c_i$, con c_i costante, $i = \lambda + 1, \dots, \ell$. L'Hamiltoniana H assume dunque la struttura

$$H = H(q_1, \dots, q_\lambda, p_1, \dots, p_\lambda, c_{\lambda+1}, \dots, c_\ell, t). \quad (1.61)$$

Le equazioni canoniche per le coordinate non cicliche si scrivono

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, \lambda. \quad (1.62)$$

La risoluzione del problema di moto consiste nell'integrare le 2λ equazioni appena scritte ottenendo

$$\begin{cases} q_i = q_i(t, c_{\lambda+1}, \dots, c_\ell, \kappa_1, \dots, \kappa_\lambda, \chi_1, \dots, \chi_\lambda, t), \\ p_i = p_i(t, c_{\lambda+1}, \dots, c_\ell, \kappa_1, \dots, \kappa_\lambda, \chi_1, \dots, \chi_\lambda, t) \end{cases} \quad (1.63)$$

dove $\kappa_i, \chi_i, i = 1, \dots, \lambda$ sono costanti di integrazione, e sostituire quanto trovato nell'espressione (1.61). In questo modo le variabili cicliche $q_i, i = \lambda + 1, \dots, \ell$, possono essere determinate dalle equazioni

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial c_i}, \quad i = \lambda + 1, \dots, \ell.$$

Il problema dunque si riduce ad integrare il sistema di tipo hamiltoniano (1.62) di ordine 2λ , inferiore di 2ν unità rispetto al sistema iniziale (1.23).

Possiamo d'altra parte scrivere le equazioni di moto nel caso di variabili cicliche nella struttura lagrangiana, utilizzando il formalismo di Routh. Infatti, sostituendo le costanti c_i ai momenti $p_i, i = \lambda + 1, \dots, \ell$, nella funzione di Routh (1.53), si ha

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(q_1, \dots, q_\lambda, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\lambda, c_{\lambda+1}, \dots, c_\ell, t)$$

e le equazioni corrispondenti alle variabili non cicliche $q_i, i = 1, \dots, \lambda$ date dalle prime λ equazioni in (1.58) possono essere integrate autonomamente. Le variabili cicliche sono invece ricavabili dalle restanti equazioni in (1.58).

Le coordinate cicliche sono dette anche **ignorabili** o **cinosteniche**, proprio perché nella risoluzione del sistema (1.62) (oppure le equazioni lagrangiane in (1.58)) viene ignorata l'esistenza delle coordinate cicliche e considerata la presenza dei corrispondenti momenti generalizzati come parametri costanti.

Il termine ciclico si riferisce al fatto che in alcuni problemi di meccanica la variabile che non compare esplicitamente è un angolo che descrive il moto in percorsi del tipo cicli.

Esercizio 1.9 *Esaminare il moto di un punto materiale soggetto ad una forza di tipo centrale e conservativa. Rilevare la presenza di variabili cicliche e risolvere il moto utilizzando l'approccio hamiltoniano (1.62) e quello di Routh.*

Esercizio 1.10 *Considerare il moto di un punto materiale vincolato a muoversi in modo liscio su una superficie di rotazione attorno ad un asse verticale e soggetto alla forza peso e ad una forza elastica di richiamo verso l'asse di rotazione. Scrivere le equazioni di moto di Routh.*

Sia dato un sistema Hamiltoniano come in (1.23). Una funzione $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ viene detta **integrale primo del moto** rispetto al sistema Hamiltoniano considerato se per qualunque soluzione $(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell)$ del sistema la funzione f rimane costante:

$$f(p_1(t), \dots, p_\ell(t), q_1(t), \dots, q_\ell(t), t) = c \quad (1.64)$$

La costante c varia in corrispondenza del moto considerato. Esempi di integrali primi già incontrati sono:

(i) l'Hamiltoniana H nel caso $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ (vedi (1.48)),

(ii) il momento generalizzato p_i associato ad una coordinata ciclica q_i .

Se le funzioni f_1, \dots, f_r sono integrali primi del moto, ovviamente anche una loro combinazione $F(f_1, \dots, f_r)$ ha la medesima proprietà.

Gli integrali primi f_1, \dots, f_r si dicono **indipendenti** se i vettori gradienti $\nabla_{\mathbf{x}} f_j, j = 1, \dots, r$, dove $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2\ell}$, sono linearmente indipendenti, ovvero se la matrice Jacobiana $J_{\mathbf{x}} \mathbf{f}$, con $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_r)$, ha rango massimo.

L'importanza dell'individuazione degli integrali primi risulta chiara dalla seguente osservazione. Se si è in grado di riconoscere 2ℓ integrali primi fra loro indipendenti, allora dalle equazioni $f_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = c_j, j = 1, \dots, 2\ell$ possiamo ricavare le equazioni di moto in dipendenza delle costanti: $q_i = q_i(t, c_1, \dots, c_{2\ell}), p_i =$

$p_i(t, c_1, \dots, c_{2\ell})$, $i = 1, \dots, \ell$. Dunque, individuare 2ℓ integrali primi del moto comporta la conoscenza del moto.

Se sono noti $r \leq 2\ell$ integrali primi, abbiamo un'idea parziale dei moti del sistema. Maggiore è r , più precisa è l'informazione sul moto.

La ricerca di integrali primi è stato oggetto di studio di **Jacobi** e **Poisson** e ci baseremo sul loro metodo per esporre l'argomento.

1.4 Spazi simplettici e parentesi di Poisson

Uno spazio vettoriale V di dimensione pari 2ℓ si dice **spazio simplettico** se in esso è definita una forma bilineare \langle, \rangle non degenera antisimmetrica. (notare che una forma antisimmetrica in uno spazio di dimensione dispari è necessariamente degenera).

La matrice rappresentativa A della forma rispetto ad una base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2\ell})$ di V è una matrice antisimmetrica

$2\ell \times 2\ell$ i cui elementi sono $a_{i,j} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, 2\ell$. In componenti, dunque, se $\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^{2\ell} \lambda_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^{2\ell} \mu_i \mathbf{e}_i$, si ha

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \sum_{i=1}^{2\ell} a_{i,j} \lambda_i \mu_j = \lambda^T A \mu, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2\ell}), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_{2\ell}). \quad (1.65)$$

Se $A = \mathcal{I}$ definita in (1.41), allora il prodotto si dice **prodotto simplettico standard**:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \mu_{\ell+i} + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_{\ell+i} \mu_i = \lambda^T \mathcal{I} \mu. \quad (1.66)$$

Esercizio 1.11 Scrivere i prodotti (1.65), (1.66) per $\ell = 1$, ovvero in \mathbb{R}^2 , e stabilire che relazione intercorre con il prodotto vettoriale $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$.

Procedendo in maniera analoga alla ortonormalizzazione di Gram-Schmidt per il prodotto scalare, si può dimostrare che ogni spazio simplettico ammette una base (detta **base simplettica**) rispetto alla quale il prodotto simplettico ha la forma standard (1.66).

Il contesto in cui vogliamo parlare di prodotto simplettico è quello dello spazio $\mathbb{R}^{2\ell}$ nelle variabili (\mathbf{p}, \mathbf{q}) (ovvero le variabili dello spazio delle fasi Hamiltoniano). In questo modo, se

$$\mathbf{v}_1 = (p_1^{(1)}, \dots, p_\ell^{(1)}, q_1^{(1)}, \dots, q_\ell^{(1)}) = (\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{q}^{(1)}) \quad \mathbf{v}_2 = (p_1^{(2)}, \dots, p_\ell^{(2)}, q_1^{(2)}, \dots, q_\ell^{(2)}) = (\mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{q}^{(2)})$$

il prodotto simplettico standard (1.66) si scrive

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = (\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{q}^{(1)})^T \mathcal{I} (\mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{q}^{(2)}) = \sum_{i=1}^{\ell} (q_i^{(1)} p_i^{(2)} - p_i^{(1)} q_i^{(2)}) \quad (1.67)$$

e una base simplettica $(\mathbf{e}_{p_1}, \dots, \mathbf{e}_{p_\ell}, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \dots, \mathbf{e}_{q_\ell})$ verifica

$$\langle \mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{p_j} \rangle = \langle \mathbf{e}_{q_i}, \mathbf{e}_{q_j} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{e}_{q_i}, \mathbf{e}_{p_j} \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, \ell.$$

(δ_{ij} simboli di Kronecher).

Esercizio 1.12 Verificare la seguente interpretazione geometrica: il prodotto simplettico standard (1.67) corrisponde alla somma delle ℓ aree (orientate) delle proiezioni del parallelogramma di lati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sui piani coordinati $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1), \dots, (\mathbf{p}_\ell, \mathbf{q}_\ell)$.

Vediamo ora come il prodotto simplettico intervenga formalmente nella ricerca di integrali primi del moto.

Derivando totalmente rispetto al tempo la (1.64) e tenendo conto delle (1.23), si trova

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (1.68)$$

L'espressione fra parentesi viene indicata mediante le **parentesi di Poisson**, che, per due funzioni

$$\varphi(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t), \quad \psi(p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell, t)$$

sono definite nel seguente modo:

$$\left(\varphi, \psi \right) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \quad (1.69)$$

Si osservi che in notazione vettoriale le parentesi di Poisson si scrivono

$$\left(\varphi, \psi \right) = \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \psi - \nabla_{\mathbf{p}} \varphi \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi. \quad (1.70)$$

Ricordando la definizione di \mathcal{I} (1.41) e le proprietà (1.43) possiamo indicare le parentesi di Poisson mediante il prodotto simplettico dei vettori gradienti (vedi (1.66)):

$$\left(\varphi, \psi \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \varphi \cdot \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} \psi = -\mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} \varphi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi. \quad (1.71)$$

Osserviamo che, per una qualunque funzione $f = f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, vale

$$\left(p_i, f \right) = -\frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \left(q_i, f \right) = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (1.72)$$

In particolare, valgono le seguenti relazioni per le variabili canoniche:

$$\left(p_i, p_j \right) = 0, \quad \left(q_i, q_j \right) = 0, \quad \left(q_i, p_j \right) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, \ell \quad (1.73)$$

con $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$, 0 altrimenti.

Le parentesi (1.73) vengono dette **parentesi di Poisson fondamentali**.

Notiamo anche che le (1.72) calcolate per $f = H$ permettono di scrivere le equazioni di moto (1.23) nella forma

$$\dot{p}_i = \left(p_i, H \right), \quad \dot{q}_i = \left(q_i, H \right) \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.74)$$

Esercizio 1.13 Verificare che la condizione (1.86) è soddisfatta nei casi segnalati di integrali primi immediati, ovvero H autonoma e momento generalizzato p_i associato a variabile ciclica.

Le seguenti proprietà, valide per una qualunque terna di funzioni $\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ e $\chi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, si riferiscono al carattere **lineare** e **antisimmetrico** del prodotto simplettico, dunque delle parentesi di Poisson:

$$\left(\varphi + \psi, \chi \right) = \left(\varphi, \chi \right) + \left(\psi, \chi \right), \quad (1.75)$$

$$\left(c\varphi, \psi \right) = c \left(\varphi, \psi \right), \quad c \text{ costante}, \quad (1.76)$$

$$\left(\varphi, \psi \right) = - \left(\psi, \varphi \right), \quad (1.77)$$

Anche la seguente identità risulta immediatamente dalla definizione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi, \psi \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \quad (1.78)$$

Dimostriamo ora la

Proprietà 1.1 (identità di Poisson o identità di Jacobi). Si ha:

$$\left(\left(\varphi, \psi \right), \chi \right) + \left(\left(\psi, \chi \right), \varphi \right) + \left(\left(\chi, \varphi \right), \psi \right) = 0, \quad (1.79)$$

Dim. La dimostrazione risulta più agevole se inquadriamo la parentesi di Poisson nel contesto degli operatori differenziali lineari. Si ripercorrono quindi alcuni argomenti già presentati nel Paragrafo 3.10, I Parte.

Siano \mathcal{X} e \mathcal{Y} due operatori differenziali del primo ordine applicati alla funzione $f(x_1, \dots, x_N)$:

$$\mathcal{X}f = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f = \sum_{i=1}^N X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \mathcal{Y}f = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f = \sum_{i=1}^N Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.80)$$

dove $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$ sono funzioni di $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

L'operatore $\mathcal{X} = \mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ (come anche \mathcal{Y}) viene detto **derivata di Lie** associata al campo \mathbf{X} della funzione f e indicato anche come $L_{\mathbf{X}}$. Se si pensa alle linee integrali del campo \mathbf{X} , ovvero le soluzioni del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, la derivata di Lie di f corrisponde alla derivata della funzione lungo le soluzioni. In particolare, f è un integrale primo del moto per il flusso del campo \mathbf{X} se e solo se $L_{\mathbf{X}}f = 0$.

Più in generale, se $f = f(\mathbf{x}, t)$, allora $\frac{df}{dt} = L_{\mathbf{X}}f + \frac{\partial f}{\partial t}$.

Osserviamo anche che, se \mathbf{X} di dimensione pari è un gradiente симпlettico, ovvero $\mathbf{X} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H$ per un'opportuna funzione H , allora $L_{\mathbf{X}}f = \{f, H\}$.

Definiamo il **commutatore** \mathcal{Z} dei due operatori differenziali \mathcal{X} e \mathcal{Y} del primo ordine nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}f &= \mathcal{X}(\mathcal{Y}f) - \mathcal{Y}(\mathcal{X}f) = \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f) = \\ &= \sum_{k=1}^N X_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^N Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - \sum_{k=1}^N Y_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^N X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Si verifica facilmente (vedi Proposizione 3.14, I parte) che il commutatore è un operatore del primo ordine che corrisponde a

$$\mathcal{Z}f = ((\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y})\mathbf{X} - (\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{X})\mathbf{Y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f = \sum_{i=1}^N (\mathcal{X}(Y_i) - \mathcal{Y}(X_i)) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.82)$$

dove $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$ è la matrice Jacobiana $N \times N$ i cui elementi sono $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, N$, analogamente $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y}$.

La proprietà (1.82) in termini della derivata di Lie si scrive come

$$[L_{\mathbf{X}}, L_{\mathbf{Y}}] = L_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \quad (1.83)$$

dove $[L_{\mathbf{X}}, L_{\mathbf{Y}}]$ è il commutatore $L_{\mathbf{X}}L_{\mathbf{Y}} - L_{\mathbf{Y}}L_{\mathbf{X}}$, mentre $L_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}$ è la derivata di Lie associata al vettore commutatore $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ di componenti $Z_i = L_{\mathbf{X}}(Y_i) - L_{\mathbf{Y}}(X_i)$.

La parentesi di Poisson $\left(\varphi, f \right)$ può essere vista come il risultato dell'operatore lineare Φ del tipo (1.80) che agisce su f nel seguente modo (vedi (1.71)):

$$\Phi f = \left(\varphi, f \right) = -\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\varphi \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \quad (1.84)$$

Si ha dunque, rispetto alla (1.80), $N = 2\ell$ e

$$(X_1, \dots, X_N) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial q_{\ell}}, -\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial p_{\ell}} \right) = (\nabla_{\mathbf{q}}\varphi, -\nabla_{\mathbf{p}}\varphi).$$

Siano ora Φ e Ψ gli operatori associati alle parentesi di Poisson $\left(\varphi, f \right)$ e $\left(\psi, f \right)$, rispettivamente, secondo la formula (1.84).

Esaminiamo il commutatore $\mathcal{Z} = \Psi\Phi - \Phi\Psi$. Tenendo presente la (1.82), si vede che

$$(\Psi\Phi - \Phi\Psi)f = [(\mathbf{J}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(\nabla_{\mathbf{q}}\psi, -\nabla_{\mathbf{p}}\psi))(\nabla_{\mathbf{q}}\varphi, -\nabla_{\mathbf{p}}\varphi) - (\mathbf{J}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(\nabla_{\mathbf{q}}\varphi, -\nabla_{\mathbf{p}}\varphi))(\nabla_{\mathbf{q}}\psi, -\nabla_{\mathbf{p}}\psi)] \cdot \nabla_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}f,$$

ovvero il commutatore contiene solo le derivate seconde delle funzioni φ e ψ combinate linearmente con le derivate prime delle funzioni medesime. La funzione f , invece, appare solo mediante le sue derivate prime.

Esercizio 1.14 *Determinare $(\Psi\Phi - \Phi\Psi)$ in termini delle matrici Hessiane parziali $H_{\mathbf{p}\mathbf{p}} = (\partial^2/\partial p_i\partial p_j)$, $H_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (\partial^2/\partial p_i\partial q_j)$, $H_{\mathbf{q}\mathbf{q}} = (\partial^2/\partial q_i\partial q_j)$ delle funzioni φ e ψ .*

D'altra parte, si ha, usando anche la (1.77):

$$(\Psi\Phi - \Phi\Psi)f = \left(\psi, \left(\varphi, f \right) \right) - \left(\varphi, \left(\psi, f \right) \right) = \left(\left(\psi, f \right), \varphi \right) + \left(\left(f, \varphi \right), \psi \right). \quad (1.85)$$

Scegliendo ora come f la funzione χ , si osserva, in base alla formula appena scritta, che il secondo e il terzo termine della (1.79) corrispondono a $(\Psi\Phi - \Phi\Psi)\chi$. Come già osservato, il commutatore non contiene derivate parziali del secondo ordine della funzione χ . D'altra parte, neanche il primo termine della (1.79) $\{\{\varphi, \psi\}, \chi\}$ contiene derivate del secondo ordine di χ . Utilizzando lo stesso ragionamento a rotazione per le funzioni φ e ψ in luogo di χ , si conclude che tutti i termini della (1.79) si elidono, non potendo essere presenti derivate parziali del secondo ordine. \square

Esercizio 1.15 *Stabilire analogie e differenze fra il Teorema appena dimostrato e la Proprietà 3.6, I Parte.*

L'utilizzo delle parentesi di Poisson è estremamente naturale nell'ambito degli integrali primi. In effetti, ricordando la (1.68), possiamo caratterizzare l'integrale primo f per il moto corrispondente all'Hamiltoniana H mediante la condizione

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(f, H \right) = 0. \quad (1.86)$$

La seguente proprietà, conosciuta come **teorema di Jacobi – Poisson**, stabilisce come individuare un terzo integrale primo, a partire da due integrali primi noti.

Teorema 1.2 *Se f e g sono integrali primi del moto di Hamiltoniana H , allora anche $\left(f, g \right)$ è un integrale primo per le medesime equazioni di moto.*

Dim. la proprietà (1.78), considerando che per ipotesi vale l'identità (1.86) per f e g , assume la forma (si tenga conto anche dell'antisimmetria (1.77)):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(f, g \right) = - \left(\left(f, H \right), g \right) - \left(\left(f, g \right), H \right) = \left(\left(H, f \right), g \right) + \left(\left(g, H \right), f \right).$$

Le condizione (1.86) è dunque verificata per la funzione $\left(f, g \right)$, dato che

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(f, g \right) + \left(\left(f, g \right), H \right) = \left(\left(H, f \right), g \right) + \left(\left(g, H \right), f \right) + \left(\left(f, g \right), H \right) = 0$$

in virtù della (1.79). \square

Il teorema appena dimostrato permette di ottenere ulteriormente un quarto integrale primo del moto, considerando, ad esempio, la parentesi di Poisson tra f e $\left(f, g \right)$. Il procedimento può quindi essere applicato più volte in modo da individuare un insieme di integrali primi. Bisogna tuttavia osservare che gli integrali primi ottenuti potrebbero essere linearmente dipendenti da quelli già trovati.

Esercizio 1.16 *Considerare un punto materiale di massa m vincolato sulla superficie laterale di un cilindro circolare retto con asse di simmetria disposto verticalmente. Il punto è soggetto alla forza peso e ad una forza elastica di richiamo verso un punto O dell'asse del cilindro. Scrivere l'Hamiltoniana del sistema e determinare due integrali primi del moto.*

Una seconda conseguenza della (1.79) è la seguente proprietà.

Proposizione 1.2 Se Φ e Ψ son gli operatori associati alle parentesi di Poisson (φ, f) e (ψ, f) , rispettivamente, come in (1.84), allora $\Phi\Psi f = \Psi\Phi f$ per ogni funzione f se e solo se $(\varphi, \psi) = c$, con c costante.

Dim. Dalla (1.85) e dalla (1.79) si ha

$$(\Psi\Phi - \Phi\Psi)f = - \left((\varphi, \psi), f \right) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}} (\varphi, \psi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f. \quad (1.87)$$

Dunque, se (φ, ψ) è costante allora $\Psi\Phi f = \Phi\Psi f$ per ogni funzione f . Viceversa, se $\Psi\Phi f = \Phi\Psi f$ per ogni f , allora il vettore $\nabla_{\mathbf{x}} (\varphi, \psi)$ deve essere necessariamente nullo, per il fatto che il prodotto simplettico standard è non degenere. \square

Concludiamo sottolineando il fatto, messo in evidenza dalla (1.87), che l'operatore $\Psi\Phi - \Phi\Psi$ è la parentesi di Poisson eseguita con la funzione $-(\varphi, \psi)$. Ricordando la (1.83), possiamo equivalentemente scrivere la (1.87) come

$$[L_{\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\varphi}, L_{\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\psi}] = L_{[\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\varphi, \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\psi]} = L_{-\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}(\varphi, \psi)}. \quad (1.88)$$

Dunque, il commutatore di due derivate di Lie associate a due vettori che sono campi Hamiltoniani è una derivata di Lie associata ancora ad un campo Hamiltoniano di Hamiltoniana $-\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}} (\varphi, \psi)$.

Due funzioni f e g si dicono **in involuzione** se $(f, g) = 0$.

E' di immediata verifica che due funzioni f e g sono in involuzione nei seguenti casi:

(i) g dipende funzionalmente da f , cioè

$$g = \mathcal{F}(f), \quad (1.89)$$

(ii) f non contiene le variabili coniugate alle variabili presenti in g , ad esempio

$$f = f(p_1, \dots, p_\lambda, q_{\mu+1}, \dots, q_\ell), \quad g = g(p_1, \dots, p_\mu, q_{\lambda+1}, \dots, q_\ell), \quad 1 \leq \lambda, \nu \leq \ell,$$

Inoltre, sfruttando la (1.79) si vede subito che se f e g sono in involuzione con una terza funzione h :

$$(f, h) = 0, \quad (g, h) = 0,$$

allora $(f, g) = 0$ è involutoria con h : $((f, g), h) = 0$.

Per due funzioni φ, ψ in involuzione, infine, è applicabile la Proposizione 3.1, ovvero gli operatori associati commutano: $\Psi\Phi = \Phi\Psi$.

Concludiamo con la seguente considerazione.

Dato un campo vettoriale in \mathbb{R}^N $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, chiamiamo **flusso** del sistema di equazioni differenziali associato al vettore \mathbf{X} l'applicazione $\mathcal{F}_{\mathbf{X}}^t$ che associa al punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ la soluzione $\mathbf{x}(t)$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, calcolata al tempo t .

Consideriamo un secondo campo vettoriale $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ e il flusso $\mathcal{F}_{\mathbf{Y}}^t$ ad esso associato. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo in cui sono definite le soluzioni di entrambi i sistemi. Vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione:

Proposizione 1.3 I flussi $\mathcal{F}_{\mathbf{X}}^t, \mathcal{F}_{\mathbf{Y}}^t$ commutano, ovvero

$$\mathcal{F}_{\mathbf{X}}^s \circ \mathcal{F}_{\mathbf{Y}}^t = \mathcal{F}_{\mathbf{Y}}^t \circ \mathcal{F}_{\mathbf{X}}^s, \quad s, t \in I$$

se e solo se $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$, ovvero se commutano i campi vettoriali.

Per campi $\mathbf{X} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\varphi, \mathbf{Y} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\psi$ Hamiltoniani, si ha (vedi (1.88))

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\varphi, \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\psi] = -\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}} (\varphi, \psi).$$

Dato che i sistemi associati ai campi sono Hamiltoniani, si parla di **flusso Hamiltoniano** e la Proposizione 1.2 si enuncia nel modo seguente:

Proposizione 1.4 *Due flussi Hamiltoniani commutano se e solo se la parentesi di Poisson delle corrispondenti Hamiltoniane è costante. In particolare, due Hamiltoniane in involuzione generano flussi commutanti.*

Vediamo infine come si trasformano le parentesi di Poisson nel caso di una trasformazione di variabili.

Se $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ è una trasformazione invertibile di variabili, con matrice Jacobiana $J_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ e trasformazione inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$, ad ogni funzione $f = f(\mathbf{x})$ può essere associata la sua espressione nelle nuove variabili $F(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$.

Ricordando la formula (6.5), ovvero $\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) = (J_{\mathbf{x}\mathbf{y}})^T \nabla_{\mathbf{y}}F(\mathbf{y})$ si ottiene la seguente regola di trasformazione della parentesi di Poisson fra due funzioni $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in U \subseteq \mathcal{R}^{2\ell}$, se si passa a nuove variabili:

$$\left(f, g \right)_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}f \cdot \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}}g = (J_{\mathbf{x}\mathbf{y}})^T \nabla_{\mathbf{y}}F(\mathbf{y}) \cdot \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}\mathbf{y}})^T \nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{y}}F(\mathbf{y}) \cdot J_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}\mathbf{y}})^T \nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{y}) \quad (1.90)$$

con $F(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$, $G(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$.

Possiamo già osservare, anche se l'argomento verrà sviluppato nell'ambito delle trasformazioni canoniche che, nel caso in cui la matrice $J_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}\mathbf{y}})^T$ coincida con \mathcal{I} , allora

$$\left(f, g \right)_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{y}}F(\mathbf{y}) \cdot \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{y}) = \left(F, G \right)_{\mathbf{y}}.$$

2 Sistemi Hamiltoniani

2.1 Campi vettoriali Hamiltoniani

Consideriamo una funzione vettoriale $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ definita per $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2\ell}) \in U$ aperto di $\mathbb{R}^{2\ell}$, $t \geq 0$ e a valori in $\mathbb{R}^{2\ell}$ e di classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$. Chiameremo la funzione $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = (X_1(x_1, \dots, x_{2\ell}, t), \dots, X_{2\ell}(x_1, \dots, x_{2\ell}, t))$ **campo vettoriale**, eventualmente identificabile con il corrispondente operatore differenziale lineare $\mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{b}f\mathbf{x}}$. Le **curve integrali** del campo sono le soluzioni $\mathbf{x}(t) \in U$ del sistema differenziale

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.1)$$

Un campo vettoriale \mathbf{X} di dimensione $N = 2\ell$ si dice **hamiltoniano** se ha la struttura di gradiente simplettico, ovvero se esiste una funzione $H(\mathbf{x}, t)$ a valori reali per cui

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

dove \mathcal{I} è la matrice definita in (1.41). La funzione H si dice **Hamiltoniana** associata al campo \mathbf{X} . In tal caso, il sistema di equazioni differenziali associato (2.1) si dice **hamiltoniano**.

Ricordando quanto osservato in (1.42), le equazioni di moto scritte come in (1.23) hanno la struttura di sistema di equazioni differenziali hamiltoniano e l'Hamiltoniana associata è la funzione $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$.

Ci chiediamo ora come caratterizzare i campi vettoriali hamiltoniani, ovvero vogliamo trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché un campo \mathbf{X} sia il gradiente simplettico di una funzione H . Ovviamente, l'Hamiltoniana H sarà determinata a meno di una funzione del tempo $f(t)$, che possiamo supporre nulla. Premettiamo la seguente definizione.

Una matrice quadrata A di ordine pari 2ℓ si dice **Hamiltoniana** se la matrice $\mathcal{I}A$ è simmetrica, ovvero se verifica

$$(\mathcal{I}A)^T = \mathcal{I}A. \quad (2.3)$$

Si verifica immediatamente (vedi (1.43)) che la condizione (2.3) equivale ad una delle seguenti condizioni:

1. $A^T\mathcal{I} + \mathcal{I}A = \mathbf{0}$, con $\mathbf{0}$ matrice nulla di ordine 2ℓ ,
2. definiti \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e \mathbf{d} i blocchi di ordine ℓ che formano la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

\mathbf{b} e \mathbf{c} sono matrici simmetriche, $\mathbf{a}^T + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{0}$ matrice nulla di ordine ℓ .

La seconda condizione mostra che una matrice 2×2 è hamiltoniana se e solo se ha traccia nulla.

Esercizio 2.1 *Verificare che le matrici hamiltoniane di ordine fissato 2ℓ formano un gruppo rispetto all'operazione di addizione fra matrici. Ulteriormente, l'insieme delle matrici hamiltoniane può essere visto come sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici di ordine 2ℓ . Mostrare che la dimensione del sottospazio è $2\ell^2 + \ell$.*

Possiamo ora enunciare il seguente criterio.

Proposizione 2.1 *Un campo vettoriale $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ di dimensione 2ℓ definito per $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{2\ell}$, con \mathcal{D} aperto semplicemente connesso, è hamiltoniano se e solo se la matrice Jacobiana $2\ell \times 2\ell$ $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ è una matrice hamiltoniana.*

Dim. Supponiamo che il campo abbia la struttura (2.2). Allora, tenendo conto di (6.3) e (6.16), si trova

$$J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = J_{\mathbf{x}}(\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, t)) = \mathcal{I}H_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, t)$$

dove $H_{\mathbf{x}}H$ è la matrice hessiana simmetrica di elementi $\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, 2\ell$. Moltiplicando a sinistra per la matrice \mathcal{I} l'identità appena trovata, si vede che $\mathcal{I}J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = -H_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, t)$ che è ancora una matrice simmetrica, dunque la matrice jacobiana $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$ è Hamiltoniana.

Per mostrare il viceversa, dobbiamo ricordare che un campo \mathbf{Y} definito su un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^{2\ell}$ è il gradiente di una funzione scalare K se e solo se la matrice Jacobiana $J_{\mathbf{x}}\mathbf{Y}$ è simmetrica:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, 2\ell.$$

Se per ipotesi la matrice Jacobiana $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ è Hamiltoniana, allora la matrice $\mathcal{I}J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} = J_{\mathbf{x}}(\mathcal{I}\mathbf{X})$ è simmetrica (verificare l'inversione). Dunque, esiste una funzione $K(\mathbf{x}, t)$ tale che $J_{\mathbf{x}}K(\mathbf{x}, t) = \mathcal{I}\mathbf{X}$, ovvero $\mathbf{X} = \mathcal{I}J_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, t)$ con $H = -K$. Si conclude che il campo \mathbf{X} ha struttura Hamiltoniana. \square

Accenniamo brevemente alla questione dell'equilibrio dei sistemi hamiltoniani.

Per un sistema **autonomo** di equazioni differenziali in forma normale $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ le **soluzioni di equilibrio** sono le soluzioni costanti $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Per i sistemi hamiltoniani **autonomi**, ovvero del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

le soluzioni di equilibrio corrispondono ai punti in cui si annulla il gradiente della funzione H :

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0 \iff \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 2\ell. \quad (2.6)$$

I punti di equilibrio verificano necessariamente $\dot{q}_i = 0$, $i = 1, \dots, \ell$ (corrispondenti a $\nabla_{\mathbf{p}}H = 0$).

Nel caso di un sistema naturale conservativo in cui H è la trasformata di Legendre di una Lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$, la (2.6) corrisponde alla nota condizione di stazionarietà del potenziale U . Infatti, dalla (1.21) si ha

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}=0} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}=0} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = 0.$$

Sempre nel medesimo caso, nei punti di equilibrio deve essere $p_i = 0$, $i = 1, \dots, \ell$.

Esercizio 2.2 *Determinare le condizioni che caratterizzano l'equilibrio per un sistema autonomo con forze che ammettono un potenziale generalizzato $\mathcal{U}^{(g)}$.*

Possiamo affermare che se \mathbf{x}_0 è un **minimo isolato** per la funzione $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, allora l'equilibrio è di natura **stabile**. Infatti, dalla (1.48) si ha che H è costante lungo le soluzioni, dunque H può essere scelta come **funzione di Liapunov** in un intorno del punto \mathbf{x}_0 e può essere applicato il criterio omonimo.

Esercizio 2.3 *Trattare la questione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile nel contesto del formalismo hamiltoniano.*

Nello studio del moto mediante il formalismo Hamiltoniano è di notevole interesse rappresentare le soluzioni nello spazio euclideo Γ di dimensione 2ℓ delle variabili $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell)$. In ogni istante t la posizione del punto $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ in Γ corrisponde allo stato istantaneo del sistema in esame. Secondo una denominazione di **Gibbs**, lo spazio Γ delle variabili canoniche prende il nome di **spazio delle fasi** del sistema.

Talvolta risulterà conveniente considerare lo spazio $\Gamma \times \{t \geq 0\}$ di dimensione $2\ell + 1$ in cui consideriamo anche la variabile tempo in aggiunta alle variabili canoniche. Si parla in tal caso di **spazio delle fasi esteso**. Nel formalismo Lagrangiano, possiamo definire come **spazio delle fasi** lo spazio in cui variano le 2ℓ coordinate $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. In termini di geometria differenziale, le coordinate parametrizzano rispettivamente la varietà delle configurazioni M e lo spazio tangente $\mathcal{T}_{\mathbf{q}}(M)$ in ciascun punto \mathbf{q} della sottovarietà. Dunque, le 2ℓ coordinate parametrizzano il **fibrato tangente**

$$\mathcal{T}(M) = \bigcup_{\mathbf{q} \in M} \{\mathbf{q}\} \times \mathcal{T}_{\mathbf{q}}(M).$$

Le traiettorie del moto sono pertanto interpretabili come curve sulla varietà $\mathcal{T}(M)$, nel senso che ad ogni istante t corrisponde una posizione $\mathbf{q}(t)$ e una velocità $\dot{\mathbf{q}}(t)$ appartenente al relativo spazio tangente $\mathcal{T}_{\mathbf{q}}$.

Nell'ottica del formalismo Hamiltoniano, invece, lo stato del sistema è determinato dalla conoscenza delle 2ℓ coordinate (\mathbf{p}, \mathbf{q}) . Limitandoci al caso dei sistemi scleronomi, abbiamo (vedi (1.16))

$$p_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_{i,j} \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Dunque, i momenti cinetici p_i operano linearmente sulle componenti \dot{q}_j del vettore tangente e possono essere associate alle componenti di un covettore dello spazio cotangente $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{q}}(M)$. Le coordinate Hamiltoniane individuano pertanto, durante il moto, una curva nel **fibrato cotangente** $\tilde{\mathcal{T}}$ alla varietà delle configurazioni. Lo spazio delle fasi Hamiltoniano coincide quindi con il fibrato cotangente alla varietà M ed è lo spazio che si associa in modo naturale al moto del sistema nel formalismo Hamiltoniano.

2.2 Il teorema del trasporto

Al fine di mettere in evidenza alcune proprietà dei sistemi di tipo Hamiltoniano, si premette la dimostrazione di un importante teorema che in generale descrive la variazione di una quantità lungo le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali.

Consideriamo un sistema differenziale di N equazioni del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N). \quad (2.7)$$

associato alla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^N$.

Come abbiamo avuto già modo di segnalare, l'applicazione $\mathcal{F}_t : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ che associa al punto \mathbf{x}_0 il punto $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ corrispondente alla soluzione di (2.7) calcolata al tempo t (ovviamente se esiste ed è unica la soluzione fino al tempo considerato) prende il nome di **flusso del sistema di equazioni differenziali** (2.7):

$$\mathcal{F}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \quad (2.8)$$

In particolare, per un sistema Hamiltoniano si parla di **flusso Hamiltoniano**, che definisce una trasformazione di una parte dello spazio delle fasi (\mathbf{p}, \mathbf{q}) in sé.

La matrice Jacobiana della trasformazione (2.8) è $J_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$. Ovviamente $\det J_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \det I = 1$, con I matrice identità $N \times N$. Per la continuità della funzione $J_{\mathbf{x}_0}$ rispetto a t , il determinante risulterà positivo in un determinato intervallo, dunque la trasformazione indotta dal flusso \mathcal{F}_t è invertibile in un opportuno intervallo temporale.

Se consideriamo una varietà $\mathcal{V}_0^{(r)}$ di dimensione r descritta da un insieme di posizioni iniziali \mathbf{x}_0 , essa verrà trasformata dal flusso nella varietà $\mathcal{V}_t^{(r)} = \mathcal{F}(\mathcal{V}_0^{(r)})$, luogo delle posizioni $\mathbf{x}(t)$ che i punti \mathbf{x}_0 hanno raggiunto all'istante t . Dato che $\det J_{\mathbf{x}_0} \neq 0$, la varietà al tempo t risulta omeomorfa alla varietà medesima per $t = 0$. Possiamo pensare ai punti della varietà come un insieme di particelle che all'istante iniziale occupano lo spazio $\mathcal{V}_0^{(r)}$ e, muovendosi a velocità $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, vanno ad occupare lo spazio $\mathcal{V}_t^{(r)}$ ad ogni istante t . Indichiamo queste varietà con il termine di **varietà sostanziali** (o **materiali**).

Supponiamo ora che la varietà \mathcal{V}_0 abbia dimensione N . Indichiamo con \mathcal{V}_t la sua configurazione all'istante t , ottenuta seguendo il flusso dei punti di \mathcal{V}_0 indotto dal sistema (2.7). Per una funzione $f = f(\mathbf{x}, t)$, possiamo considerare l'integrale

$$\mathcal{J}(t) = \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.9)$$

calcolato sulla varietà di dimensione r all'istante t .

La variazione rispetto al tempo di \mathcal{J} è regolata dal seguente

Teorema 2.1 (del trasporto). *Sia \mathcal{V}_t una varietà sostanziale di dimensione N per il flusso indotto da (2.7) e sia $f(\mathbf{x}, t)$ una funzione derivabile con continuità. Allora*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) = \int_{\mathcal{V}_t} \left(\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \right) dV = \int_{\mathcal{V}_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) \right) dV \quad (2.10)$$

dove dV indica l'integrazione estesa al volume N -dimensionale individuato dalla varietà \mathcal{V}_t .

Dim. Consideriamo per ogni istante t la trasformazione di variabili (2.8) con matrice Jacobiana (6.1). L'integrale (2.9) si trasforma nel modo seguente:

$$\mathcal{J}(t) = \int_{\mathcal{V}_0} f(\mathbf{x}, t) D(t) dV_0$$

dove $D = \det J_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0)$ e dV_0 indica l'elemento di volume della varietà al tempo $t = 0$. Derivando, si trova

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \int_{\mathcal{V}_0} \frac{d}{dt} (f(\mathbf{x}, t) D(t)) dV_0 \quad (2.11)$$

Volendo calcolare la derivata di $D(t)$, occorre ricordare la formula di derivazione del determinante di una matrice $A(t)$ di ordine N (che si verifica facilmente per induzione sulla dimensione della matrice)

$$\frac{d}{dt} \det A = \sum_{i,j=1}^N \frac{da_{i,j}}{dt} C_{i,j} \quad (2.12)$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento di indici i, j della matrice A e $C_{i,j}$ è il cofattore associato a $a_{i,j}$, ovvero

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

con $M_{i,j}$ minore associato a $a_{i,j}$, cioè determinante della matrice di ordine $N - 1$ ottenuta eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna.

La formula (2.12) può essere scritta come

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A = & \det \begin{pmatrix} \frac{da_{1,1}}{dt} & \frac{da_{1,2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1,N}}{dt} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ \frac{da_{2,1}}{dt} & \frac{da_{2,2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{2,N}}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix} + \cdots \\ & \cdots + \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{N,1}}{dt} & \frac{da_{N,2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{N,N}}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Applicando la formula alla matrice J e ricordando che $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}$, otteniamo, invertendo l'ordine di derivazione fra t e le variabili x_i , $i = 1, \dots, N$:

$$\frac{d}{dt} D(t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial X_1}{\partial x_{2,0}} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_{N,0}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{2,0}} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial x_{N,0}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial x_N}{\partial x_{2,0}} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial x_{N,0}} \end{pmatrix} + \cdots + \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{2,0}} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x_{N,0}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{2,0}} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial x_{N,0}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial X_N}{\partial x_{2,0}} & \cdots & \frac{\partial X_N}{\partial x_{N,0}} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

dove (X_1, \dots, X_N) sono le componenti di \mathbf{X} .

Dalle relazioni

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_{k,0}} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial X_h}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_{k,0}} = \sum_{j=1}^N J_{j,k} \frac{\partial X_h}{\partial x_j}, \quad h, k = 1, \dots, N$$

segue che ciascuno delle N matrici (diciamo J_1, \dots, J_N) che compaiono in (2.13) è combinazione lineare di N matrici, delle quali $N - 1$ hanno determinante nullo, dato che hanno due righe uguali, e l'unica non singolare ha determinante pari a $D(t)$. Dato che il coefficiente della combinazione lineare per J_h corrispondente a quest'ultima matrice è $\frac{\partial X_h}{\partial x_h}$, si ha

$$\frac{d}{dt}D(t) = \sum_{h=1}^N \frac{\partial X_h}{\partial x_h} D = D \operatorname{div} \mathbf{X}. \quad (2.14)$$

Tornando alla (2.11), si perviene dunque, in virtù della (2.14) alla formula

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \int_{\mathcal{V}_0} \left(D \frac{df}{dt} + f D \operatorname{div} \mathbf{X} \right) dV_0.$$

Tornando sul dominio di integrazione \mathcal{V}_t , che richiede nell'integrando il determinante della trasformazione inversa, ovvero $\det J^{-1} = D^{-1}$, si trova

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \int_{\mathcal{V}_t} \left(D \frac{df}{dt} + f D \operatorname{div} \mathbf{X} \right) D^{-1} dV = \int_{\mathcal{V}_t} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{X} \right) dV.$$

Le note formule

$$\operatorname{div} (f\mathbf{X}) = f \operatorname{div} \mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \mathbf{X}, \quad \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

concludono infine la dimostrazione della (2.10). \square

2.3 Invarianti integrali

L'integrale

$$\mathcal{J}(t) = \int_{\mathcal{V}_t^{(r)}} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.15)$$

calcolato sulla varietà di dimensione r all'istante t si dice **integrale invariante del sistema differenziale** (2.7) se $\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(0)$ per ogni istante t , comunque sia scelto il dominio di integrazione $\mathcal{V}_0^{(r)}$ e, di conseguenza, comunque sia scelto $\mathcal{V}_t^{(r)}$.

Se la varietà sostanziale ha dimensione N , possiamo caratterizzare gli invarianti integrali mediante il teorema trasporto. Infatti, si ha la seguente

Proposizione 2.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathcal{J}(t)$ sia un invariante integrale del sistema differenziale (2.7) per ogni dominio \mathcal{V} N -dimensionale dello spazio delle \mathbf{x} è che valga la condizione*

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.16)$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ e ogni istante t .

Dim. Dalla (2.10) segue immediatamente la sufficienza della condizione. D'altra parte, se in un punto $\bar{\mathbf{x}}$ la (2.16) non fosse soddisfatta, la funzione $g(\mathbf{x}, t) = \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{X}$ risulterebbe diversa da zero per $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$. Per la continuità della funzione integranda, esisterebbe un intorno di $\bar{\mathbf{x}}$ in cui g è ancora diversa da zero e con il medesimo segno, che comporterebbe, per la (2.10), $\frac{d\mathcal{J}}{dt} \neq 0$, mediante una scelta opportuna di \mathcal{V} . \square

Le infinite soluzioni $f(\mathbf{x}, t)$ dell'equazione alle derivate parziali (2.16), che rendono invariante l'integrale (2.15) lungo le soluzioni di (2.7) vengono dette **moltiplicatori jacobiani** del sistema differenziale medesimo. Ogni funzione integranda di un invariante integrale per un sistema del tipo (2.7) è un moltiplicatore jacobiano del sistema medesimo, e viceversa.

2.4 La conservazione del volume in un sistema hamiltoniano

Applichiamo ora i risultati ottenuti ad un sistema hamiltoniano (1.42), ricordando la proprietà (1.45) di divergenza nulla: $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$,

Dalla (2.16) segue che ogni funzione $f = c$ con c costante è un moltiplicatore jacobiano.

L'integrale (2.15) assume la forma

$$\mathcal{J}(t) = c \int_{\mathcal{V}_t} dV = c \int_{\mathcal{V}_0} dV_0 \quad (2.17)$$

La formula appena scritta mette in evidenza un'importante proprietà dei sistemi hamiltoniani (e, più in generale, dei sistemi a divergenza nulla), in base alla quale una qualsiasi porzione V_0 , intesa come varietà sostanziale, si evolve secondo le equazioni (2.7) modificando la propria forma, ma conservando invariato il volume, definito come l'integrale esteso alla varietà della funzione identicamente pari a uno. Questo è il contenuto del

Teorema 2.2 (di Liouville) *Sia U un insieme aperto di $\mathbb{R}^{2\ell}$ e $H(\mathbf{x}, t)$ una funzione da U in \mathbb{R} . Allora, detto \mathcal{F}_H^t il flusso del sistema Hamiltoniano associato $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H$, si ha*

$$\operatorname{mis} \mathcal{F}_H^t(A) = \operatorname{mis} A$$

per ogni insieme A misurabile contenuto in U .

In altre parole, il flusso nello spazio delle fasi (\mathbf{p}, \mathbf{q}) di un sistema Hamiltoniano conserva i volumi delle varietà sostanziali.

2.5 Il teorema di ricorrenza di Poincaré

Consideriamo un sistema hamiltoniano autonomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

definito per $\mathbf{x} \in \Omega$, con Ω regione limitata dello spazio delle fasi. Consideriamo un sottoinsieme $\mathcal{V}_0 \in \Omega$ e la varietà sostanziale \mathcal{V}_t , ossia l'immagine del sottoinsieme al tempo t mediante l'applicazione flusso (2.8).

Fissiamo l'attenzione sulla successione di insiemi \mathcal{V}_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, corrispondenti ai valori del tempo $t = 0, 1, 2, \dots$. Sia $T > 0$ un tempo fissato arbitrariamente. Mostriamo che non è possibile che si verifichi

$$\mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_h = \emptyset, \quad \forall h, k \geq T \quad (2.19)$$

Infatti, in virtù del teorema di Liouville, i volumi $\int_{\mathcal{V}_k} dV$ sono tutti uguali, per ogni $k = 1, 2, \dots$. Se fosse

vera la (2.19), la misura dell'insieme $\bigcup_{i \geq T}^M \mathcal{V}_i$ supererebbe, per un M abbastanza grande, la misura massima consentita, ovvero la misura di Ω .

Esistono dunque due indici $\bar{h} \geq T$ e $\bar{k} > \bar{h}$ tali che $\mathcal{V}_{\bar{k}} \cap \mathcal{V}_{\bar{h}}$ è non vuota.

Per l'ipotesi di autonomia del sistema hamiltoniano, ripercorrendo il flusso in senso inverso rispetto al tempo t di \bar{h} passi, gli insiemi $\mathcal{V}_{\bar{h}}$ e $\mathcal{V}_{\bar{k}}$ vengono riportati in \mathcal{V}_0 e $\mathcal{V}_{\bar{k}-\bar{h}}$, rispettivamente. L'intersezione $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_{\bar{k}-\bar{h}}$ è pertanto non vuota, essendo costituita dai punti presenti in $\mathcal{V}_{\bar{h}} \cap \mathcal{V}_{\bar{k}}$ al tempo \bar{k} . Riassumiamo il ragionamento appena fatto nell'enunciato del

Teorema 2.3 della ricorrenza di Poincaré *Per un sistema autonomo hamiltoniano (2.18) definito per \mathbf{x} appartenente ad un insieme finito Ω dello spazio delle fasi, un qualunque sottoinsieme $\mathcal{V}_0 \in \Omega$ di misura non nulla ammette intersezione non nulla con $\mathcal{V}_{\bar{t}}$, per un opportuno valore $\bar{t} > T$, con $T > 0$ arbitrariamente fissato.*

Fissato un punto \mathbf{x}_0 in Ω , la traiettoria che ha origine in \mathbf{x}_0 si riavvicinerà ad esso infinite volte e a meno di una qualsiasi distanza prefissata. Infatti, si può scegliere un intorno \mathcal{V}_0 di \mathbf{x}_0 arbitrariamente piccolo. Fissato $T > 0$, per il teorema di Poincaré esiste $\bar{t}_1 > T$ tale che $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_{\bar{t}_1} \neq \emptyset$, dunque la traiettoria si è avvicinata al punto iniziale per meno del diametro di \mathcal{V}_0 . Applicando nuovamente il teorema, considerando come nuovo punto di partenza $\mathbf{x}(\bar{t}_1)$, si ottiene un secondo avvicinamento per $t = \bar{t}_2$, e così via.

2.6 Sistemi Hamiltoniani autonomi

Mettiamo in evidenza alcune proprietà significative dei sistemi Hamiltoniani con Hamiltoniana $H = H(\mathbf{x})$ indipendente dal tempo.

La prima riguarda in generale un qualunque sistema autonomo del tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in U$ aperto di \mathbb{R}^N . Se supponiamo che la soluzione sia definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora si dice che il flusso è **completo** e l'autonomia del sistema permette di affermare che la famiglia di operatori

$$\mathcal{F}^s : U \rightarrow U, \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.20)$$

formano un **gruppo** rispetto all'operazione di composizione dei flussi. Infatti, per $s = 0$ l'operatore \mathcal{F}^0 è l'identità in U . Inoltre, vale

$$(\mathcal{F}^s)^{-1} = \mathcal{F}^{-s}, \quad \mathcal{F}^{s_1+s_2} = \mathcal{F}^{s_2} \circ \mathcal{F}^{s_1} = \mathcal{F}^{s_1} \circ \mathcal{F}^{s_2}$$

(ricordare che per un sistema autonomo, se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione, anche $\mathbf{x}_\tau(t) = \mathbf{x}(t + \tau)$, con τ costante, è ancora soluzione del sistema col dato iniziale $\mathbf{x}_\tau(0) = \mathbf{x}(\tau)$).

Osservare che l'applicazione fra i gruppi $\{\mathbb{R}, +\}$ e il gruppo $\{\mathcal{F}^s, \circ\}$ è un omomorfismo.

Dato che le funzioni flusso, come soluzioni del sistema, sono differenziabili, si dice che $\{\mathcal{F}^s, \circ\}$ per $s \in \mathbb{R}$ definisce un **gruppo ad un parametro di diffeomorfismi**.

In particolare, il flusso completo \mathcal{F}_H^s di un sistema Hamiltoniano con Hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ è un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi.

La proprietà di conservazione di H (1.48) si scrive ora $H(\mathcal{F}^t(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Inoltre, definendo gli insiemi di livello per H

$$\mathcal{S}_E = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in U \mid H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E\}$$

con E costante, si ha che ciascun insieme \mathcal{S}_E è **invariante** rispetto al flusso Hamiltoniano:

$$\mathcal{F}^t(\mathcal{S}_E) = \mathcal{S}_E \quad (2.21)$$

ovvero il flusso del sistema porta punti di \mathcal{S}_E in punti di \mathcal{S}_E , per E fissato.

Esercizio 2.4 *Mostrare dettagliatamente l'uguaglianza precedente ($\mathbf{x} \in \mathcal{F}^t(\mathcal{S}_E) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{S}_E$ e viceversa).*

Più in generale, possiamo considerare una funzione $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ e i valori che assume lungo le soluzioni del sistema di Hamiltoniana H . Dalla (1.86) è chiaro che f è un integrale primo per il moto indotto da H , ovvero $f(\mathcal{F}_H^t(\mathbf{x}_0)) = f(\mathbf{x}_0)$, se e solo se $(f, H) = 0$. In questo caso, gli insiemi di livello $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mid f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = a\}$ con a costante sono invarianti per il flusso Hamiltoniano \mathcal{F}_H^t del sistema Hamiltoniano.

E' utile osservare che, per la proprietà (1.77) delle parentesi di Poisson, è possibile invertire i ruoli di H e f , se quest'ultima viene considerata come funzione che induce il flusso Hamiltoniano \mathcal{F}_f^t del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}f$ e H come integrale primo per \mathcal{F}_H^t .

Il carattere speculare di questa considerazione viene riassunta nella seguente

Proposizione 2.3 *Date le funzioni $H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ e $H_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, siano $\mathcal{F}_{H_1}^t$ e $\mathcal{F}_{H_2}^t$ i flussi dei due sistemi (1.42) con Hamiltoniana H_1 e H_2 rispettivamente. Allora, H_1 è un integrale primo per H_2 [oppure H_2 è un integrale primo per H_1] se e solo se $(H_1, H_2) = 0$. In tal caso, gli insiemi di livello $H_2 = c$ [risp. $H_2 = c$], con c costante, sono invarianti per il flusso Hamiltoniano associato a H_1 [risp. H_2].*

La Proposizione appena enunciata è sostanzialmente il contenuto del Teorema di Noether in ambito Hamiltoniano. Per comprendere però in pieno il significato del Teorema nel formalismo Hamiltoniano, è necessario mettere in evidenza il carattere simplettico del flusso Hamiltoniano e la questione verrà affrontata più avanti.

3 L'approccio variazionale

3.1 Funzionali ed equazioni di Eulero

Consideriamo una funzione ℓ -vettoriale

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_\ell(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.1)$$

e un funzionale del tipo **integrale variazionale**

$$I[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt. \quad (3.2)$$

La funzione f a valori reali è chiamata **funzione di Lagrange**, o **Lagrangiana**.

Seguiamo per ora la consuetudine formale del Calcolo variazionale di anticipare la variabile t negli argomenti della funzione integranda.

Un tipico problema del Calcolo delle Variazioni consiste nel cercare le funzioni $\bar{\mathbf{q}}$ che rendono minimo o massimo (ovvero che estremizzano) l'integrale (3.2), al variare della funzione \mathbf{q} in una opportuna classe \mathcal{Q} , ovvero, nel caso di minimo:

$$I[\bar{\mathbf{q}}] \leq I[\mathbf{q}], \quad \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (3.3)$$

analogamente nel caso di un massimo.

Nel breve accenno al complesso problema introdotto, ci limiteremo a determinare una condizione necessaria affinché il funzionale sia minimo o massimo. Può risultare utile paragonare il problema di estremizzare (3.2) con quello della ricerca di valori minimi o massimi di una funzione $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ a valori reali. Com'è noto, condizione necessaria affinché in un punto interno ad U si abbia un estremo (massimo o minimo) è l'annullarsi del gradiente: $\nabla_{\mathbf{x}}\varphi = 0$. Questa condizione individua i **punti critici** o **stazionari** della funzione, i quali non sono necessariamente minimi o massimi: in altre parole, la condizione non è sufficiente per determinare un estremo della funzione.

L'uso della stazionarietà come criterio necessario per estremizzare il funzionale (3.2) richiede ovviamente l'introduzione di nuovi strumenti: in effetti, anziché una funzione si ha a che fare con un funzionale i cui argomenti non sono variabili reali, ma funzioni. Il concetto, ad esempio, di minimo o massimo locale, che per la funzione $\varphi(\mathbf{x})$ viene definito tramite un intorno aperto del punto estremizzante, richiede la definizione di funzioni "vicine" ad una funzione fissata $\mathbf{q}(t)$. D'altra parte, anche il concetto stesso di stazionarietà per il funzionale I (che ha il suo corrispondente in $\nabla_{\mathbf{x}}\varphi = 0$ in questo paragone) deve essere opportunamente definito.

Si assume che la funzione $\mathbf{q} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ (detta **curva** o **traiettoria**) sia di classe \mathcal{C}^1 e scriviamo

$$\mathbf{q} \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^\ell) \quad (3.4)$$

per indicare che $\mathbf{q}(t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ sono continue in $[t_1, t_2]$. La funzione $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{y})$ a valori reali è definita in un aperto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ contenente l'insieme $\Gamma = \{(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)), t \in [t_1, t_2]\}$ ed ivi è \mathcal{C}^1 :

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}). \quad (3.5)$$

E' opportuno far presente che i risultati che presenteremo valgono sotto ipotesi di regolarità ben più deboli: sostanzialmente, sarebbe sufficiente assumere che la funzione \mathbf{q} sia **assolutamente continua**. Anzi, per molti problemi di calcolo delle variazioni, anche legati al contesto fisico-matematico, la soluzione \mathbf{q} di (3.2) è una funzione continua con derivata continua a tratti, dunque la ricerca di essa nella classe \mathcal{C}^1 sarebbe restrittiva. Chi è interessato ad affrontare l'argomento assumendo la regolarità di assoluta continuità, può trovare le dimostrazioni in L. Cesari, *Optimization-theory and Application*, Springer-Verlag 1983.

Va d'altra parte rimarcato che il fatto che maggiormente si vuole mettere in evidenza nel presente Capitolo, al di là dell'aspetto analitico del problema, è la possibilità di assumere come punto di partenza per lo studio del moto (da cui il termine "principio") la stazionarietà di un particolare funzionale: da questa condizione dovranno discendere le corrette equazioni di moto.

Fissiamo ora l'attenzione su una particolare traiettoria \mathbf{q} . Dato che $\mathcal{U} \supseteq \Gamma$, esiste un valore $\delta > 0$ per cui la funzione $f(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ è ben definita per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^\ell)$ tale che $\|\mathbf{q} - \mathbf{y}\|_{\mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^\ell)} < \delta$, dove la distanza fra le funzioni viene definita tramite la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^\ell)} = \max_{t \in [t_1, t_2]} (|\mathbf{u}(t)| + |\dot{\mathbf{u}}(t)|).$$

Sia η una qualunque funzione $\mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^\ell)$ e consideriamo $\mathbf{y} = \mathbf{q} + a\eta$, con $|a| < a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$. È immediato verificare che la funzione $f(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ è definita per ogni $|a| < a_0$ se si sceglie $a_0 < \delta/\|\eta\|_{\mathcal{C}^1}$. Ha quindi senso considerare la funzione $\Psi : (-a_0, a_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$\Psi(a) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \mathbf{q}(t) + a\eta(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + a\dot{\eta}(t)) dt. \quad (3.6)$$

Definiamo **variazione prima** del funzionale I nella direzione di η il numero

$$\Psi'(a)|_{a=0}. \quad (3.7)$$

Evidentemente la quantità (3.7) dipende dalla scelta della funzione \mathbf{q} e della direzione η : per mettere in evidenza questo, si scrive anche

$$\Psi'(a)|_{a=0} = J_1[\eta, \mathbf{q}]$$

dove l'operatore è lineare rispetto a η e viene detto anch'esso **variazione prima** dell'operatore $I[\mathbf{q}]$ in \mathbf{q} . Osservando che $J_1[\eta, \mathbf{q}] = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} (I[\mathbf{q} + a\eta] - I[\mathbf{q}])$, si vede che J_1 corrisponde alla derivata di Gateaux di $I[\mathbf{q}]$ rispetto a η in \mathbf{q} , secondo la seguente definizione.

Osservazione 3.1 Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach con norma $|x|$ e \mathcal{X}^* lo spazio dei funzionali lineari limitati definiti su \mathcal{X} .

Sia $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale definito su un sottoinsieme aperto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ e $x_0 \in \mathcal{V}$.

Il funzionale \mathcal{F} si dice **differenziabile secondo Gateaux** in x_0 se esiste un operatore $\mathcal{L} \in \mathcal{X}^*$ tale che

$$\mathcal{F}(x_0 + \epsilon\eta) = \mathcal{F}(x_0) + \epsilon\mathcal{L}(\eta) + o(\epsilon)$$

per ogni $\eta \in \mathcal{X}$ e $|\epsilon| < \epsilon_0$ con $\epsilon_0(\eta)$ sufficientemente piccolo. L'operatore \mathcal{L} si dice **derivata di Gateaux** di \mathcal{F} in x_0 .

Dalla (3.6) si trova:

$$\psi'(0) = J_1[\eta, \mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} [\eta(t) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \dot{\eta}(t) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))] dt. \quad (3.8)$$

Diremo che il funzionale I di (3.2) è **stazionario** in \mathbf{q} rispetto ad un insieme \mathcal{A} di direzioni η opportunamente scelto se (3.8) si annulla per ogni $\eta \in \mathcal{A}$:

$$J_1[\eta, \mathbf{q}] = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{A}. \quad (3.9)$$

Il concetto di stazionarietà di un funzionale è dunque basato sulla stazionarietà (ovvero l'annullarsi della derivata) della funzione ψ , al variare delle direzioni scelte η . Per fare questo, abbiamo selezionato solo particolari variazioni (diremo anche **perturbazioni**) della funzione \mathbf{q} del tipo $\mathbf{q} + a\eta$, lineari in a . La questione che riguarda l'uso di variazioni generiche $\xi(\mathbf{q}, a)$ è discussa in M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of variations*, Springer 1996 e a questo testo rimandiamo anche per ulteriori approfondimenti degli argomenti esposti nel presente Capitolo.

Si consideri ora la classe di funzioni

$$\mathcal{A} = \{\eta(t) \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^\ell), \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0\}. \quad (3.10)$$

Una funzione $\mathbf{q} \in C^1([t_1, t_2], \mathbb{R})$ che verifica l'equazione integrale (3.7) per ogni η nell'insieme (3.10), ovvero

$$\int_{t_1}^{t_2} [\eta(t) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \dot{\eta}(t) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))] dt = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{A} \quad (3.11)$$

è detta **estremale debole (weak extremal)** del funzionale I e la (3.11) viene detta **equazione di Eulero per \mathbf{q} in forma debole**. Dunque, I è stazionario in \mathbf{q} rispetto alla classe (3.10) se e solo se \mathbf{q} è estremale debole di I .

Dimostriamo il seguente enunciato, noto come **lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni**:

Lemma 3.1 *Sia $h(t)$, $a \leq t \leq b$ una funzione continua in $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ a valori reali. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché*

$$\int_a^b h(t) \dot{\zeta}(t) dt = 0 \quad (3.12)$$

per ogni funzione della classe $\mathcal{A}_1 = \{\dot{\zeta}(t) \in C^1([t_1, t_2], \mathbb{R}), \zeta(t_1) = \zeta(t_2) = 0\}$ è che $h(t) = C$, con C costante, per ogni $t \in [a, b]$.

Dim. La sufficienza della condizione è evidente. Viceversa, assumiamo vera la (3.12). Per ogni costante reale C si ha $C \int_a^b \dot{\zeta}(t) dt = C[\zeta(b) - \zeta(a)] = 0$, dunque

$$\int_a^b [h(t) - C] \dot{\zeta}(t) dt = 0 \quad (3.13)$$

per ogni funzione $\dot{\zeta} \in \mathcal{A}_1$ e per ogni costante $C \in \mathbb{R}$.

Scegliendo $\dot{\zeta}(t) = \int_a^t [h(\tau) - C] d\tau$, $C = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(t) dt$, si vede che $\dot{\zeta}$ appartiene alla classe \mathcal{A}_1 . Sostituendo in (3.13) le quantità scelte, si trova $\int_a^b [h(t) - C]^2 dt = 0$. Dunque, $h(t) = C$ per ogni $t \in [a, b]$. \square

Il risultato centrale consiste nel seguente

Teorema 3.1 *Sia I definito come in (3.2) e $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{y})$ definita in $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$, con $\nabla_{\mathbf{q}} f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R}^\ell)$, $\nabla_{\mathbf{y}} f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^\ell)$.*

Una funzione $\mathbf{q} \in C^2([t_1, t_2], \mathbb{R}^\ell)$ è un estremale debole di (3.11) rispetto alla classe (3.10) se e solo se verifica le equazioni

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \nabla_{\mathbf{q}} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)). \quad (3.14)$$

Dim. Supponiamo che \mathbf{q} sia un estremale debole per I . Fissiamo un indice i , $1 \leq i \leq \ell$ e scegliamo $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_\ell) \in \mathcal{A}$ con $\eta_j = 0$ per $j \neq i$. La (3.11) con questa scelta di η si scrive

$$\int_{t_1}^{t_2} [\eta_i f_{q_i}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \dot{\eta}_i f_{\dot{q}_i}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))] dt = 0.$$

Sapendo che è valida la regola di integrazione per parti, otteniamo

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(f_{\dot{q}_i}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \int_{t_1}^t f_{q_i}(\tau, \mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau)) d\tau \right) \dot{\eta}_i(t) dt = 0.$$

La funzione η_i soddisfa le ipotesi del Lemma 3.1 richieste per la funzione scalare ζ . Dunque:

$$f_{\dot{q}_i}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \int_{t_1}^t f_{q_i}(\tau, \mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau)) d\tau = C_i, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad t \in [t_1, t_2] \quad (3.15)$$

dove C_1, \dots, C_ℓ sono costanti. Le ipotesi di regolarità della funzione f assicurano che le espressioni (3.15) sono derivabili rispetto al tempo: calcolando la derivata, si trovano infine le (3.14).

Viceversa, supponiamo che valgano le equazioni (3.14) per una funzione $\mathbf{q} \in \mathcal{C}^2([t_1, t_2], \mathbb{R}^\ell)$. Sia η una qualunque funzione in \mathcal{A} . Le regolarità assunte permettono senz'altro di dedurre da (3.14), moltiplicando scalarmente per η :

$$\frac{d}{dt}(\eta \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f) = \dot{\eta} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f + \eta \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f.$$

Integrando fra t_1 e t_2 rispetto a t e tenendo presente che $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, si ottiene che (3.11) vale per ogni $\eta \in \mathcal{A}$. \square

Le equazioni (3.14) sono note come **condizioni necessarie di Eulero**, ovvero **equazioni di Eulero, equazioni di Eulero–Lagrange**.

Osservare che le ipotesi del Teorema appena dimostrato sono più restrittive rispetto alle (3.4), (3.5) che sono sufficienti per definire le soluzioni estremali deboli.

Osservazione 3.2 *Molte varianti sono possibili riguardo alla regolarità delle funzioni in gioco: ad esempio, si può supporre che \mathbf{q} sia \mathcal{C}^2 nell'aperto (t_1, t_2) e considerare come classe \mathcal{A} le funzioni \mathcal{C}^∞ a supporto compatto in (t_1, t_2) . Oppure, nel già citato approccio mediante funzioni \mathbf{q} assolutamente continue, si assume f di classe \mathcal{C}^1 e η funzioni assolutamente continue che si annullano agli estremi e con derivata $\dot{\eta}(t) \in L^\infty[t_1, t_2]$.*

Ogni arco di soluzione $\mathbf{q}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ di classe \mathcal{C}^2 del sistema (3.14) viene detto **arco estremale**, o **estremale**. Gli estremali non necessariamente estremizzano (ovvero non rendono minimo o massimo) il funzionale (3.2).

La scrittura esplicita delle (3.14) è

$$\nabla_{\mathbf{q}} f = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f) + [J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f)]\dot{\mathbf{q}} + [J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f)]\ddot{\mathbf{q}} \quad (3.16)$$

dove le matrici Jacobiane hanno per elementi (vedi (6.1)) $[J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f)]_{(i,j)} = f_{\dot{q}_i q_j}$, $[J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f)]_{(i,j)} = f_{\dot{q}_i \dot{q}_j}$, $i, j = 1, \dots, \ell$.

Se f in (3.2) è di classe \mathcal{C}^m , $m > 2$, e $R(t)$ indica la matrice

$$R(t) = J_{\dot{\mathbf{q}}} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)), \quad (3.17)$$

la condizione

$$\det R(t_0) \neq 0 \quad (3.18)$$

per un certo t_0 assicura (applicando il teorema della funzione implicita) che il sistema (3.16) può essere scritto nella forma normale $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, dove la funzione \mathbf{F} è di classe \mathcal{C}^{m-2} in un intorno di $(t_0, \mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$. Dunque, la non singolarità della matrice $R(t_0)$, che nel calcolo delle variazioni viene detta **condizione di differenziabilità di Hilbert**, garantisce l'unicità locale dell'arco estremale di dati iniziali $\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)$ per $t = t_0$.

La proprietà

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] = -f_t(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.19)$$

dove, al solito

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (3.20)$$

che abbiamo chiamato teorema dell'energia generalizzata nella Parte I e che abbiamo ritrovato nelle (1.46) e (1.47), viene detta nel calcolo variazionale **condizione necessaria di Du Bois–Reymond**.

Esercizio 3.1 *Verificare i seguenti fatti:*

- (i) *Se $f = f(t, \dot{\mathbf{q}})$ non dipende dalle coordinate \mathbf{q} , allora il sistema (3.14) si riduce al sistema di ℓ equazioni differenziali del primo ordine*

$$\mathbf{p}(t) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f(t, \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{c},$$

con $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_\ell)$ costanti arbitrarie.

(ii) Se $f = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ non dipende da t , allora le (3.19) è

$$\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C_0$$

con C_0 costante.

(iii) Le funzioni $f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e $g = f + \frac{d\varphi}{dt}$, dove $\varphi = \varphi(t, \mathbf{q})$ è una funzione di classe C^2 in un aperto di $\mathbb{R}^{1+\ell}$, hanno le medesime equazioni di Eulero e

$$I_g[\mathbf{q}] = I[\mathbf{q}] + \varphi(t_2, \mathbf{q}(t_2)) - \varphi(t_1, \mathbf{q}(t_1)), \quad (3.21)$$

con I definito da (3.2).

(iv) Se operiamo un cambiamento di variabili

$$t = t(s, \mathbf{y}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(s, \mathbf{y}), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell$$

in modo che le traiettorie $\mathbf{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ siano portate nelle traiettorie $\mathbf{y}(s)$, $s_1 \leq s \leq s_2$, l'integrale (3.2) diventa

$$\mathcal{I}[\mathbf{y}] = \int_{s_1}^{s_2} F(s, \mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s)) ds \quad (3.22)$$

dove l'apice denota la derivazione rispetto a s e

$$F(s, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = f \left(t(s, \mathbf{y}), \mathbf{q}(s, \mathbf{y}), \frac{\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s}(s, \mathbf{y}) + [J_{\mathbf{y}} \mathbf{q}(s, \mathbf{y})] \mathbf{y}'}{\varphi(s, \mathbf{y}, \mathbf{y}')} \right) \varphi(s, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$$

con $J_{\mathbf{y}} \mathbf{q}$ matrice jacobiana (vedi (6.1)) e $\varphi(s, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = \frac{\partial t}{\partial s}(s, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} t(s, \mathbf{y}) \mathbf{y}'(s) = \frac{dt}{ds}(s, \mathbf{y}(s))$.

Le corrispondenti equazioni di Eulero (3.14) per I si trasformano nelle equazioni di Eulero per \mathcal{I} :

$$\frac{d}{ds} \nabla_{\mathbf{y}'} F(s, \mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s)) = \nabla_{\mathbf{y}} F(s, \mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s)).$$

La proprietà (iv) esprime il **carattere invariante delle equazioni di Eulero** e permette una considerazione significativa.

Se modifichiamo la scala temporale (da t in s), il funzionale da estremizzare deve essere I riletto nelle nuove variabili, ovvero \mathcal{I} definito in (3.22). La Lagrangiana di \mathcal{I} è $F = f \frac{dt}{ds}$: si capisce pertanto la ragione per cui

abbiamo definito in (1.35) $\tilde{\mathcal{L}}$ come $\hat{\mathcal{L}} \frac{dt}{d\tau}$.

Anche le equazioni di moto nella forma hamiltoniana (1.24) possono essere ricavate in modo variazionale. Infatti, se definiamo l'Hamiltoniana corrispondente a f come in (1.15), ovvero mediante la trasformata di Legendre

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})) \quad (3.23)$$

(con $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ ricavate invertendo le (3.20), nell'ipotesi (3.18)), possiamo introdurre il funzionale

$$\tilde{I}[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - H(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))] dt. \quad (3.24)$$

La funzione integranda $\tilde{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ non è altro che la Lagrangiana di (3.2), espressa però nelle 2ℓ variabili indipendenti $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, ovvero $\tilde{f} = \tilde{f}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$.

Le 2ℓ equazioni di Eulero per il funzionale $\tilde{I}[\mathbf{y}]$ sono

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \tilde{f} = \nabla_{\mathbf{q}} \tilde{f} \\ \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{p}}} \tilde{f} = \nabla_{\mathbf{p}} \tilde{f} \end{cases}$$

che equivalgono alle equazioni canoniche per H (1.24), dato che $\nabla_{\dot{\mathbf{p}}} \tilde{f} = 0$, $\nabla_{\mathbf{p}} \tilde{f} = \dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{p}} H_0$, $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \tilde{f} = \mathbf{p}$, $\nabla_{\mathbf{q}} \tilde{f} = -\nabla_{\mathbf{q}} H_0$.

3.2 L'integrale di Hilbert

Consideriamo due curve distinte γ_a e $\gamma^{(b)}$ nello spazio $\mathbb{R}^{1+\ell}$ di classe C^1 e parametrizzate come

$$\begin{cases} \gamma^{(a)} : t = t^{(a)}(\alpha), \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(a)}(\alpha) = (q_1^{(a)}(\alpha), \dots, q_\ell^{(a)}(\alpha)), & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \\ \gamma^{(b)} : t = t^{(b)}(\alpha), \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(b)}(\alpha) = (q_1^{(b)}(\alpha), \dots, q_\ell^{(b)}(\alpha)), & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \end{cases} \quad (3.25)$$

Siano poi le coppie di punti $[t^{(a)}(\alpha), \mathbf{q}^{(a)}(\alpha)]$, $[t^{(b)}(\alpha), \mathbf{q}^{(b)}(\alpha)]$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, estremi di curve E_α parametrizzate come

$$E_\alpha : \mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \alpha), \quad t^{(a)}(\alpha) \leq t \leq t^{(b)}(\alpha). \quad (3.26)$$

Ciascun elemento della famiglia di curve E_α unisce in $\mathbb{R}^{1+\ell}$ i punti che si corrispondono sulle due curve assegnate:

$$\mathbf{q}(t^{(a)}(\alpha), \alpha) = \mathbf{q}^{(a)}(\alpha), \quad \mathbf{q}(t^{(b)}(\alpha), \alpha) = \mathbf{q}^{(b)}(\alpha). \quad (3.27)$$

Assumiamo la seguente regolarità delle curve E_α :

$$\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_t, \mathbf{q}_{t\alpha} \in C^1 \left([t^{(a)}(\alpha) \leq t \leq t^{(b)}(\alpha)] \times [\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1] \right), \quad (3.28)$$

dove il pedice indica la derivazione parziale.

L'integrale (3.2) calcolato sulle curve E_α diventa una funzione di α :

$$I(\alpha) = I[E_\alpha] = \int_{t^{(a)}(\alpha)}^{t^{(b)}(\alpha)} f(t, \mathbf{q}(t, \alpha), \mathbf{q}_t(t, \alpha)) dt, \quad \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1. \quad (3.29)$$

Vogliamo comprendere come si modifica l'integrale I se gli estremi si spostano lungo le curve assegnate $\gamma^{(a)}$ e $\gamma^{(b)}$. Calcoliamo la derivata della funzione I :

$$I'(\alpha) = \frac{dI}{d\alpha} = [f(t, \mathbf{q}(t, \alpha), \mathbf{q}_t(t, \alpha))]'_{t=t^{(a)}(\alpha)}^{t=t^{(b)}(\alpha)} + \int_{t^{(a)}(\alpha)}^{t^{(b)}(\alpha)} (\nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \mathbf{q}_\alpha + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f \cdot \mathbf{q}_{t\alpha}) dt. \quad (3.30)$$

Commentiamo i due termini in (3.30). Nel calcolo di $f t'(\alpha)$ agli estremi, si deve intendere f calcolata in $(t^{(b)}(\alpha), \mathbf{q}^{(b)}(\alpha), \mathbf{q}_t(t^{(b)}(\alpha), \alpha))$ e $t'(\alpha)$ in $t^{(b)}(\alpha)$ significa $\frac{d}{d\alpha} t^{(b)}(\alpha)$, ovvero la prima componente del vettore tangente alla curva $\gamma^{(b)}$. Lo stesso vale per l'estremo $t^{(a)}(\alpha)$.

La funzione f e le sue derivate che compaiono nell'integrale vanno calcolate in $(t, \mathbf{q}(t, \alpha), \mathbf{q}_t(t, \alpha))$, mentre $q_k = q_k(t, \alpha)$, $k = 1, \dots, \ell$ sono le coordinate \mathbf{q} lungo l'arco E_α .

Dimostriamo il seguente

Lemma 3.2 *Nelle ipotesi $\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)} \in C^1[\alpha_0, \alpha_1]$, (3.27), (3.28), allora per ogni valore $\bar{\alpha}$ per cui $E_{\bar{\alpha}}$ soddisfa le equazioni di Eulero (3.14), allora*

$$\frac{dI}{d\alpha}(\bar{\alpha}) = [f(t, \mathbf{q}(t, \bar{\alpha}), \mathbf{q}_t(t, \bar{\alpha}))]'_{t=t^{(a)}(\bar{\alpha})}^{t=t^{(b)}(\bar{\alpha})} + (\mathbf{q}'(\bar{\alpha}) - \mathbf{q}_t t'(\bar{\alpha})) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f]_{t=t^{(a)}(\bar{\alpha})}^{t=t^{(b)}(\bar{\alpha})} \quad (3.31)$$

dove $(t'(\alpha), \mathbf{q}'(\alpha)) = (t'(\alpha), q_1'(\alpha), \dots, q_\ell'(\alpha))$ indica il vettore tangente alla curva $\gamma^{(b)}$ se calcolato per $t = t^{(b)}(\alpha)$, il vettore tangente a $\gamma^{(a)}$ se calcolato per $t = t^{(a)}(\alpha)$ e dove la funzione f va calcolata in

$$f(t_r(\bar{\alpha}), \mathbf{q}(t_r(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}), \mathbf{q}_t(t_r(\bar{\alpha}), \bar{\alpha})), \quad r = a, b,$$

analogamente $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f$.

Dim.

Consideriamo $\alpha = \bar{\alpha}$. Se l'arco $E_{\bar{\alpha}}$ soddisfa le (3.14), possiamo scrivere la funzione integranda in (3.30) come

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f) \cdot \mathbf{q}_\alpha + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f \cdot \mathbf{q}_{t\alpha} = \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f \cdot \mathbf{q}_\alpha).$$

La (3.30), dunque, per $\alpha = \bar{\alpha}$ assume la forma particolarmente semplice

$$\frac{dI}{d\alpha} = [f(t, \mathbf{q}(t, \bar{\alpha}), \mathbf{q}_t(t, \bar{\alpha}))t'(\bar{\alpha}) + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f \cdot \mathbf{q}_\alpha]_{t=t^{(a)}(\bar{\alpha})}^{t=t^{(b)}(\bar{\alpha})}. \quad (3.32)$$

Le (3.27) permettono di trovare la relazione fra il vettore \mathbf{q}' , che forma il vettore tangente alle curve sulle quali si trovano gli estremi di E_α , e il vettore \mathbf{q}_t , che invece si riferisce alla pendenza dell'arco E_α , qui considerata nei medesimi punti.

Si ha:

$$\mathbf{q}_t t^{(a)'}(\alpha) + \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{q}^{(a)'}(\alpha), \quad \mathbf{q}_t t^{(b)'}(\alpha) + \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{q}^{(b)'}(\alpha) \quad (3.33)$$

dove le funzioni \mathbf{q}_α e \mathbf{q}_t vanno calcolate per $t = t^{(a)}(\alpha)$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(a)}(\alpha)$, analogamente all'altro estremo (notare che la (3.33) vale comunque, anche se E_α non verifica le equazioni di Eulero).

Sostituendo infine le (3.33) nella (3.32) si trova la formula (3.31). \square

Un'importante conseguenza del Lemma appena dimostrato riguarda una proprietà dell'integrale che andiamo a definire.

Sia $\gamma : (t(\alpha), \mathbf{q}(\alpha))$ una curva definita per $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Per ogni α fissato in $[\alpha_0, \alpha_1]$, sia $\mathbf{q}(t, \alpha)$ un arco parametrizzato rispetto a $t \in [t^{(a)}(\alpha), t^{(b)}(\alpha)]$ e tale che $\mathbf{q}(t(\alpha), \alpha) = \mathbf{q}(\alpha)$. Per una funzione $f = f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, denotiamo con $I^*[\gamma]$ l'integrale

$$I^*[\gamma] = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} [f(t(\alpha), \mathbf{q}(\alpha), \mathbf{q}_t(t(\alpha), \alpha))t'(\alpha) + [\mathbf{q}'(\alpha) - \mathbf{q}_t(t(\alpha), \alpha)t'(\alpha)] \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f] d\alpha \quad (3.34)$$

dove $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f$ va calcolato per $t = t(\alpha)$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\alpha)$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_t(t(\alpha), \alpha)$.

L'integrale (3.34) viene detto **integrale di Hilbert** della funzione f associato a I .

E' evidente che la funzione integranda in (3.34) coincide con la funzione che appare in (3.31). E' dunque immediato dimostrare il seguente

Corollario 3.1 *Nelle ipotesi del Lemma 3.1, se lungo ogni arco $E_\alpha : \mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \alpha)$, $\alpha \in \alpha_0 \leq \alpha_1$, $t^{(a)}(\alpha) \leq t \leq t^{(b)}(\alpha)$ valgono le equazioni di Eulero (3.14), allora*

$$I[E_{\alpha_1}] - I[E_{\alpha_0}] = I^*[\gamma^{(b)}] - I^*[\gamma^{(a)}] \quad (3.35)$$

dove $I[E_\alpha]$ è definito in (3.29) e $I^*[\gamma]$ in (3.34).

La (3.35) è semplicemente l'integrazione della (3.31) rispetto ad α in $[\alpha_0, \alpha_1]$. Per ognuno di tali valori, infatti, è vera la formula (3.31).

Se, in particolare, la curva γ_α si riduce al singolo punto $C = (t^{(a)}(\alpha), \mathbf{q}^{(a)}(\alpha))$, per ogni $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, la (3.35) si scrive

$$I[E_1] - I[E_0] = I^*[\gamma^{(b)}], \quad (3.36)$$

dove E_1 è l'arco estremale che unisce il punto C con $(t^{(b)}(\alpha_1), \mathbf{q}^{(b)}(\alpha_1)) \in \gamma^{(b)}$, mentre E_0 è l'arco estremale che unisce il punto C con $(t^{(b)}(\alpha_0), \mathbf{q}^{(b)}(\alpha_0)) \in \gamma^{(b)}$.

Vale la pena di osservare che l'integrale (3.46) calcolato lungo un arco estremaie E soluzione delle equazioni di Eulero coincide con il funzionale (3.2):

$$I[E] = I^*[E], \quad E \text{ arco estremaie.} \quad (3.37)$$

Infatti, la curva di integrazione (ovvero l'arco estremaie) è parametrizzata mediante $\lambda = t$ come $(t, \mathbf{q}(t))$ con vettore tangente $(1, \dot{\mathbf{q}})$. Dunque, la curva di integrazione coincide con una traiettoria del campo (3.41) e la semplificazione dei termini in (3.46) porta all'integrale (3.2).

Mettiamo ora in evidenza un'importante conseguenza della formula (3.35).

Se scegliamo $\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}$ come **curve chiuse**, ovvero (vedi (3.25))

$$t^{(a)}(\alpha_0) = t^{(a)}(\alpha_1), \quad \mathbf{q}^{(a)}(\alpha_0) = \mathbf{q}^{(a)}(\alpha_1), \quad t^{(b)}(\alpha_0) = t^{(b)}(\alpha_1), \quad \mathbf{q}^{(b)}(\alpha_0) = \mathbf{q}^{(b)}(\alpha_1),$$

si ha $I[E_{\alpha_1}] = I[E_{\alpha_0}]$, dato che la funzione integranda viene valutata sul medesimo arco estremaie che unisce il punto $(t^{(a)}(\alpha_0), \mathbf{q}^{(a)}(\alpha_0)) = (t^{(a)}(\alpha_1), \mathbf{q}^{(a)}(\alpha_1)) \in \gamma^{(a)}$ al punto $(t^{(b)}(\alpha_0), \mathbf{q}^{(b)}(\alpha_0)) = (t^{(b)}(\alpha_1), \mathbf{q}^{(b)}(\alpha_1)) \in \gamma^{(b)}$.

La (3.35) implica

$$I^*[\gamma^{(a)}] = I^*[\gamma^{(b)}]. \quad (3.38)$$

La (3.38) avrà un'importanza fondamentale nella caratterizzazione dei sistemi hamiltoniani mediante un invariante integrale: questo argomento sarà sviluppato più avanti.

Esercizio 3.2 *Dimostrare che la formula (3.36) diventa*

$$I[E_1] - I[E_0] = I[\gamma^{(b)}]$$

*nel caso in cui le curve E_α , $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, sono tutte tangenti a $\gamma^{(b)}$ nel punto di arrivo $t^{(b)}(\alpha), \mathbf{q}^{(b)}(\alpha)$ (questa proprietà viene detta **string property**).*

La scrittura dell'integrale (3.34) come integrale curvilineo lungo γ (di cui $(t'(\alpha), \mathbf{q}'(\alpha))$ è il vettore tangente):

$$I^*[\gamma] = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (f - \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f \cdot \mathbf{q}_t, \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f) \cdot (t'(\alpha), \mathbf{q}'(\alpha)) d\alpha, \quad (3.39)$$

con $f, \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f$ da calcolarsi come in (3.34), ci permette di osservare che in esso appare la funzione Hamiltoniana (vedi (3.20) e (3.23)) se $\mathbf{q}(t, \alpha)$ sono soluzioni di (3.14) e ci introduce al prossimo Paragrafo, che può essere omesso in una prima lettura delle dispense.

3.3 Campi di Weierstrass e caratterizzazione degli estremali

Consideriamo una regione A semplicemente connessa dello spazio $\mathbb{R}^{1+\ell}$ delle variabili (t, q_1, \dots, q_ℓ) (semplicemente connesso: due curve continue in A con medesimi punti estremi possono essere portate in modo continuo una nell'altra). Assumiamo che la funzione integranda di I in (3.2) sia di classe C^1 in $A \times \mathbb{R}^\ell$.

Dobbiamo pensare all'insieme A come *semplicemente coperto* da una famiglia di curve estremali $E_{\mathbf{a}}$: $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, a_1, \dots, a_\ell)$, $t^{(a)}(\mathbf{a}) \leq t \leq t^{(b)}(\mathbf{a})$ dell'integrale I , ovvero per ogni punto $(t, \mathbf{q}) \in A$ passa uno ed un solo estremaie $E_{\mathbf{a}}$ della famiglia. Dunque, la funzione $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{q})$ è ben definita da un insieme connesso A_0 dei parametri (a_1, \dots, a_ℓ) in A . Ovviamente vale $\mathbf{q}(t, \mathbf{a}(t, \mathbf{q})) = \mathbf{q}$.

Anche la funzione $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_\ell) : A \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ assegnata come

$$\pi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q}_t(t, \mathbf{a}(t, \mathbf{q})) \quad (3.40)$$

è ben definita e viene detta funzione **pendenza** dell'estremaie $E_{\mathbf{a}}$ nel punto (t, \mathbf{q}) .

Possiamo dunque identificare gli archi estremali con le curve integrali del campo $\pi(\mathbf{q}, t)$, ovvero le curve $\dot{\mathbf{q}}(t)$ che verificano

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \pi(\mathbf{q}, t). \quad (3.41)$$

In termini delle pendenze (3.40), osservando che $\ddot{\mathbf{q}} = (J_{\mathbf{q}}\pi)\pi + \frac{\partial\pi}{\partial t}$, possiamo riscrivere le equazioni (3.16) come $\mathbf{E}(t, \mathbf{q}, \pi) = \mathbf{0}$, dove

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{q}, \pi) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f) + [J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f)]\pi + [J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f)] \left((J_{\mathbf{q}}\pi)\pi + \frac{\partial\pi}{\partial t} \right) - \nabla_{\mathbf{q}} f \quad (3.42)$$

con le occorrenze di $\dot{\mathbf{q}}$ valutate come in (3.41).
Supponiamo ora di avere assegnato le funzioni

$$(r_1(t, \mathbf{q}), \dots, r_\ell(t, \mathbf{q})) = \mathbf{r}(t, \mathbf{q}), \quad r_k : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, \ell. \quad (3.43)$$

Mediante le \mathbf{r} costruiamo il seguente **campo vettoriale** \mathbf{B} da A in $\mathbb{R}^{1+\ell}$:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{q}) = (B_0, B_1, \dots, B_\ell) = [f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})) - \mathbf{b}(t, \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}(t, \mathbf{q}), \mathbf{b}(t, \mathbf{q})] \in \mathbb{R}^{1+\ell} \quad (3.44)$$

avendo chiamato

$$\mathbf{b}(t, \mathbf{q}) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})) = \mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{r}(t, \mathbf{q})} \quad (3.45)$$

(vedi (3.20)).

Diremo che \mathbf{B} è un **campo di Weierstrass** con funzione pendenza \mathbf{r} se

(i) le funzioni r_1, \dots, r_ℓ sono di classe C^1 da A in \mathbb{R}^ℓ ,

(ii) l'integrale curvilineo di \mathbf{B} su una curva $\gamma : (t(\lambda), \mathbf{q}(\lambda))$, $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, contenuta in A , ovvero

$$\begin{aligned} I^*[\gamma] &= \int_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (B_0 t'(\lambda) + B_1 q_1'(\lambda) + \dots + B_\ell q_\ell'(\lambda)) d\lambda = \\ &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} [(f - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{b}) \cdot (t', \mathbf{q}')] d\lambda \end{aligned} \quad (3.46)$$

dipende solo dagli estremi della curva di integrazione.

In (3.46) le funzioni B_i vanno calcolate lungo γ , ovvero in $B_i(t(\lambda), \mathbf{q}(\lambda))$, $i = 0, \dots, \ell$.

Le equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{r}(t, \mathbf{q}) \quad (3.47)$$

si dicono **equazioni differenziali del campo**. Dato che la funzione \mathbf{r} è C^1 , le (3.47) soddisfano il teorema di esistenza e unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Dunque, per ogni punto $(t_0, \mathbf{q}_0) \in A$ passa una ed una sola soluzione $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ di (3.47). Queste soluzioni vengono dette **estremali** del campo e ricoprono semplicemente A . Il nostro obiettivo è quello di far vedere che essi coincidono con gli estremali dell'integrale I .

L'integrale (3.46) è detto **integrale di Hilbert** per la funzione f e il campo \mathbf{B} con funzione pendenza \mathbf{r} .

In effetti, l'integrale che abbiamo definito in (3.34), anch'esso chiamato integrale di Hilbert, coincide proprio con (3.46) calcolato lungo la curva γ e con la scelta della funzione pendenza \mathbf{r} come pendenza degli estremali (3.40), ovvero

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = \pi(\mathbf{q}, t). \quad (3.48)$$

Vogliamo stabilire che relazione intercorre fra le due famiglie di curve che abbiamo chiamato entrambe estremali: da una parte gli estremali come soluzioni delle equazioni di Eulero (3.14), dall'altra gli estremali del campo \mathbf{B} , ovvero gli archi (3.47). Partiamo dalla seguente considerazione.

La condizione (ii) per il campo \mathbf{B} di indipendenza dell'integrale (3.46) dal percorso che unisce gli estremi è equivalente alla richiesta che la forma differenziale

$$B_0(t, \mathbf{q})dt + \sum_{k=1}^{\ell} B_k(t, \mathbf{q})dq_k \quad (3.49)$$

sia esatta, ovvero che esista una funzione $F(t, \mathbf{q})$ per cui $F_t = B_0$, $\nabla_{\mathbf{q}}F = \mathbf{b}$, avendo chiamato $\mathbf{b} = (B_1, \dots, B_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$.

Dato che il dominio A è semplicemente connesso, questo equivale a richiedere che la forma sia chiusa, ovvero che la matrice Jacobiana del campo \mathbf{B} sia simmetrica:

$$\nabla_{\mathbf{q}}B_0 = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad J_{\mathbf{q}}\mathbf{b} = [J_{\mathbf{q}}\mathbf{b}]^T. \quad (3.50)$$

Dalla definizione (3.44) e aiutandosi con le (6.8), (6.9) e (6.10), si trova:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}}B_0 &= \nabla_{\mathbf{q}}f - [J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f)J_{\mathbf{q}}\mathbf{r}]^T \mathbf{r} - [J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f)]^T \mathbf{r}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f) + J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad J_{\mathbf{q}}\mathbf{b} = J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f) + J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f)J_{\mathbf{q}}\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Nelle formule precedenti, tutte le occorrenze $\dot{\mathbf{q}}$ negli argomenti di f e delle sue derivate vanno calcolate come $\mathbf{r}(t, \mathbf{q})$.

Dunque:

$$\nabla_{\mathbf{q}}B_0 - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{q}}f - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f) - J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} - [J_{\mathbf{q}}\mathbf{b}]^T \mathbf{r}.$$

Il fatto essenziale consiste nel riconoscere nelle espressioni calcolate le equazioni di Eulero: la forma più conveniente da richiamare è quella in termini delle pendenze (3.42). In effetti, si vede che

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f) + [J_{\mathbf{q}}\mathbf{b}]\mathbf{r} + J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} - \nabla_{\mathbf{q}}f.$$

Sommando le due ultime uguaglianze scritte, si trova

$$\nabla_{\mathbf{q}}B_0 - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = [J_{\mathbf{q}}\mathbf{b}]\mathbf{r} - [J_{\mathbf{q}}\mathbf{b}]^T \mathbf{r} - \mathbf{E}(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \quad (3.51)$$

A questo punto è semplice dimostrare il seguente risultato che caratterizza gli estremali di un campo di Weierstrass.

Teorema 3.2 *Se A è semplicemente connesso e $\mathbf{r}(t, \mathbf{q})$ è di classe C^1 in A , allora la condizione (ii) per un campo di Weierstrass di indipendenza dal percorso di integrazione vale se e solo se gli estremali del campo (3.47) sono estremali di I soluzioni di (3.16) (ovvero vale (3.48)), e la matrice $J_{\mathbf{q}}\mathbf{b} = J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f) + J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f)J_{\mathbf{q}}\mathbf{r}$ è simmetrica:*

$$J_{\mathbf{q}}\mathbf{b} = [J_{\mathbf{q}}\mathbf{b}]^T \quad (3.52)$$

Dim. Se vale la condizione (ii) di indipendenza dal percorso, allora devono valere le condizioni (3.50). D'altra parte, da (3.51) si vede che $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, ovvero valgono le equazioni di Eulero con le pendenze \mathbf{r} del campo assegnato.

Viceversa, se gli estremali del campo sono estremali di I , ovvero valgono le (3.42) con la scelta (3.48), allora da (3.51) e da (3.52) (che è vera per ipotesi) si vede che valgono le (3.50), ovvero che l'integrale è indipendente dal percorso.

Osservare che (3.52) consiste in $\ell(\ell - 1)/2$ condizioni scalari. \square

Il Teorema appena dimostrato equivale ad affermare che I^* è l'integrale di un differenziale esatto se e solo se le soluzioni delle equazioni (3.47) sono estremali per I e valgono le condizioni (3.52). Questo permette di anticipare un argomento importante, il cosiddetto metodo di Hamilton–Jacobi, che affronteremo in modo sistematico più avanti.

Se \mathbf{B} è un campo di Weierstrass con funzione pendenza \mathbf{r} , la 1-forma differenziale

$$[f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})) - \mathbf{r}(t, \mathbf{q}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q}))] dt + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})) \cdot d\mathbf{q} \quad (3.53)$$

è il differenziale esatto di una funzione $W(t, \mathbf{q})$, ovvero

$$\frac{\partial W}{\partial t} = f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})) - \mathbf{r}(t, \mathbf{q}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})) \quad \nabla_{\mathbf{q}}W = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})). \quad (3.54)$$

Sostituendo nelle (3.54), si trova che la funzione W verifica

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t, \mathbf{q}) + f(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q})) + \mathbf{r}(t, \mathbf{q}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} W(t, \mathbf{q}) = 0.$$

Ricordando la definizione di Hamiltoniana (1.15), possiamo anche scrivere

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}(t, \mathbf{q}), \nabla_{\mathbf{q}} W(t, \mathbf{q})) = 0,$$

ovvero, operando la trasformazione di Legendre come in (3.23):

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t, \mathbf{q}) + H(t, \mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} W(t, \mathbf{q})) = 0. \quad (3.55)$$

L'equazione alle derivate parziali (3.55) viene detta **equazione di Hamilton–Jacobi** e sarà studiata successivamente.

Esercizio 3.3 *Formulare il medesimo teorema per $\ell = 1$.*

3.4 Il principio variazionale di Hamilton

Vediamo ora finalmente l'applicazione allo studio del moto dei concetti fino qui presentati. Formalmente, torniamo alla precedente consuetudine dell'ordine $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t$ per le variabili lagrangiane, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ per le variabili hamiltoniane.

Dato un sistema oloonomo con coordinate lagrangiane $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$ e con funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ il funzionale (3.2) prende il nome di **azione Hamiltoniana**:

$$I[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt. \quad (3.56)$$

Per il calcolo dell'azione è necessario conoscere le funzioni $\mathbf{q}(t)$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$: l'azione dipende dunque dal moto del sistema.

Riconosciamo nelle equazioni (3.14) le **equazioni del moto di Lagrange del secondo tipo**. Dunque, le possibili traiettorie del moto corrispondente alla Lagrangiana \mathcal{L} sono gli archi estremali dell'integrale (3.56). Si osservi che **condizione di differenziabilità di Hilbert** di non singolarità (3.18) consiste proprio nella (1.11): $\det (J_{\dot{\mathbf{q}}} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}) \neq 0$.

Abbiamo poi già osservato che la **condizione di Du Bois–Reymond** (3.19) non è altro che il **teorema generalizzato dell'energia** (1.47).

La (3.30) assume invece il significato di **variazione dell'azione**, quando gli estremi P_1 e P_2 percorrono le curve $(\mathbf{q}_1(\tau), t_1(\tau))$ e $(\mathbf{q}_2(\tau), t_2(\tau))$ rispettivamente, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, e il cammino di integrazione $\widehat{P_1 P_2}$ coincide con l'arco estremale che unisce i due punti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\int_{t_0(\tau)}^{t_1(\tau)} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \right) &= \\ &= \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}|_{P_1} \cdot \mathbf{q}'_1(\tau) + (\mathcal{L} - \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L})|_{P_1} t'_1(\tau) - \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}|_{P_0} \cdot \mathbf{q}'_0(\tau) - (\mathcal{L} - \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L})|_{P_0} t'_0(\tau), \end{aligned} \quad (3.57)$$

dove si è indicato sinteticamente con $|_{P_1}$ e $|_{P_0}$ il fatto che le funzioni \mathcal{L} e $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}$ vanno calcolate in quel punto della curva e con le pendenze $\dot{\mathbf{q}}$ degli archi estremali, ovvero delle soluzioni delle equazioni di moto.

Vediamo ora in che senso si può basare il principio di base nello studio del moto sulla stazionarietà del funzionale azione.

Il significato delle variazioni $\mathbf{y} = \mathbf{q} + a\eta$ con $\eta \in \mathcal{A}$ considerate in (3.6) è evidente: si tratta di perturbazioni del moto \mathbf{q} che mantengono inalterate la posizione iniziale $\mathbf{q}(t_1)$ e quella finale $\mathbf{q}(t_2)$.

Il teorema 3.1 riletto in questo contesto costituisce il **principio variazionale di Hamilton** nella versione Lagrangiana:

Nella classe dei moti perturbati che non modificano la posizione iniziale e finale del sistema, l'azione hamiltoniana è stazionaria in $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$ se e solo se il moto $\bar{\mathbf{q}}(t)$ verifica le equazioni di Lagrange del secondo tipo.

Il moto $\bar{\mathbf{q}}(t)$ viene detto **moto naturale**.

L'importanza concettuale del principio di Hamilton (detto anche **dell'azione stazionaria**) consiste proprio nel poter assumere come punto di partenza nello studio del moto il fatto che esso deve rendere stazionario il funzionale azione. L'approccio variazionale allo studio del moto consiste dunque nel definire una Lagrangiana che rispetti i fondamenti di una certa teoria. L'assunzione che il moto naturale deve rendere stazionaria la corrispondente azione fa discendere le corrette equazioni di moto, ovvero le equazioni di Eulero.

Nel caso di un moto conservativo in cui $\mathcal{L} = T + U = T - V$, vediamo che l'azione hamiltoniana è la media nel tempo dello scarto fra energia cinetica ed energia potenziale: il principio di Hamilton asserisce che questo scarto deve essere stazionario per un moto naturale.

Come si è già osservato, non è detto che il moto naturale realizzi un minimo, ovvero non è detto che valga (3.3): lo studio delle condizioni che rendono il punto stazionario effettivamente un estremo (un massimo o un minimo) è un argomento classico nel calcolo delle variazioni, le basi del quale sono state fornite da Jacobi. Per il nostro obiettivo, è sufficiente mettere in evidenza come si possa fondare il principio della Meccanica nella stazionarietà di un funzionale: dal punto di vista teorico, questo fatto sostituisce l'ipotesi (assunta nel formalismo lagrangiano della I Parte) dell'equazione simbolica della dinamica come punto di partenza nello studio del moto.

Se anziché (3.56) utilizziamo il funzionale (3.24) per scrivere l'azione hamiltoniana, otteniamo il principio di Hamilton nel formalismo hamiltoniano: la stazionarietà di (3.24) (nelle variabili hamiltoniane (\mathbf{p}, \mathbf{q})) è equivalente alle equazioni canoniche (1.24). Va tuttavia notato che nell'Lagrangiana f in (3.2) le funzioni $\dot{\mathbf{q}}$ e \mathbf{p} sono legate dalla trasformazione di Legendre $\dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}}H$, dunque non possono subire variazioni arbitrarie. Questo inconveniente è comunque facilmente aggirabile e non ci soffermeremo sulla questione.

3.5 L'invariante integrale di Poincaré–Cartan

Data una Hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, si definisce la 1-forma differenziale nello spazio nelle variabili $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, ovvero nello spazio delle fasi esteso:

$$\omega = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)dt. \quad (3.58)$$

La 1-forma differenziale (3.58), di fondamentale importanza nella meccanica hamiltoniana, viene detta **forma differenziale di Poincaré–Cartan**.

Calcoliamo la matrice (6.36) della forma. Dato che (vedi (6.11))

$$J_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}(\mathbf{0}, \mathbf{p}, -H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\ell \times \ell} & \mathbf{0}_{\ell \times \ell} & \mathbf{0}_{\ell} \\ \mathbf{I}_{\ell \times \ell} & \mathbf{0}_{\ell \times \ell} & \mathbf{0}_{\ell} \\ -(\nabla_{\mathbf{p}}H)^T & -(\nabla_{\mathbf{q}}H)^T & \frac{\partial H}{\partial t} \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{I}_{\ell \times \ell}$, $\mathbf{0}_{\ell \times \ell}$, $\mathbf{0}_{\ell}$ indicano rispettivamente la matrice identità, la matrice nulla di ordini ℓ e il vettore colonna nullo di lunghezza ℓ , si trova:

$$\mathcal{M} = J_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}(\mathbf{0}, \mathbf{p}, -H) - [J_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}(\mathbf{0}, \mathbf{p}, -H)]^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\ell \times \ell} & -\mathbf{I}_{\ell \times \ell} & \nabla_{\mathbf{p}}H \\ \mathbf{I}_{\ell \times \ell} & \mathbf{0}_{\ell \times \ell} & \nabla_{\mathbf{q}}H \\ -(\nabla_{\mathbf{p}}H)^T & -(\nabla_{\mathbf{q}}H)^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Si vede subito che \mathcal{M} ha rango 2ℓ , dunque la forma di Poincaré–Cartan è **non singolare**. Inoltre, le **linee di rotore** (6.38) ad essa associate coincidono con le soluzioni del sistema di Hamilton (1.24) (verificare per esercizio).

L'integrazione della forma (3.58) lungo un cammino

$$\Gamma : (\mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha), t(\alpha)) \subseteq \mathbb{R}^{2\ell+1}, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad (3.60)$$

nello spazio delle fasi esteso delle variabili $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ consiste nel calcolare

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\mathbf{p}(\alpha) \cdot \mathbf{q}'(\alpha) - H(\mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha), t(\alpha)) t'(\alpha)] d\alpha. \quad (3.61)$$

Se pensiamo alle regole di trasformazione $\mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H$, $\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}$, non può sfuggire l'analogia dell'integrale appena scritto con l'integrale di Hilbert (3.34).

In effetti, assegnato il cammino (3.60), è ovviamente fissato il cammino $\gamma : (\mathbf{q}(\alpha), t(\alpha))$, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, nello spazio in $\mathbb{R}^{\ell+1}$ delle variabili (\mathbf{q}, t) . D'altra parte, dato che in ogni punto dello spazio delle fasi hamiltoniano esteso passa una ed una sola soluzione di (1.24), le componenti $\mathbf{p}(\alpha)$ assegnano a ciascun punto di γ la funzione pendenza che chiamiamo $\dot{\mathbf{q}}(\alpha)$, mediante le posizioni $\dot{\mathbf{q}}(\alpha) = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha), t(\alpha))$. Si ha, dalla (3.39):

$$I^*[\gamma] = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \{ \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \mathbf{q}'(\alpha) + [\mathcal{L} - \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\alpha)] \} d\alpha$$

dove \mathcal{L} , $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}$ vanno calcolati in $(\mathbf{q}(\alpha), \dot{\mathbf{q}}(\alpha), t(\alpha))$. Tenendo presente che $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}(\alpha), \dot{\mathbf{q}}(\alpha), t(\alpha)) = \mathbf{p}(\alpha)$ e che $\mathcal{L} - \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\alpha) = H(\mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha), t(\alpha))$, si ottiene precisamente l'integrale (3.61):

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = I^*[\gamma]. \quad (3.62)$$

Il punto fondamentale consiste ora nel rileggere la proprietà (3.38). Per fare questo, descriviamo il procedimento di costruzione del cilindro di soluzioni nello spazio delle fasi hamiltoniano esteso Π delle variabili $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$.

Fissiamo una **curva chiusa** e semplice nello spazio Π , ovvero una curva di Jordan:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(a)} : \mathbf{p} &= \mathbf{p}^{(a)}(\alpha), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(a)}(\alpha), \quad t = t^{(a)}(\alpha), \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \\ \mathbf{p}^{(a)}(\alpha_0) &= \mathbf{p}^{(a)}(\alpha_1), \quad \mathbf{q}^{(a)}(\alpha_0) = \mathbf{q}^{(a)}(\alpha_1), \quad t^{(a)}(\alpha_0) = t^{(a)}(\alpha_1), \\ \mathbf{p}^{(a)}(\alpha), \mathbf{q}^{(a)}(\alpha), t^{(a)}(\alpha) &\neq \mathbf{p}^{(a)}(\beta), \mathbf{q}^{(a)}(\beta), t^{(a)}(\beta) \quad \text{se } \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta \in [\alpha_0, \alpha_1]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ciascun punto sulla curva viene fissato come punto di partenza della soluzione del sistema di Hamilton (1.24), ciascuna delle quali è univocamente determinata. In formule, si risolve per ogni $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(t, \alpha) = -\nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{p}(t, \alpha), \mathbf{q}(t, \alpha), t), & t \geq t^{(a)}(\alpha), \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t, \alpha) = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}(t, \alpha), \mathbf{q}(t, \alpha), t), & t \geq t^{(a)}(\alpha) \end{cases} \quad (3.64)$$

associato alle condizioni iniziali

$$\mathbf{p}(t^{(a)}(\alpha), \alpha) = \mathbf{p}^{(a)}(\alpha), \quad \mathbf{q}(t^{(a)}(\alpha), \alpha) = \mathbf{q}^{(a)}(\alpha). \quad (3.65)$$

Otteniamo il cosiddetto **cilindro di soluzioni** uscenti da $\Gamma^{(a)}$, contenuto nello spazio delle fasi hamiltoniano esteso Π e di equazioni parametriche

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \alpha), \mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \alpha), \quad t = t \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad t \geq t^{(a)}(\alpha). \quad (3.66)$$

Per ogni valore α fissato in $[\alpha_0, \alpha_1]$ si ottiene una generatrice del cilindro che corrisponde alla soluzione di (3.64), (3.65) nello spazio Π . Dato che la curva $\Gamma^{(a)}$ è chiusa, le soluzioni per $\alpha = \alpha_0$ e $\alpha = \alpha_1$ coincidono:

$$\mathbf{q}(t, \alpha_0) = \mathbf{q}(t, \alpha_1), \quad \mathbf{p}(t, \alpha_0) = \mathbf{p}(t, \alpha_1), \quad t \geq t^{(a)}.$$

L'unicità delle soluzioni assicura che le generatrici non si intersechino in alcun punto di Π . Integriamo la forma (3.58) lungo $\Gamma^{(a)}$. Dalla (3.62), si ha

$$\int_{\Gamma^{(a)}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = I^*[\gamma^{(a)}], \quad (3.67)$$

dove $\gamma^{(a)}$ è la curva $(\mathbf{q}^{(a)}(\alpha), t^{(a)}(\alpha))$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, e l'integrale di Hilbert è da calcolarsi come

$$I^*[\gamma^{(a)}] = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left\{ \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot (\mathbf{q}^{(a)})'(\alpha) + \left[\mathcal{L} - \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t^{(a)}, \alpha) \right] \right\} d\alpha \quad (3.68)$$

dove \mathcal{L} , $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}$ vanno calcolate in $\left(\mathbf{q}^{(a)}(\alpha), \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t^{(a)}, \alpha), t^{(a)}(\alpha) \right)$, ovvero con le pendenze date dalla soluzione di (3.64).

Si considera poi sul cilindro una seconda curva $\Gamma^{(b)}$ costruita come segue. Si fissa su ogni generatrice un punto di Π , ovvero si precisa per ogni $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ un valore della soluzione al tempo $t = t^{(b)}(\alpha) \geq t^{(a)}(\alpha)$, in modo che la collezione dei punti selezionati formi una curva continua. Si noti che la curva è sicuramente semplice. In forma parametrica, possiamo rappresentare $\Gamma^{(b)}$ mediante opportune funzioni continue

$$\Gamma^{(b)} : \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(b)}(\alpha), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(b)}(\alpha), \quad t = t^{(b)}(\alpha), \quad \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1.$$

Calcolando ora l'integrale della forma di Poincaré–Cartan (3.58) lungo la curva $\Gamma^{(b)}$ e tenendo conto di (3.67), possiamo scrivere:

$$\int_{\Gamma^{(b)}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt - \int_{\Gamma^{(a)}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = I^*[\gamma^{(b)}] - I^*[\gamma^{(a)}], \quad (3.69)$$

dove $I^*[\gamma^{(b)}]$ è definito esattamente come in (3.68), salvo sostituire l'apice (a) con (b) , ovvero considerando le pendenze delle soluzioni quando intercettano la curva $\Gamma^{(b)}$.

E' facile rendersi conto che siamo nelle condizioni di poter applicare la (3.38), dato che $\gamma^{(a)}$, $\gamma^{(b)}$ sono entrambe curve chiuse. Le soluzioni (ovvero le generatrici del cilindro) nello spazio Γ corrispondono agli archi di Eulero (nello spazio delle variabili (\mathbf{q}, t)) che nella (3.35) abbiamo indicato con $E(\alpha)$.

Essendo dunque $I^*[\gamma^{(b)}] - I^*[\gamma^{(a)}]$, si trova dalla (3.62)

$$\int_{\Gamma^{(b)}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \int_{\Gamma^{(a)}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt. \quad (3.70)$$

La (3.70), che avrà uno sviluppo notevole nello studio seguente dei sistemi Hamiltoniani, esprime l'importante proprietà di **invarianza** dell'integrale della forma (3.58) quando il percorso chiuso di integrazione viene spostato lungo le generatrici del cilindro. Il risultato esteso ad una qualsiasi forma differenziale non singolare è noto come **lemma di Stokes**. In questo caso, si parla di scorrimento del cammino di integrazione lungo le **linee di rotore** (vedi (6.38)) della forma.

Si osservi che lo spostamento del cammino di integrazione non avviene necessariamente tramite il flusso \mathcal{F}_H del sistema hamiltoniano, ovvero $\Gamma^{(b)} \neq \mathcal{F}_H(\Gamma^{(a)})$: è sufficiente che $\Gamma^{(b)}$ sia una curva continua semplice e chiusa attorno al cilindro delle soluzioni in Γ , ovvero che sia una direttrice del cilindro. E' evidente anche il fatto che la medesima proprietà vale se si considerano tempi $t < t^{(a)}(\alpha)$ (cioè se $\Gamma^{(b)}$ collezione stati temporali più piccoli rispetto alla curva data).

La (3.70) assume un ruolo particolarmente importante nella Meccanica hamiltoniana e avrà la valenza di un principio variazionale: dimostreremo che non solo è una condizione necessaria affinché un sistema sia hamiltoniano, ma la sua validità in un sistema di equazioni differenziali implica la struttura hamiltoniana del sistema stesso.

Riassumiamo questo risultato centrale nella seguente

Proposizione 3.1 Dato il sistema hamiltoniano (1.24) di Hamiltoniana H , l'integrale della forma (3.58), ovvero

$$I_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) dt \quad (3.71)$$

calcolato lungo un contorno arbitrario chiuso e semplice \mathcal{C} nello spazio delle fasi esteso $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ non cambia il suo valore nel caso di uno spostamento arbitrario del contorno lungo il cilindro di soluzioni che ha come direttrice \mathcal{C} .

L'integrale (3.71) si dice **invariante integrale di Poincaré–Cartan**.

3.6 L'invarianza dell'integrale di Poincaré–Cartan come caratterizzazione dei sistemi Hamiltoniani

Dimostriamo ora la proposizione inversa, ovvero che l'invarianza dell'integrale curvilineo di Poincaré–Cartan rispetto alle traiettorie di un certo sistema di equazioni differenziali comporta la struttura Hamiltoniana del sistema medesimo.

Proposizione 3.2 Siano dati un sistema di equazioni differenziali di ordine 2ℓ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) \quad (3.72)$$

e la forma 1-differenziale

$$\omega = \sum_{i=1}^{\ell} x_i dx_{i+\ell} - H(x_1, \dots, x_{2\ell}, t) dt. \quad (3.73)$$

Se l'integrale $I_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} \omega$ è invariante rispetto a tutti i percorsi semplici e chiusi che si appoggiano sul medesimo cilindro di soluzioni di (3.72) nello spazio delle fasi esteso $\Pi \subseteq \mathbb{R}^{2\ell+1}$, allora il sistema è Hamiltoniano con Hamiltoniana la funzione H che compare in (3.73), ovvero $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, t)$.

Dim. Eseguiamo il cambiamento di variabili $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, $\tau = \tau(\mathbf{x}, t)$ con funzione inversa $t = t(\mathbf{X}, \tau)$ e poniamo $\frac{dt}{d\tau} = \mu(\mathbf{X}, \tau)$. Bisogna pensare a μ come una funzione arbitraria nello spazio delle fasi esteso (\mathbf{X}, τ) , in quanto il cambiamento di scale temporale è arbitrario. Il sistema (3.72) diventa (vedi (6.22))

$$\mathbf{X}'(\tau) = \mathbf{Y}(\mathbf{X}, t(\mathbf{X}, \tau))\mu(\mathbf{X}, \tau) = \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \tau)\mu(\mathbf{X}, \tau), \quad (3.74)$$

con $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{Y}(\mathbf{X}, t(\mathbf{X}, \tau))$.

Se $(\mathbf{x}^{(a)}(\alpha), t^{(a)}(\alpha))$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ parametrizza il contorno chiuso \mathcal{C} , si considera ciascun punto di \mathcal{C} come punto iniziale per risolvere (3.74). La curva dei dati iniziali nelle nuove variabili è

$$\tilde{\mathcal{C}}: \left(\mathbf{X}^{(a)}(\alpha), \tau^{(a)}(\alpha) \right) \quad \mathbf{X}^{(a)}(\alpha) = \mathbf{x}(\alpha), \quad \tau^{(a)}(\alpha) = \tau(\mathbf{x}^{(a)}(\alpha), t^{(a)}(\alpha)).$$

Risolvendo il sistema (3.74) con ciascuna delle condizioni iniziali, si determina il cilindro di soluzioni in $\mathbb{R}^{2\ell+1}$ che è rappresentabile con equazioni parametriche del tipo $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\tau, \alpha)$, $\tau = \tau$: il parametro α seleziona una particolare traiettoria con dato iniziale sulla curva chiusa $\tilde{\mathcal{C}}$ (ovvero seleziona una generatrice del cilindro), mentre il parametro τ determina un punto di questa traiettoria. Se dunque si fissa un valore di τ , al variare del parametro α si ottengono curve chiuse che si appoggiano sulle generatrici del cilindro.

L'integrale (3.71) $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(\tau)$ lungo una qualunque curva chiusa $\tau = \text{costante}$ è invariante per ipotesi. Dovrà dunque risultare $\frac{d\mathcal{I}_{\mathcal{P}}}{d\tau} = 0$.

E' necessario riscrivere la forma (3.73) nelle nuove variabili (\mathbf{X}, τ) : utilizziamo la (6.35) ottenendo

$$\Omega(\mathbf{X}, \tau) = \sum_{i=1}^{\ell} X_i dX_{\ell+i} - \tilde{H}(\mathbf{X}, \tau) \nabla_{\mathbf{X}} t \cdot d\mathbf{X} - \tilde{H}(\mathbf{X}, \tau) \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau.$$

Nell'integrare Ω lungo la curva $\tilde{\mathcal{C}}$ con $\tau = \text{costante}$, si tenga presente che il vettore tangente alla curva è $((\mathbf{X}^{(a)})'(\alpha), (\tau^{(a)})'(\alpha)) = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha}(\tau, \alpha), 0 \right) \in \mathbb{R}^{2\ell+1}$. Pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I_{\mathcal{P}} &= \frac{d}{d\tau} \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \Omega \cdot d(\mathbf{X}, \tau) = \\ &= \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \left(X_i(\tau, \alpha) \frac{\partial X_{i+\ell}}{\partial \alpha}(\tau, \alpha) \right) - \tilde{H}(\mathbf{X}(\tau, \alpha), \tau) \nabla_{\mathbf{X}} t(\mathbf{X}(\tau, \alpha), \tau) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha} \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Per la prima sommatoria, si ha, ricordando (3.74), integrando per parti, scambiando l'ordine di derivazione e tenendo presente che $\tilde{\mathcal{C}}$ è un percorso chiuso:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sum_{i=1}^{\ell} \left(X_i \frac{\partial X_{i+\ell}}{\partial \alpha} \right) d\alpha &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial X_i}{\partial \tau} \frac{\partial X_{i+\ell}}{\partial \alpha} + X_i \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial X_{i+\ell}}{\partial \tau} \right) d\alpha = \\ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sum_{i=1}^{\ell} \left(\tilde{Y}_i \frac{\partial X_{i+\ell}}{\partial \alpha} - \tilde{Y}_{i+\ell} \frac{\partial X_i}{\partial \alpha} \right) \mu d\alpha, \end{aligned}$$

dove $(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{2\ell}) = \tilde{\mathbf{Y}}$.

Per quanto riguarda il restante termine, osserviamo che $\nabla_{\mathbf{X}} t(\mathbf{X}(\tau, \alpha), \tau) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha} = \frac{\partial t}{\partial \alpha}(\mathbf{X}(\tau, \alpha), \tau)$. Inoltre, sempre invertendo l'ordine di derivazione e integrando per parti si trova:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \tilde{H} \frac{\partial t}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\frac{d\tilde{H}}{d\tau} \frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} \mu \right) d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\frac{d\tilde{H}}{d\tau} \nabla_{\mathbf{X}} t - \mu \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{H} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Utilizziamo ora (6.24) (terza e quarta riga) e (6.26) per trovare:

$$\nabla_{\mathbf{X}} t = -\frac{\partial t}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{X}} \tau, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1, \quad \frac{d\tilde{H}}{d\tau} = \mu \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}.$$

Dunque:

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tau} \nabla_{\mathbf{X}} t = \mu \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \left(-\frac{\partial t}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{X}} \tau \right) = -\mu \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{X}} \tau.$$

Complessivamente abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I_{\mathcal{P}} &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \left(\tilde{Y}_i \frac{\partial X_{i+\ell}}{\partial \alpha} - \tilde{Y}_{i+\ell} \frac{\partial X_i}{\partial \alpha} \right) + \left(\nabla_{\mathbf{X}} \tilde{H} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{X}} \tau \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha} \right] \mu d\alpha = \\ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left[\left(\mathcal{I} \tilde{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{H} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{X}} \tau \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha} \right] \mu d\alpha = \int_{\tilde{\mathcal{C}}_0} \mu \left(\mathcal{I} \tilde{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{H} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{X}} \tau \right) \cdot d\mathbf{X} = 0 \end{aligned}$$

essendo $\tilde{\mathcal{C}}_0$ il cammino chiuso $(\mathbf{X}^{(a)})'(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^{2\ell}$ nello spazio $\tau = \text{costante}$.

Dunque, la forma $\mu(\mathbf{X}, \tau) W(\mathbf{X}, \tau) \cdot d\mathbf{X}$ con $W(\mathbf{X}, \tau) = \left(\mathcal{I} \tilde{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{H} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{X}} \tau \right) \cdot d\mathbf{X}$ è chiusa e, supponendo il dominio semplicemente connesso, deve essere esatta. Essendo μ funzione arbitraria, questo è possibile solo se $W \equiv 0$. Mediante la (6.30), è semplice verificare che la scrittura della forma W nelle variabili di partenza (\mathbf{x}, t) è $(\mathcal{I} \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t)) \cdot d\mathbf{x}$, dunque deve essere $\mathbf{Y} = \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} H$, come volevamo dimostrare. \square

Esercizio 3.4 Verificare che, se la forma $\nu(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$, con ν funzione scalare arbitraria, è esatta, allora ω è la forma nulla.

Le Proposizioni 3.1 e 3.2 mostrano che la conservazione dell'integrale della forma di Poincaré–Cartan lungo i percorsi che si appoggiano al medesimo cilindro di soluzioni è una **proprietà esclusiva** dei **sistemi hamiltoniani**: l'invarianza dell'integrale di Poincaré–Cartan, da cui deriva il fatto che il moto del sistema obbedisca alle equazioni canoniche di Hamilton (con Hamiltoniana H che compare nella funzione integranda) può essere dunque posta come **Principio della Meccanica**: l'ipotesi di invarianza dell'integrale curvilineo rispetto ai cammini chiusi attorno ai cilindri di soluzioni implica che le equazioni di moto (ovvero le equazioni che danno luogo ai cilindri in Π) sono quelle canoniche di Hamilton, con l'Hamiltoniana H che compare nella forma dell'integranda.

Concludiamo il Paragrafo evidenziando una prima conseguenza della Proposizione 3.3,

Corollario 3.2 Se l'Hamiltoniana H ha ν variabili cicliche $q_{\ell-\nu+1}, \dots, q_\ell$, con $1 \leq \nu \leq \ell$, allora, posto $\lambda = \ell - \nu$, il moto del sistema è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_\lambda = -\nabla_{\mathbf{q}_\lambda} H_0(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda, t), \\ \dot{\mathbf{q}}_\lambda = \nabla_{\mathbf{p}_\lambda} H_0(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda, t) \end{cases} \quad (3.75)$$

dove

$$\mathbf{p}_\lambda = (p_1, \dots, p_\lambda) \in \mathbb{R}^\lambda \quad \mathbf{q}_\lambda = (q_1, \dots, q_\lambda) \in \mathbb{R}^\lambda \quad (3.76)$$

e

$$H_0(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda, t) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}_\lambda, t)|_{p_j=p_j^0, j=\ell-\nu+1, \dots, \ell}, \quad (3.77)$$

essendo p_j^0 , $j = \ell - \nu + 1, \dots, \ell$, le variabili cinetiche costanti associate alle variabili cicliche $q_{\ell-\nu+1}, \dots, q_\ell$.

Dim. Nello spazio delle fasi esteso Π si considera il sottoinsieme

$$\Pi_0 = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \in \Pi : p_j = p_j^0, j = \ell - \nu + 1, \dots, \ell\}$$

che è invariante rispetto al flusso di H .

Il calcolo di (3.71) lungo un qualunque percorso chiuso $\mathcal{C} \subset \Pi_0$ parametrizzato come

$$\mathcal{C} : (\mathbf{p}(\alpha)|_{p_j(\alpha)=p_j^0, j=\ell-\nu+1, \dots, \ell}, \mathbf{q}(\alpha), t(\alpha))$$

consiste in

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}'(\alpha) - H t'(\alpha)] d\alpha = \\ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} [\mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{q}'_\lambda(\alpha) - H_0 t'(\alpha)] d\alpha = \int_{\mathcal{C}_\lambda} \mathbf{p}_\lambda \cdot d\mathbf{q}_\lambda - H_0(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda, t) dt \end{aligned} \quad (3.78)$$

(tenere presente che $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p_j^0 q_j'(\alpha) d\alpha = 0$, $j = \ell - \nu + 1, \dots, \ell$), dove $\mathcal{C}_\lambda : (\mathbf{p}_\lambda(\alpha), \mathbf{q}_\lambda(\alpha), t(\alpha))$ è il cammino in $\mathbb{R}^{2\lambda+1}$ che si ottiene da \mathcal{C} mediante le (3.76) e $H_0(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda, t)$ è l'Hamiltoniana nelle $2\lambda + 1$ variabili definita nell'enunciato.

Se dunque si considera lo spazio $\Pi_\lambda = \{(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda, t)\} \subseteq \mathbb{R}^{2\lambda+1}$ delle variabili non cicliche e dei corrispondenti momenti, possiamo leggere la (3.78) come l'invarianza della forma

$$\omega_\lambda(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda, t) = \mathbf{p}_\lambda \cdot d\mathbf{q}_\lambda - H_0 dt \quad (3.79)$$

rispetto allo spostamento del cammino chiuso \mathcal{C}_λ lungo i cilindri di soluzioni ristretti a Π_λ , di equazioni parametriche (vedi (3.66)) $(\mathbf{p}_\lambda(t, \alpha), \mathbf{q}_\lambda(t, \alpha), t)$.

La Proposizione 3.2 assicura che il moto ristretto a Π_λ è ancora hamiltoniano e che H_0 che compare nella forma ω_λ è la corrispondente Hamiltoniana. \square

Una volta integrate le equazioni 3.75), l'evoluzione nel tempo delle variabili cicliche è determinato dalle equazioni:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} (\mathbf{p}_\lambda(t), p_{\ell-\nu+1}, \dots, p_\ell, \mathbf{q}_\lambda(t), t) \Big|_{p_j=p_j^0, j=\ell-\nu+1, \dots, \ell}, \quad \ell - \nu + 1 \leq k \leq \ell. \quad (3.80)$$

Si è senz'altro notato che il risultato appena dimostrato non è altro che un modo alternativo di introdurre le equazioni di Hamilton ridotte (1.62).

3.7 Restrizione a stati simultanei e invariante universale

Per la dimostrazione della Proposizione 3.2 si è utilizzato il cambiamento di variabili $t = t(\mathbf{x}, \tau)$ in modo da ottenere un percorso chiuso arbitrario che si appoggia alle generatrici del cilindro. Se avessimo utilizzato la variabile t e proceduto con lo stesso ragionamento, avremmo fatto un uso solo parziale dell'invarianza dell'integrale, considerando le sole curve di stati simultanei $t = \text{costante}$.

Va tuttavia rimarcato che il risultato della Proposizione 3.2 può essere in effetti dimostrato anche limitandosi alla sottoclasse dei contorni \mathcal{C} di **stati simultanei del sistema**, nel senso che andiamo a precisare.

Dato un cilindro di soluzioni nello spazio Γ , si considerano i contorni \mathcal{C}_{t_0} individuati dall'intersezione del cilindro con l'iperpiano $t = t_0$, t_0 costante.

La curva \mathcal{C}_{t_0} è parametrizzata come

$$\mathcal{C}_{t_0} : \left(\mathbf{p}^{(t_0)}(\alpha), \mathbf{q}^{(t_0)}(\alpha), t_0 \right), \quad (3.81)$$

dunque l'integrale (3.71) si riduce a

$$I_{\mathcal{P}}^0 = \int_{\mathcal{C}_{t_0}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}. \quad (3.82)$$

Mettiamo già da ora in evidenza il fatto che (3.82) corrisponde all'integrazione lungo \mathcal{C}_{t_0} della 1-**forma differenziale**

$$\omega_0 = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad (3.83)$$

nelle variabili (\mathbf{p}, \mathbf{q}) dello spazio delle fasi hamiltoniano (non esteso).

Dimostriamo ora la seguente

Proposizione 3.3 *Se per il sistema di equazioni differenziali (3.72) l'integrale (3.82) è invariante rispetto agli spostamenti simultanei del contorno (3.81), allora il sistema è Hamiltoniano, ovvero esiste $H(\mathbf{x}, t)$ tale che $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, t)$.*

Viceversa, se il sistema è Hamiltoniano, allora esso ammette l'invariante integrale (3.82).

Dim. La dimostrazione è del tutto analoga a quella svolta per dimostrare la Proposizione 3.2. Nel caso che stiamo esaminando non è necessario introdurre la variabile τ , dato che ciascun contorno corrisponde a t costante. In base alla Proposizione 3.2, che è ovviamente valida anche per questo tipo di contorni, sappiamo che se il sistema è Hamiltoniano, allora l'integrale (3.82) non cambia il suo valore modificando il supporto \mathcal{C}_0 lungo le generatrici del cilindro, in particolare trasferendo il supporto medesimo su un iperpiano $t = t_1$, con t_1 costante. Dunque, la necessità dell'invarianza di (3.82) è ovvia.

D'altra parte, se l'integrale (3.82) è invariante rispetto a spostamenti simultanei del percorso, si ha, svolgendo l'integrazione per parti, ricordando che \mathcal{C}_0 è una curva chiusa e chiamando $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{Y} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ per comodità:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \frac{d}{dt} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \mathbf{p}(t, \alpha) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}(t, \alpha) d\alpha = \\ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} - \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} \right) d\alpha = \oint_{\hat{\mathcal{C}}_t} \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot d\mathbf{p} - \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Come nella Proposizione 3.2, $(\mathbf{p}(t, \alpha), \mathbf{q}(t, \alpha), t)$ parametrizza la superficie del cilindro di soluzioni, dunque

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}.$$

La (3.84) afferma che, per ogni t fissato, l'integrale della 1-forma differenziale nelle 2ℓ variabili (\mathbf{p}, \mathbf{q})

$$-\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot d\mathbf{p} + \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot d\mathbf{q} \quad (3.85)$$

è nullo per ogni percorso chiuso (data l'arbitrarietà di \mathcal{C}_{t_0}) nello spazio delle fasi (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , dunque la forma è esatta. Esiste pertanto una funzione $K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ tale che

$$\nabla_{\mathbf{p}} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = -\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad \nabla_{\mathbf{q}} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$$

ovvero $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) = -\mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, t)$, Si conclude che il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ è Hamiltoniano con Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, t) = -K(\mathbf{x}, t)$. \square

L'integrale (3.82) fu introdotto da Poincaré. In seguito, Cartan estese l'integrale a contorni formati da stati non simultanei e aggiungendo il termine $-Hdt$.

Si osservi bene che nella (3.85) la variabile t viene considerata costante, pur essendo presente fra gli argomenti dei coefficienti.

Questo punto di vista si basa su una definizione precisa, che prende il nome di **differenziale virtuale**.

Il differenziale \bar{d} di una funzione $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ fatto solo rispetto alle variabili \mathbf{p}, \mathbf{q} :

$$\bar{d}f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot d\mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{q}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot d\mathbf{q} = df \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) - \frac{\partial f}{\partial t} \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) dt \quad (3.86)$$

si dice **differenziale virtuale**, o **differenziale a tempo bloccato** della funzione f . In (3.86) df è il differenziale rispetto a tutte le 2ℓ variabili $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. La (3.85) corrisponde dunque a scrivere $\bar{d}K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$.

Nello spazio delle fasi $\Pi_0 \subseteq \mathbb{R}^{2\ell}$ delle variabili (\mathbf{p}, \mathbf{q}) l'invarianza di (3.82) ha il seguente significato geometrico.

Il cammino chiuso $\mathcal{C}_0 \subseteq \Pi$ (spazio esteso) definisce un contorno \mathcal{D}_0 in Π_0 di stati simultanei. Ad un istante distinto t_1 , il cilindro delle soluzioni è intercettato dall'iperpiano $t = t_1$ in un secondo cammino chiuso di stati simultanei \mathcal{C}_1 sull'iperpiano $t = t_1$, a cui corrisponde il contorno \mathcal{D}_1 nello spazio Π_0 .

La proiezione di \mathcal{D}_0 su ciascun piano bidimensionale delle coppie di coordinate (p_i, q_i) , $i = 1, \dots, \ell$ dà luogo ad un contorno chiuso $\mathcal{D}_0^{(i)}$ che racchiude un'area pari a

$$\oint_{\mathcal{D}_0^{(i)}} p_i dq_i \quad (3.87)$$

(ricordare la formula di Green nel piano

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\delta \mathcal{R}} f dx + g dy$$

dove l'integrale curvilineo è calcolato lungo il contorno della regione piana \mathcal{R}).

Dunque, l'invarianza di $I_{\mathcal{C}}^0$ significa che la somma algebrica delle aree (3.87) non varia, passando dal contorno \mathcal{D}_0 al contorno \mathcal{D}_1 .

Dato che la funzione H non appare nell'invariante $I_{\mathcal{P}}^0$, esso viene detto **invariante integrale universale**.

L'invarianza si riferisce ai contorni di tipo (3.81) di stati simultanei $t = t_0$, spostati dal flusso delle soluzioni del sistema in altri contorni di stati simultanei $t = t_1$.

Gli integrali (3.71) e (3.82) si dicono anche **invarianti integrali relativi del primo ordine**. Il termine "primo ordine" si riferisce al fatto che riguardano l'integrazione di una 1-forma differenziale, mentre "relativo" è in relazione al fatto che il dominio di integrazione è un contorno chiuso.

Unendo i risultati delle Proposizioni 3.1, 3.2 e 3.3 possiamo concludere che le tre affermazioni

- (a) il sistema (3.72) è Hamiltoniano,
- (b) il sistema (3.72) ammette l'invariante integrale (3.71),
- (c) il sistema (3.72) ammette l'invariante integrale (3.82)

sono equivalenti.

3.8 Il teorema di Lee Wha–Chung

Vale il seguente importante teorema, che stabilisce in sostanza l'unicità dell'invariante integrale di Poincaré–Cartan.

Teorema 3.3 (di Lee Hwa–chung) *Se*

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot d\mathbf{p} + \mathbf{B}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot d\mathbf{q} \quad (3.88)$$

è un invariante integrale universale relativo, allora $I = cI_{\mathcal{P}}^0$, dove c è una costante e $I_{\mathcal{P}}^0$ è l'integrale di Poincaré–Cartan (3.82).

Dim. La dimostrazione viene svolta solo per il caso $\ell = 1$. Per dimensioni maggiori il procedimento è analogo ed è lasciato per esercizio. Si consideri dunque un invariante integrale universale

$$I = \oint_{\gamma} A(p, q, t)dp + B(p, q, t)dq,$$

dove il contorno chiuso di integrazione γ è nel piano delle fasi (p, q) .

Sia dato un qualunque sistema hamiltoniano

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

e le corrispondenti soluzioni $p = p(t, p_0, q_0)$, $q = q(t, p_0, q_0)$.

Parametizziamo mediante α un contorno chiuso \mathcal{C}_0 sul piano delle fasi (p, q)

$$p = p_0(\alpha), \quad q = q_0(\alpha), \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad p_0(\alpha_0) = p_0(\alpha_1), \quad q_0(\alpha_0) = q_0(\alpha_1).$$

Le soluzioni del sistema hamiltoniano passanti per i punti della curva, ovvero

$$q = q(t, q_0(\alpha), p_0(\alpha)), \quad p = p(t, p_0(\alpha), q_0(\alpha)), \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$$

formano nello spazio $\Pi = (p, q, t)$ il cilindro di soluzioni che indichiamo più brevemente mediante le equazioni parametriche $q = q(t, \alpha)$, $p = p(t, \alpha)$, $t = t$.

L'integrale (3.88) calcolato lungo un percorso \mathcal{C} individuato da un istante $t = \text{costante}$ si scrive

$$I = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(A(p(t, \alpha), q(t, \alpha), t) \frac{\partial}{\partial \alpha} p(t, \alpha) + B(p(t, \alpha), q(t, \alpha), t) \frac{\partial}{\partial \alpha} q(t, \alpha) \right) d\alpha.$$

Dato che l'integrale è invariante, si ha:

$$0 = \frac{dI}{dt} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\frac{dA}{dt} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + A \frac{d}{dt} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{dB}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + B \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) d\alpha.$$

Integrando per parti il secondo e il quarto termine, tenendo presente che

$$A \frac{dp}{dt} \Big|_{\alpha_0}^{\alpha_1} = -A \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{\alpha_0}^{\alpha_1} = 0,$$

analogamente per $B \frac{dq}{dt}$ e che, per $N = A, B$

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\partial N}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial N}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \frac{\partial N}{\partial \alpha} = \frac{\partial N}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial N}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha}$$

si trova infine:

$$0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\left(\frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\left(Z \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \left(Z \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) d\alpha$$

avendo chiamato

$$Z = \frac{\partial A}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p}.$$

Per l'arbitrarietà del percorso di integrazione, l'annullarsi dell'ultimo integrale scritto comporta la condizione di annullamento del rotore:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(Z \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(Z \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

ovvero

$$\frac{\partial Z}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

Dall'arbitrarietà di H discende $\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$. Dunque Z è una funzione costante e $\frac{\partial A}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p} = -c$,

ovvero $\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{B - cp}{\partial p}$. Pertanto, la forma $Adp + (B - cp)dq$ è esatta nel piano (p, q) , considerando la dipendenza esplicita delle funzioni A e B da t come un parametro.

Esiste perciò una funzione $\Phi(p, q, t)$ tale che $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = A(p, q, t)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial q} = B(p, q, t) - cp$. La forma $Adp + (B - cp)dq$ è dunque esatta e $0 = \oint Adp + (B - cp)dq = \oint Adp + Bdq - c \oint pdq = I - cI_{\mathcal{P}}$ dove $I_{\mathcal{P}}^0$ è l'invariante integrale universale relativo (3.82). \square

Il teorema appena dimostrato sarà particolarmente utile nel prossimo Capitolo, dove ci occuperemo della possibilità di operare un cambiamento di variabili nello spazio delle fasi in modo da non alterare la struttura hamiltoniana del sistema delle equazioni di moto.

3.9 Energia e tempo come variabili coniugate

La particolare struttura della forma di Poincaré–Cartan (3.58) suggerisce la possibilità di considerare $-H$ e t come variabili fra loro coniugate, esattamente come una coppia p_i e q_i , $i = 1, \dots, \ell$.

Questo punto di vista si presta a essere sviluppato in due direzioni diverse:

- (1) aggiungere alle 2ℓ variabili (\mathbf{p}, \mathbf{q}) la coppia $(-H, t)$ e scrivere opportunamente le $2(\ell + 1)$ equazioni di moto,
- (2) considerare una delle variabili lagrangiane q_i , $1 \leq i \leq \ell$ come variabile indipendente (ovvero come “tempo”), per cui la variabile coniugata p_i assume il significato di energia.

Analizziamo il primo punto. A partire dal sistema hamiltoniano (1.24), si introduce lo spazio delle fasi esteso $\Pi_{\tau} = (\Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{2\ell+1+1}$ in cui la variabile indipendente è τ e le variabili hamiltoniane sono

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\ell+1} = (\mathbf{p}, -H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)) \in \mathbb{R}^{\ell+1}, \\ \mathbf{Q}_{\ell+1} = (\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^{\ell+1} \end{cases} \quad (3.89)$$

Il punto importante è leggere l'invarianza di (3.71) per il sistema (3.72) come l'invarianza dell'integrale universale

$$\int_{\mathcal{C}_{\tau}} \mathbf{P}_{\ell+1} \cdot d\mathbf{Q}_{\ell+1}$$

per i cilindri di soluzioni $(\mathbf{P}_{\ell+1}(\tau), \mathbf{Q}_{\ell+1}(\tau))$ nello spazio Π_τ (il cammino chiuso \mathcal{C}_τ è dunque una curva in $\mathbb{R}^{2(\ell+1)+1}$).

Pertanto, l'evoluzione del sistema nelle $2(\ell+1)$ variabili (3.89) è necessariamente di tipo Hamiltoniano ed esiste una funzione $K(\mathbf{X}_{\ell+1}, \tau)$, con $\mathbf{X}_{\ell+1} = (\mathbf{P}_{\ell+1}, \mathbf{Q}_{\ell+1})$, per cui

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{X}_{2(\ell+1)} = \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{X}_{2(\ell+1)}} K(\mathbf{X}_{2(\ell+1)}, \tau), \quad (3.90)$$

dove la matrice \mathcal{I} ha dimensioni $2(\ell+1) \times 2(\ell+1)$. Per determinare la funzione K poniamo $\mu(\tau) = \frac{dt}{d\tau}$, con μ funzione assegnata. Dalle relazioni tra i vettori velocità

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{P}_{\ell+1} = \mu(\tau) \left(\dot{\mathbf{p}}, -\frac{dH}{dt} \right), \quad \frac{d}{d\tau} \mathbf{Q}_{\ell+1} = \mu(\tau) (\dot{\mathbf{q}}, 1),$$

e dal confronto di (1.24) con (3.90), si trova che K deve verificare

$$\nabla_{\mathbf{P}_{\ell+1}} K(\mathbf{P}_{\ell+1}, \mathbf{Q}_{\ell+1}, \tau) = \mu(\tau) (\nabla_{\mathbf{p}} H, 1), \quad \nabla_{\mathbf{Q}_{\ell+1}} K(\mathbf{P}_{\ell+1}, \mathbf{Q}_{\ell+1}, \tau) = \mu(\tau) \left(\nabla_{\mathbf{q}} H, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (3.91)$$

(si è utilizzata anche la proprietà (1.47)).

Si verifica facilmente che una funzione K che soddisfa le richieste (3.91) è

$$K(\mathbf{X}_{2(\ell+1)}, \tau) = \mu(\tau) [H(P_1, \dots, P_\ell, Q_1, \dots, Q_\ell, Q_{\ell+1}) + P_{\ell+1}]. \quad (3.92)$$

Se, in particolare, $\mu(\tau) \equiv 1$, ovvero se il tempo nel sistema esteso è ancora $\tau = t$, allora l'Hamiltoniana (3.92) è autonoma: $K = K_{\mathbf{X}_{2(\ell+1)}}$. Si ha dunque l'importante

Proprietà 3.1 *Un qualunque sistema Hamiltoniano (1.24) di 2ℓ variabili può essere sempre scritto come sistema Hamiltoniano in $2(\ell+1)$ variabili autonomo, ovvero tale che $\frac{\partial K}{\partial t} = 0$.*

Occupiamoci ora dell'aspetto (2).

Una particolare forma delle equazioni di moto può essere ottenuta scambiando il ruolo del tempo t con quello di una delle variabili spaziali. In effetti, la forma di Poincaré–Cartan (3.58) vede formalmente le variabili q_1, \dots, q_ℓ e t giocare lo stesso ruolo se pensiamo a $-H$ e t come variabili fra loro coniugate.

Per chiarire e formalizzare questa considerazione, partiamo dal cambiamento invertibile di coordinate $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$, $\tau(\mathbf{q}, t)$ come in (1.30):

$$Q_1 = t, \quad Q_2 = q_2, \quad \dots, \quad Q_\ell = q_\ell, \quad \tau = q_1,$$

con trasformazione inversa

$$q_1 = \tau, \quad q_2 = Q_2, \quad \dots, \quad q_\ell = Q_\ell.$$

Per questa trasformazione si ha

$$J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q} = J_{\mathbf{Q}} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{Q}} t = \nabla_{\mathbf{q}} \tau = (1, 0, \dots, 0), \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0,$$

dunque la matrice (1.32) ha rango massimo e le (1.33), (1.34) assumono la forma

$$\begin{cases} \mathbf{Q}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{\dot{q}_1} (1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_\ell), & \frac{dt}{d\tau} = Q'_1, \\ \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \tau) = \frac{1}{Q'_1} (1, Q'_2, \dots, Q'_\ell) & \frac{d\tau}{dt} = \dot{q}_1 = \frac{1}{Q'_1}. \end{cases} \quad (3.93)$$

Assegnata una Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, si defiscono le variabili $\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}$ e l'Hamiltoniana $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}$.

La Lagrangiana nelle nuove variabili è (vedi (1.35)) $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \tau) = \widehat{\mathcal{L}}Q_1'$, dove $\widehat{\mathcal{L}}$ è semplicemente \mathcal{L} riletta nelle nuove variabili. Definite le $\mathbf{P} = \nabla'_{\mathbf{Q}}\tilde{\mathcal{L}}$ e $K = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}' - \tilde{\mathcal{L}}$, la trasformazione (1.30), (1.37) da $\Pi : (\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ in $\Pi_1 : (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau)$ è, nel nostro caso,

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (-H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), p_2, \dots, p_\ell), \\ \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) = (t, q_2, \dots, q_\ell), \\ \tau(\mathbf{q}, t) = q_1, \end{cases} \quad (3.94)$$

mentre quella inversa (1.31), (1.38) è

$$\begin{cases} \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = (-K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau), P_2, \dots, P_\ell), \\ \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t) = (\tau, Q_2, \dots, Q_\ell), \\ t(\mathbf{Q}, \tau) = Q_1 \end{cases} \quad (3.95)$$

Nelle (3.94) (e mutuamente nelle (3.95)) è evidente il ruolo della trasformazione di scambiare una delle variabili lagrangiane con il tempo e corrispondentemente invertire il momento cinetico coniugato con l'Hamiltoniana.

Il legame fra le Hamiltoniane (1.40) consiste qui in $K = -p_1$, come deve essere in base a quello che si è scritto.

Osservazione 3.3 *Quanto alla effettiva invertibilità della trasformazione (3.94), si verifica facilmente che la matrice jacobiana $J_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau)$ ha sicuramente rango massimo se $\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0$. Quest'ultima ipotesi può essere sicuramente assunta senza perdere in generalità: infatti, si ha $|\nabla_{\mathbf{p}}H| \neq 0$ (altrimenti il sistema Hamiltoniano è banale), dunque laddove fosse $\frac{\partial H}{\partial p_1} = 0$, si considera ai fini dello scambio un'altra variabile di posto k per cui $\frac{\partial H}{\partial p_k} \neq 0$.*

Utilizzando la (6.35) per scrivere la forma (3.58) nelle nuove variabili, si trova:

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau)d\tau. \quad (3.96)$$

L'invarianza dell'integrale (3.71) sui contorni chiusi appoggiati ad un cilindro di soluzioni in $\Pi = (\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ comporta l'invarianza dell'integrale della forma (3.96) sui percorsi immagine della trasformazione nello spazio delle fasi esteso delle nuove variabili $\Pi_1 = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau)$. Applicando quanto visto nella Proposizione 3.2 e tenendo conto che la trasformazione (3.94) è invertibile, si ha che il sistema nelle nuove variabili è Hamiltoniano con Hamiltoniana K , ovvero le equazioni di moto si scrivono:

$$\mathbf{X}'(\tau) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \tau), \quad (3.97)$$

dove, al solito, $\mathbf{X} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Esercizio 3.5 *Ottenere il medesimo risultato trasformando direttamente il sistema hamiltoniano con le (3.95), servendosi delle formule di trasformazione (6.25).*

Il cambiamento di variabili (3.94) consiste dunque nel considerare come variabile indipendente una delle variabili \mathbf{q} , mentre il tempo t e l'energia H cambiata di segno diventano una coppia di variabili coniugate. La situazione è speculare, come si vede dalle (3.95), in cui il tempo τ e l'energia K cambiata di segno diventano variabili coniugate e una delle \mathbf{Q} è la nuova variabile indipendente. Dalle soluzioni del sistema (3.97) ci si aspetta pertanto una descrizione di tipo geometrico (ovvero in funzione di una delle coordinate spaziali) delle traiettorie di moto.

Esercizio 3.6 *Esaminare il caso unidimensionale, per il quale la trasformazione (3.94) si riduce a $P = -H$, $Q = t$, $\tau = q$. Il moto è dunque descritto utilizzando tempo e energia cambiata di segno come variabili coniugate e q come tempo. Risolvere in particolare il caso dell'oscillatore armonico di Hamiltoniana*

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2.$$

Prendendo spunto dal ragionamento fatto per arrivare a (3.97), si verifica immediatamente il seguente

Corollario 3.3 *Se una trasformazione invertibile $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau)$, $t = t(\mathbf{X}, \tau)$ porta (3.58) nella forma $\Omega = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, \tau)dt$, allora il sistema hamiltoniano $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, t)$ si scrive nelle nuove variabili $\mathbf{X}'(\tau) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{X}}K(\mathbf{X}, \tau)$.*

Esercizio 3.7 *Verificare la validità del precedente Corollario nel caso in cui la forma ω viene portata dalla trasformazione in $\Omega = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, \tau)dt + df(\mathbf{X}, \tau)$, essendo df il differenziale esatto di una funzione f delle variabili (\mathbf{X}, τ) : $df = \nabla_{\mathbf{X}}f \cdot d\mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial t}dt$.*

3.10 Equazioni Whittaker, di Jacobi e Principio di Maupertuis

Consideriamo ora il caso in cui la funzione H non dipenda esplicitamente dal tempo, ovvero occupiamoci del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x})$. Sappiamo che H è un integrale primo del moto, come si può rileggere anche nella trasformazione (3.94): alla variabile ciclica Q_1 (ovvero t) corrisponde l'integrale primo P_1 , (ovvero l'Hamiltoniana cambiata di segno). In altre parole, l'Hamiltoniana K è del tipo $K = K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau)$ con P_1 costante che dipende dai dati iniziali (energia iniziale cambiata di segno).

Nello spazio Π Hamiltoniana autonoma significa che l'insieme di **stati isoenergetici** $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h_0$ è invariante rispetto al flusso di H : tale insieme, nelle nuove variabili, corrisponde alla variabile cinetica costante $P_1 = P_1^0$, con $P_1^0 = -h_0$ costante fissata, coerentemente con la ciclicità della variabile Q_1 .

Ricordando la (3.79) stabilita in caso di variabili cicliche, la forma (3.96) si scrive

$$\Omega = \mathbf{P}_{\ell-1} \cdot d\mathbf{Q}_{\ell-1} - K_0(\mathbf{P}_{\ell-1}, \mathbf{Q}_{\ell-1}, \tau), \quad (3.98)$$

dove (vedi (3.76)) $\mathbf{P}_{\ell-1} = (P_2, \dots, P_\ell)$, $\mathbf{Q}_{\ell-1} = (Q_2, \dots, Q_\ell)$ e $K_0 = K|_{P_1=P_1^0}$ è l'Hamiltoniana ridotta (3.77):

Le **equazioni ridotte** (3.75) si scrivono

$$\mathbf{P}'_{\ell-1}(\tau) = -\nabla_{\mathbf{Q}_{\ell-1}}K_0(\mathbf{P}_{\ell-1}, \mathbf{Q}_{\ell-1}, \tau), \quad \mathbf{Q}'_{\ell-1}(\tau) = \nabla_{\mathbf{P}_{\ell-1}}K_0(\mathbf{P}_{\ell-1}, \mathbf{Q}_{\ell-1}, \tau). \quad (3.99)$$

Le equazioni (3.99) sono dette **equazioni di Whittaker**. Le condizioni iniziali per (3.99) si associano alle condizioni iniziali assegnate $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_\ell^0)$, $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0 = (q_1^0, \dots, q_\ell^0)$ nel seguente modo:

$$\mathbf{P}_{\ell-1}(\tau_0) = \mathbf{P}_{\ell-1}^0 = (p_2^0, \dots, p_\ell^0), \quad \mathbf{Q}_{\ell-1}(\tau_0) = \mathbf{Q}_{\ell-1}^0 = (q_2^0, \dots, q_\ell^0),$$

dove $\tau_0 = q_1^0$. La costante dei moti isoenergetici è $h_0 = H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$.

L'integrazione delle (3.99) porta alla scrittura geometrica delle traiettorie nel parametro $\tau = q_1$. Infatti, da esse si trova:

$$\mathbf{P}_{\ell-1} = \widehat{\mathbf{P}}_{\ell-1}(\tau, \mathbf{P}_{\ell-1}^0, \mathbf{Q}_{\ell-1}^0, h_0), \quad \mathbf{Q}_{\ell-1} = \widehat{\mathbf{Q}}_{\ell-1}(\tau, \mathbf{P}_{\ell-1}^0, \mathbf{Q}_{\ell-1}^0, h_0). \quad (3.100)$$

Se vogliamo tornare alla scrittura delle soluzioni nelle variabili di partenza, basta ricordare le (3.94) e si ricavano $p_2, \dots, p_\ell, q_2, \dots, q_\ell$ in funzione del parametro q_1 . La variabile p_1 viene determinata in funzione di q_1 dalla prima delle (3.95). Complessivamente, si ottengono le traiettorie del sistema in forma parametrica, dove q_1 fa da parametro. La dipendenza dal tempo t della soluzione (\mathbf{p}, \mathbf{q}) può essere ottenuta ricordando che

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

dove la derivata parziale di H va espressa in funzione di q_1 : in questo modo va risolta un'equazione differenziale ordinaria.

Esercizio 3.8 *Arrivare al medesimo risultato (3.99) partendo dall'invarianza dell'integrale (3.82) e scrivendo la forma (3.83) nelle nuove variabili.*

Rileggiamo ora l'argomento esposto nel formalismo lagrangiano. Sia $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ la trasformata di Legendre di H e $\widehat{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \tau) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}' - K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \tau)$ la trasformata di K (con Q_1 ciclica).

Calcoliamo ora la trasformata di Legendre M dell'Hamiltoniana ridotta K_0 .

Le variabili $\mathbf{Q}'_{\ell-1} = \nabla_{\mathbf{P}_{\ell-1}} K_0(\mathbf{P}_{\ell-1}, \mathbf{Q}_{\ell-1}, \tau)$ coincidono ovviamente con $\frac{\partial K}{\partial P_2}, \dots, \frac{\partial K}{\partial P_\ell}$, dunque

$$M(\mathbf{Q}_{\ell-1}, \mathbf{Q}'_{\ell-1}, \tau) = \mathbf{P}_{\ell-1} \cdot \mathbf{Q}'_{\ell-1} - K_0(\mathbf{P}_{\ell-1}, \mathbf{Q}_{\ell-1}, \tau) = \tilde{\mathcal{L}} - P_1 Q'_1$$

(stiamo supponendo che le relazioni $\mathbf{Q}'_{\ell-1} = \nabla_{\mathbf{P}_{\ell-1}} K_0$ siano invertibili in modo da ottenere $\mathbf{P}_{\ell-1} = \mathbf{P}_{\ell-1}(\mathbf{Q}_{\ell-1}, \mathbf{Q}'_{\ell-1}, \tau)$).

Le equazioni di Lagrange di moto per M si scrivono

$$\frac{d}{d\tau} \nabla_{\mathbf{Q}'_{\ell-1}} M - \nabla_{\mathbf{Q}_{\ell-1}} M = 0. \quad (3.101)$$

Stabiliamo il legame fra M e le funzioni Lagrangiana \mathcal{L} e Hamiltoniana H di partenza.

Sappiamo che (vedi (1.35)) $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} Q'_1$ e che (vedi (3.94)) $H = -P_1$, pertanto:

$$M = (\mathcal{L} - P_1) Q'_1 = (\mathcal{L} + H) Q'_1. \quad (3.102)$$

Nel caso di un sistema naturale conservativo, si ha $\mathcal{L} = T + U$, $H = T - U$, dunque la Lagrangiana M espressa nelle variabili di partenza è $M = \frac{2T}{\dot{q}_1}$. D'altra parte, pensando a T come forma quadratica nelle $\dot{\mathbf{q}}$, si ha, tenendo presente le (3.94) e le (3.93):

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q'_1} \right)^2 (1, \mathbf{Q}'_{\ell-1}) \cdot A(\tau, \mathbf{Q}_{\ell-1}) (1, \mathbf{Q}'_{\ell-1}) = \dot{q}_1^2 G(\mathbf{Q}_{\ell-1}, \mathbf{Q}'_{\ell-1}, \tau) \quad (3.103)$$

dove $G(\mathbf{Q}_{\ell-1}, \mathbf{Q}'_{\ell-1}, \tau) = \frac{1}{2} (1, \mathbf{Q}'_{\ell-1}) \cdot A(\tau, \mathbf{Q}_{\ell-1}) (1, \mathbf{Q}'_{\ell-1})$ è una forma quadratica definita positiva nelle $\mathbf{Q}'_{\ell-1}$. Pertanto:

$$M(\mathbf{Q}_{\ell-1}, \mathbf{Q}'_{\ell-1}, \tau) = \frac{2T}{\sqrt{\frac{T}{G}}} = 2\sqrt{GT} = 2\sqrt{G(\mathbf{Q}_{\ell-1}, \mathbf{Q}'_{\ell-1}, \tau)[H + U(\mathbf{Q}_{\ell-1}, \tau)]} \quad (3.104)$$

dove, ricordiamo, H è costante.

Le equazioni di moto di tipo lagrangiano (3.101) per un sistema naturale conservativo scleronomo in cui M è espressa nella forma (3.104) si dicono **equazioni di Jacobi**. Mediante esse si ricavano le traiettorie in forma geometrica, ovvero in funzione di $\tau = q_1$. Una volta determinate le soluzioni $\mathbf{Q}_{\ell-1}(\tau)$ di (3.101), la dipendenza dal tempo può essere ricavata avendo presente la (3.103):

$$t(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\frac{G(\mathbf{Q}_{\ell-1}(\eta), \mathbf{Q}'_{\ell-1}(\eta), \eta)}{H + U(\mathbf{Q}_{\ell-1}(\eta), \eta)}} d\eta + t(\tau_0) \quad (3.105)$$

essendo $\tau_0 = q_1^0$ e $t(\tau_0)$ il tempo iniziale.

Fissato il livello di energia $H = h_0$, il funzionale La quantità

$$\mathcal{A}[\mathbf{Q}_{\ell-1}] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} M(\mathbf{Q}_{\ell-1}(\tau), \mathbf{Q}'_{\ell-1}(\tau), \tau) d\tau \quad (3.106)$$

si chiama **azione lagrangiana**. La relazione con l'azione Hamiltoniana I di (3.56) si trova immediatamente da (3.102) e (3.93):

$$\mathcal{A} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} M d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\mathcal{L} + H) Q'_1 d\tau = \int_{t(\tau_0)}^{t(\tau_1)} \mathcal{L} dt + [t(\tau_0) - t(\tau_1)] H = I + [t(\tau_0) - t(\tau_1)] H.$$

Le equazioni di Eulero per il funzionale (3.106) sono le (3.101).

E' importante mettere in evidenza una fondamentale differenza fra l'azione lagrangiana (3.106) e l'azione hamiltoniana (3.56).

Anziché fissare un tempo iniziale t_0 e finale t_1 , viene ora fissata la posizione iniziale $\tau_0 = q_1^0$ e finale $\tau_1 = q_1^1$ della coordinata q_1 che svolge il ruolo di variabile indipendente. Inoltre, le variazioni $\mathbf{y} = \mathbf{Q}_{\ell-1} + \alpha\eta$ (in $\ell-1$ variabili) per il funzionale \mathcal{A} , con $\eta(\tau_0) = \eta(\tau_1) = 0$ (vedi (3.10)), assumono il significato di perturbazioni del moto naturale che mantengono inalterate $\mathbf{Q}_{\ell-1}(\tau_0)$ e $\mathbf{Q}_{\ell-1}(\tau_1)$, ovvero trasferiscono il sistema dalla posizione iniziale $(q_1^0, q_2(q_1^0), \dots, q_\ell(q_1^0))$ a quella finale $(q_1^1, q_2(q_1^1), \dots, q_\ell(q_1^1))$.

Il vincolo $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ per (3.56) è sostituito, per (3.106), dal mantenere lo stesso livello di energia h_0 , ovvero vanno considerate le **perturbazioni isoenergetiche**.

E' facile convincersi che da questo punto di vista il tempo t subisce anch'esso una perturbazione nella classe di variazioni considerata: questo è evidente dalla (3.105), se pensiamo alla funzione $\mathbf{Q}_{\ell-1}$ come perturbazione. Si parla dunque di **perturbazioni anisocrone**.

Considerare come punto di partenza per la teoria del moto la stazionarietà del funzionale (3.106) cosituisce il cosiddetto **principio di minima azione** di **Maupertuis**, formulato nel 1747 e precedente quello di Hamilton. La formulazione rigorosa è del 1760 ad opera di Lagrange.

Il principio di Maupertuis ben si presta ad un paragone con il principio ottico di Fermat: chi è interessato, può vedere in *F. R. Gantmacher, Lezioni di Meccanica analitica*, Mir 1980.

4 Trasformazioni canoniche

4.1 Definizione e trasformazioni di punto estese allo spazio delle fasi Hamiltoniano

Nello studio di un sistema di equazioni differenziali, è frequente il caso in cui, anziché cercare di integrare direttamente le equazioni, si introduce un cambiamento di variabili e si utilizza un nuovo sistema di coordinate che si adatta meglio alla risoluzione del problema. D'altra parte, operando un qualunque cambiamento di coordinate isocrono nello spazio delle fasi $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ del tipo

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \end{cases}$$

o, più sinteticamente,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

(al solito $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2\ell}$, $\mathbf{X} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{2\ell}$), non è detto che il sistema hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t) \quad (4.2)$$

si trasformi in un sistema ancora di tipo Hamiltoniano.

Supporremo sempre che il cambiamento di coordinate (4.1) sia invertibile:

$$\det J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \neq 0, \quad (4.3)$$

dove la matrice jacobiana della trasformazione è, evidenziando i blocchi: dunque a

$$J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{p}} \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) & J_{\mathbf{q}} \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \\ J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) & J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

(osservare che la condizione $\det J_{\mathbf{x}} \mathbf{X} \neq 0$ non implica l'invetibilità di ciascun blocco della matrice). La condizione (4.3) assicura l'esistenza della trasformazione inversa $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, ovvero

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t). \end{cases} \quad (4.5)$$

Determiniamo ora la struttura del sistema (4.2) nelle nuove variabili \mathbf{X} . Da (6.7) e (6.8) troviamo subito

$$\dot{\mathbf{X}} = (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \quad \nabla_{\mathbf{x}} H = (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{H}(\mathbf{X}, t)$$

dove $\tilde{H}(\mathbf{X}, t) = H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$. Il sistema trasformato è pertanto

$$\dot{\mathbf{X}} = J_{\mathbf{x}} \mathbf{X} \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{X}} \hat{H} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \quad (4.6)$$

La (4.6) non è altro che la (6.25), secondo sistema di equazioni differenziali, quando si considera una trasformazione di variabili isocrona.

Per scrivere il sistema completamente nelle variabili nuove \mathbf{X} , la matrice jacobiana $J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ va calcolata per $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, lo stesso $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$.

Una scrittura alternativa a (4.6) è il primo sistema in (6.25):

$$J_{\mathbf{X}} \mathbf{x} \dot{\mathbf{X}} = \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{X}, t).$$

Esercizio 4.1 Ottenere quest'ultimo sistema direttamente da (4.6).

Esercizio 4.2 Utilizzare la forma (1.74) delle equazioni di Hamilton scritta con le parentesi di Poisson e la proprietà (1.90) di trasformazione delle parentesi per ottenere ancora una volta il sistema (4.6) nelle nuove variabili.

E' del tutto comprensibile l'interesse nel ricercare e caratterizzare quelle trasformazioni di coordinate che permettono di sostituire un sistema hamiltoniano con un altro sistema ancora di tipo hamiltoniano. In questo modo, infatti, lo studio del nuovo sistema, presumibilmente più semplice, conserva tutte le proprietà dei sistemi hamiltoniani che andrebbero perse utilizzando un generico cambiamento di coordinate.

Una **trasformazione di coordinate** (4.1) invertibile si dice **canonica** se qualunque sistema hamiltoniano viene trasformato in un altro sistema hamiltoniano.

In altre parole, un cambiamento di variabili (4.1) la cui matrice Jacobiana verifichi la condizione di non singolarità (4.3) dà luogo ad una **trasformazione canonica** se un qualunque sistema hamiltoniano (4.2) si trasforma in un sistema (4.6) ancora di tipo Hamiltoniano, ovvero in un sistema che può essere posto nella forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}} = -\nabla_{\mathbf{Q}}K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \\ \dot{\mathbf{Q}} = \nabla_{\mathbf{P}}K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \end{cases}$$

o, più brevemente,

$$\dot{\mathbf{X}} = -\nabla_{\mathbf{X}}K(\mathbf{X}, t) \quad (4.7)$$

per un'opportuna funzione $K(\mathbf{X}, t)$ che viene detta **nuova Hamiltoniana** del sistema. La trasformazione canonica deve dunque portare campi hamiltoniani in campi hamiltoniani. L'Hamiltoniana K non è necessariamente la funzione H espressa nelle nuove variabili, ovvero non è detto che $K(\mathbf{X}, t)$ concida con $\tilde{H}(\mathbf{X}, t)$. Come vedremo più avanti, questo avviene se e solo se la trasformazione non dipende esplicitamente dal tempo, ovvero se $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$.

La trasformazione identica $\mathbf{P} = \mathbf{p}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ è canonica. Inoltre, se eseguiamo in successione due trasformazioni canoniche, la trasformazione risultante è ancora canonica. La trasformazione inversa (4.5) della trasformazione canonica (4.1) è canonica. Dunque, l'insieme di tutte le trasformazioni canoniche formano un **gruppo** rispetto all'operazione di composizione.

Esercizio 4.3 Verificare le affermazioni dell'osservazione precedente, trovando l'Hamiltoniana corrispondente alla composizione di due trasformazioni canoniche e quella corrispondente alla trasformazione inversa.

Esercizio 4.4 Fornire esempi in casi semplici ($\ell = 1$) in cui nel sistema (4.6) si perde la struttura delle equazioni di tipo gradiente simplettico.

Esercizio 4.5 Verificare che le seguenti trasformazioni

$$\begin{cases} Q_i = \alpha q_i, & i = 1, \dots, \ell \\ P_i = \beta p_i & i = 1, \dots, \ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_i = \alpha p_i, & i = 1, \dots, \ell \\ P_i = \beta q_i & i = 1, \dots, \ell \end{cases}$$

con $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ sono canoniche e provare che le nuove Hamiltoniane sono rispettivamente $K_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = \alpha\beta H(\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t)$ e $K_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = -\alpha\beta H(\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t)$.

Vediamo ora come ogni trasformazione invertibile delle variabili lagrangiane

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \quad (4.8)$$

possa essere estesa alle variabili cinetiche in modo da ottenere complessivamente una trasformazione canonica. Chiamiamo le (4.8) **trasformazioni di punto** e indichiamo con $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q})$ la trasformazione inversa $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q})$.

Estendiamo la trasformazione di punto alle variabili coniugate nel seguente modo (si ricordi a proposito la (1.27)):

$$\begin{cases} \mathbf{P} = (J_{\mathbf{Q}}\mathbf{q})^T \mathbf{p} = (J_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q})^{-T} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \end{cases} \quad (4.9)$$

La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} (J_{\mathbf{Q}}\mathbf{q})^T & J_{\mathbf{q}}\mathbf{P} \\ \mathbf{0} & J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

che è chiaramente di rango massimo. La trasformazione inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$ rispetto a (4.9) è

$$\begin{cases} \mathbf{p} = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T \mathbf{P} = (J_{\mathbf{Q}}\mathbf{q})^{-T} \mathbf{P} \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q})\mathbf{p}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Dimostriamo la seguente

Proposizione 4.1 *La trasformazione (4.9) è canonica.*

Dim. Data una qualunque Hamiltoniana H , si consideri il sistema trasformato (4.6). Eseguiamo il calcolo sostituendo la matrice jacobiana (4.10):

$$(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})\mathcal{I}(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T = \begin{pmatrix} M - M^T & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

dove $M = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{P})(J_{\mathbf{Q}}\mathbf{q})$ e \mathbf{I} , $\mathbf{0}$ sono rispettivamente identità e matrice nulla $\ell \times \ell$. Mostrando che M è simmetrica, si ha che il sistema (4.6) scritto nelle nuove variabili è $\dot{\mathbf{X}} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{H}(\mathbf{X})$, dunque ancora hamiltoniano, con nuova Hamiltoniana è $\tilde{H}(\mathbf{X}) = H(\mathbf{x}(\mathbf{X}))$.

Utilizzando (6.8), (6.10) e (6.16), si trova (notare che le colonne di $(J_{\mathbf{Q}}\mathbf{q})^T$ sono i gradienti $\nabla_{\mathbf{Q}}q_k$, $1 \leq k \leq \ell$):

$$M = J_{\mathbf{q}}\mathbf{P} = J_{\mathbf{q}}[(J_{\mathbf{Q}}\mathbf{q})^T \mathbf{p}] = \sum_{k=1}^{\ell} p_k J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\mathbf{Q}}q_k) = \sum_{k=1}^{\ell} J_{\mathbf{Q}}(\nabla_{\mathbf{Q}}q_k) J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{\ell} Hess_{\mathbf{Q}} q_k$$

dove $Hess_{\mathbf{Q}} = J_{\mathbf{Q}}\nabla_{\mathbf{Q}}$ è l'operatore hessiano simmetrico definito in (6.3). Pertanto M è simmetrica e la matrice (4.12) è

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

□

La canonicità delle trasformazioni di punto estese alle variabili canoniche può essere dimostrata anche in modo diverso, ragionando sulla formula (1.29).

Data una qualunque Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, t)$, calcoliamone la trasformata di Legendre $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, dove si sono introdotte le $\dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}}H$.

La trasformazione di punto (4.8) induce la trasformazione sulle $\dot{\mathbf{q}}$ (vedi (1.25)) $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})\dot{\mathbf{q}}$ e la Lagrangiana nelle nuove variabili $(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ si scrive come in (1.26): $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}), (J_{\mathbf{Q}}\mathbf{q})\dot{\mathbf{Q}}, t)$.

Mediante la trasformata di Legendre della Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ possiamo calcolare la corrispondente Hamiltoniana $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$, definendo le variabili $\mathbf{P} = \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}}\tilde{\mathcal{L}}$. La (1.27) assicura che la trasformazione indotta sulle variabili cinetiche è esattamente l'estensione (4.9). Utilizzando la (1.29), che si scrive in questo caso

$$K = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathcal{L}} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} = H,$$

si vede che la trasformata di Legendre K di $\tilde{\mathcal{L}}$ corrisponde alla trasformata di Legendre H di \mathcal{L} , riletta nelle nuove variabili:

$$K(\mathbf{X}, t) = \hat{H}(\mathbf{X}, t) = H(\mathbf{x}(\mathbf{X}), t).$$

Il moto del sistema nelle nuove variabili \mathbf{X} è dunque regolato dall'Hamiltoniana K , ovvero le equazioni nelle nuove variabili hanno struttura Hamiltoniana con funzione Hamiltoniana K . La trasformazione di punto estesa è dunque canonica, dato che ad ogni sistema hamiltoniano (4.2) corrisponde il sistema (4.6).

Osservazione 4.1 Il risultato della Proposizione 4.1 fa rientrare nella categoria delle trasformazioni canoniche tutte le trasformazioni invertibili e indipendenti dal tempo dei parametri lagrangiani. E' evidente che queste trasformazioni, al di là del fatto che siano indipendenti dal tempo, non coprono tutte le possibili trasformazioni (4.1), dove le \mathbf{Q} possono dipendere anche dalle \mathbf{p} .

Determinare una classe di trasformazioni canoniche di tipo (4.1) significa che le possibilità di trasformare un sistema hamiltoniano senza alterarne la struttura di gradiente simplettico sono maggiori rispetto alle trasformazioni lagrangiane delle equazioni del secondo tipo.

L'obiettivo è ora quello di caratterizzare le trasformazioni (4.1) che siano canoniche.

4.2 Una condizione sufficiente di canonicità

La struttura del sistema trasformato (4.6) suggerisce di prendere in considerazione le trasformazioni che hanno la proprietà

$$(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})\mathcal{I}(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T = \gamma\mathcal{I} \quad (4.13)$$

dove γ è una costante reale non nulla. In questo caso, infatti, il primo termine del membro a destra di (4.6) è il gradiente simplettico rispetto alle \mathbf{X} della funzione $\gamma\hat{H}(\mathbf{X}, t)$.

La classe delle matrici (4.13) verrà esaminata nella prossima Sezione, quando si introdurranno le matrici simplettiche e le matrici simplettiche generalizzate.

Dimostriamo la seguente

Riassumiamo il risultato trovato nella seguente

Proposizione 4.2 Se la matrice Jacobiana di una trasformazione $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ invertibile, con inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, verifica la condizione (4.13), allora la trasformazione è canonica e la nuova Hamiltoniana è

$$K(\mathbf{X}, t) = \gamma H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + K_0(\mathbf{X}, t) \quad (4.14)$$

dove K_0 viene determinato dal sistema

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = -J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}K_0(\mathbf{X}, t). \quad (4.15)$$

Dim. Rimane da esaminare il restante termine del sistema (4.6) dato da

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = -J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}.$$

Vediamo che in effetti esso è riconducibile ad un campo Hamiltoniano, nell'ipotesi (4.13).

Ci baseremo sulla Proposizione 2.1, ovvero si vuole dimostrare che la matrice

$$Z = J_{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) = J_{\mathbf{x}} \left(-J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)$$

è Hamiltoniana, se $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$ verifica (4.13).

Per chiarezza, evidenziamo che per matrice Jacobiana rispetto a \mathbf{X} di $\partial \mathbf{X}/\partial t$ si intende la sequenza di operazioni:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad \hat{\mathbf{W}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{W}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t), \quad Z(\mathbf{X}, t) = J_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{X}, t).$$

La stessa considerazione vale se si calcola Z come matrice Jacobiana del campo $-J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$: $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$ va infatti espresso nelle nuove variabili \mathbf{X} .

Per dimostrare che Z è Hamiltoniana, utilizziamo la regola (6.10) e l'inversione nell'ordine di derivazione con il tempo per scrivere

$$Z = J_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \left(J_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) J_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} \right) J_{\mathbf{x}\mathbf{x}}.$$

D'altra parte, derivando parzialmente rispetto a t la (4.13), si trova:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}\right) \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T + (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) \mathcal{I} \frac{\partial}{\partial t} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

con $\mathbf{0}$ matrice nulla $2\ell \times 2\ell$. La (4.16) viene riscritta come segue, sapendo che $(J_{\mathbf{x}\mathbf{x}})(J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) = \mathbf{I}$, identità $2\ell \times 2\ell$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}\right) [(J_{\mathbf{x}\mathbf{x}})(J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})] \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T + (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) \mathcal{I} [(J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T (J_{\mathbf{x}\mathbf{x}})^T] \frac{\partial}{\partial t} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T = \mathbf{0},$$

ovvero, per la (4.13):

$$\frac{\partial}{\partial t} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) (J_{\mathbf{x}\mathbf{x}}) \mathcal{I} + \mathcal{I}; \left[\frac{\partial}{\partial t} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) (J_{\mathbf{x}\mathbf{x}})\right]^T = Z\mathcal{I} + \mathcal{I}Z^T = \mathbf{0}.$$

Moltiplicando a sinistra e a destra per \mathcal{I} e ricordando le proprietà (1.43), si trova $(\mathcal{I}Z)^T = \mathcal{I}Z$, che è la definizione (2.3) di matrice Hamiltoniana.

Esiste pertanto una funzione $K_0(\mathbf{X}, t)$ tale che vale la (4.15). \square

E' importante osservare che, se la trasformazione (4.1) è **autonoma**, ovvero del tipo $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, e verifica (4.13), allora l'equazione (4.15) è $\nabla_{\mathbf{x}} K_0 \equiv 0$, che ha come soluzioni $K_0 = c_0 + g(t)$, con c_0 costante arbitraria e $g(t)$ funzione arbitraria del tempo. Dato che due Hamiltoniane che differiscono per funzioni di questo tipo hanno le stesse equazioni di moto, possiamo scegliere $K_0 \equiv 0$. Dalla (4.14) si vede che

$$K(\mathbf{X}, t) = \gamma H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t), \quad (4.17)$$

ovvero la nuova Hamiltoniana è la vecchia Hamiltoniana espressa nelle nuove variabili, a parte la costante moltiplicativa γ .

Le trasformazioni canoniche $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ indipendenti da t si dicono **completamente canoniche**.

Un aspetto significativo della funzione K_0 , dipendente solo dalla trasformazione e non dalla particolare Hamiltoniana H , è il seguente. Il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, corrispondente all'Hamiltoniana nulla $H(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, viene portato dalla trasformazione di classe (4.13) nel sistema $\dot{\mathbf{X}} = \mathcal{I}K_0(\mathbf{X}, t)$, ovvero

Corollario 4.1 *Data una trasformazione (4.1) la cui matrice jacobiana verifica la (4.13), la funzione K_0 soluzione di (4.15) è l'Hamiltoniana corrispondente attraverso la trasformazione (4.1) all'Hamiltoniana nulla $H \equiv 0$.*

Dimostreremo in seguito che la condizione (4.13) è in realtà anche necessaria per la canonicità della trasformazione canonica: la classe di trasformazioni con Jacobiana che verifica (4.13) rappresenta dunque la totalità delle trasformazioni canoniche.

Per dimostrare la necessità della condizione suddetta si procederà in questo modo: basandoci sull'invarianza dell'integrale di Poincaré–Cartan, si determinano condizioni necessarie e sufficienti affinché una trasformazione del tipo (4.1) risulti canonica. La condizione trovata verrà resa equivalente alla condizione (4.13), che risulterà dunque una caratterizzazione delle trasformazioni canoniche.

Infine, si utilizzerà il formalismo delle parentesi di Poisson per scrivere (4.13) sotto altra forma.

4.3 Trasformazioni canoniche e invariante integrale di Poincaré–Cartan

Abbiamo visto che l'invarianza dell'integrale della forma di Poincaré–Cartan è una proprietà esclusiva dei sistemi Hamiltoniani. Vogliamo sviluppare questo aspetto in modo da delineare una condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione invertibile porti un qualunque sistema Hamiltoniano in un sistema ancora Hamiltoniano.

Partiamo dalla forma (3.58) $\omega = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{x}, t)dt$, $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ definita nello spazio delle fasi esteso $\Pi : (\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \subseteq \mathbb{R}^{2\ell+1}$.

Utilizzando la (6.33), si vede che il cambiamento di coordinate (4.1) trasforma ω secondo la (6.35) nella 1-forma $\tilde{\omega}$ definita nello spazio delle fasi esteso $\tilde{\Pi} : (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \subseteq \mathbb{R}^{2\ell+1}$ delle variabili nuove:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= (J_{\mathbf{x}\mathbf{x}})^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{X} + \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \hat{H} \right) dt = \\ &= (J_{\mathbf{P}\mathbf{q}})^T \mathbf{p}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{P} + (J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}})^T \mathbf{p}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{Q} + \left(\mathbf{p}(\mathbf{X}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) - \hat{H}(\mathbf{X}, t) \right) dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

dove, al solito, $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathbf{X}$ e $\hat{H}(\mathbf{X}, t) = H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$.

Oltre a $\tilde{\omega}$, in $\tilde{\Pi}$ consideriamo la forma Ω di Poincaré–Cartan associata al sistema di Hamiltoniana $K(\mathbf{X}, t)$ (è chiaro che non ci si deve aspettare che ω si trasformi in Ω):

$$\Omega = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t)dt, \quad \mathbf{X} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}). \quad (4.19)$$

In modo speculare, la forma Ω riletta nelle variabili (\mathbf{x}, t) è

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= (J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{x} + \left(\mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \hat{K} \right) dt = \\ &= (J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{p} + (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{q} + \left(\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \hat{K}(\mathbf{x}, t) \right) dt \end{aligned} \quad (4.20)$$

con $\hat{K}(\mathbf{x}, t) = K(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$.

Useremo per brevità la notazione $\tilde{\Omega} = [\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t)dt]_{(\mathbf{x}, t)}$ per indicare la forma $\tilde{\Omega}$ scritta nelle variabili (\mathbf{x}, t) , come in (4.20).

Il risultato centrale che vogliamo dimostrare è il seguente:

Teorema 4.1 *Se la trasformazione invertibile $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ è canonica, allora la forma $c\omega - \tilde{\Omega}$ nelle variabili $(\mathbf{x}, t) \in \Pi$ è esatta per qualche costante $c \neq 0$, ovvero esistono una funzione $F(\mathbf{x}, t)$ e una costante c per cui vale*

$$\begin{aligned} dF &= \nabla_{\mathbf{p}}F \cdot d\mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{q}}F \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial t} dt = \\ &= c\omega - \tilde{\Omega} = c(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) - [\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t)dt]_{(\mathbf{x}, t)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

per ogni Hamiltoniana H e la corrispondente Hamiltoniana K .

Viceversa, data la trasformazione invertibile $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, se esistono una funzione $F = F(\mathbf{x}, t)$ e una costante c tali che per ogni funzione $H(\mathbf{x}, t)$ l'equazione (4.21) è valida per una certa funzione $K(\mathbf{X}, t)$, allora la trasformazione è canonica.

Dim. Sia $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ una trasformazione canonica, $H(\mathbf{x}, t)$ una qualsiasi Hamiltoniana di un sistema e $K(\mathbf{X}, t)$ la funzione Hamiltoniana che le corrisponde tramite la trasformazione.

Consideriamo un contorno chiuso arbitrario $\mathcal{C} : (\mathbf{x}^{(1)}(\alpha), t^{(1)}(\alpha))$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ in Π e il cilindro delle soluzioni di (4.2) passanti per i punti di \mathcal{C} .

La trasformazione (4.1) porta il contorno \mathcal{C} nella curva chiusa di $\tilde{\Pi}$ $\tilde{\mathcal{C}} : (\mathbf{X}^{(1)}(\alpha), t^{(1)}(\alpha))$, dove $\mathbf{X}^{(1)}(\alpha) = \mathbf{X}(\mathbf{x}^{(1)}(\alpha), t^{(1)}(\alpha))$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. La curva \mathcal{C} è attraversata dal cilindro di soluzioni di (4.7), immagini (mediante la (4.1)) del cilindro di soluzioni in Π .

Fissato un tempo t_0 , si intercetta il cilindro di soluzioni in Π con l'iperpiano $t = t_0$, per ottenere il contorno chiuso $\mathcal{C}_0 : (\mathbf{x}^{(0)}(\alpha), t_0)$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ (senza perdere in generalità, possiamo utilizzare lo stesso parametro di \mathcal{C}). La medesima operazione viene fatta in $\tilde{\Pi}$, in modo da ottenere la curva $\tilde{\mathcal{C}}_0 : (\mathbf{X}^{(0)}(\alpha), t_0)$, che è immagine mediante (4.1) di \mathcal{C}_0 in $\tilde{\Pi}$, dato che il tempo t rimane inalterato per la trasformazione. In altre termini, $\mathbf{X}^{(0)}(\alpha) = \mathbf{X}(\mathbf{x}^{(0)}(\alpha), t_0)$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

Per l'invarianza dell'integrale di Poincaré–Cartan (3.71) considerato per i due sistemi (4.2) e (4.7), si ha

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{x}, t)dt = \oint_{\mathcal{C}_0} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}, \quad \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t)dt = \oint_{\tilde{\mathcal{C}}_0} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}. \quad (4.22)$$

D'altra parte, l'invariante integrale universale (3.82) ovvero $I_{\mathbf{p}}^0 = \oint_{\mathcal{C}_0} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$ nello spazio delle fasi (\mathbf{x}, t) si trasforma mediante il cambiamento di variabili $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ nell'integrale curvilineo (vedi (4.18))

$$\tilde{I} = \oint_{\tilde{\mathcal{C}}_0} (J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{P} + (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{Q}$$

che è necessariamente un invariante integrale universale nello spazio delle fasi (\mathbf{X}, t) .

In base al risultato del Teorema 5.1, deve aversi $c\tilde{I} = \tilde{I}_0$, dove c è una costante e \tilde{I}_0 è l'invariante integrale universale nello spazio (\mathbf{X}, t) :

$$c \oint_{\tilde{C}_0} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{\tilde{C}_0} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}. \quad (4.23)$$

Dalle (4.22) si trova

$$c \left(\oint_{\tilde{C}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{x}, t) dt \right) = \oint_{\tilde{C}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t) dt \quad (4.24)$$

Esprimiamo ora l'integrale a destra dell'uguale in (4.22) nelle variabili (\mathbf{x}, t) :

$$\oint_{\tilde{C}} \left[c(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{x}, t) dt) - [\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t) dt]_{(\mathbf{x}, t)} \right] = 0 \quad (4.25)$$

Dato che \tilde{C} è un contorno arbitrario di Π , l'espressione sotto il segno di integrale in (4.25) deve corrispondere ad una forma esatta, ovvero esiste una funzione $F = F(\mathbf{x}, t)$ tale che la (4.21) è soddisfatta.

Per dimostrare la seconda parte della Teorema, basta osservare che il sistema nelle variabili (\mathbf{X}, t) ammette l'invariante integrale $\oint_{\tilde{C}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t) dt$, pertanto il sistema nelle nuove variabili è Hamiltoniano con

Hamiltoniana $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$. \square

La funzione F (o la funzione G) si dice **funzione generatrice** della trasformazione canonica e la costante c **valenza** della trasformazione. La trasformazione canonica si dice **univalente** se $c = 1$.

Il seguente risultato permette di ottenere la canonicità della trasformazione anche se la (4.21) è valida per una singola coppia di funzioni H e K .

Proposizione 4.3 *Sia dato un sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, t)$ e una trasformazione invertibile di variabili $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Se esistono una funzione $F(\mathbf{x}, t)$ e una funzione $K(\mathbf{X}, t)$ per cui vale (4.21), allora la trasformazione è canonica e K è l'Hamiltoniana del sistema nelle nuove variabili (\mathbf{X}, t) .*

Dim. Consideriamo una qualunque altra funzione $H_1(\mathbf{x}, t)$ e definiamo K_1 mediante la posizione

$$K_1(\mathbf{X}, t) = K(\mathbf{X}, t) - c[H_1(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) - H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)].$$

Da (4.21) si ha

$$dF = c[\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{x}, t) dt] - [\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t) dt]_{(\mathbf{x}, t)} + [K_1(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) - K(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)] dt - \\ - c[H_1(\mathbf{x}, t) - H(\mathbf{x}, t)] dt = c[\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H_1(\mathbf{x}, t) dt] - [\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K_1(\mathbf{X}, t) dt]_{(\mathbf{x}, t)},$$

dunque la trasformazione è canonica, dato che la (4.21) vale per ogni funzione H_1 , e K_1 è la corrispondente nuova Hamiltoniana. \square

Questa proprietà non deve comunque far credere che una trasformazione canonica possa essere definita come una trasformazione che porta un dato sistema hamiltoniano in un altro sistema hamiltoniano.

Esercizio 4.6 *Dare un esempio di trasformazione non canonica che trasforma un dato sistema hamiltoniano (4.2) in un sistema hamiltoniano (4.7).*

Le trasformazioni canoniche sono talvolta dette anche **trasformazioni di contatto**. Per alcuni autori, le trasformazioni canoniche sono esclusivamente quelle con valenza $c = 1$. Le trasformazioni con valenza $c \neq 1$ in tal caso vengono definite come **trasformazioni che conservano la struttura canonica** delle equazioni di Hamilton.

Osserviamo che, in base alla (4.20), la condizioni (4.21) equivale all'esistenza di una funzione $F(\mathbf{x}, t)$ che verifichi

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} F = (\nabla_{\mathbf{p}}, \nabla_{\mathbf{q}} F) = (J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q})^T \mathbf{P}, c\mathbf{p} - (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T \mathbf{P} = -(J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial F}{\partial t} = -\mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - c(H(\mathbf{x}, t) - \hat{K}(\mathbf{x}, t)). \end{cases} \quad (4.26)$$

Osservazione 4.2 Riportandoci al formalismo lagrangiano e chiamando $\mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H$, $\mathcal{L}_1 = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K$ le trasformate di Legendre di H e K , rispettivamente, si ha, dalla (4.21):

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{x}, t) = c[\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{x}, t)] - [\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{X}, t)] = c\mathcal{L} - \mathcal{L}_1. \quad (4.27)$$

La (4.27) richiama le proprietà, stabilite nelle I Parte, che due Lagrangiane che differiscono per costanti moltiplicative o per derivate totali di funzioni danno luogo alle stesse equazioni di moto. È da notare, tuttavia, che la funzione F dipende anche dalle variabili \mathbf{p} , dunque la (4.27) esprime una proprietà più generale.

4.4 Condizioni equivalenti di canonicità

Mettiamo in evidenza alcune condizioni equivalenti alla (4.21) per la canonicità di una trasformazione. Innanzitutto osserviamo che il Teorema 4.1 può essere ovviamente formulato considerando le variabili (\mathbf{X}, t) anziché le (\mathbf{x}, t) e a partire quindi dalla forma Ω , affermando quanto segue:

Proposizione 4.4 Se la trasformazione invertibile (4.1) è canonica, allora la forma $\Omega - c\tilde{\omega}$ nelle variabili $(\mathbf{X}, t) \in \tilde{\Pi}$ è esatta per qualche costante $c_1 \neq 0$, ovvero esistono una funzione $G(\mathbf{X}, t)$ e una costante c per cui vale

$$\begin{aligned} dG &= \nabla_{\mathbf{P}}G \cdot d\mathbf{P} + \nabla_{\mathbf{Q}}G \cdot d\mathbf{Q} + \frac{\partial G}{\partial t}dt = \\ &= c_1\Omega - \tilde{\omega} = c_1[\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K(\mathbf{X}, t)dt] - [\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{x}, t)dt]_{(\mathbf{x}, t)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

per ogni Hamiltoniana H e la corrispondente Hamiltoniana K .

Viceversa, data la trasformazione invertibile (4.1), se esistono una funzione $G = G(\mathbf{X}, t)$ e una costante c_1 tali che per ogni funzione $H(\mathbf{x}, t)$ l'equazione (4.28) è valida per una certa funzione $K(\mathbf{X}, t)$, allora la trasformazione è canonica.

Dal confronto di (4.28) con (4.21) risulta, ponendo $\tilde{G}(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$,

$$d\left(F\mathbf{x}, t + \frac{1}{c_1}\tilde{G}(\mathbf{x}, t)\right) = \left(c - \frac{1}{c_1}\right)[\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)dt],$$

che è compatibile solo con (ricordare la (3.59)) $c_1 = 1/c$, $\tilde{G} = -F/c$ (a meno di costanti additive inessenziali). Si ha pertanto il seguente

Corollario 4.2 La trasformazione inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ della trasformazione canonica di valenza $c \neq 0$ (4.1) è canonica di valenza $1/c$ e ha come funzione generatrice $G(\mathbf{X}, t) = -\frac{1}{c}F(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$, essendo $F(\mathbf{x}, t)$ una funzione generatrice della trasformazione diretta.

Un ulteriore e importante criterio di canonicità può essere formulato limitandosi a considerare solo i contorni chiusi di stati simultanei: come sappiamo, l'invarianza dell'integrale (3.82) lungo questa classe di cammini è condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia Hamiltoniano. In effetti, si ha la seguente

Proposizione 4.5 La trasformazione invertibile (4.1) è canonica se e solo se la forma nelle variabili $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ (vedi (3.83))

$$c\omega_0 - \tilde{\Omega}_0 = c\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - [\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}]_{(\mathbf{x}, t)} = -(J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{p} + (c\mathbf{p} - (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)) \cdot d\mathbf{q} \quad (4.29)$$

è esatta per qualche costante $c \neq 0$ e ad ogni istante t .

Dim. La dimostrazione è immediata e già contenuta in quella della Proposizione 4.1: se la trasformazione è canonica, fissiamo un qualunque cammino chiuso \mathcal{C}_0 di stati simultanei e sia $\tilde{\mathcal{C}}_0$ il cammino corrispondente mediante la trasformazione. Abbiamo visto che vale la (4.23), ovvero

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \left(c\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - [\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}]_{(\mathbf{x}, t)} \right) = 0,$$

dunque la forma (4.29) è esatta per ogni valore fissato t . Viceversa, se la forma (4.29) è esatta, allora l'integrale di essa lungo un qualsiasi percorso chiuso C_0 di stati simultanei è nullo. Questo comporta che (vedi (3.82))

$$\tilde{I} = \oint_{\tilde{C}_0} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = c \oint_{C_0} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = cI_{\mathbf{p}}^0,$$

dunque \tilde{I} è un invariante integrale rispetto alle soluzioni del sistema scritto nelle variabili (\mathbf{X}, t) . Per la Proposizione 5.3, tale sistema deve essere Hamiltoniano, ovvero esiste $K(\mathbf{X}, t)$ tale che il sistema si scrive $\dot{\mathbf{X}} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{X}}K$. \square

In maniera equivalente alla Proposizione 6.5, si può affermare che

Proposizione 4.6 *La trasformazione invertibile $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ è canonica se e solo se esiste una funzione $F_0(\mathbf{x}, t)$ che verifica*

$$\nabla_{\mathbf{p}}F_0 = -(J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T\mathbf{P}, \quad \nabla_{\mathbf{q}}F_0 = c\mathbf{p} - (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T\mathbf{P} \quad (4.30)$$

ovvero

$$\nabla_{\mathbf{x}}F_0(\mathbf{x}, t) = -(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ c\mathbf{p} \end{pmatrix}$$

per qualche costante non nulla c e ad ogni istante t .

La (4.30), detta **condizione di Lie**, viene scritta anche nel seguente modo, ricordando la definizione di differenziale a tempo bloccato (3.86):

$$\bar{d}F_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = c\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot \bar{d}\mathbf{Q} \quad (4.31)$$

essendo, in base alla definizione (3.86), $\bar{d}\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T \cdot d\mathbf{p} + (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T \cdot d\mathbf{q}$.

Esercizio 4.7 *Determinare la valenza c e la funzione F_0 in (4.30) per la trasformazione canonica $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{p}$, $\mathbf{Q} = \beta\mathbf{q}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ costanti non nulle.*

La funzione F_0 che compare in (4.30) è chiaramente indipendente dal tempo se la trasformazione (4.1) non dipende esplicitamente dal tempo (o, per meglio dire, tutte le funzioni F_0 che verificano (4.30) differiscono per una funzione $g(t)$, che può essere scelta nulla).

La relazione tra F di (4.26) e F_0 di (4.30) si trova osservando che (vedi (3.83), (3.86), (4.26) e (4.31))

$$dF_0(\mathbf{x}, t) = \bar{d}F_0(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial F_0}{\partial t} dt = c\omega_0 - \tilde{\Omega}_0 + \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dt + \frac{\partial F_0}{\partial t} dt,$$

$$dF(\mathbf{x}, t) = c\omega - \tilde{\Omega} = c\omega_0 - \tilde{\Omega}_0 - c(H - c\hat{K})dt = c\omega_0 - c\tilde{\Omega}_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right) dt$$

dunque

$$d(F - F_0) = - \left(\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F_0}{\partial t} \right) dt.$$

Dato che $\nabla_{\mathbf{x}}(F - F_0) \equiv 0$, si conclude che $F - F_0 = c_0 + g(t)$, dove c_0 è una costante reale arbitraria e $g(t)$ una funzione arbitraria del tempo.

In particolare, se la trasformazione è autonoma: $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, allora $\partial F_0/\partial t = 0$ e anche F può essere scelta indipendente dal tempo: $F = F(\mathbf{x})$.

E' importante osservare che in quest'ultimo caso la relazione fra le Hamiltoniane è (vedi (4.26))

$$cH(\mathbf{x}, t) = \hat{K}(\mathbf{x}, t),$$

ovvero $K(\mathbf{X}, t) = cH(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$. Questa proprietà va collegata alla (4.17).

Concludiamo il Paragrafo dimostrando la seguente

Proprietà 4.1 *La trasformazione (4.1) è canonica di valenza c se e solo se tutte le trasformazioni indipendenti dal tempo $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \bar{t})$, dove \bar{t} è un valore fissato in $t \in [t_0, t_1]$, sono trasformazioni canoniche di medesima valenza c .*

Infatti, se la trasformazione $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ è canonica, allora esistono $F_0(\mathbf{x}, t)$ e c per cui vale (4.31). La medesima condizione può essere letta per affermare che ciascuna delle trasformazioni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \bar{t})$ è canonica di valenza c . Osservare che per ciascuna di esse $d = \bar{d}$.

Viceversa, se $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \bar{t})$, $t \in [t_0, t_1]$, è una famiglia di trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo, chiamiamo $F^{(\bar{t})}(\mathbf{x}, \bar{t})$ la funzione indipendente dal tempo (vedi osservazioni precedenti) che verifica la condizione (4.31) e indichiamo con $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ la trasformazione (dipendente dal tempo) che si ottiene al variare di $\bar{t} = t$ in $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \bar{t})$. Per $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ vale la condizione (4.31) con la medesima funzione $F^{(\bar{t})}(\mathbf{x}, \bar{t})$ e la medesima valenza c , dunque $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ è una trasformazione canonica.

Esercizio 4.8 Verificare che la trasformazione che scambia un momento cinetico con la variabile coniugata (a meno del segno), ovvero

$$P_i = p_i, \quad i \neq k, \quad P_k = -q_k, \quad Q_i = q_i \quad i \neq k, \quad Q_k = p_k,$$

per un indice k , $1 \leq k \leq \ell$ è canonica di valenza $c = 1$ e con funzione generatrice $F_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -q_k p_k$.

Esercizio 4.9 Utilizzando la (4.30), verificare che la trasformazione

$$\mathbf{P} = -\mathbf{q}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{p}$$

che scambia i momenti cinetici con le coordinate \mathbf{q} è canonica.

4.5 Trasformazioni libere

Una trasformazione (4.1) si dice **libera** se la matrice jacobiana $J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q}$ è non singolare:

$$\det J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q} \neq 0. \tag{4.32}$$

Non tutte le trasformazioni (4.1) sono libere: una trasformazione di punto, ad esempio, non può essere estesa allo spazio delle fasi in modo da essere libera.

La condizione (4.32) viene sfruttata per sostituire alle variabili hamiltoniane (\mathbf{p}, \mathbf{q}) le 2ℓ variabili (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) . Infatti, dalle ℓ equazioni di (4.1) $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ è possibile ricavare, per il teorema della funzione implicita, le relazioni

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t). \tag{4.33}$$

Per sostituzione nelle restanti equazioni di (4.1) date da $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$, si trova

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}, t) = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t). \tag{4.34}$$

Pertanto, se si assegna una trasformazione (4.1) che verifica la condizione (4.32), le variabili (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) possono svolgere il ruolo di variabili indipendenti nell'ambito delle 4ℓ variabili (\mathbf{x}, \mathbf{X}) . In particolare, ogni funzione $G = G(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ è rappresentabile come funzione delle variabili $(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ ponendo

$$\tilde{G}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = G(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}, t) \tag{4.35}$$

e analogamente per ogni funzione $G_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$.

Osservazione 4.3 Il medesimo insieme di variabili indipendenti (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) è ottenibile a partire dalla trasformazione inversa (4.5). In questo caso, si tratta di ricavare le $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ dalle equazioni $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ e ottenere, per sostituzione nelle restanti equazioni $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$, le funzioni $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{Q}, t)$. Ovviamente si ottengono le medesime funzioni (4.33), (4.34).

La condizione di invertibilità che permette questa seconda procedura è

$$\det J_{\mathbf{P}}\mathbf{q} \neq 0. \tag{4.36}$$

Esercizio 4.10 Per il caso $\ell = 1$ mostrare che la (4.36) è equivalente alla (4.32).

Il vantaggio della procedura che abbiamo introdotto è evidente nella ricerca della funzione generatrice di una trasformazione canonica. In effetti, la condizione (4.21) riletta nelle nuove variabili indipendenti di base si scrive

$$c[\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \cdot d\mathbf{q} - Hdt] - [\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \cdot d\mathbf{Q} - Kdt] = dS(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad (4.37)$$

dove (vedi (4.35))

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = F(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}, t) \quad (4.38)$$

e le funzioni $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{P}}$ sono rispettivamente le (4.33) e le (4.34). Se si vuole essere precisi, la (4.37) è la scrittura della 1-forma $[c\omega - \tilde{\Omega}](\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, con $\tilde{\Omega}$ scritta in (4.20), quando si passa dalle variabili $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ alle variabili $(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ tramite la (4.33) (vedi anche (6.33)).

Confrontando i coefficienti delle due forme differenziali in (4.37) separate dall'uguale, si trovano le condizioni

$$\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = c \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad (4.39)$$

$$\nabla_{\mathbf{Q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = -\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \tilde{K}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) - c \tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad (4.41)$$

con $\tilde{K} = K(\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{Q}, t)$, $\tilde{H} = H(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}, t)$.

Definiamo la matrice delle derivate seconde

$$\mathcal{S}_{(\mathbf{q}, \mathbf{Q})} = J_{\mathbf{Q}}(\nabla_{\mathbf{q}} S) = [J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\mathbf{Q}} S)]^T \quad (4.42)$$

di elementi $(\mathcal{S}_{(\mathbf{q}, \mathbf{Q})})_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_j} \right)$, $i, j = 1, \dots, \ell$. La condizione (4.32) equivale a

$$\det(\mathcal{S}_{(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}) \neq 0. \quad (4.43)$$

Infatti si ha, in virtù delle (4.39):

$$\mathcal{S}_{(\mathbf{q}, \mathbf{Q})} = J_{\mathbf{Q}}(\nabla_{\mathbf{q}} S) = c J_{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$$

e l'ultima matrice è la matrice jacobiana inversa della (4.32).

Dunque, ad ogni trasformazione canonica libera si può dunque associare una funzione generatrice $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ con la proprietà (4.43). Viceversa, si ha:

Proposizione 4.7 *Una funzione $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ che verifica la condizione (4.43) definisce implicitamente una trasformazione canonica libera di valenza c mediante le equazioni (4.39), (4.40). La relazione fra la nuova Hamiltoniana K e la vecchia Hamiltoniana H è data dalla (4.41).*

Dim. Scriviamo il sistema (4.39), (4.40) in cui S è da considerarsi assegnata e $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{P}}$ funzioni incognite. Dalle prime ℓ equazioni (4.39) è possibile, per la (4.32), ricavare le funzioni

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (4.44)$$

Per sostituzione nelle (4.40), troviamo anche

$$\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = -\nabla_{\mathbf{Q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}. \quad (4.45)$$

La trasformazione (4.44), (4.45) è invertibile: infatti, partendo dalla (4.40) e tenendo conto che $J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\mathbf{Q}} S) = \mathcal{S}_{(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}^T$, possiamo determinare le funzioni $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ e, sostituendo nelle (4.39), si determinano le $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$.

D'altra parte, la trasformazione (4.44), (4.45) è canonica, dal momento che le (4.39) e (4.40) equivalgono alla condizione (4.37). La (4.41), infine, stabilisce semplicemente come determinare l'Hamiltoniana K corrispondente, secondo la trasformazione canonica, ad una Hamiltoniana assegnata H , se è nota la funzione generatrice S . \square

Al variare della funzione S che verifica la condizione (4.32) e del valore c , si ottengono tramite le (4.39), (4.40) tutte le trasformazioni canoniche libere di valenza c . La (4.41) fornisce il modo per determinare la funzione Hamiltoniana nelle nuove variabili.

Si osservi che, in virtù del Corollario 4.2, la trasformazione inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, di valenza $1/c$ è generata dalla funzione

$$S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = -(1/c)S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t). \quad (4.46)$$

Per trasformazioni canoniche libere univalenti ($c = 1$), la (4.41) mostra che la differenza fra le due Hamiltoniane è sempre la medesima, pari a $\frac{\partial S}{\partial t}$.

Ancora una volta mettiamo in evidenza commentiamo a parte il caso autonomo:

Proposizione 4.8 *Se la funzione generatrice S è indipendente esplicitamente dal tempo, allora il tempo t non compare nelle equazioni della trasformazione (4.1). La nuova Hamiltoniana è data da $K = cH$.*

Per trasformazioni univalenti con $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, la nuova Hamiltoniana è dunque la vecchia Hamiltoniana espressa nelle nuove variabili:

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H(\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), t). \quad (4.47)$$

Esercizio 4.11 *Considerare nel caso $\ell = 1$ la trasformazione*

$$\begin{cases} P = \alpha p + \beta q \\ Q = \gamma p + \delta q \end{cases}$$

Stabilire in quali casi la trasformazione è invertibile, è canonica con valenza c , è libera e determinare una funzione generatrice S .

4.6 Altri tipi di funzioni generatrici

E' evidente che, anziché considerare le variabili (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) delle trasformazioni libere, si possono utilizzare come variabili indipendenti due gruppi fra i quattro insiemi $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$, evitando naturalmente la scelta (\mathbf{p}, \mathbf{q}) e (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) , che corrispondono alla trasformazione data e alla sua inversa.

I quattro casi possibili, il primo dei quali corrisponde alle trasformazioni libere, sono riassunti nel seguente schema, in cui scriviamo anche il minore in (4.4) che deve essere non singolare per rendere effettuabile tale scelta, in analogia alla condizione (4.32), la condizione sul blocco della Jacobiana della trasformazione inversa (come in (4.36)), le variabili dipendenti (come in (4.33), (4.34)):

variabili indipendenti minore in $J_{\mathbf{x}\mathbf{X}}$ minore in $J_{\mathbf{X}\mathbf{x}}$ variabili dipendenti

<i>I</i>	(\mathbf{q}, \mathbf{Q})	$J_{\mathbf{p}\mathbf{Q}}$	$J_{\mathbf{P}\mathbf{q}}$	$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$
<i>II</i>	(\mathbf{q}, \mathbf{P})	$J_{\mathbf{p}\mathbf{P}}$	$J_{\mathbf{Q}\mathbf{q}}$	$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$
<i>III</i>	(\mathbf{p}, \mathbf{Q})	$J_{\mathbf{q}\mathbf{Q}}$	$J_{\mathbf{P}\mathbf{p}}$	$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$
<i>IV</i>	(\mathbf{p}, \mathbf{P})	$J_{\mathbf{q}\mathbf{P}}$	$J_{\mathbf{Q}\mathbf{p}}$	$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$

Vediamo ora come si scrive la condizione di canonicità (4.21) nei vari casi. E' sufficiente utilizzare le regole

$$d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}, \quad d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P} \quad (4.48)$$

per esprimere la (4.21) nei differenziali delle variabili indipendenti. La condizione $c\omega - \tilde{\Omega} = dF$, che per le trasformazioni libere assumeva la forma (4.37), verrà ora scritta nei tre casi:

$$II \quad c(\tilde{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q}) + \tilde{\mathbf{Q}} \cdot d\mathbf{P} - (cH - K)dt = d\left(F(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t) + \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{P}\right) = dS_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t),$$

$$III \quad -c(\tilde{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p}) - \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{Q} - (cH - K)dt = d\left(F(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}, t) - c(\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p})\right) = dS_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t),$$

$$IV \quad -c(\tilde{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{Q}} \cdot d\mathbf{P} - (cH - K)dt = d\left(F(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}, t) - c(\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}}) + \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{P}\right) = dS_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t),$$

dove naturalmente H e K vanno espresse in funzione delle variabili indipendenti selezionate. A questo punto, si ragiona come nella Proposizione 4.7, determinando per le funzioni generatrici S_2 , S_3 e S_4 le equazioni analoghe alle (4.39)–(4.40) e la condizione sulla matrice delle derivate seconde, analoga alla (4.43). Il risultato è sintetizzato nel seguente schema:

$$\begin{aligned} II \quad \nabla_{\mathbf{q}} S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) &= c \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \\ \nabla_{\mathbf{P}} S_2(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) &= \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \\ \det J_{\mathbf{P}}(\nabla_{\mathbf{q}} S_2) &\neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} III \quad \nabla_{\mathbf{p}} S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) &= -c \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \\ \nabla_{\mathbf{Q}} S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) &= -\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \\ \det J_{\mathbf{Q}}(\nabla_{\mathbf{p}} S_3) &\neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IV \quad \nabla_{\mathbf{p}} S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) &= -c \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \\ \nabla_{\mathbf{P}} S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) &= \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \\ \det J_{\mathbf{P}}(\nabla_{\mathbf{p}} S_4) &\neq 0. \end{aligned}$$

In tutti i casi, il legame (4.41) rimane il medesimo, salvo esprimere K e H nelle variabili indipendenti scelte:

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = K - cH, \quad i = 2, 3, 4. \quad (4.49)$$

Nel caso di esistenza di più di una funzione generatrice, è chiaro che le relazioni che intercorrono fra di loro sono le seguenti (chiamiamo S la funzione generatrice del tipo I , coerentemente con (4.37)):

$$\begin{aligned} S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) &= S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), t) + \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \\ S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) &= S(\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{Q}, t) - c \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) \\ S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) &= S(\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \mathbf{P}, t) - c \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) + \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = \\ &= S_2(\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \mathbf{P}, t) - c \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = S_3(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)) + \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) \end{aligned}$$

Esercizio 4.12 *Mostrare che tutte le funzioni generatrici di una data trasformazione canonica che dipendono dal medesimo gruppo di variabili indipendenti differiscono fra loro per una costante.*

Esercizio 4.13 *Considerare la trasformazione $(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = (\gamma p_1, -\gamma q_2, (1/\gamma)q_1, -(1/\gamma)p_2)$, con γ costante non nulla. Provare che la trasformazione è canonica di valenza γ . Verificare che la trasformazione non ammette alcuna funzione generatrice dei tipi indicati con I , II , III , IV .*

Il precedente esercizio mostra che non tutte le trasformazioni canoniche non libere possono essere ricondotte ad una funzione generatrice di tipo S_i , $i = 2, 3, 4$. È chiaro, d'altra parte, che se si riesce a determinare fra le 4ℓ variabili \mathbf{x} , \mathbf{X} un insieme di 2ℓ variabili

$$\begin{cases} \mathbf{p}_\lambda = (p_1, \dots, p_\lambda) \in \mathbb{R}^\lambda, & \mathbf{q}_{\ell-\lambda} = (q_{\lambda+1}, \dots, q_\ell) \in \mathbb{R}^{\ell-\lambda}, \\ \mathbf{P}_\mu = (P_1, \dots, P_\mu) \in \mathbb{R}^\mu, & \mathbf{Q}_{\ell-\mu} = (Q_{\mu+1}, \dots, Q_\ell) \in \mathbb{R}^{\ell-\mu}, \end{cases} \quad (4.50)$$

per opportuni indici $0 \leq \lambda, \mu \leq \ell$ in modo che la matrice Jacobiana mista $\ell \times \ell$

$$\begin{pmatrix} J_{\mathbf{p}_{\ell-\lambda}} \mathbf{P}_\mu & J_{\mathbf{q}_\lambda} \mathbf{P}_\mu \\ J_{\mathbf{p}_{\ell-\lambda}} \mathbf{Q}_{\ell-\mu} & J_{\mathbf{q}_\lambda} \mathbf{Q}_{\ell-\mu} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

sia non singolare, allora le rimanenti variabili

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{\ell-\lambda} = (p_{\lambda+1}, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}^{\ell-\lambda}, & \mathbf{q}_\lambda = (q_1, \dots, q_\lambda) \in \mathbb{R}^\lambda, \\ \mathbf{P}_{\ell-\mu} = (P_{\mu+1}, \dots, P_\ell) \in \mathbb{R}^{\ell-\mu}, & \mathbf{Q}_\mu = (Q_1, \dots, Q_\mu) \in \mathbb{R}^\mu \end{cases} \quad (4.52)$$

sono esprimibili mediante le (4.50) (convenzionalmente, si fanno rientrare (4.50) le trasformazioni libere con gli indici $\lambda = \mu - 0$, mentre il caso *II* [risp. *III*, risp. *IV*] precedentemente esaminato corrisponde a $\lambda = 0$, $\mu = \ell$ [risp. $\lambda = \ell$, $\mu = 0$, risp. $\lambda = \mu = \ell$]).

Infatti, utilizzando le ℓ equazioni delle (4.1) costituite da $\mathbf{P}_\mu = \mathbf{P}_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, $\mathbf{Q}_{\ell-\mu} = \mathbf{Q}_{\ell-\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ si possono determinare, in virtù della non singolarità della matrice (4.51), le funzioni $\mathbf{p}_{\ell-\lambda} = \tilde{\mathbf{p}}_{\ell-\lambda}(\mathbf{P}_\mu, \mathbf{Q}_{\ell-\mu}, \mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, t)$, $\mathbf{q}_\lambda = \tilde{\mathbf{q}}_\lambda(\mathbf{P}_\mu, \mathbf{Q}_{\ell-\mu}, \mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, t)$.

Per sostituzione poi nelle restanti equazioni di (4.1), ovvero $\mathbf{P}_{\ell-\mu} = \mathbf{P}_{\ell-\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, $\mathbf{Q}_\mu = \mathbf{Q}_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, si trovano le dipendenze $\mathbf{P}_{\ell-\mu} = \tilde{\mathbf{P}}_{\ell-\mu}(\mathbf{P}_\mu, \mathbf{Q}_{\ell-\mu}, \mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, t)$, $\mathbf{Q}_\mu = \tilde{\mathbf{Q}}_\mu(\mathbf{P}_\mu, \mathbf{Q}_{\ell-\mu}, \mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, t)$.

La (4.48) viene sostituita dalle seguenti identità:

$$d(\mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{q}_\lambda) = \mathbf{p}_\lambda \cdot d\mathbf{q}_\lambda + \mathbf{q}_\lambda \cdot d\mathbf{p}_\lambda, \quad d(\mathbf{P}_\mu \cdot \mathbf{Q}_\mu) = \mathbf{P}_\mu \cdot d\mathbf{Q}_\mu + \mathbf{Q}_\mu \cdot d\mathbf{P}_\mu, \quad (4.53)$$

in modo da scrivere la (4.21) come

$$c(-\tilde{\mathbf{q}}_\lambda \cdot d\mathbf{p}_\lambda + \tilde{\mathbf{p}}_{\ell-\lambda} \cdot d\mathbf{q}_{\ell-\lambda}) + \tilde{\mathbf{Q}}_\mu \cdot d\mathbf{P}_\mu - \tilde{\mathbf{P}}_{\ell-\mu} \cdot d\mathbf{Q}_{\ell-\mu} - (cH - K)dt = dG(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, \mathbf{P}_\mu, \mathbf{Q}_{\ell-\mu}, t) \quad (4.54)$$

dove

$$G(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, \mathbf{P}_\mu, \mathbf{Q}_{\ell-\mu}, t) = F(\mathbf{p}_\lambda, \tilde{\mathbf{p}}_{\ell-\lambda}, \tilde{\mathbf{q}}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, \mathbf{P}_\mu, \tilde{\mathbf{P}}_{\ell-\mu}, \tilde{\mathbf{Q}}_\mu, \mathbf{Q}_{\ell-\mu}, t) - c\tilde{\mathbf{q}}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\lambda + \tilde{\mathbf{Q}}_\mu \cdot \mathbf{P}_\mu \quad (4.55)$$

Le equazioni, analoghe alle (4.39)–(4.41), che definiscono la funzione generatrice G sono

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{p}_\lambda} G = -c\tilde{\mathbf{q}}_\lambda, & \nabla_{\mathbf{q}_{\ell-\lambda}} G = c\tilde{\mathbf{p}}_{\ell-\lambda} \\ \nabla_{\mathbf{P}_\mu} G = \tilde{\mathbf{Q}}_\mu, & \nabla_{\mathbf{Q}_{\ell-\mu}} G = -\tilde{\mathbf{P}}_{\ell-\mu} \\ \frac{\partial G}{\partial t} = K - cH \end{cases} \quad (4.56)$$

La condizione (4.43) ora è espressa dalla non singolarità della matrice

$$\mathcal{S}_{(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, \mathbf{P}_\mu, \mathbf{Q}_{\ell-\mu})} = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{P}_\mu}(\nabla_{\mathbf{p}_\lambda} G) & J_{\mathbf{Q}_{\ell-\mu}}(\nabla_{\mathbf{p}_\lambda} G) \\ J_{\mathbf{P}_\mu}(\nabla_{\mathbf{q}_{\ell-\lambda}} G) & J_{\mathbf{Q}_{\ell-\mu}}(\nabla_{\mathbf{q}_{\ell-\lambda}} G) \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Come nei casi precedentemente esaminati, la non singolarità di (4.57) è equivalente alla non singolarità di (4.51). Infatti, dalle prime ℓ equazioni in (4.56) si ha:

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{P}_\mu}(\nabla_{\mathbf{p}_\lambda} G) &= -c J_{\mathbf{P}_\mu} \tilde{\mathbf{q}}_\lambda, & J_{\mathbf{Q}_{\ell-\mu}}(\nabla_{\mathbf{p}_\lambda} G) &= -c J_{\mathbf{Q}_{\ell-\mu}} \tilde{\mathbf{q}}_\lambda, \\ J_{\mathbf{P}_\mu}(\nabla_{\mathbf{q}_{\ell-\lambda}} G) &= c J_{\mathbf{P}_\mu} \tilde{\mathbf{p}}_{\ell-\lambda}, & J_{\mathbf{Q}_{\ell-\mu}}(\nabla_{\mathbf{q}_{\ell-\lambda}} G) &= c J_{\mathbf{Q}_{\ell-\mu}} \tilde{\mathbf{p}}_{\ell-\lambda}. \end{aligned}$$

Confrontando con la (4.51), si vede che, a meno di spostamenti di colonne e segni davanti alle colonne medesime, la matrice (4.57) e la matrice (4.51) sono una l'inversa dell'altra, dunque simultaneamente singolari o non singolari.

Le equazioni (4.56) definiscono implicitamente una trasformazione canonica: dalle prime ℓ equazioni (prima riga) si determinano le funzioni $\mathbf{P}_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, $\mathbf{Q}_{\ell-\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. Sostituendo nel secondo gruppo di ℓ equazioni in (4.56) (seconda riga), si determinano poi le restanti funzioni $\mathbf{P}_{\ell-\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, $\mathbf{Q}_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$.

La trasformazione così ottenuta risulta canonica di valenza c in quanto la funzione G verifica la (4.54).

Quanto alla possibilità, data per scontata, di scegliere 2ℓ variabili indipendenti come in (4.50) in modo che (4.51) sia non singolare, enunciamo il seguente Lemma, di cui omettiamo per brevità la dimostrazione.

Lemma 4.1 *Data una trasformazione del tipo (4.1) invertibile, è sempre possibile scegliere fra le 4ℓ variabili $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ un insieme di 2ℓ variabili indipendenti in modo che fra di esse non vi sia neppure una coppia di variabili fra loro coniugate (p_i, q_i) , oppure (P_i, Q_i) , per ogni indice i , $1 \leq i \leq \ell$.*

Il Lemma garantisce che, a costo di rienumerare opportunamente le coordinate, è sempre possibile determinare le 2ℓ variabili indipendenti nella forma (4.50).

Possiamo infine riassumere l'analisi svolta nel seguente risultato, che permette di associare ad ogni trasformazione canonica (almeno) una funzione generatrice e, viceversa, di costruire una trasformazione canonica a partire da una funzione generatrice:

Proposizione 4.9 *Data una trasformazione canonica (4.1), è possibile determinare un insieme di 2ℓ variabili $(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, \mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}_{\ell-\mu})$ tali che la matrice (4.51) sia non singolare e una funzione (detta **generatrice**) $G(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, \mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}_{\ell-\mu}, t)$ tale che la matrice (4.57) sia non singolare e che verifica le equazioni (4.56). Nell'ultima di esse H è una qualunque Hamiltoniana e K l'Hamiltoniana che le corrisponde nella trasformazione canonica.*

Viceversa, data una funzione G delle medesime variabili che verifica la condizione $\det \mathcal{S}_{(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, \mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}_{\ell-\mu})} \neq 0$, allora G definisce implicitamente, tramite le prime 2ℓ equazioni in (4.56), una trasformazione canonica di valenza c . Per ogni funzione $H(\mathbf{x}, t)$, la nuova Hamiltoniana $K(\mathbf{X}, t)$ viene determinata dall'ultima equazione in (4.56).

4.7 Matrici simplettiche e matrici simplettiche generalizzate

Una matrice quadrata A di ordine 2ℓ si dice **simplettica** se

$$A^T \mathcal{I} A = \mathcal{I} \quad (4.58)$$

dove \mathcal{I} è la matrice definita in (1.41).

Dalla definizione segue che $(\det A)^2 = 1$, dunque una matrice simplettica è invertibile. Pertanto, A è simplettica se e solo se

$$\mathcal{I} A = A^{-T} \mathcal{I} \quad (4.59)$$

dove si è posto $A^{-T} = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Ricordando le (1.43), si vede che la (4.59) equivale a ciascuna delle seguenti formule, ottenute trasponendo o calcolando l'inversa delle matrici uguali $\mathcal{I} A$, $A^{-T} \mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} A^{-1} = A^T \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} A^T = A^{-1} \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} A^{-T} = A \mathcal{I}. \quad (4.60)$$

Dalla (4.60) segue che le matrici $A^{-1} = -\mathcal{I} = A^T \mathcal{I}$, $A^T = -\mathcal{I} A^{-1} \mathcal{I}$ e $A^{-T} = -\mathcal{I} A \mathcal{I}$ sono simplettiche se A è simplettica, dato che verificano la (4.59).

Inoltre, la matrice identità di ordine 2ℓ e la matrice \mathcal{I} sono simplettiche, essendo valida per esse la (4.58). Il prodotto di due matrici simplettiche è simplettico, infatti, si ha dalla (4.59)

$$\mathcal{I} A B = A^{-T} \mathcal{I} B^{-T} \mathcal{I} = (A B)^{-T} \mathcal{I}.$$

Per le proprietà viste, le matrici simplettiche di ordine 2ℓ formano un **sottogruppo** del gruppo moltiplicativo delle matrici di ordine 2ℓ .

Rappresentando la matrice A a blocchi come in (2.4):

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

e eseguendo i prodotti fra matrici seguendo la definizione (4.58), troviamo le condizioni:

$$\begin{cases} -\mathbf{a}^T \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \mathbf{a} = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{a}^T \mathbf{d} + \mathbf{c}^T \mathbf{b} = -\mathbf{I}, \\ -\mathbf{b}^T \mathbf{c} + \mathbf{d}^T \mathbf{a} = \mathbf{I}, \\ -\mathbf{b}^T \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{b} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.61)$$

dove $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} sono rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità di ordine ℓ . Dunque, una matrice A è simplettica se e solo se le matrici di ordine ℓ $\mathbf{a}^T \mathbf{c}$ e $\mathbf{b}^T \mathbf{d}$ sono simmetriche e la matrice $\mathbf{a}^T \mathbf{d} - \mathbf{c}^T \mathbf{b}$ è la matrice identità di ordine ℓ .

Dalla (4.60) si vede immediatamente che l'inversa di una matrice simplettica (2.4) è data da

$$A^{-1} = -\mathcal{I}A^T\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^T & -\mathbf{b}^T \\ -\mathbf{c}^T & \mathbf{a}^T \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Definiamo le **matrici simplettiche generalizzate** di valenza γ le matrici A che verificano

$$A^T\mathcal{I}A = \gamma\mathcal{I}, \quad (4.63)$$

con $\gamma \neq 0$. Per $\gamma = 1$, si ritrova la definizione di matrice simplettica (4.58).

Ripercorrendo gli stessi punti svolti per le matrici simplettiche, si vede facilmente che se A è simplettica generalizzata di valenza γ allora

- (i) A è non singolare e la definizione (4.63) equivale a $\mathcal{I}A = \gamma A^{-T}\mathcal{I}$,
- (ii) la matrice $A^T = -\gamma\mathcal{I}A^{-1}\mathcal{I}$ è simplettica generalizzata di medesima valenza γ ,
- (iii) la matrice $A^{-1} = -\frac{1}{\gamma}\mathcal{I}A^T\mathcal{I}$ è simplettica generalizzata di valenza $1/\gamma$,
- (iv) la matrice $A^{-T} = -\frac{1}{\gamma}\mathcal{I}A\mathcal{I}$ è simplettica generalizzata di valenza $1/\gamma$,
- (v) la totalità delle matrici simplettiche generalizzate al variare di $\gamma \neq 0$ forma un gruppo moltiplicativo.

Le condizioni analoghe alle (4.61) sono

$$\begin{cases} -\mathbf{a}^T\mathbf{c} + \mathbf{c}^T\mathbf{a} = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{a}^T\mathbf{d} + \mathbf{c}^T\mathbf{b} = -\gamma\mathbf{I}, \\ -\mathbf{b}^T\mathbf{c} + \mathbf{d}^T\mathbf{a} = \gamma\mathbf{I}, \\ -\mathbf{b}^T\mathbf{d} + \mathbf{d}^T\mathbf{b} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.64)$$

dunque A è simplettica generalizzata di valenza γ se e solo se le matrici $\mathbf{a}^T\mathbf{c}$, $\mathbf{b}^T\mathbf{d}$ sono simmetriche e $\mathbf{a}^T\mathbf{d} - \mathbf{c}^T\mathbf{b} = \gamma\mathbf{I}$.

Infine, da (4.62) si vede che la matrice inversa della matrice A simplettica generalizzata di valenza γ è

$$A^{-1} = -\frac{1}{\gamma}\mathcal{I}A^T\mathcal{I} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^T & -\mathbf{b}^T \\ -\mathbf{c}^T & \mathbf{a}^T \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

4.8 Matrice Jacobiana di una trasformazione canonica

Vogliamo ora proseguire l'analisi della matrice Jacobiana di una trasformazione canonica, intrapresa nel Paragrafo 4.2. Il risultato parziale della Proposizione 4.2 può essere completato ora come segue:

Proposizione 4.10 *La trasformazione invertibile $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ con inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ è canonica se e solo se la matrice Jacobiana $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$ è simplettica generalizzata di valenza γ , ovvero*

$$(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T\mathcal{I}(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}) = \gamma\mathcal{I}. \quad (4.66)$$

La nuova Hamiltoniana è definita da

$$K(\mathbf{X}, t) = \gamma H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + K_0(\mathbf{X}, t),$$

dove K_0 viene determinata tramite la (4.15). In particolare, $K_0 \equiv 0$ se la trasformazione è completamente canonica.

Dim. Nella Proposizione 4.2 si è già dimostrato la sufficienza della condizione (4.66). Per mostrare che essa è anche necessaria, partiamo da una trasformazione canonica $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ di valenza γ . In virtù della Proposizione 4.6, sappiamo che esiste una funzione $F_0(\mathbf{x}, t)$ che verifica la condizione (4.30):

$$\nabla_{\mathbf{x}} F_0(\mathbf{x}, t) = -(J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

e che ha matrice Jacobiana del campo gradiente $\nabla_{\mathbf{x}} F_0$ simmetrica:

$$J_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} F_0) - (J_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} F_0))^T = \mathbf{0}.$$

Sviluppando i calcoli nell'espressione appena scritta, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = J_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} F_0) - (J_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} F_0))^T &= \left[(J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T J_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} - \left(J_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \right)^T (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) \right] + \\ &+ \gamma \left[J_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} - \left(J_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \right)^T \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

Per arrivare alla (4.68), è di aiuto la (6.16) utilizzata ponendo $A(\mathbf{x}) = (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (\mathbf{0}, \mathbf{P})^T$ per trovare:

$$J_{\mathbf{x}} \left[(J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} P_k J_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} X_k) + (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T J_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

(le colonne di A sono in questo caso le righe di $J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}$, ovvero i gradienti $\nabla_{\mathbf{x}} X_k$, $k = 1, \dots, 2\ell$). Le matrici della sommatoria sono tutte simmetriche, pertanto nel calcolo (4.68) rimane solo l'ultima matrice, a cui va tolta la trasposta.

Ripartendo dalla (4.68), si vede subito che

$$J_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} - \left(J_{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathcal{I}.$$

La matrice nella prima parentesi quadra corrisponde invece a

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (J_{\mathbf{p}} \mathbf{P})^T & (J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q})^T \\ (J_{\mathbf{q}} \mathbf{P})^T & (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ J_{\mathbf{p}} \mathbf{P} & J_{\mathbf{q}} \mathbf{P} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (J_{\mathbf{p}} \mathbf{P})^T \\ \mathbf{0} & (J_{\mathbf{q}} \mathbf{P})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\mathbf{p}} \mathbf{P} & J_{\mathbf{q}} \mathbf{P} \\ J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q} & J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q})^T J_{\mathbf{p}} \mathbf{P} - (J_{\mathbf{p}} \mathbf{P})^T J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q} & (J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q})^T J_{\mathbf{q}} \mathbf{P} - (J_{\mathbf{p}} \mathbf{P})^T J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q} \\ (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T J_{\mathbf{p}} \mathbf{P} - (J_{\mathbf{q}} \mathbf{P})^T J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q} & (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T J_{\mathbf{q}} \mathbf{P} - (J_{\mathbf{q}} \mathbf{P})^T J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Una semplice verifica porta all'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} (J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q})^T J_{\mathbf{p}} \mathbf{P} - (J_{\mathbf{p}} \mathbf{P})^T J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q} & (J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q})^T J_{\mathbf{q}} \mathbf{P} - (J_{\mathbf{p}} \mathbf{P})^T J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q} \\ (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T J_{\mathbf{p}} \mathbf{P} - (J_{\mathbf{q}} \mathbf{P})^T J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q} & (J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T J_{\mathbf{q}} \mathbf{P} - (J_{\mathbf{q}} \mathbf{P})^T J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q} \end{pmatrix} = (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}). \quad (4.69)$$

Riassumendo, la (4.68) si scrive

$$\mathbf{0} = (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) - \gamma \mathcal{I}, \quad (4.70)$$

ovvero la matrice $J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}$ è simplettica generalizzata di valenza γ . \square

Nel caso di una trasformazione canonica univalente, la condizione corrisponde alla simpletticità (4.58) della matrice Jacobiana.

4.9 Trasformazioni canoniche e parentesi di Poisson

La condizione (4.66) si collega in modo significativo al formalismo delle parentesi di Poisson (1.71). Per le proprietà viste sulle matrici (4.63), la condizione di canonicità (4.66) per la matrice jacobiana della trasformazione equivale a $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}\mathcal{I}(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T = \gamma\mathcal{I}$.

Eseguendo il calcolo con i blocchi delle matrici, si trova:

$$(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}\mathcal{I})(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{q}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{P})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{P})^T & J_{\mathbf{q}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T \\ J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{P})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{P})^T & J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Dunque, la trasformazione è canonica di valenza γ se e solo se la matrice (4.71) coincide con $\gamma\mathcal{I}$, ovvero

$$\begin{cases} J_{\mathbf{q}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{P})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{P})^T = \mathbf{0}, \\ J_{\mathbf{q}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T = -\gamma\mathbf{1}, \\ J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{P})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{P})^T = \gamma\mathbf{1}, \\ J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (4.72)$$

I quattro blocchi scritti per ciascun elemento di posto (i, j) , $i, j = 1, \dots, \ell$, ci riportano alla definizione (1.70) delle parentesi di Poisson, eseguite sulle funzioni \mathbf{X} delle variabili \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} (J_{\mathbf{q}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{P})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{P})^T)_{i,j} &= \nabla_{\mathbf{q}}P_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}}P_j - \nabla_{\mathbf{p}}P_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}}P_j = \left(P_i, P_j \right)_{\mathbf{x}}, \\ (J_{\mathbf{q}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T)_{i,j} &= \nabla_{\mathbf{q}}P_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}}Q_j - \nabla_{\mathbf{p}}P_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}}Q_j = \left(P_i, Q_j \right)_{\mathbf{x}}, \\ (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{P})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{P})^T)_{i,j} &= \nabla_{\mathbf{q}}Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}}P_j - \nabla_{\mathbf{p}}Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}}P_j = \left(Q_i, P_j \right)_{\mathbf{x}}, \\ (J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q})^T - J_{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(J_{\mathbf{q}}\mathbf{Q})^T)_{i,j} &= \nabla_{\mathbf{q}}Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}}Q_j - \nabla_{\mathbf{p}}Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}}Q_j = \left(Q_i, Q_j \right)_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Le condizioni (4.72) sono dunque equivalenti a

$$\left(P_i, P_j \right)_{\mathbf{x}} = 0, \quad \left(Q_i, Q_j \right)_{\mathbf{x}} = 0, \quad \left(Q_i, P_j \right)_{\mathbf{x}} = \gamma\delta_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, \ell. \quad (4.73)$$

Ricordando la definizione di parentesi di Poisson fondamentali (1.73) che, scritte per le variabili \mathbf{X} sono

$$\left(P_i, P_j \right)_{\mathbf{X}} = 0, \quad \left(Q_i, Q_j \right)_{\mathbf{X}} = 0, \quad \left(Q_i, P_j \right)_{\mathbf{X}} = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, \ell,$$

abbiamo dimostrato il seguente criterio necessario e sufficiente di canonicità:

Proposizione 4.11 *La trasformazione invertibile $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ è canonica di valenza γ se e solo se si conservano, a meno del fattore γ , le parentesi di Poisson fondamentali, nel senso che*

$$\begin{aligned} 0 &= \left(P_i, P_j \right)_{\mathbf{X}} = \left(P_i, P_j \right)_{\mathbf{x}}, \quad i, j = 1, \dots, \ell \\ 0 &= \left(Q_i, Q_j \right)_{\mathbf{X}} = \left(Q_i, Q_j \right)_{\mathbf{x}}, \quad i, j = 1, \dots, \ell \\ \gamma\delta_{i,j} &= \gamma \left(Q_i, P_j \right)_{\mathbf{X}} = \left(Q_i, P_j \right)_{\mathbf{x}} \quad i, j = 1, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (4.74)$$

A questo punto è semplice dimostrare l'ulteriore criterio di canonicità di una trasformazione:

Proposizione 4.12 *La trasformazione invertibile $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ con inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ è canonica di valenza γ se e solo se per ogni coppia di funzioni $f(\mathbf{x}, t)$ e $g(\mathbf{x}, t)$ si conservano le parentesi di Poisson a meno del fattore γ :*

$$\left(f, g \right)_{\mathbf{x}} = \gamma \left(F, G \right)_{\mathbf{X}} \quad (4.75)$$

dove $F(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$ e $G(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$.

Dim. Richiamiamo la regola (1.90) che esprime il risultato delle parentesi di Poisson fatta rispetto due sistemi di coordinate differenti:

$$\left(f, g \right)_{(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{X}) \cdot (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}) \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{X}). \quad (4.76)$$

Dunque, se la trasformazione è canonica vale la (4.75). Viceversa, se vale quest'ultima condizione per ogni coppia f e g , vale in particolare per le 2ℓ funzioni che definiscono la trasformazione $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, ovvero vale la conservazione (a meno di γ) delle parentesi fondamentali (4.74), pertanto la trasformazione è canonica. \square

A conclusione di questa analisi possiamo elencare le seguenti condizioni necessarie e sufficienti affinché una trasformazione invertibile $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, con inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, sia canonica con valenza γ :

- (i) la matrice $J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}$, oppure la matrice $(J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T$, è simplettica generalizzata di valenza γ (vedi (4.66)),
- (ii) la matrice $J_{\mathbf{X}} \mathbf{x}$, oppure la matrice $(J_{\mathbf{X}} \mathbf{x})$, è simplettica generalizzata di classe $1/\gamma$,
- (iii) le **parentesi di Poisson fondamentali** (1.73) sono conservate a meno del fattore γ (condizioni (4.73))
- (iv) le parentesi di Poisson sono conservate per ogni coppia di funzioni a meno del fattore γ (condizioni (4.75)).

Come corollario della Proposizione appena dimostrata, si ha che una **trasformazione è canonica univalente** ($\gamma = 1$) se e solo se la parentesi di Poisson è **invariante**:

$$\left(f, g \right)_{\mathbf{x}} = \left(F, G \right)_{\mathbf{X}} \quad (4.77)$$

Osservazione 4.4 *La struttura simplettica generalizzata della matrice Jacobiana di una trasformazione canonica chiarisce la corrispondenza fra i blocchi della matrice jacobiana diretta e quella della trasformazione inversa. Infatti, se $J_{\mathbf{x}} \mathbf{X}$ appartiene alla classe (4.66), dunque $J_{\mathbf{X}} \mathbf{x} = (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^{-1}$ è della classe $1/\gamma$, si ha da (4.65):*

$$J_{\mathbf{X}} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{p}} \mathbf{p} & J_{\mathbf{q}} \mathbf{p} \\ J_{\mathbf{p}} \mathbf{q} & J_{\mathbf{q}} \mathbf{q} \end{pmatrix} = (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^{-1} = -\frac{1}{\gamma} \mathcal{I} (J_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T \mathcal{I} = -\frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} -(J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q})^T & (J_{\mathbf{q}} \mathbf{P})^T \\ (J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q})^T & -(J_{\mathbf{p}} \mathbf{P})^T \end{pmatrix}.$$

Ricordando lo schema per le quattro funzioni generatrici S, S_2, S_3, S_4 del Paragrafo 4.6, risulta ora chiara l'equivalenza fra la non singolarità delle matrici $J_{\mathbf{p}} \mathbf{Q}$ e $J_{\mathbf{p}} \mathbf{p}$ per S (vedi (4.32), (4.36)), $J_{\mathbf{p}} \mathbf{P}$ e $J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q}$ per S_2 , $J_{\mathbf{q}} \mathbf{Q}$ e $J_{\mathbf{p}} \mathbf{p}$ per S_3 , $J_{\mathbf{q}} \mathbf{P}$ e $J_{\mathbf{q}} \mathbf{p}$ per S_4 .

4.10 Il teorema di Noether nel formalismo hamiltoniano

La Proposizione 3.15 della I Parte, che pone in relazione l'invarianza di una funzione f rispetto ad un gruppo ad un parametro di trasformazioni con la derivata di Lie di f lungo il generatore del gruppo, ha una chiave di lettura significativa in ambito Hamiltoniano.

Consideriamo il sistema Hamiltoniano autonomo $\dot{\mathbf{x}} = H(\mathbf{x})$ e il **gruppo di trasformazioni invertibili** $\mathcal{G} : \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ come in (3.116), I Parte, ovvero con le proprietà

- (i) $\alpha = 0$ corrisponde all'identità: $\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$,
- (ii) $\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha_1), \alpha_2) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha_1 + \alpha_2)$ per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

La Proposizione 3.15, I Parte, assicura che H è **invariante rispetto al gruppo**, ovvero $H(\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)) = H(\mathbf{x})$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ se e solo se $\mathbf{v}(\mathbf{x})H = 0$, dove

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha) |_{\alpha=0}$$

è il **generatore** del gruppo di trasformazioni e $\mathbf{v}f = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f$ è la **derivata di Lie** lungo la direzione \mathbf{v} della funzione f .

L'aspetto significativo del teorema nel contesto hamiltoniano emerge se supponiamo che ciascuna trasformazione $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sia **canonica**. In tal caso, infatti, vale la seguente

Proprietà 4.2 *Se tutte le trasformazioni in \mathcal{G} sono canoniche, allora il generatore del gruppo è un campo Hamiltoniano, ovvero esiste una funzione $K(\mathbf{x})$ tale che*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}K(\mathbf{x}).$$

Dim. La dimostrazione è del tutto analoga a quella della Proposizione 4.2. Dall'ipotesi di canonicità, derivando rispetto ad α la condizione (4.66) e calcolando per $\alpha = 0$, si trova

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T(\mathbf{x}, \alpha)] \right|_{\alpha=0} \mathcal{I} + \mathcal{I} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)] \right|_{\alpha=0} = \mathbf{0}$$

(osservare che $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)|_{\alpha=0} = \mathbf{I}$, matrice identità $2\ell \times 2\ell$), che equivale alla definizione di matrice hamiltoniana (2.3)

$$\mathcal{I} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)] \right|_{\alpha=0} = \left[\mathcal{I} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)] \right|_{\alpha=0} \right]^T.$$

D'altra parte, appoggiandosi al criterio della Proposizione 2.1 e calcolando la matrice Jacobiana del generatore \mathbf{v} del gruppo \mathcal{G} , si trova:

$$J_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = J_{\mathbf{x}} \left[\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha) \right|_{\alpha=0} \right] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)] \right|_{\alpha=0},$$

dunque la matrice $J_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})$ è hamiltoniana, ovvero esiste $K(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}K(\mathbf{x})$. \square

Come si è già osservato in (1.84), la derivata di Lie lungo un campo hamiltoniano è riconducibile alla parentesi di Poisson (1.71)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})H = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}K \cdot \nabla_{\mathbf{x}}H = \left(K, H \right).$$

Dunque, $\mathbf{v}(\mathbf{x})H = 0$ equivale a $\left(H, K \right) = 0$, ovvero K è un **integrale primo** per il moto hamiltoniano di H (vedi (1.86)).

Questa osservazione permette di formulare la Proposizione 3.15, I Parte, come segue:

Proposizione 4.13 (Teorema di Noether, formulazione Hamiltoniana). *L'Hamiltoniana $H(\mathbf{x})$ è invariante rispetto al gruppo di trasformazioni canoniche $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ di medesima valenza $\gamma \neq 0$ e che ha per generatore $\mathbf{v} = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}K$, se e solo se $\left(H, K \right) = 0$, ovvero se e solo se K è un integrale primo per il moto di H .*

Al fine di evidenziare il ruolo speculare delle Hamiltoniane H e K , e ricondursi quindi all'enunciato della Proposizione 2.3, aggiungiamo l'ipotesi che il flusso di H sia **completo**, ovvero (vedi (2.20) che l'applicazione \mathcal{F}_H^t esista per ogni $t \in \mathbb{R}$).

Definiamo la famiglia di trasformazioni $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, $t \in \mathbb{R}$, dove ciascuna applicazione è il flusso al tempo t dell'Hamiltoniana H :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_H^t(\mathbf{x}).$$

Nel Paragrafo 2.6 abbiamo visto che la famiglia di trasformazioni è un **gruppo ad un parametro** di diffeomorfismi, in cui $t = 0$ corrisponde all'identità.

Dobbiamo preannunciare un risultato assai importante, la cui dimostrazione risulta comoda nel contesto dell'equazione di Hamilton–Jacobi:

*Il gruppo di trasformazioni \mathcal{F}_H^t , $t \in \mathbb{R}$ è un gruppo ad un parametro di **trasformazioni canoniche di valenza $\gamma = 1$.***

Il generatore del gruppo è $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathcal{I}\nabla_{\mathbf{x}}H$ (verificare per esercizio, tenendo presente la Proprietà 3.4, I Parte).

Se dunque partiamo dall'Hamiltoniana $K(\mathbf{x})$ e consideriamo il gruppo ad un parametro \mathcal{F}_H^t , la condizione $\left(H, K \right) = \left(K, H \right) = 0$ equivale, per la Proposizione 4.13, ad affermare che K è invariante rispetto al gruppo \mathcal{F}_H^t .

In questo senso ci riconduciamo al ruolo speculare delle due Hamiltoniane H , K e dei due flussi \mathcal{F}_H^t , \mathcal{F}_K^t che è stato messo in evidenza nella versione del Teorema di Noether della Proposizione 2.3.

5 Equazione di Hamilton–Jacobi, sistemi integrabili

5.1 L’equazione di Hamilton–Jacobi

Consideriamo il sistema Hamiltoniano (1.24) di Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, t)$.

Ci poniamo l’obiettivo di determinare una **trasformazione canonica** (4.1) **libera** (vedi (4.32)) e **univalente** (ovvero $\gamma = 1$) in modo che il sistema scritto rispetto alle nuove variabili (4.7) sia quello con Hamiltoniana K identicamente nulla:

$$K(\mathbf{X}, t) \equiv 0. \quad (5.1)$$

Il vantaggio di una trasformazione con questa proprietà è evidente: una volta determinata, il sistema (4.7) è immediatamente integrabile:

$$\mathbf{P} = \alpha, \quad \mathbf{Q} = \beta \quad (5.2)$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\ell$ sono vettori costanti, che rappresentano 2ℓ integrali primi del moto.

Dalla conoscenza della trasformazione (4.1) e di quella inversa (4.5) possiamo scrivere le soluzioni di (1.24) in funzione delle costanti (5.2):

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}(\alpha, \beta, t), \quad \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\alpha, \beta, t). \quad (5.3)$$

Se $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ è la funzione generatrice (4.38) della trasformazione libera che stiamo cercando, le equazioni (4.39)–(4.41) che la definiscono sono (tenere conto che $c = 1$ e $K \equiv 0$)

$$\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad (5.4)$$

$$\nabla_{\mathbf{Q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = -\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c H(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}, t) = 0. \quad (5.6)$$

Siamo però nella situazione di non conoscere né la funzione generatrice S né la trasformazione canonica: si utilizzano pertanto le equazioni appena scritte sostituendo la (5.4) nella (5.6) ottenendo

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + H(\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{q}, t) = 0 \quad (5.7)$$

Le variabili \mathbf{Q} devono corrispondere alle costanti del moto β , per cui si usa scrivere la funzione generatrice come $S(\mathbf{q}, \beta, t)$ e la (5.7) nella forma

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, \beta, t) + H(\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \beta, t), \mathbf{q}, t) = 0. \quad (5.8)$$

La (5.8) viene detta **equazione di Hamilton–Jacobi**. Essa consiste in un’equazione alle derivate parziali nell’incognita S in cui compaiono le derivate della funzione da determinare rispetto alle \mathbf{q} e la derivata parziale rispetto al tempo.

All’equazione (5.8) va associata la condizione (4.43), ovvero

$$\det (J_\beta(\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \beta, t))) \neq 0, \quad (5.9)$$

che garantisce l’esistenza della trasformazione libera.

Una soluzione $S(\mathbf{q}, \beta, t)$ dell’equazione di Hamilton–Jacobi (5.8) che verifica la condizione (5.9) si dice **integrale completo** di (5.8).

Una volta determinato l’integrale completo S , si risale alla trasformazione canonica mediante le (4.39), (4.40), ovvero invertendo rispetto alle β le funzioni $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \beta, t) = \nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \beta, t)$ (operazione garantita dalla condizione (5.9)), in modo da trovare $\beta = \beta(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, e sostituendo in (5.5), determinando $\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = -\nabla_{\beta} S(\mathbf{q}, \beta, t)|_{\beta=\beta(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}$.

La trasformazione inversa di $\beta = \beta(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ $\alpha = \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, che esiste per quanto osservato nella Proposizione 4.7, consiste proprio nelle soluzioni del sistema di partenza scritte nella forma (5.3). Possiamo d’altra parte invertire direttamente le (5.5), in modo da trovare $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\alpha, \beta, t)$ e, per sostituzione in (5.4), $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\alpha, \beta, t)$. Il procedimento descritto viene riassunto nel cosiddetto

Teorema 5.1 (di Jacobi). *Se $S(\mathbf{q}, \beta, t)$ è un integrale completo dell'equazione (5.8), allora le equazioni del moto del sistema (1.24) possono essere scritte nella forma*

$$\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \beta, t) = \mathbf{p}, \quad \nabla_{\beta} S(\mathbf{q}, \beta, t) = -\alpha, \quad (5.10)$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\ell}$ sono costanti.

Il vantaggio del procedimento descritto è notevole: la conoscenza di un integrale completo S di (5.8) permette di evitare l'integrazione diretta del sistema (1.24). Ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie si sostituisce un'equazione del primo ordine alle derivate parziali. In base poi al Teorema di Jacobi, la conoscenza di un integrale completo garantisce la possibilità di determinare la soluzione mediante integrazioni di funzioni note e inversioni di funzioni: si dice in questo caso che il sistema hamiltoniano di Hamiltoniana H è **integrabile per quadrature**.

E' evidente che se S è un integrale completo, lo è anche $S+c$, con c costante arbitraria, dato che nell'equazione (5.8) S compare solo mediante le derivate. Dunque, S contiene le $\ell + 1$ costanti β, c .

Un integrale completo non comprende la totalità delle soluzioni, ovvero non rappresenta una soluzione generale. Il nome "completo" deriva dal fatto che è possibile risalire all'equazione iniziale (5.8) a partire dalla conoscenza di un integrale completo (verificare per esercizio).

Notiamo che la (4.27) si scrive, per la funzione S :

$$\frac{d}{dt} S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t) = \tilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t), t). \quad (5.11)$$

5.2 La funzione principale di Hamilton

Nel Paragrafo 3.3 abbiamo verificato che la funzione $W(\mathbf{q}, t)$, il cui differenziale coincide con la forma (3.53), è soluzione dell'equazione (3.55), formalmente identica a (5.8).

In effetti, la funzione W è un integrale completo dell'equazione di Hamilton–Jacobi di notevole importanza e vale la pena di approfondire questo fatto.

Partiamo da una Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ che descrive il moto di un sistema e fissiamo, nell'ottica lagrangiana del moto, un tempo t_0 , uno stato, che diremo iniziale, \mathbf{q}_0 , un tempo $t_1 > t_0$ e uno stato finale \mathbf{q}_1 .

Chiamiamo $P_0 \equiv (\mathbf{q}_0, t_0)$, $P_1 \equiv (\mathbf{q}_1, t_1)$ gli stati iniziali e finali, $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^{\ell+1}$.

Sia $\mathbf{q}(t; t_0, \mathbf{q}_0, t_1, \mathbf{q}_1)$ la soluzione delle equazioni di moto di Lagrange che ha come dato iniziale P_0 e come dato finale P_1 . I dati assegnati consistono in condizioni al bordo, non in condizioni di tipo Cauchy, in cui si assegna posizione e velocità iniziali: non ci occuperemo della questione di esistenza e unicità della soluzione con i dati al bordo, supponendo che esista sempre un'unica soluzione che unisce uno stato iniziale con uno finale assegnati.

La funzione

$$\tilde{W}(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \left(\mathbf{q}(t; t_0, \mathbf{q}_0, t_1, \mathbf{q}_1), \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t; t_0, \mathbf{q}_0, t_1, \mathbf{q}_1), t \right) dt \quad (5.12)$$

degli stati iniziale e finale P_0, P_1 viene detta **funzione principale di Hamilton**.

La (5.12) è l'azione Hamiltoniana (3.56), calcolata nel valore stazionario, supposto esistente ed unico, che realizza il moto fra gli stati P_0 e P_1 , ovvero $\tilde{W}(t_0, \mathbf{q}_0, t_1, \mathbf{q}_1) = I[\mathbf{q}(t; t_0, \mathbf{q}_0, t_1, \mathbf{q}_1)]$. E' tuttavia importante avere chiara la differenza formale fra i due oggetti \tilde{W} , funzione da $\mathbb{R}^{2(1+\ell)}$ in \mathbb{R} dei parametri al bordo $(t_0, \mathbf{q}_0, t_1, \mathbf{q}_1)$ e $I[\mathbf{q}]$, il valore del funzionale azione sul percorso estremale fra i due stati.

La relazione fra \tilde{W} e $W(\mathbf{q}, t)$ (qui invertiamo gli argomenti) che compare in (3.54) è immediata, se pensiamo alla (5.12) come integrale curvilineo della forma (3.53) lungo l'arco estremale che collega P_0 e P_1 (vedi (3.37)):

$$\tilde{W}(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1) = W(\mathbf{q}_1, t_1) - W(\mathbf{q}_0, t_0).$$

Chiamiamo per brevità $\dot{\mathbf{q}}_0 = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t; t_0, \mathbf{q}_0, t_1, \mathbf{q}_1)|_{t=t_0}$, $\dot{\mathbf{q}}_1 = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t; t_0, \mathbf{q}_0, t_1, \mathbf{q}_1)|_{t=t_1}$ la velocità iniziale e quella finale dell'arco estremale che unisce P_0 con P_1 .

Il fatto essenziale che andiamo a dimostrare è il contenuto della seguente

Proposizione 5.1 *Il differenziale della funzione \tilde{W} è*

$$d\tilde{W}(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1) = \mathbf{p}_1 \cdot d\mathbf{q}_1 - H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t_1)dt_1 - [\mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0 - H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0)dt_0] \quad (5.13)$$

dove $\mathbf{p}_0 = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, t)$, $\mathbf{p}_1 = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, t)$ e $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ è la trasformata di Legendre di \mathcal{L} .

Dim. È un'immediata conseguenza della formula di variazione dell'azione (3.57). Infatti, chiamiamo $\mathbf{y} = (\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1) \in \mathbb{R}^{2(\ell+1)}$ l'insieme delle variabili di \tilde{W} e fissiamo arbitrariamente una curva in $\mathbb{R}^{2(\ell+1)}$ parametrizzata con $\mathbf{y}^{(a)}(\tau) = (\mathbf{q}_0^{(a)}(\tau), t_0^{(a)}(\tau), \mathbf{q}_1^{(a)}(\tau), t_1^{(a)}(\tau))$, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$. Rispetto alla (3.57), si osservi che

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}|_{P_1} = \mathbf{p}_1, \quad \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}|_{P_0} = \mathbf{p}_0, \quad (\mathcal{L} - \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L})|_{P_1} = H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t_1), \quad (\mathcal{L} - \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L})|_{P_0} = H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0),$$

pertanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\tilde{W}(\mathbf{y}^{(a)}(\tau)) &= \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{q}_1^{(a)})'(\tau) - H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t_1)(t_1^{(a)})'(\tau) - \left[\mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{q}_0^{(a)})'(\tau) - H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0)(t_0^{(a)})'(\tau) \right] = \\ &= (-\mathbf{p}_0, H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0), \mathbf{p}_1, -H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t_1)) \cdot (\mathbf{y}^{(a)})'(\tau). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{W}^{(a)}(\tau) = \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{W}(\mathbf{y}^{(a)}(\tau)) \cdot (\mathbf{y}^{(a)})'(\tau),$$

ed essendo la curva $\mathbf{y}^{(a)}$ arbitraria si conclude che

$$\nabla_{\mathbf{q}_0}\tilde{W}(\mathbf{y}) = -\mathbf{p}_0, \quad \frac{\partial\tilde{W}}{\partial t_0}(\mathbf{y}) = H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0) \quad (5.14)$$

$$\nabla_{\mathbf{q}_1}\tilde{W}(\mathbf{y}) = \mathbf{p}_1, \quad \frac{\partial\tilde{W}}{\partial t_1}(\mathbf{y}) = -H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t_1) \quad (5.15)$$

e la (5.13) è dimostrata. \square

La (5.13) è nota come **formula di Hamilton per la variazione dell'azione**. Si osservi che la dipendenza di \mathbf{p}_0 da \mathbf{y} è sia attraverso la posizione iniziale \mathbf{q}_0 sia attraverso \mathbf{q}_1 , dato che una differente posizione di arrivo comporterebbe differenti momenti cinetici iniziali \mathbf{p}_0 . La stessa considerazione vale per \mathbf{p}_1 .

Il fatto importante che si legge nelle (5.15) è che la funzione $\tilde{W}(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}, t)$ è **soluzione dell'equazione di Hamilton–Jacobi**

$$\frac{\partial\tilde{W}}{\partial t} + H(\nabla_{\mathbf{q}}\tilde{W}, \mathbf{q}, t) = 0. \quad (5.16)$$

Applicando il Teorema 5.1, si ha che la conoscenza della funzione principale di Hamilton \tilde{W} permette di scrivere le soluzioni delle equazioni di moto nella forma delle relazioni (5.10), le quali non sono altro che le prime ℓ equazioni in (5.14), (5.15).

Tuttavia questo procedimento, sviluppato dallo stesso Hamilton che introdusse la funzione \tilde{W} , ha un evidente difetto: la scrittura della funzione principale di Hamilton (5.12) necessita della conoscenza del moto, pertanto la risoluzione della (5.16) è inutile.

Il circolo vizioso fu spezzato dal contributo di Jacobi, il quale dimostrò che le equazioni di moto sono equivalenti alle (5.10), considerando non necessariamente la funzione principale di Hamilton \tilde{W} , ma un qualunque integrale completo $S(\mathbf{q}, \beta, t)$ dell'equazione di Hamilton–Jacobi (5.8).

5.3 Canonicità del flusso hamiltoniano

La funzione di Hamilton \tilde{W} , più che un ruolo costruttivo, assume un'importanza teorica assai significativa se rileggiamo le (5.14), (5.15) nel formalismo hamiltoniano.

Consideriamo la trasformazione **flusso hamiltoniano**

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \quad (5.17)$$

ovvero le soluzioni $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ di (1.24) con dato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ (rispetto alla scrittura della trasformazione (4.1), si scrive il tempo t come primo argomento semplicemente per rimarcare il fatto che sono le soluzioni del moto). Supponendo esistenza e unicità delle soluzioni di (1.24) per tutti i tempi t che ci interessano, si ha che (5.17) è una trasformazione invertibile.

Può non essere inutile spiegare meglio che le (5.17) sono viste come trasformazioni di variabili del tipo (4.1) per passare dalle variabili al tempo iniziale t_0 (le \mathbf{x}_0 in (5.17), le \mathbf{x} in (4.1)) alle variabili calcolate al tempo t , ossia le \mathbf{x} in (5.17), che giocano il ruolo delle \mathbf{X} delle (4.1).

In altre notazioni, la trasformazione (5.17) è esattamente il flusso hamiltoniano (2.8) $\mathcal{F}_H^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t)$.

Richiediamo che la trasformazione (5.17) sia **libera**, ovvero che (vedi (4.32))

$$\det J_{\mathbf{p}_0 \mathbf{q}} \neq 0. \quad (5.18)$$

In tal modo è possibile determinare, come in (4.33) e (4.34), le funzioni $\mathbf{p}_0 = \tilde{\mathbf{p}}_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$, $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$.

Mettendoci nell'ottica del flusso (5.17), le variabili t_0 e \mathbf{q}_0 della funzione (5.12) sono fissate come tempo e posizione iniziali, mentre $t_1 = t$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$ sono il tempo e la posizione al generico istante t .

E' dunque logico considerare la funzione

$$\tilde{W}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t) = \tilde{W}(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}, t), \quad (5.19)$$

omettendo il tempo iniziale t_0 comune a tutte le soluzioni di (5.17).

Dimostriamo l'importante

Teorema 5.2 *Il flusso Hamiltoniano (5.17) è una trasformazione canonica, libera e univalente dalle variabili \mathbf{x}_0 alle variabili \mathbf{x} e la funzione generatrice S della trasformazione è la funzione principale di Hamilton (5.19) di segno opposto: $S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t) = -\tilde{W}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$.*

Inoltre, la trasformazione porta l'Hamiltoniana nulla $H_0(\mathbf{x}_0, t) \equiv 0$ nell'Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, t)$ che dà luogo al flusso (5.17).

Dim. La (5.14), prima equazione, si rilegge come

$$\nabla_{\mathbf{q}_0} \tilde{W}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t) = -\tilde{\mathbf{p}}_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t).$$

Per l'ipotesi (5.18), si ha che $J_{\mathbf{q}} \nabla_{\mathbf{q}_0} \tilde{W}_1$ è non singolare, pertanto la funzione \tilde{W}_1 verifica la condizione (4.43). D'altra parte, la (5.13) per la funzione (5.19) si riscrive come

$$d\tilde{W}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t) = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)dt - \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0. \quad (5.20)$$

Possiamo pertanto applicare il risultato della Proposizione 4.7 e concludere che la funzione $-\tilde{W}_1$ è la funzione generatrice della trasformazione canonica di valenza $c = 1$ e che porta le \mathbf{x}_0 nelle \mathbf{x} , ovvero della trasformazione (5.17). Dalla condizione di Lie (5.20) si vede anche che l'Hamiltoniana nulla viene portata nell'Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, t)$. \square

Le (5.15), insieme alla condizione (5.18), confermano che \tilde{W}_1 è un **integrale completo** dell'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t) + H(\nabla_{\mathbf{q}} \tilde{W}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t), \mathbf{q}_0, t) = 0$$

in cui le costanti del moto (le β in (5.8)) sono le \mathbf{q}_0 .

La medesima relazione (5.20) afferma che (vedi (4.46)) \tilde{W}_1 è funzione generatrice per la trasformazione canonica inversa $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)$, mediante la quale ad ogni valore della soluzione $\mathbf{x}(t)$ viene assegnato il dato iniziale. L'Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, t)$ nell'Hamiltoniana nulla. In tal modo, \tilde{W}_1 genera la trasformazione canonica univalente che realizza gli obiettivi (5.1), (5.2), in cui i 2ℓ integrali primi α e β sono le condizioni iniziali \mathbf{x}_0 .

Osservazione 5.1 *La canonicità univalente del flusso Hamiltoniano di (1.24) permette una dimostrazione alternativa del Teorema di Liouville 2.2.*

La misura del volume di una porzione V_0 dello spazio delle fasi $\int_{V_0} d\mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0$ si trasforma, all'istante t , considerando V_0 come volume materiale, nell'integrale $\int_{V_t} |\det J_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}| d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$, dove $V_t = \mathcal{F}_H^t(V_0)$. La matrice Jacobiana $J_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}$ è symplettica, dunque (vedi (4.58)) $|\det J_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}| = 1$ e i due integrali coincidono.

Esercizio 5.1 Ricordiamo la definizione di **curve caratteristiche** per l'equazione non lineare del primo ordine alle derivate parziali

$$F(\mathbf{x}, w(\mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{x}} w(\mathbf{x})) = 0,$$

dove $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$, $w : U \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione incognita, $F(\mathbf{x}, z, \mathbf{r})$ è una funzione assegnata in un aperto di $\mathbb{R}^{N \times 1 \times N}$.

Il cosiddetto **metodo delle caratteristiche** converte l'equazione alle derivate parziali in un opportuno sistema di equazioni differenziali ordinarie. Se la curva caratteristica \mathcal{C} viene parametrizzata mediante le equazioni $\mathbf{x}(s)$, $s \in I \subseteq \mathbb{R}$, si indichi con $z(s) = w(\mathbf{x}(s))$ la funzione incognita valutata lungo \mathcal{C} e con $\mathbf{r}(s) = \nabla_{\mathbf{x}} w|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)}$ il valore del gradiente lungo \mathcal{C} .

Il sistema di equazioni differenziali ordinarie che definisce le caratteristiche è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) = \nabla_{\mathbf{r}} F(\mathbf{x}(s), z(s), \mathbf{r}(s)), \\ \frac{d}{ds} z(s) = \nabla_{\mathbf{r}} F(\mathbf{x}(s), z(s), \mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}(s) \\ \frac{d}{ds} \mathbf{r}(s) = -\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}(s), z(s), \mathbf{r}(s)) - \frac{\partial}{\partial z} F(\mathbf{x}(s), z(s), \mathbf{r}(s)) \mathbf{r}(s). \end{cases} \quad (5.21)$$

L'esercizio consiste nello scrivere il sistema (5.21) per l'equazione (5.8), ponendo $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, t)$, $w = S(\mathbf{q}, t)$ e determinando la funzione $F(\mathbf{q}, t, S, \nabla_{\mathbf{q}} S, \partial S / \partial t)$ che esprime l'equazione di Hamilton–Jacobi: è interessante verificare che la scrittura delle equazioni per le linee caratteristiche riporti alle equazioni (1.24) e a specifiche proprietà dell'Hamiltoniana che abbiamo incontrato.

5.4 Alcune considerazioni sull'equazione di Hamilton–Jacobi

L'equazione non lineare del primo ordine alle derivate parziali (5.8) è tutt'altro che semplice, sia nella sua risoluzione a sé, sia nel comprendere la relazione fra una sua soluzione e quella del sistema di equazioni differenziali ordinarie (1.24).

Evidenziamo ora alcuni casi notevoli in cui l'integrale completo dell'equazione di Hamilton–Jacobi può essere cercato in una forma particolare. Più precisamente, si analizzerà il caso autonomo e il caso di variabili cicliche.

Caso autonomo. Se la funzione Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, la funzione $H(\mathbf{x})$ è un integrale primo del moto: $H \equiv H_0$ (vedi (1.47)).

La struttura dell'equazione (5.8)

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, \beta, t) + H(\nabla_{\mathbf{q}} S, \mathbf{q}) = 0, \quad (5.22)$$

in cui H è la costante del moto H_0 , suggerisce di cercare l'integrale completo S nella forma $S(\mathbf{q}, \beta, t) = -H_0 t + V(\mathbf{q}, \beta)$ che, sostituita in (5.22), fornisce la seguente equazione per V :

$$H(\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}, \beta), \mathbf{q}) = H_0(\beta). \quad (5.23)$$

Il modo in cui H_0 dipende dalle costanti β è da specificare, una volta che siano stabiliti gli ℓ integrali primi β .

Osservazione 5.2 Derivando rispetto alle β la (5.23) e tenendo conto della (6.8), si trova

$$\nabla_{\beta} H_0(\beta) = [J_{\beta}(\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}, \beta))]^T \nabla_{\mathbf{p}} H|_{\mathbf{p}=\nabla_{\mathbf{q}} V}. \quad (5.24)$$

Per la condizione (5.25) di integrale completo, la (5.24) pone necessariamente per la funzione H_0 la condizione $\nabla_{\beta} H_0 \neq 0$, dato che è naturale assumere $\nabla_{\mathbf{p}} H \neq 0$ (altrimenti il sistema (1.24) è banale).

La condizione (5.9) equivale a

$$\det J_{\beta}(\nabla_{\mathbf{q}} V) \neq 0, \quad (5.25)$$

dunque $S(\mathbf{q}, \beta, t)$ è funzione generatrice della trasformazione canonica (5.3) se e solo se $V(\mathbf{q}, \beta)$ è funzione generatrice della trasformazione canonica definita implicitamente da (vedi (5.10))

$$\nabla_{\mathbf{q}} V = \mathbf{p}, \quad (5.26)$$

$$\nabla_{\beta} V = -\alpha + t \nabla_{\beta} H_0(\beta). \quad (5.27)$$

La trasformazione canonica generata da V porta dunque (\mathbf{p}, \mathbf{q}) nelle variabili

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\alpha - t \nabla_{\beta} H_0(\beta), \beta) \quad (5.28)$$

e la nuova Hamiltoniana, come si deduce da (5.6), è $H_0(\mathbf{b})$. Le variabili \mathbf{b} mantengono quindi lo stesso ruolo del caso generale (5.8) di costanti del moto, mentre le variabili α di (5.10) vengono sostituite dalle \mathbf{a} , funzioni lineari del tempo.

La scrittura del sistema di Hamilton nelle nuove variabili

$$\dot{\mathbf{a}} = -\nabla_{\mathbf{b}} H_0(\mathbf{b}) \quad \dot{\mathbf{b}} = \nabla_{\mathbf{a}} H_0(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

conferma ovviamente che $\mathbf{a} = -\nabla_{\mathbf{b}} H_0(\mathbf{b})t + \mathbf{a}_0$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$, con \mathbf{a}_0 , \mathbf{b}_0 costanti.

Una scelta significativa consiste nel porre $H_0(\beta) = \beta_{\ell}$ (**metodo di Jacobi**): in tal caso, si ha $S(\mathbf{q}, \beta, t) = -H_0 t + V(\mathbf{q}, \mathbf{b}_{\ell-1}, H_0)$ e le (5.27) sono

$$\nabla_{\mathbf{b}_{\ell-1}} V(\mathbf{q}, \mathbf{b}_{\ell-1}, H_0) = -\mathbf{a}_{\ell-1}, \quad \frac{\partial}{\partial H_0} V(\mathbf{q}, \mathbf{b}_{\ell-1}, H_0) = t - \alpha_{\ell}, \quad (5.29)$$

con $\mathbf{b}_{\ell-1} = (\beta_1, \dots, \beta_{\ell-1})$, $\mathbf{a}_{\ell-1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1})$.

La condizione (5.9) è in questo caso $\det J_{(\mathbf{b}_{\ell-1}, H_0)} \nabla_{\mathbf{q}} V \neq 0$.

È significativo riconoscere nelle (5.29), in modo implicito, le soluzioni del moto espresse in forma geometrica (3.100): per ottenere la forma esplicita delle soluzioni, possiamo utilizzare le prime $\ell - 1$ equazioni in (5.29) ricavando $\ell - 1$ coordinate fra le \mathbf{q} in funzione della rimanente e di tutte le costanti eccetto α_{ℓ} . L'ultima equazione invece permette di determinare le coordinate \mathbf{q} in funzione del tempo t .

Esercizio 5.2 Scrivere l'equazione di Hamilton–Jacobi per il moto di un punto materiale di massa m , vincolato su una curva liscia e fissa di equazioni parametriche $\mathbf{x}(\lambda)$ e sottoposto alla forza posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Caso di variabili cicliche. Consideriamo ora il caso in cui nell'Hamiltoniana H vi siano $\ell - \lambda$ coordinate cicliche $\mathbf{q}_{\ell-\lambda} = (q_{\lambda+1}, \dots, q_{\ell})$: $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}_{\ell-\lambda}, t)$.

In tal caso, i momenti cinetici coniugati $\mathbf{p}_{\ell-\lambda} = (p_{\lambda+1}, \dots, p_{\ell})$ sono costanti del moto. Le $\ell - \lambda$ equazioni in (5.4) per le variabili cicliche $\nabla_{\mathbf{q}_{\ell-\lambda}} S = \mathbf{p}_{\ell-\lambda} = \mathbf{b}_{\ell-\lambda}$, dove $\mathbf{b}_{\ell-\lambda}$ è il vettore in $\mathbb{R}^{\ell-\lambda}$ delle costanti $(\beta_{\lambda+1}, \dots, \beta_{\ell})$, suggeriscono di cercare la funzione generatrice S nella forma

$$S(\mathbf{q}, \beta, t) = \mathbf{b}_{\ell-\lambda} \cdot \mathbf{q}_{\ell-\lambda} + S_0(\mathbf{q}_{\lambda}, \beta, t)$$

dove $\mathbf{q}_{\lambda} = (q_1, \dots, q_{\lambda})$ sono le variabili non cicliche. L'equazione (5.8) per la funzione $S_0(\mathbf{q}_{\lambda}, \beta, t)$ è la seguente:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H(\nabla_{\mathbf{q}} S_0, \mathbf{b}_{\ell-\lambda}, t) = 0. \quad (5.30)$$

Si vede facilmente che la condizione (5.9) equivale alla non singolarità della matrice $\lambda \times \lambda J_{\mathbf{b}_{\lambda}}(\nabla_{\mathbf{q}_{\lambda}} S_0)$, con $\mathbf{b}_{\lambda} = (\beta_1, \dots, \beta_{\lambda})$.

La trasformazione canonica (5.4), (5.5) generata da S_0 è definita nelle variabili non cicliche dalle equazioni

$$\nabla_{\mathbf{q}_{\lambda}} S_0(\mathbf{q}_{\lambda}, \beta, t) = \mathbf{p}_{\lambda}, \quad \nabla_{\mathbf{b}_{\lambda}} S_0(\mathbf{q}_{\lambda}, \beta, t) = -\mathbf{a}_{\lambda}, \quad (5.31)$$

che permettono di trovare $(\mathbf{p}_{\lambda}, \mathbf{q}_{\lambda})$ in funzione delle costanti \mathbf{a}_{λ} , β . Le restanti equazioni in (5.4) per le variabili non cicliche, ovvero $\nabla_{\mathbf{q}_{\lambda}} S_0 = \mathbf{b}_{\ell-\lambda}$, sono già state utilizzate, mentre le restanti equazioni in (5.5)

$$\nabla_{\mathbf{b}_{\lambda}} S_0 = -\mathbf{a}_{\lambda} - \mathbf{q}_{\ell-\lambda} \quad (5.32)$$

vengono usate per determinare le variabili cicliche $\mathbf{q}_{\ell-\lambda}$.

Il caso esaminato di variabili cicliche non è altro che il metodo dell'Hamiltoniana ridotta riletto con la procedura di Hamilton–Jacobi.

Osservazione 5.3 Il caso di Hamiltoniana autonoma (5.26), (5.27) rientra nello schema con variabili cicliche (5.31), (5.32) se pensiamo alla trasformazione canonica (3.94) e consideriamo $(-H, t)$ come coppia di variabili coniugate con t ciclica.

Esercizio 5.3 Esaminare il caso di Hamiltoniana autonoma con variabili cicliche, realizzando che la funzione generatrice ha la struttura $S(\mathbf{q}_\ell, \beta, t) = -H_0 t + V_0(\mathbf{q}_\lambda, \beta, H_0)$ e la funzione V_0 è soluzione di $H(\nabla_{\mathbf{q}_\lambda} V_0, \mathbf{b}_{\ell-\lambda}, \mathbf{q}_\lambda) = H_0$, con $\mathbf{b}_{\ell-\lambda} = (\beta_{\lambda+1}, \dots, \beta_\ell)$.

5.5 Il metodo di separazione delle variabili

Nel metodo di Hamilton–Jacobi l’integrazione del sistema di equazioni canoniche viene sostituita dalla ricerca di un integrale completo dell’equazione (5.8): questo fatto comporta un particolare interesse teorico nella ricerca di tecniche che permettano di risolvere l’equazione in questione.

La gran parte dei metodi risolutivi sono associati alla particolare struttura della funzione Hamiltoniana del sistema. Andremo a considerare alcuni casi in questo senso, in cui lo schema risolutivo è ottenuto mediante la **separazione delle variabili**. I casi che esamineremo riguardano un’Hamiltoniana autonoma del tipo:

- Caso 1:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{H}(H_1(p_1, q_1), \dots, H_\ell(p_\ell, q_\ell)) \quad (5.33)$$

- Caso 2:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_\ell(\dots H_3(H_2(H_1(p_1, q_1), p_2, q_2)), \dots, p_\ell, q_\ell) \quad (5.34)$$

- Caso 3:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{f_1(p_1, q_1) + \dots + f_\ell(p_\ell, q_\ell)}{g_1(p_1, q_1) + \dots + g_\ell(p_\ell, q_\ell)} \quad (5.35)$$

Caso 1.

Le variabili in H sono separate, nel senso che in ogni funzione H_i , $i = 1, \dots, \ell$, appare solo una coppia di variabili coniugate. L’equazione (5.23) per la funzione $V(\mathbf{q}, \beta)$ assume la forma

$$\mathcal{H}\left(H_1\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, q_1\right), \dots, H_\ell\left(\frac{\partial V}{\partial q_\ell}, q_\ell\right)\right) = H_0 \quad (5.36)$$

Le funzioni H_i , $i = 1, \dots, \ell$, sono integrali primi del moto, dato che H dipende funzionalmente da esse e H è autonoma (vedi (1.86) e (1.89)). E’ dunque lecito porre le costanti $\beta_i = H_i$, $i = 1, \dots, \ell$, in modo da separare la (5.36) nelle ℓ equazioni

$$H_i\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}, q_i\right) = \beta_i, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (5.37)$$

La dipendenza dell’integrale primo H_0 dalle costanti scelte è, in base alla (5.36), $\mathcal{H}(\beta_1, \dots, \beta_\ell) = H_0$. Nell’ipotesi che l’Hamiltoniana H contenga tutte le variabili \mathbf{p} , ovvero

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_i}(p_i, q_i) \neq 0, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (5.38)$$

ciascuna delle (5.37) può essere posta nella forma $\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q_i, \beta)$, $i = 1, \dots, \ell$, da cui si ricava $V(\mathbf{q}, \beta) =$

$\sum_{i=1}^{\ell} \int F_i(q_i, \beta) dq_i$. Qui e in seguito l’integrale indefinito è da intendersi fra l’estremo inferiore fisso q_i^0 e quello superiore variabile q_i , con q_i^0 costante e indipendente dalle β . La funzione S in (5.8) è dunque del tipo

$$S(\mathbf{q}, \beta, t) = -\mathcal{H}(\beta_1, \dots, \beta_\ell)t + \sum_{i=1}^{\ell} \int F_i(q_i, \beta) dq_i. \quad (5.39)$$

E' importante notare che le condizioni (5.38) equivalgono alla condizione (5.25) di esistenza dell'integrale completo, che in questo caso si scrive

$$\prod_{i=1}^{\ell} \frac{\partial F_i}{\partial \beta_i} \neq 0.$$

Infatti, considerando che le relazioni $H_i(p_i, q_i) = \beta_i$, $p_i = F_i(q_i, \beta_i)$, $i = 1, \dots, \ell$ sono una inversa dell'altra, si ha $\frac{\partial F_i}{\partial \beta_i} = \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \right)_{p_i=F_i(q_i, \beta_i)}^{-1}$.

Esercizio 5.4 Ricavare la (5.39) dalla (5.24).

Pertanto, affinché la (5.39) definisca un integrale completo dell'equazione di Hamilton–Jacobi per l'Hamiltoniana (5.33) è sufficiente che per ciascuna funzione H_i valgano le (5.38), ovvero che H_i contenga la variabile p_i .

Le formule risolutive (5.10) assumono la forma

$$p_i = F_i(q_i, \beta_i), \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta_i} t + \int \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \right)_{p_i=F_i(q_i, \beta_i)}^{-1} dq_i = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (5.40)$$

Esercizio 5.5 Applicare il procedimento descritto all'Hamiltoniana corrispondente a ℓ oscillazioni indipendenti di ℓ punti materiali con medesima massa m :

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{m}{2} p_i^2 + \frac{k}{2} q_i^2 \right).$$

Il **caso 2** comprende anche il caso 1, che però è stato trattato a parte per maggiore chiarezza. Se l'Hamiltoniana è del tipo (5.34), l'equazione (5.23) diventa

$$H_{\ell} \left(\dots H_3 \left(H_2 \left(H_1 \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, q_1 \right), \frac{\partial V}{\partial q_2}, q_2 \right) \right), \dots, \frac{\partial V}{\partial q_{\ell}}, q_{\ell} \right) = H_0.$$

Le funzioni H_i , $i = 1, \dots, \ell$ sono in involuzione con H , dunque è possibile porre, come nel caso 1, $\beta_i = H_i$, $i = 1, \dots, \ell$, in modo da ottenere la separazione nelle ℓ equazioni

$$H_1 \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, q_1 \right) = \beta_1, \quad H_2 \left(\beta_1, \frac{\partial V}{\partial q_2}, q_2 \right) = \beta_2, \quad \dots, \quad H_{\ell} \left(\beta_{\ell-1}, \frac{\partial V}{\partial q_{\ell}}, q_{\ell} \right) = \beta_{\ell}.$$

Procedendo esattamente come nel caso 1, è evidente che, se vale la condizione (5.38), possiamo ricavare $\nabla_{\mathbf{q}} V$ dalle ℓ equazioni appena scritte:

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = G_1(q_1, \beta_1), \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} = G_2(q_2, \beta_1, \beta_2), \quad \dots, \quad p_{\ell} = \frac{\partial V}{\partial q_{\ell}} = G_{\ell}(q_{\ell}, \beta_{\ell-1}, \beta_{\ell}). \quad (5.41)$$

L'integrazione rispetto alle \mathbf{q} porta all'espressione

$$V(\mathbf{q}, \beta) = \int G_1(q_1, \beta_1) dq_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \int G_i(q_i, \beta_{i-1}, \beta_i) dq_i, \quad (5.42)$$

mentre $S(\mathbf{q}, \beta, t) = -\beta_{\ell} t + V(\mathbf{q}, \beta)$.

Analogamente al caso 1, si trova che la condizione (5.25) equivale a $\prod_{i=1}^{\ell} \frac{\partial G_i}{\partial \beta_i} \neq 0$ e le relazioni $H_1(p_1, q_1) = \beta_1$, $H_i(\beta_{i-1}, p_i, q_i) = \beta_i$, $i = 2, \dots, \ell$ si invertono in $p_1 = G_1(q_1, \beta_1)$, $p_i = G_i(q_i, \beta_{i-1}, \beta_i)$, $i = 2, \dots, \ell$, dunque

$$\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} = \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_1} \right)_{p_1=G_1(q_1, \beta_1)}^{-1}, \quad \frac{\partial G_i}{\partial \beta_i} = \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \right)_{p_i=G_i(q_i, \beta_{i-1}, \beta_i)}^{-1}, \quad i = 2, \dots, \ell. \quad (5.43)$$

Esercizio 5.6 Ricavare le (5.43) dalla (5.24).

Anche nel caso 2, dunque, la condizione (5.38) garantisce l'esistenza dell'integrale completo S dell'equazione di Hamilton–Jacobi.

Per scrivere le (5.29), si parte dalla (5.42), si considerano le (5.43) e le relazioni aggiuntive

$$\frac{\partial G_i}{\partial \beta_{i-1}} = - \left[\frac{\partial H_i}{\partial \beta_{i-1}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \right)^{-1} \right] \Bigg|_{p_i = G_i(q_i, \beta_{i-1}, \beta_i)}, \quad i = 2, \dots, \ell. \quad (5.44)$$

Si ottiene:

$$\int \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \right)^{-1} dq_i - \int \frac{\partial H_{i+1}}{\partial \beta_i} \left(\frac{\partial H_{i+1}}{\partial p_{i+1}} \right)^{-1} dq_{i+1} = -\alpha_i, \quad i = 1, \dots, \ell - 1, \quad (5.45)$$

$$\int \left(\frac{\partial H_\ell}{\partial p_\ell} \right)^{-1} dq_\ell = t - \alpha_\ell, \quad (5.46)$$

dove le derivate delle funzioni H_i , $i = 1, \dots, \ell$ vanno calcolate nelle variabili (\mathbf{q}, β) come in (5.43, (5.44).

Le (5.45) permettono di rappresentare le traiettorie nello spazio delle coordinate in dipendenza dei $2\ell - 1$ parametri $\beta_1, \dots, \beta_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}$, mentre la (5.46) consente di trovare la dipendenza delle \mathbf{q} dal tempo t . Infine, i momenti \mathbf{p} in funzione del tempo e delle costanti α, β si ottengono dalle relazioni (5.41).

Riassumiamo l'analisi del caso 2 (che comprende anche il caso 1) nella seguente

Proposizione 5.2 Per un sistema hamiltoniano autonomo con Hamiltoniana $H(\mathbf{x})$ del tipo (5.34) e tale che valgano le condizioni (5.38), la corrispondente equazione di Hamilton–Jacobi (5.8) ammette l'integrale completo $S = V - H_0 t$, con V definita da (5.42).

Esercizio 5.7 Un esempio particolarmente significativo che rientra nel caso appena descritto è il moto Kepleriano di una particella di massa m attratta verso il centro del moto da una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro.

In coordinate sferiche con origine il centro O del moto le coordinate del punto P si scrivono

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta$$

Dato che

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 \right), \quad U = \frac{\gamma}{r},$$

l'Hamiltoniana del sistema si scrive

$$H(p_r, p_\theta, p_\psi, r, \theta, \psi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\gamma}{r}.$$

Si riconosca il tipo (5.34) dell'Hamiltoniana del sistema e, procedendo secondo il metodo descritto per il caso 2, si determini per separazione di variabili le equazioni di moto, fino a giungere alla legge

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \beta)}$$

con p , e (eccentricità) e β costanti da legare alle α_i, β_i , $i = 1, 2, 3$.

Caso 3. Esaminiamo ora il caso notevole in cui l'Hamiltoniana è come in (5.35). L'equazione (5.23) può essere scritta come

$$\sum_{i=1}^{\ell} \left(f_i \left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) - H_0 g_i \left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \right) = 0. \quad (5.47)$$

Si verifica facilmente che (vedi (1.69))

$$\left(H, f_i - H_0 g_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (5.48)$$

pertanto possiamo porre $b_i = f_i - H_0 g_i$, con b_i costanti, $i = 1, \dots, \ell$, e separare la (5.47) nelle equazioni

$$b_i = f_i \left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) - H_0 g_i \left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} \right), \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (5.49)$$

Si osservi che

$$b_\ell = - \sum_{i=1}^{\ell-1} b_i, \quad (5.50)$$

ossia b_ℓ è dipendente dalle rimanenti costanti.

Nell'intenzione di risolvere le (5.49) rispetto a $\nabla_{\mathbf{q}} V$, assumiamo che valga

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - H_0 \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (5.51)$$

in modo da poter scrivere $\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q_i, b_i, H_0)$, $i = 1, \dots, \ell$ (qui le F_i non hanno a che fare con le omonime funzioni del caso 1). Osservare che le $\ell + 1$ costanti \mathbf{b} , H_0 sono in realtà ℓ , in virtù della (5.50).

La V è dunque della forma $V(\mathbf{q}, \mathbf{b}, H_0) = \sum_{i=1}^{\ell} \int F_i(q_i, b_i, H_0) dq_i$ (con b_ℓ come in (5.50)) e l'integrale completo S si scrive, al solito, $S = -H_0 t + V$.

Il moto si ottiene dalle equazioni (5.27) che vanno applicate con la posizione $\beta = (b_1, \dots, b_{\ell-1}, H_0)$:

$$p_i = F_i(q_i, b_i, H_0), \quad i = 1, \dots, \ell - 1 \quad p_\ell = F_\ell(q_\ell, - \sum_{i=1}^{\ell-1} b_i, H_0), \quad (5.52)$$

$$\int \frac{\partial F_i}{\partial b_i}(q_i, b_i, H_0) dq_i - \int \frac{\partial F_\ell}{\partial b_\ell}(q_\ell, - \sum_{i=1}^{\ell-1} b_i, H_0) dq_\ell = -\alpha_i, \quad i = 1, \dots, \ell - 1,$$

$$\int \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{\partial F_j}{\partial H_0} dq_j + \int \frac{\partial F_\ell}{\partial H_0} dq_\ell = -\alpha_\ell + t.$$

Si osservi ora che

$$\frac{\partial F_i}{\partial b_i} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial p_i} (f_i - H_0 g_i) \Big|_{p_i = F_i(q_i, b_i, H_0)}}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1, \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial b_\ell} = - \frac{1}{\frac{\partial}{\partial p_\ell} (f_\ell - H_0 g_\ell) \Big|_{p_\ell = F_\ell(q_\ell, - \sum_{i=1}^{\ell-1} b_i, H_0)}},$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_0} = \frac{g_i}{\frac{\partial}{\partial p_i} (f_i - H_0 g_i) \Big|_{p_i = F_i(q_i, b_i, H_0)}}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

(per esercizio ricavare queste formule dalla (5.24)), dunque la matrice $J_\beta(\nabla_{\mathbf{q}}V)$ ha la struttura

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial p_1}(f_1 - H_0 g_1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{g_1}{\frac{\partial}{\partial p_1}(f_1 - H_0 g_1)} \\ 0 & \frac{1}{\frac{\partial}{\partial p_2}(f_2 - H_0 g_2)} & 0 & \dots & 0 & \frac{g_2}{\frac{\partial}{\partial p_2}(f_2 - H_0 g_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\frac{\partial}{\partial p_{\ell-1}}(f_{\ell-1} - H_0 g_{\ell-1})} & \frac{g_{\ell-1}}{\frac{\partial}{\partial p_{\ell-1}}(f_{\ell-1} - H_0 g_{\ell-1})} \\ \frac{1}{\frac{\partial}{\partial p_\ell}(f_\ell - H_0 g_\ell)} & \frac{1}{\frac{\partial}{\partial p_\ell}(f_\ell - H_0 g_\ell)} & \dots & \dots & \dots & \frac{g_\ell}{\frac{\partial}{\partial p_\ell}(f_\ell - H_0 g_\ell)} \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det J_\beta(\nabla_{\mathbf{q}}V) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} g_i}{\prod_{i=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial p_i}(f_i - H_0 g_i)}$$

(dimostrare per induzione su ℓ per esercizio), dunque la condizione (5.51) garantisce effettivamente che $S = -H_0 t + V$ è un integrale completo dell'equazione (5.8) per l'Hamiltoniana (5.35).

Esercizio 5.8 Utilizzando le (5.53), scrivere le equazioni (5.52) in termini delle funzioni $f_i, g_i, i = 1, \dots, \ell$.

Come caso particolare dell'Hamiltoniana (5.35), si considera un sistema di energia cinetica e funzione potenziale rispettivamente della forma

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\ell} A_i(q_i) \right) \sum_{i=1}^{\ell} B_i(q_i) \dot{q}_i^2, \quad U = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} U_i(q_i)}{\sum_{i=1}^{\ell} A_i(q_i)}. \quad (5.54)$$

L'Hamiltoniana corrisponde a

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{p_i^2}{B_i(q_i)} + 2U_i(q_i) \right)}{2 \sum_{i=1}^{\ell} A_i(q_i)}, \quad (5.55)$$

che rientra nella struttura (5.35). Si ha dunque il

Teorema 5.3 (di Liouville.) *Se un sistema olonomo a vincoli scleronomi e soggetto a forze conservative ha energia cinetica e funzione potenziale del tipo (5.54), allora le equazioni di moto possono essere ottenute per mezzo di integrazioni dalle formule (5.52).*

In generale, diremo un sistema hamiltoniano è **separabile** se esiste un sistema di coordinate lagrangiane \mathbf{q} rispetto al quale la funzione generatrice S di (5.8) assume la forma

$$S(\mathbf{q}, \beta, t) = V_1(q_1, \beta_1) + V_2(q_2, \beta_1, \beta_2) + \dots + V_\ell(q_\ell, \beta) - H_0(\beta)t. \quad (5.56)$$

I sistemi con Hamiltoniana (5.33), (5.34), (5.35) sono separabili, dato che le corrispondenti funzioni S rientrano nella definizione (5.56).

Come generalizzazione dei casi esaminati, vale la seguente

Proposizione 5.3 *Se un sistema hamiltoniano (1.24) è separabile e $\prod_{i=1}^{\ell} \frac{\partial F_i}{\partial \beta_i} \neq 0$, $F_i(q_i, \beta_1, \dots, \beta_i) = \frac{\partial V_i}{\partial q_i}$, $i = 1, \dots, \ell$, allora S è integrale completo per l'equazione di Hamilton–Jacobi (5.8) e le soluzioni del moto si trovano mediante le formule*

$$p_i = F_i, \quad \int \sum_{j=1}^i \frac{\partial F_j}{\partial \beta_i} dq_j = -\alpha_i + \frac{\partial H_0}{\partial \beta_i} t, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Dunque (vedi Teorema 5.1), se un sistema hamiltoniano è **separabile**, allora esso è **integrabile per quadrature**.

5.6 Il teorema di Liouville sull'integrabilità

Dimostriamo ora un risultato che generalizza il Teorema 5.3. La proprietà fondamentale che deve verificarsi è quella di involuzione (5.48).

Il risultato è estremamente importante nella Meccanica hamiltoniana e rappresenta il punto di partenza per la teoria dei sistemi integrabili e quella delle variabili azione–angolo.

Teorema 5.4 *Sia $\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (f_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \dots, f_\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ una funzione definita per $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in U \subseteq \mathbb{R}^{2\ell}$ a valori in \mathbb{R}^ℓ con le proprietà:*

(i) *la matrice jacobiana $\ell \times 2\ell$ $J_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ ha rango massimo:*

$$\text{rank } J_{\mathbf{x}}\mathbf{f} = \text{rank} \begin{pmatrix} J_{\mathbf{p}}\mathbf{f} & J_{\mathbf{q}}\mathbf{f} \end{pmatrix} = \ell, \quad (5.57)$$

(ii) *le funzioni f_i , $i = 1, \dots, \ell$ sono a due a due in involuzione:*

$$\left(f_i, f_j \right)_{\mathbf{x}} = 0, \quad i, j = 1, \dots, \ell, \quad (5.58)$$

(iii) *assegnato $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, l'insieme di livello*

$$\mathcal{S}_{\mathbf{b}} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in U \mid \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{b}\} \quad (5.59)$$

è non vuoto.

Allora si ha:

(a) $\mathcal{S}_{\mathbf{b}}$ *una sottovarietà regolare in $\mathbb{R}^{2\ell}$ di dimensione ℓ ed è invariante rispetto a ciascun flusso hamiltoniano $\mathcal{F}_{f_i}^t$ associato a ciascuna funzione f_i , $i = 1, \dots, \ell$,*

(b) *se $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ è tale che*

$$\det J_{\mathbf{p}}(\nabla_{\mathbf{p}}H) \neq 0 \quad (5.60)$$

in U e se le funzioni f_k $k = 1, \dots, \ell$ sono integrali primi per il moto di H , allora l'equazione di Hamilton–Jacobi (5.8) ammette un integrale completo, ovvero il sistema hamiltoniano di Hamiltoniana H è integrabile per quadrature.

Dim. La dimensione ℓ della sottovarietà $\mathcal{S}_{\mathbf{b}}$ deriva dall'ipotesi (5.57). L'invarianza di $\mathcal{S}_{\mathbf{b}}$ rispetto a ciascun flusso hamiltoniano $\mathcal{F}_{f_i}^t$ è il contenuto della Proposizione 2.3, applicata alle coppie di funzioni f_i, f_j , $i, j = 1, \dots, \ell$, $i \neq j$. Il punto (a) è dunque dimostrato.

Per il punto (b), ci riferiremo al Teorema 3.2, per applicare il quale dobbiamo prima tracciare il giusto collegamento fra il formalismo hamiltoniano del Teorema che stiamo dimostrando e quello lagrangiano del Teorema 3.2.

Se $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ verifica la condizione (5.60), possiamo definire la trasformazione invertibile fra lo spazio delle fasi hamiltoniano $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ e quello lagrangiano $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ (con abuso di notazione si indica con \mathbf{q} le coordinate spaziali nei due sistemi)

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = [\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] = (\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$$

con inversa

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}) = [\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] = (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{q})$$

dove \mathcal{L} è la trasformata di Legendre di H . La non singolarità (5.60) equivale alla non singolarità $J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) \neq 0$. Le matrici jacobiane delle trasformazioni sono

$$J_{\mathbf{y}\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ J_{\mathbf{p}}(\nabla_{\mathbf{p}}H) & J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\mathbf{p}}H) \end{pmatrix}, \quad J_{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) & J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

i cui blocchi $\ell \times \ell$ verificano

$$\begin{cases} J_{\mathbf{p}}(\nabla_{\mathbf{p}}H)J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) = \mathbf{I}, \\ J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) + J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L})J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\mathbf{p}}H) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5.61)$$

Alle funzioni $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ corrispondono le funzioni $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$ per le quali la formula (6.10) si scrive

$$J_{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{f}} = J_{\mathbf{p}}\mathbf{f} J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) + J_{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{f}, \quad J_{\dot{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{f}} = J_{\mathbf{p}}\mathbf{f} J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}). \quad (5.62)$$

E' importante ora fare la seguente osservazione. Si può assumere, senza perdere in generalità, che il minore di ordine ℓ non singolare nella matrice in (5.57) sia lo Jacobiano rispetto alle variabili \mathbf{p} , ovvero $J_{\mathbf{p}}\mathbf{f}$: in caso contrario, si può eseguire la trasformazione canonica che scambia la variabile q_j che eventualmente compare nel minore non nullo con la corrispondente variabile coniugata p_j . Possiamo così supporre

$$\det J_{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \neq 0. \quad (5.63)$$

In questo modo, dalle equazioni $\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{b}$, si possono ricavare le scritture equivalenti

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \quad (5.64)$$

con $J_{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{p}} = (J_{\mathbf{p}}\mathbf{f})^{-1}$ non singolare (si deve supporre che le costanti \mathbf{b} possano variare in un aperto di \mathbb{R}^ℓ). Le (5.64) permettono di ricavare i momenti cinetici sulla varietà (5.59) in ogni posizione \mathbf{q} . Dal punto di vista lagrangiano, le (5.64) implicano

$$\dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}), \mathbf{q}) = \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b}), \quad (5.65)$$

ovvero definiscono un **campo di pendenze** a ℓ parametri \mathbf{b} (vedi (3.40)).

Si considera poi la 1-forma differenziale (3.53) per la Lagrangiana \mathcal{L} con il campo di pendenze (5.65):

$$[\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b})) - \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b}))] dt + \nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b})) \cdot d\mathbf{q}. \quad (5.66)$$

Richiamando il Teorema 3.2, la forma è esatta se e solo se la matrice (3.52) è simmetrica, ovvero se e solo se è simmetrica la matrice

$$J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L})|_{\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{r}} + J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{L})|_{\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{r}}J_{\mathbf{q}}\mathbf{r}. \quad (5.67)$$

Vogliamo mostrare che la simmetria di (5.67) è equivalente alle condizioni di involuzione (5.58). Si comincia osservando che tali condizioni si scrivono mediante matrici $\ell \times \ell$ come

$$(J_{\mathbf{q}}\mathbf{f})(J_{\mathbf{p}}\mathbf{f})^T - (J_{\mathbf{p}}\mathbf{f})(J_{\mathbf{q}}\mathbf{f})^T = \mathbf{0}. \quad (5.68)$$

Dall'identità $\mathbf{b} \equiv \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}), \mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{q})) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b}))$, si deduce (vedi (6.10)) $J_{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{f}} + J_{\dot{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{f}}J_{\mathbf{q}}\mathbf{r} = \mathbf{0}$, ovvero $J_{\mathbf{q}}\mathbf{r} = -(J_{\dot{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{f}})^{-1}J_{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{f}}$ (notare che le condizioni (5.60) e (5.63) garantiscono l'esistenza dell'inversa di $J_{\dot{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{f}}$). Tenendo anche conto di (5.61) e (5.62), si trova, sviluppando l'espressione (5.67):

$$J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) - J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L})(J_{\dot{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{f}})^{-1}J_{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{f}} = J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) - J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L})[J_{\mathbf{p}}\mathbf{f} J_{\dot{\mathbf{q}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L})]^{-1}[J_{\mathbf{p}}\mathbf{f} J_{\mathbf{q}}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}) + J_{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{f}] = -(J_{\mathbf{p}}\mathbf{f})^{-1}J_{\mathbf{q}}\mathbf{f}.$$

Dunque, (5.67) è simmetrica se e solo se $(J_{\mathbf{p}}\mathbf{f})^{-1}J_{\mathbf{q}}\mathbf{f}$ è simmetrica, condizione chiaramente equivalente a (5.68). La primitiva $S(\mathbf{q}, \mathbf{b}, t)$ della forma esatta (5.66) verifica le relazioni

$$\nabla_{\mathbf{q}}S(\mathbf{q}, \mathbf{b}, t) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b})) = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{b}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b})) - \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{b})) = -H(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}), \mathbf{q})$$

e l'equazione (3.55) di Hamilton–Jacobi $\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{b}, t) + H(\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{b}, t), \mathbf{q}) = 0$.

Per la condizione (5.63), la funzione S è un integrale completo, dato che $J_{\mathbf{b}}(\nabla_{\mathbf{q}} S) = J_{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{p}} = (J_{\mathbf{p}} \mathbf{f})^{-1}$. \square
Facciamo ora alcune osservazioni sul Teorema appena dimostrato.

1. Dato che H è indipendente dal tempo, ci aspettiamo che S abbia la struttura $S = -H_0(\mathbf{b})t + V(\mathbf{q}, \mathbf{b})$. Si pone infatti $H_0(\mathbf{b}) = H(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}), \mathbf{q})$, ovvero il valore dell'Hamiltoniana sulla varietà $S_{\mathbf{b}}$ (vedi Proposizione 2.3) e si definisce $V = S + H_0(\mathbf{b})t$. Si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + H_0(\mathbf{b}) = -H(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}), \mathbf{q}) + H_0(\mathbf{b}) = 0,$$

dunque $V = V(\mathbf{q}, \mathbf{b})$. Inoltre $\det J_{\mathbf{b}}(\nabla_{\mathbf{q}} V) \neq 0$ e l'equazione associata a V è la (5.23):

$$H_0(\mathbf{b}) = H(\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}, \mathbf{b}), \mathbf{q})$$

e le nuove variabili canoniche, come si è già discusso trattando il caso autonomo, sono $(\mathbf{a} - \nabla_{\mathbf{b}} H_0 t, \mathbf{b})$.

2. Fra gli integrali primi \mathbf{f} dell'Hamiltoniana H può esserci l'Hamiltoniana medesima, ovvero $f_k = H$ per qualche indice k , $1 \leq k \leq \ell$. In questo caso $H_0(\mathbf{b}) = f_k(\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}), \mathbf{q}) = b_k$ e le variabili coniugate alle \mathbf{b} sono tutte costanti, eccetto quella coniugata a b_k , che gioca il ruolo del tempo, come in (5.29).
3. Le Hamiltoniane con struttura separabile (5.34) (in cui rientrano quelle del tipo (5.33)) e quelle del tipo (5.35) verificano le ipotesi del Teorema 5.4: per ognuno di questi casi abbiamo infatti indicato ℓ possibili integrali primi del moto che sono fra loro in involuzione. Per questi casi si è calcolato direttamente l'integrale completo dell'equazione di Hamilton–Jacobi.
4. Un sistema hamiltoniano autonomo per il quale esiste una funzione $V(\mathbf{q}, \beta)$ che verifica la (5.25) ed è soluzione di (5.23) possiede gli ℓ integrali primi indipendenti $\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \mathbf{p}$, che possono essere posti nella forma $(\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{b}$ per l'ipotesi (5.25). Inoltre si ha, in virtù della conservazione delle parentesi di Poisson (4.75):

$$\left(f_i, f_j \right)_{\mathbf{x}} = \left(\beta_i, \beta_j \right)_{\mathbf{x}} \quad i, j = 1, \dots, \ell \quad (5.69)$$

dove \mathbf{X} sono le variabili (5.28), dunque le funzioni f_i , $i = 1, \dots, \ell$, verificano l'ipotesi di involuzione (5.58).

Un sistema autonomo che ammette un integrale completo verifica dunque le ipotesi del Teorema 5.4.

I sistemi hamiltoniani autonomi che ammettono ℓ integrali primi **indipendenti** e **in involuzione**, come nelle ipotesi del Teorema 5.4, vengono detti **sistemi integrabili**. Sostanzialmente, un sistema è integrabile se, a meno di trasformazioni canoniche, è possibile scrivere l'Hamiltoniana funzione unicamente di ℓ coordinate \mathbf{b} , che sono costanti del moto, cui corrispondono canonicamente variabili cicliche che sono funzioni lineari del tempo.

E' questa una identificazione non univoca in letteratura: per alcuni autori, l'integrabilità di un sistema consiste nell'esistenza di ℓ integrali primi detti **azioni** su varietà (5.59) **connesse** e **compatte**.

Tracciamo ora uno schema riassuntivo dei principali concetti incontrati nella teoria di Hamilton–Jacobi.

Sistemi che ammettono un **integrale completo** dell'equazione (5.8) [che chiamiamo, per comodità, di classe \mathcal{J}_Q , dove Q sta per **quadratura**]: sono i sistemi hamiltoniani per cui esiste $S(\mathbf{q}, \beta, t)$ che verifica l'ipotesi (5.9) e per i quali la soluzione del sistema viene trovata mediante le **formule di quadratura** (5.10).

Sistemi **separabili** [classe \mathcal{J}_S]: sistemi per i quali la funzione S della equazione di Hamilton–Jacobi associata può essere scritta come in (5.56), anche mediante opportune trasformazioni canoniche delle variabili.

Sistemi **integrabili** [classe \mathcal{J}]: sistemi con ℓ integrali primi \mathbf{f} che verificano (5.57), (5.58): per essi il Teorema 5.4 assicura l'esistenza di un integrale completo S dell'equazione (5.8).

Si hanno, come si è visto, le seguenti implicazioni:

$\mathcal{I}_S \subset \mathcal{I}_Q$ (Proposizione 5.3),

$\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_Q$ (Teorema 5.4),

$\mathcal{I}_Q \subset \mathcal{I}$ (Osservazione 4 relativa a (5.69)).

6 Alcuni richiami

6.1 Promemoria di formule utili

Elenchiamo alcune formule utilizzate più volte nelle dispense. La verifica di ognuna di esse, come anche la precisazione delle regolarità richieste per le funzioni coinvolte, sono a cura del lettore.

Matrice Jacobiana. Se $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = (F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_M(x_1, \dots, x_N))$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in U \subseteq \mathbb{R}^N$, è una funzione vettoriale a valori in \mathbb{R}^M , il simbolo $J_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})$ denota la matrice Jacobiana $M \times N$ di elementi $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$:

$$J_{\mathbf{x}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_M}{\partial x_1} & \frac{\partial F_M}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_M}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Un cambiamento di coordinate $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ è invertibile ovunque sia $\det J_{\mathbf{x}}\mathbf{y} \neq 0$. La trasformazione inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ ha per matrice Jacobiana la matrice Jacobiana inversa della trasformazione diretta:

$$J_{\mathbf{y}}\mathbf{x}(\mathbf{y}) = [J_{\mathbf{x}}\mathbf{y}]^{-1}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{y})}. \quad (6.2)$$

Matrice Hessiana. Data una funzione f definita per $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ e a valori reali, si chiama **hessiana** la matrice $N \times N$ $H_{\mathbf{x}}f = J_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}}f)$, ovvero

$$H_{\mathbf{x}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right) & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_N} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_N} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_N} \right) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

La matrice H è ovviamente simmetrica ogni volta che nelle derivate seconde si può invertire l'ordine di derivazione (per questo è sufficiente che le derivate seconde siano continue, Teorema di Schwarz).

Proprietà del prodotto scalare. Sia \mathbf{a} un vettore di \mathbb{R}^N , \mathbf{b} un vettore di \mathbb{R}^M e A una matrice $M \times N$. Si ha:

$$\mathbf{a} \cdot A\mathbf{b} = A^T \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (6.4)$$

Derivata totale di una funzione $f : U \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{y}(t)) = \nabla_{\mathbf{y}}f(\mathbf{y}(t)) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t). \quad (6.5)$$

In particolare, se $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell$, $N = \ell + 1$:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) = \nabla_{\mathbf{x}}f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.6)$$

Derivata totale di un vettore: $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(x_1, \dots, x_N), \dots, v_\ell(x_1, \dots, x_N))$.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) = J_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t). \quad (6.7)$$

Gradiente composto. Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione da $U \subseteq \mathbb{R}^N$ in \mathbb{R} e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ una funzione definita per $\mathbf{y} \in V \subseteq \mathbb{R}^M$ a valori in U . Se $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione $\tilde{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$, si ha

$$\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{f}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{y}} \mathbf{x})^T \nabla_{\mathbf{x}} f|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{y})}. \quad (6.8)$$

Se in particolare $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ è una trasformazione invertibile di variabili da $U \subseteq \mathbb{R}^N$ in \mathbb{R}^N , si ha anche $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = (J_{\mathbf{x}} \mathbf{y})^T \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{f}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})}$.

Gradiente di un prodotto scalare. Siano $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ due funzioni vettoriali definite per $\mathbf{x} \in U$ aperto di \mathbb{R}^N e a valori in \mathbb{R}^M .

$$\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x})) = [J_{\mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x})]^T \mathbf{b}(\mathbf{x}) + [J_{\mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x})]^T \mathbf{a}(\mathbf{x}). \quad (6.9)$$

Jacobiano composto. Sia $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_S(\mathbf{x}))$ una funzione vettoriale definita per $\mathbf{x} \in U$ aperto di \mathbb{R}^N e codominio in \mathbb{R}^S e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ una funzione definita per $\mathbf{y} \in V \subseteq \mathbb{R}^M$ a valori in U .

Chiamando $\tilde{\mathbf{F}} : V \rightarrow \mathbb{R}^S$ la funzione $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$, si ha:

$$J_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}) = J_{\mathbf{x}} \mathbf{F}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{y})} J_{\mathbf{y}} \mathbf{x}(\mathbf{y}) \quad (6.10)$$

e, se $M = N$ e $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ è invertibile: $J_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{F}}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})} J_{\mathbf{x}} \mathbf{y}(\mathbf{x})$.

Jacobiano con gruppi di variabili. Siano $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, F_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, $\mathbf{G} = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, G_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, due funzioni vettoriali definite per $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$, $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$, $\mathbf{y} \in V \subseteq \mathbb{R}^M$. Detta $\mathbf{H}(\mathbf{z}) = (\mathbf{F}(\mathbf{z}), \mathbf{G}(\mathbf{z}))$, $\mathbf{H} : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{S+R}$, si ha:

$$J_{\mathbf{z}} \mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & J_{\mathbf{y}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ J_{\mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & J_{\mathbf{y}} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

(osservare che $J_{\mathbf{z}} \mathbf{H}$ è una matrice $(S+R) \times (N+M)$, $J_{\mathbf{x}} \mathbf{F}$ è $S \times N$, $J_{\mathbf{y}} \mathbf{F}$ è $S \times M$, $J_{\mathbf{x}} \mathbf{G}$ è $R \times N$, $J_{\mathbf{y}} \mathbf{G}$ è $R \times M$).

Derivata totale seconda di $f(\mathbf{x}, t)$. Sia f come in (6.5), con derivate seconde continue. Si ha:

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\mathbf{x}(t), t) = (H_{\mathbf{x}} f) \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \ddot{\mathbf{x}} + 2 \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (6.12)$$

Per dimostrare la (6.12), si chiama $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in U \times \mathbb{R}^\ell$ e $f_1(\mathbf{y}, t) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t)$. Applicando la (6.5) a f_1 , si trova $\frac{d}{dt} f_1(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}} f_1 \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial f_1}{\partial t}$ e, tenuto conto delle (6.9) e (6.11), si giunge alla (6.12). Si osservi che si suppone anche $\nabla_{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\mathbf{x}} f$.

Jacobiano di un vettore per una funzione scalare. Se $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ è una funzione vettoriale da $U \subseteq \mathbb{R}^N$ a valori in \mathbb{R}^M e $f(\mathbf{x})$ è una funzione da U in \mathbb{R} , si ha:

$$J_{\mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}) J_{\mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x})] + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (6.13)$$

dove il prodotto \otimes fra due vettori $\mathbf{a}_1 = (a_1, \dots, a_{N_1})$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{N_2})$ è la matrice $N_1 \times N_2$ il cui elemento (i, j) è $a_i b_j$:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & \dots & a_1 b_{N_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N_1} b_1 & \dots & \dots & a_{N_1} b_{N_2} \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

E' immediato verificare che $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^T$ e che, per $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_1}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{N_2}$ si ha:

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] \mathbf{c} = [\mathbf{a} \otimes \mathbf{c}] \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_1}. \quad (6.15)$$

Jacobiano di una matrice per un vettore. Sia $A(\mathbf{x})$ una matrice $M \times N$ i cui elementi dipendono dalle variabili $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^S$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (b_1(\mathbf{x}), \dots, b_N(\mathbf{x}))$ una funzione vettoriale da U in \mathbb{R}^N . La matrice Jacobiana $J_{\mathbf{x}}(A\mathbf{b})$ (di dimensioni $M \times S$) è data da

$$J_{\mathbf{x}}[A(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})] = \sum_{k=1}^N [b_k(\mathbf{x})J_{\mathbf{x}}\mathbf{A}_k(\mathbf{x})] + A(\mathbf{x})J_{\mathbf{x}}\mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad (6.16)$$

dove $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N \in \mathbb{R}^M$ sono i vettori colonna della matrice A .

6.2 Cambiamento di variabili in un sistema differenziale in forma normale

Sia

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \quad (6.17)$$

un sistema differenziale con $\mathbf{Y} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, U aperto di \mathbb{R}^N .

Il cambiamento di variabili (che riguarda anche il tempo)

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \tau = \tau(\mathbf{x}, t) \quad (6.18)$$

con $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N) : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\tau : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile in (\mathbf{x}, t) se e solo se matrice Jacobiana $(N+1) \times (N+1)$ (vedi (6.11))

$$J_{(\mathbf{x}, t)}(\mathbf{X}, \tau) = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} & \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \\ (\nabla_{\mathbf{x}}\tau)^T & \frac{\partial \tau}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

è non singolare. In (6.19) lo Jacobiano parziale $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$ ha dimensioni $N \times N$, i vettori $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}$, $(\nabla_{\mathbf{x}}\tau)^T$ sono rispettivamente $N \times 1$, $1 \times N$ e $\partial\tau/\partial t$ è uno scalare. La trasformazione inversa

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau), \quad t = t(\mathbf{X}, \tau) \quad (6.20)$$

ha per matrice Jacobiana

$$J_{(\mathbf{X}, \tau)}(\mathbf{x}, t) = (J_{(\mathbf{x}, t)}(\mathbf{X}, t))^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\mathbf{X}}\mathbf{x} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \\ (\nabla_{\mathbf{X}}t)^T & \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Dalla (6.6) si ha:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \left(J_{\mathbf{X}}\mathbf{x} \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{dt},$$

con

$$\frac{d\tau}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}}\tau \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial \tau}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{x}}\tau \cdot \mathbf{Y} + \frac{\partial \tau}{\partial t}.$$

Il sistema nelle nuove variabili si scrive pertanto:

$$J_{\mathbf{X}}\mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau)\mathbf{X}'(\tau) = \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \tau) \frac{dt}{d\tau}(\mathbf{X}, \tau) - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(\mathbf{X}, \tau) \quad (6.22)$$

dove l'apice ' indica $\frac{d}{d\tau}$, $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau), t(\mathbf{X}, \tau))$ e $\frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1} = \nabla_{\mathbf{x}}t \cdot \mathbf{X}' + \frac{\partial t}{\partial \tau}$ (ovunque sia diverso da zero).

Esercizio 6.1 Partire da $\mathbf{X}' = \frac{d\mathbf{X}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ per trovare la seguente forma del sistema equivalente alla (6.22):

$$\mathbf{X}'(\tau) = \left(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} \tilde{\mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (6.23)$$

dove $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$ e $\partial \mathbf{X} / \partial t$ vanno espresse nelle variabili (\mathbf{X}, τ) .

Si noti che le matrici Jacobiane parziali $J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}$ e $J_{\mathbf{X}\mathbf{x}}$ non sono una inversa dell'altra. In effetti, ponendo uguale alla matrice identità di ordine $N + 1$ il prodotto delle matrici jacobiane (6.19), (6.21), si trovano le relazioni:

$$\begin{cases} J_{\mathbf{x}}\mathbf{X}J_{\mathbf{X}\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}t = J_{\mathbf{X}\mathbf{x}}J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}\tau = I_N \\ J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = J_{\mathbf{X}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \mathbf{0}, \\ (J_{\mathbf{X}\mathbf{x}})^T \nabla_{\mathbf{x}}\tau + \frac{\partial \tau}{\partial t} \nabla_{\mathbf{X}}t = (J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{X}}t + \frac{\partial t}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{x}}\tau = \mathbf{0}, \\ \nabla_{\mathbf{x}}\tau \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla_{\mathbf{X}}t \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1 \end{cases} \quad (6.24)$$

dove I_N è la matrice identità di ordine N e il prodotto \otimes è definito in (6.14).

In particolare, nel caso in cui il sistema (6.17) sia **Hamiltoniano**, ossia $\mathbf{Y} = \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t)$, operando il cambiamento di coordinate (6.20), i sistemi (6.22) e (6.23) si scrivono rispettivamente (verificare per esercizio)

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{X}\mathbf{x}}\mathbf{X}'(\tau) &= \mathcal{I} \left[(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{X}}\tilde{H} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{x}}\tau \right] \frac{dt}{d\tau} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}, \\ \mathbf{X}'(\tau) &= \left\{ J_{\mathbf{x}}\mathbf{X} \mathcal{I} \left[(J_{\mathbf{x}}\mathbf{X})^T \nabla_{\mathbf{X}}\tilde{H} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{x}}\tau \right] + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right\} \frac{dt}{d\tau} \end{aligned} \quad (6.25)$$

con $\tilde{H}(\mathbf{X}, \tau) = H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau), \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau))$.

E' utile infine stabilire la formula

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tau} = \left(\nabla_{\mathbf{X}}\tilde{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \frac{dt}{d\tau} \quad (6.26)$$

a partire dalla proprietà $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. La verifica è lasciata per esercizio.

6.3 1-forme differenziali in \mathbb{R}^N

Se \mathcal{V} è una varietà differenziabile di dimensione N , si definisce **campo vettoriale** su \mathcal{V} un'applicazione \mathbf{X} che associa ad ogni punto $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ un vettore $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ dello spazio tangente in \mathbf{x} $T_{\mathbf{x}}\mathcal{V}$:

$$\mathbf{X} : \mathbf{x} \in \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{V}.$$

Sia $T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{V}$ lo spazio **duale** dello spazio tangente, ovvero lo spazio vettoriale (di dimensione N) formato da tutti i funzionali lineari che associano a ciascun vettore dello spazio tangente un numero reale. Tale spazio prende il nome di **spazio cotangente** e i suoi elementi si chiamano **vettori cotangenti** o **covettori**.

Si dice **1-forma differenziale** su \mathcal{V} (o **campo di vettori cotangenti**) ogni applicazione ω che associa a ciascun punto $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$ un covettore $\omega(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{V}$:

$$\omega : \mathbf{x} \in \mathcal{V} \rightarrow \omega(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{V}.$$

Se $(\mathbf{e}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{e}_N(\mathbf{x}))$ è una base per $T_{\mathbf{x}}\mathcal{V}$, dove ciascun vettore \mathbf{e}_i è identificabile con la derivazione $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, N$, si ha

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N X_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i(\mathbf{x}).$$

Se chiamiamo (dx_1, \dots, dx_N) la **base duale** associata alla base $\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$, ovvero i covettori tali che $dx_i[\mathbf{e}_j(\mathbf{x})] = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, una 1-forma differenziale ω si rappresenta come

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x})dx_i = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (6.27)$$

intendendo con $d\mathbf{x}$ la N -upla (dx_1, \dots, dx_N) .

Se la varietà \mathcal{V} consiste in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ (sottovarietà regolare di dimensione N) e se f è una funzione regolare definita per $\mathbf{x} \in A$ e a valori reali, la scrittura

Un esempio notevole di 1-forma proviene dalla definizione di **differenziale** di una funzione. Sia f una funzione definita in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ a valori reali e \mathbf{x}_0 un punto di A . Il **differenziale** di f nel punto \mathbf{x}_0 è un funzionale lineare $L_f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ che opera sui vettori $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{e}_i$, con $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ base canonica di \mathbb{R}^N , nel seguente modo:

$$L_f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0). \quad (6.28)$$

Osservando che lo spazio tangente alla varietà A è in ogni punto lo spazio \mathbb{R}^N , si ha che effettivamente L_f associa a ciascun punto $\mathbf{x}_0 \in A$ il funzionale lineare (6.28) dello spazio cotangente.

Dato che $L_f(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$, si ha che l'operatore L_f , che usualmente si indica con df , ha, rispetto alla base

duale, la rappresentazione $df = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)dx_i = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x}$.

L'espressione

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})dx_i = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x},$$

per $\mathbf{x} \in A$, definisce dunque un campo di vettori cotangenti.

Se operiamo un cambiamento invertibile di coordinate $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ sulla varietà \mathcal{V} e chiamiamo $(\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_N)$ la base dello spazio tangente indotta dalle nuove coordinate, si ha:

$$\bar{\mathbf{e}}_i(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{e}_j(\mathbf{x}), \quad (6.29)$$

ovvero la matrice del cambiamento di base è $[J_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}]^T$, essendo $\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}})$ l'applicazione inversa. Dunque, per

un vettore dello spazio tangente $\sum_{i=1}^N v_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^N \bar{v}_i \bar{\mathbf{e}}_i$ le componenti controvarianti $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$, $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_N)$ si trasformano secondo la regola $\bar{\mathbf{v}} = [J_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}]\mathbf{v}$.

Se $d\bar{\mathbf{x}} = (d\bar{x}_1, \dots, d\bar{x}_N)$ è la base duale associata alla nuova base dei vettori $\bar{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, \dots, N$, ovvero $d\bar{x}_i(\bar{\mathbf{e}}_j) = \delta_{i,j}$, si ha che la matrice del cambiamento di base fra il vecchio sistema di covettori e quello nuovo è la matrice inversa e trasposta rispetto a (6.29) (fare la verifica):

$$d\bar{x}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})dx_j.$$

Dato che il covettore $\omega = \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x}) dx_i = \sum_{i=1}^N \bar{w}_i(\bar{\mathbf{x}}) d\bar{x}_i$ (ovvero $\omega = \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{w}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}$) ha le componenti controvarianti $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)$, $\bar{\mathbf{w}} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_N)$ legate dalla relazione $\bar{w}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}(\bar{\mathbf{x}}) w_j$, si ha complessivamente:

$$d\bar{\mathbf{x}} = [J_{\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}}]d\mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{w}} = [J_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}}]^T \mathbf{w}. \quad (6.30)$$

L'**integrale** della forma differenziale lungo la **curva** regolare a tratti γ di equazioni parametriche $\mathbf{x}(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ è definito da

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x}(\lambda)) x'_i(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathbf{w}(\mathbf{x}(\lambda)) \cdot \mathbf{x}'(\lambda) d\lambda. \quad (6.31)$$

Una notazione spesso utilizzata, in virtù del fatto che l'integrale curvilineo è indipendente dalla parametrizzazione scelta per la curva, è la seguente:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x}. \quad (6.32)$$

Utilizzando le nuove coordinate $\bar{\mathbf{x}}$, la curva γ si trasforma nella curva $\bar{\gamma}$ parametrizzata da $\bar{\mathbf{x}}(\lambda) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\lambda))$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$. Chiamando $\bar{\omega}$ la forma (6.27) espressa nelle nuove coordinate, si ha

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{\omega} = \int_{\gamma} \bar{\mathbf{w}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \bar{\mathbf{w}}(\bar{\mathbf{x}}(\lambda)) \cdot \bar{\mathbf{x}}'(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} [J_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}}]^T \mathbf{w}(\mathbf{x}(\lambda)) \cdot [J_{\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}}] \mathbf{x}'(\lambda) d\lambda$$

che coincide con l'espressione (6.32).

E' utile osservare che la 1-forma differenziale

$$\omega = \sum_{i=1}^N F_i(\mathbf{x}, t) dx_i + F_0(\mathbf{x}, t) dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + F_0 dt$$

nelle $N + 1$ variabili (x_1, \dots, x_N, t) si trasforma, mediante il cambiamento di coordinate (6.20), in

$$\Omega = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{X} + G_0 d\tau, \quad \mathbf{G}(\mathbf{X}, \tau) = (J_{\mathbf{X}\mathbf{x}})^T \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{F}_0 \nabla_{\mathbf{x}} t, \quad G_0(\mathbf{X}, \tau) = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} + \tilde{F}_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (6.33)$$

dove $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau), t(\mathbf{X}, \tau))$, $\tilde{F}_0(\mathbf{X}, \tau) = F_0(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau), t(\mathbf{X}, \tau))$.

L'integrale curvilineo della forma lungo una curva $\gamma : (\mathbf{x}(\lambda), t(\lambda))$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, mediante il cambiamento di coordinate (6.20) diventa quindi

$$\int_{\gamma} \omega \cdot d(\mathbf{x}, t) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(\left[(J_{\mathbf{X}\mathbf{x}})^T \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{F}_0 \nabla_{\mathbf{x}} t \right] \cdot \mathbf{X}'(\lambda) + \left[\tilde{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} + \tilde{F}_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} \right] \tau'(\lambda) \right) d\lambda = \int_{\Gamma} \Omega \cdot d(\mathbf{X}, \tau), \quad (6.34)$$

essendo Γ la curva immagine di γ con equazioni parametriche $\Gamma : (\mathbf{X}(\lambda), \tau(\lambda))$, con $\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(\lambda), t(\lambda))$, $\tau(\lambda) = \tau(\mathbf{x}(\lambda), t(\lambda))$.

Ricordiamo ora che l'integrale del differenziale di una funzione f lungo una curva γ non dipende dal percorso, ma solo dagli estremi. Infatti:

$$\int_{\gamma} df = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}(\lambda)) \cdot \mathbf{x}'(\lambda) d\lambda = f(\mathbf{x}(\lambda_1)) - f(\mathbf{x}(\lambda_0)).$$

In particolare, la formula (6.33) utilizzata per la **forma di Poincaré–Cartan** (3.58) si scrive

$$\begin{aligned} \Omega &= (J_{\mathbf{P}}\mathbf{q})^T \mathbf{p}(\mathbf{X}, \tau) \cdot d\mathbf{P} + (J_{\mathbf{Q}}\mathbf{q})^T \mathbf{p}(\mathbf{X}, \tau) \cdot d\mathbf{Q} - \tilde{H}(\mathbf{X}, \tau) \nabla_{\mathbf{X}} t(\mathbf{X}, \tau) \cdot d\mathbf{X} + \\ &+ \left(\mathbf{p}(\mathbf{X}, \tau) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau}(\mathbf{X}, \tau) - \tilde{H}(\mathbf{X}, \tau) \frac{\partial t}{\partial \tau}(\mathbf{X}, \tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (6.35)$$

con $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{x}$, $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathbf{X}$.

Una forma differenziale ω definita in A si dice **esatta** se esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega = df$. La funzione f si dice una **primitiva** di ω . Due primitive differiscono al più per una costante.

Condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta in un aperto connesso A di \mathbb{R}^N è che l'integrale della forma fra due punti qualsiasi \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 di A sia indipendente dal percorso che li unisce. Equivalentemente, la forma ω è esatta se l'integrale di essa lungo ogni curva chiusa è nullo.

Due forme ω_1, ω_2 che differiscono per una forma esatta hanno evidentemente stesso integrale su ogni cammino chiuso:

$$\oint_c \omega_1 - \oint_c \omega_2 = \oint_c df = 0.$$

Un criterio utile per stabilire se una forma data è esatta o no si basa sulla definizione di forma chiusa.

Data la forma (6.27), consideriamo la matrice quadrata \mathcal{M} antisimmetrica di ordine N i cui elementi, che dipendono dal punto \mathbf{x} , sono

$$\mathcal{M}_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, \dots, \ell. \quad (6.36)$$

Notare che $\mathcal{M} = J_{\mathbf{x}}\mathbf{w} - [J_{\mathbf{x}}\mathbf{w}]^T$. La forma differenziale ω si dice **chiusa** se la matrice $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ è la matrice nulla:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (6.37)$$

per ogni $\mathbf{x} \in A$, ovvero se la matrice $J_{\mathbf{x}}\mathbf{w}$ è simmetrica.

Esercizio 6.2 Utilizzando le (6.10) e (6.16), verificare l'indipendenza della definizione data dalla scelta delle coordinate \mathbf{x} .

Se i coefficienti $w_i, i = 1, \dots, N$ sono di classe \mathcal{C}^1 e la forma ω è esatta, con $\omega = df$, allora f è di classe \mathcal{C}^2 e

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

dunque una forma esatta è necessariamente chiusa.

La proprietà inversa risulta vera se il dominio A è **semplicemente connesso**.

Definiamo infine le linee di rotore associate ad una 1-forma differenziale. La definizione riguarda solo il caso $N = 2\ell + 1$ dispari.

La forma $\omega = \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x}$ si dice **non singolare** se la matrice \mathcal{M} definita in (6.36) ha rango massimo ovvero 2ℓ per ogni $\mathbf{x} \in A$ (verificare che il determinante di una matrice antisimmetrica di ordine dispari è zero).

In tal caso, ad ogni punto $\mathbf{x} \in A$ si può associare lo spazio vettoriale unidimensionale dei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2\ell+1}$ tali che $\mathcal{M}(\mathbf{x})\mathbf{v} = 0$, ovvero i vettori $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\mathcal{M})$. La direzione \mathbf{v} nel punto \mathbf{x} viene detta **direzione di rotore** e le curve integrali $\mathbf{x}(\lambda)$ del campo \mathbf{v} , ovvero le soluzioni del sistema

$$\mathbf{x}'(\lambda) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\lambda)) \quad (6.38)$$

si dicono **linee di rotore**.

Riferimenti bibliografici

- M. Abate, F. Tovena, Geometria Differenziale, Springer Unitext, 2011
- V. I. Arnold, Metodi matematici della meccanica classica, Editori Riuniti Univ. Press, 2010
- A. Fasano, S. Marmi, Meccanica analitica, Bollati Boringhieri, 2002
- F. R. Gantmacher, Lezioni di Meccanica analitica, Editori Riuniti, Roma 1980