

A Course of Mathematical Cartography For Engineers

Cours de Cartographie Mathématique à l'Usage des Ingénieurs

Par

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM et JEAN COMMIOT

Octobre 2021 - version 3.

Résumé: Ce monographe présente un cours de cartographie mathématique pour les ingénieurs comprenant essentiellement :

- les définitions des termes caractéristiques,
- les types de représentations cartographiques planes ou "projections",
- quelques exemples connus,
- et un ensemble de problèmes et d'exercices pour le lecteur.

Abstract: This monograph presents a course of mathematical cartography for engineers including essentially the following elements:

- the definitions of characteristic terms,
- the types of plane cartographic representations or "projections",
- some known examples,
- and a set of problems and exercises for the reader.

Cours de Cartographie Mathématique à l'Usage des Ingénieurs

Abdelmajid Ben Hadj Salem
Ingénieur Géographe Général

Ancien Ingénieur Général à l'Office de la
Topographie et du Cadastre (OTC) de Tunisie

Jean Commiot
Ingénieur Géographe Général

Ancien Ingénieur Général à l'Institut National de
l'Information Géographique et Forestière (IGN)
de France

Cours de Cartographie Mathématique à l'Usage des Ingénieurs

Par

Abdelmajid BEN HADJ
SALEM¹

Jean COMMIOT²

Ingénieurs Généraux Géographes

Version 3.0 - Octobre 2021

1. Ancien Ingénieur Général à l'Office de la Topographie et du Cadastre (OTC) de Tunisie.

2. Ancien Ingénieur Général à l'Institut National de l'Information Géographique et Forestière (IGN) de France.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Résidence Bousten 8, Bloc B, rue la Mosquée Raoudha,
1181 Soukra Raoudha, Tunisia.

e-mail : abenhadsalem@gmail.com

A la mémoire de mon Professeur

Jean COMMIOT

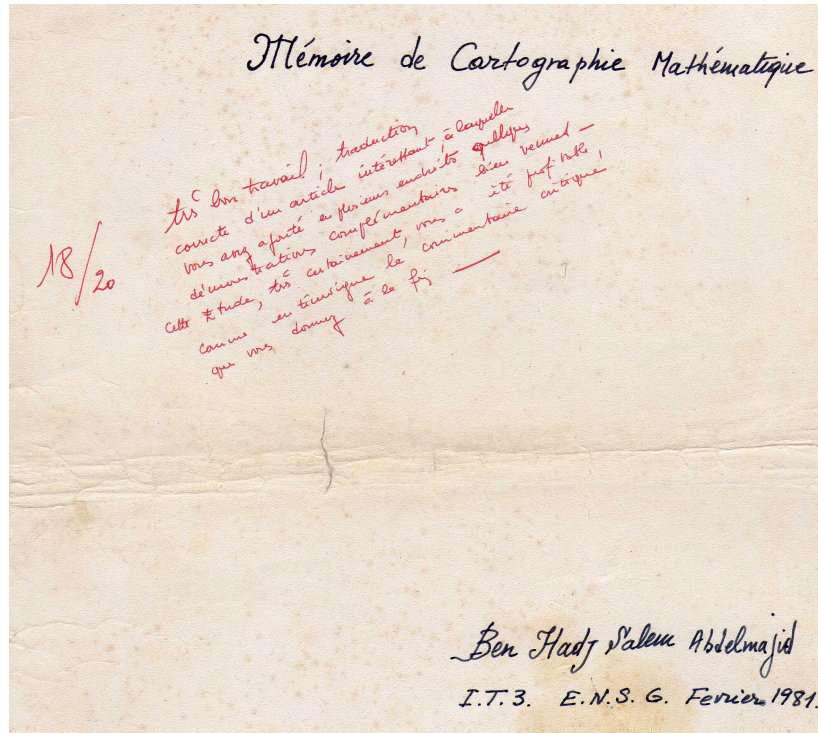


Fig. 0.1 En hommage à Mr. J. Commiot : en plus de sa façon d'enseigner, il avait une belle écriture comme le montre ses annotations sur la première page du manuscrit de mon projet de cartographie mathématique que je lui avais présenté (voir <https://vixra.org/pdf/1512.0369v1.pdf>).

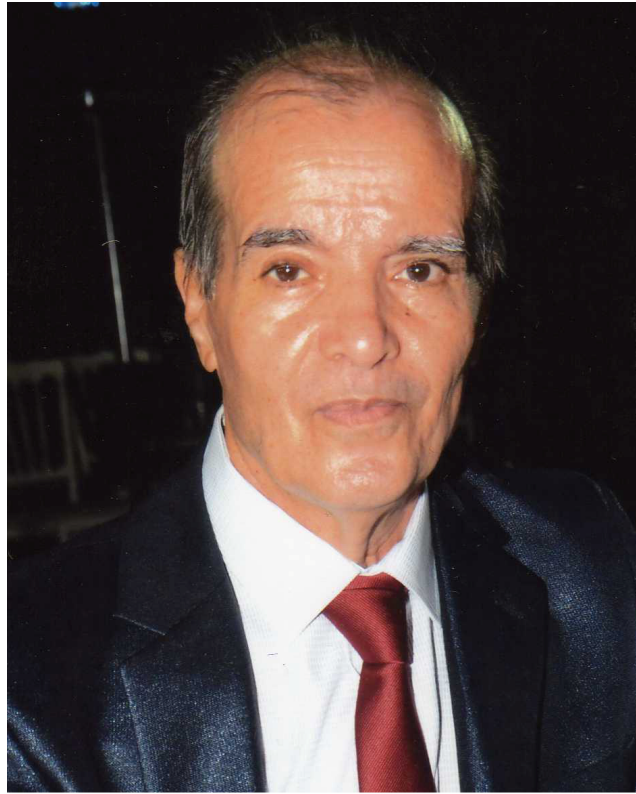


Fig. 0.2 Photo récente du premier auteur.

PRÉFACE

L'idée de cet ouvrage de cartographie mathématique revient à l'absence de livres récents en la matière destinés aux utilisateurs francophones des cartes topographiques et similaires, expliquant les fondements mathématiques des différentes représentations ou "projections" planes.

A ce sujet, nous sommes revenus au manuscrit du cours que nous avons suivi à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG) dans les années 80 enseigné par l'Ingénieur Géographe Général JEAN COMMOT.

L'ouvrage *Cours de Cartographie Mathématique à l'Usage des Ingénieurs* représente en partie l'essentiel du cours manuscrit de JEAN COMMOT. A cet égard, nous avons associé JEAN COMMOT comme co-auteur du présent ouvrage dédié à sa mémoire.

Ce cours de cartographie mathématique est destiné à la formation d'ingénieurs en sciences géographiques et peut être aussi un document pour un cours aux techniciens en géomatique.

L'ensemble de l'ouvrage comprend douze chapitres. Son organisation est faite comme suit :

- Le premier chapitre introduit la cartographie mathématique et l'objet du cours et fait un rappel sur la géométrie des courbes, le repère de Frenét, la

théorie des surfaces, la première forme fondamentale, et les théorèmes liés aux rayons principaux de courbure d'une surface de \mathbb{R}^3 . Enfin, quelques éléments sur les surfaces isothermes ont été ajoutés.

- Le deuxième chapitre concerne la représentation d'une surface sur une autre. On donne les définitions des différents termes qui seront utilisés par la suite dans l'étude des différentes représentations planes tels que l'altération, le module linéaire, l'indicatrice de Tissot,...

- L'objet du troisième chapitre est l'étude des représentations planes en cartographie.

- Le quatrième chapitre traite le lien mathématique entre les représentations planes et les fonctions analytiques.

- Le cinquième chapitre concerne les représentations planes conformes d'une surface.

- La représentation d'un ellipsoïde sur une sphère est étudiée dans le sixième chapitre.

- Le septième chapitre est consacré aux représentations planes coniques.

- On traite en détail dans le huitième chapitre, la représentation Lambert utilisée en Tunisie qui était la représentation cartographique officielle jusqu'à son remplacement par la représentation U.T.M. suite à la publication de l'arrêté du 10 février 2009 paru dans le Journal Officiel de la République Tunisienne et qui a fixé le système national de référence unifié de la géodésie, la nouvelle représentation cartographique et le système national de référence du nivellement de précision.

- Dans le neuvième chapitre, on parlera des représentations cylindriques. En hommage à mon professeur de Géodésie lors de mes études à l'ENSG, l'Ingénieur Géographe JEAN LE MENESTREL, j'ai inséré tout le chapitre XVII relatif à la représentation plane U.T.M. du fascicule 3 - *Géodésie Géométrique Bidimensionnelle* - de son cours de Géodésie [9]. J'ai en ajouté aussi à la fin du chapitre quelques remarques et compléments sur la représentation U.T.M.

- Le dixième chapitre fait l'objet de l'étude d'une représentation mériconique équivalente à savoir la représentation de Bonne qui a été utilisée en cartographie (type ancien) pour les échelles 1/50 000, 1/100 000 et 1/200 000 en Tunisie et en Algérie.

- Nous avons présenté une introduction aux représentations dites quasi-conformes dans le onzième chapitre.

- Enfin, nous avons collectionné en plus des exercices et problèmes ajoutés dans certains chapitres, d'autres sujets dans le douzième chapitre.

Nous espérons que le lecteur trouve cet ouvrage " *Cours de Cartographie Mathématique* ", répondant à ses attentes. Pour toute remarque ou proposition, prière de nous écrire à l'adresse " abenhadsalem@gmail.com " et merci d'avance.

Tunis,
Octobre 2021

*Abdelmajid Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.
Ingénieur Général Géographe*

Table des matières

PRÉFACE	ix
1 Généralités	1
1.1 INTRODUCTION	1
1.2 COURBES PLANES - COURBURE.....	3
1.2.1 Longueur d'un arc de la courbe	3
1.2.2 La Tangente	3
1.2.3 Normale et Courbure	4
1.3 COURBES GAUCHES	5
1.4 SURFACES	9
1.5 LA PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE	10
1.5.1 Ecriture matricielle de la première forme fondamentale ..	11
1.5.2 Angles de deux courbes coordonnées et Élément d'aire ..	11
1.5.3 Coordonnées Orthogonales et Coordonnées Symétriques ..	12
1.6 LA DEUXIÈME FORME FONDAMENTALE.....	14
1.7 LES SURFACES ISOTHERMES	22
1.7.1 Introduction	22

1.7.2	Présentation des Surfaces Isothermes	23
1.7.3	Les Equations de Gauss-Weingarten et Gauss-Codazzi . .	25
1.7.4	Les Surfaces Isothermes Discrètes	30
1.8	EXERCICES ET PROBLÈMES	34
2	Représentation d'une surface sur une autre	37
2.1	DÉFINITIONS	37
2.2	ELÉMENTS CORRESPONDANTS	38
2.3	CANEVAS	39
2.4	LES REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES	40
2.5	LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES ET AZIMUTALES	41
2.6	LES ALTÉRATIONS	42
2.6.1	L'Altération Angulaire	42
2.6.2	Le Module Linéaire dans une direction δ	42
2.6.3	L'Altération Linéaire	43
2.6.4	Le Module aréolaire	43
2.7	INDICATRICE DE TISSOT	43
2.7.1	Altération Angulaire	47
2.7.2	Directions et lignes automécoïques	48
3	Les Représentations Planes en Cartographie	51
3.1	ECHELLE NOMINALE	51
3.2	CLASSIFICATION D'APRÈS LES CARACTÈRES LOCAUX	53
3.2.1	Les Représentations conformes	53
3.2.2	Les Représentations équivalentes	53
3.2.3	Les Représentations aphyllactiques	54
3.3	CLASSIFICATION D'APRÈS LES CARACTÈRES GLOBAUX	54
3.3.1	Caractères du canevas	54

3.3.2	Caractères d'orientation	56
3.3.3	Etude d'une représentation plane	57
3.3.4	Cas particuliers des représentations conformes	58
4	Les Représentations Planes et les Fonctions Analytiques	61
4.1	RAPPELS MATHÉMATIQUES	61
4.1.1	Logarithme Complexe	61
4.2	FONCTION ANALYTIQUE	62
4.2.1	Autre définition de la fonction analytique	64
4.3	EXERCICES ET PROBLÈMES	67
5	Représentation Conforme d'une Surface sur une autre	69
5.1	ÉTABLISSEMENT DE LA CONDITION POUR UNE REPRÉSENTATION CONFORME	69
5.2	EXEMPLES	75
5.2.1	La représentation $Z = kz$	75
5.2.2	La représentation $Z = ae^{iz}$	75
5.2.3	La représentation $Z = ke^{iz}$	76
5.2.4	Les représentations coniques conformes directes	76
5.2.5	La représentation de Littrow	76
5.2.6	La projection stéréographique d'une sphère	77
5.2.7	Les représentations polyconiques circulaires conformes de la sphère	78
5.3	ASPECT TRANSVERSE DES REPRÉSENTATIONS CONFORMES	80
6	Représentation d'un Ellipsoïde sur une Sphère	85
6.1	GÉNÉRALITÉS	85
6.2	LA REPRÉSENTATION DE BESSEL	87
6.3	LES REPRÉSENTATIONS CONFORMES	87
6.3.1	Cas général	88

6.3.2	Représentations de Soldner	90
6.3.3	Représentation conforme à déformation minimale - sphère de Gauss	92
6.4	CAS PARTICULIERS	95
6.4.1	Cas $\varphi_0 = 0$	96
6.4.2	Cas $ \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$	97
6.5	LES REPRÉSENTATIONS ÉQUIVALENTES	97
6.6	EXERCICES ET PROBLÈMES	99
7	Les Représentations Coniques	101
7.1	LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES ÉQUIDISTANTES	102
7.2	LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES ÉQUIDISTANTES SÉCANTES .	103
7.2.1	Cas de la sphère de rayon unité	104
7.3	LES REPRÉSENTATIONS ÉQUIDISTANTES TANGENTES.....	104
7.4	LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES CONFORMES (LAMBERT) ...	105
7.5	LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES CONFORMES SÉCANTES ...	106
7.6	LES REPRÉSENTATIONS CONFORMES TANGENTES.....	106
7.7	LES REPRÉSENTATIONS SÉCANTES ET TANGENTES DE MÊME EXPOSANT SONT SEMBLABLES	107
7.8	LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES ÉQUIVALENTES.....	107
7.8.1	Cas de la sphère avec un rayon unité.....	108
7.8.2	Représentation où l'image du pôle est un point.....	110
7.9	EXERCICES ET PROBLÈMES	111
8	La Représentation Plane Lambert Tunisie	115
8.1	DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS	115
8.2	INDICATRICE DE TISSOT	117
8.3	CALCUL DES MODULES PRINCIPAUX	117
8.4	ÉTABLISSEMENT DES FORMULES $R(\varphi)$ ET $\Omega(\lambda)$	118

8.5	DÉTERMINATION DES CONSTANTES R_0 ET n	119
8.6	EXPRESSION DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES	121
8.7	PASSAGE DES COORDONNÉES (R, Ω) AUX COORDONNÉES (x, y)	122
8.8	PASSAGE DES COORDONNÉES (x, y) AUX COORDONNÉES (R, Ω)	123
8.9	ETUDE DE L'ALTÉRATION LINÉAIRE	124
8.9.1	Calculs numériques	125
8.9.2	Expression des Coordonnées Cartésiennes Translatées (X, Y)	127
8.9.3	Les Eléments de définition du Lambert Nord Tunisie	128
8.9.4	Les Eléments de définition du Lambert Sud Tunisie	128
8.9.5	Calcul de la réduction de la corde	128
8.10	CONVERGENCE DES MÉRIDIDIENS	129
8.11	EXERCICES ET PROBLÈMES	130
9	Les Représentations Cylindriques	133
9.1	LES REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES DIRECTES	133
9.1.1	Représentations cylindriques directes équidistantes	134
9.2	LES REPRÉSENTATION CYLINDRIQUES DIRECTES CONFORMES (MERCATOR)	135
9.2.1	Condition de conformité	135
9.2.2	Les Courbes de Favé	136
9.3	LES REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES ÉQUIVALENTES	138
9.4	LES REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES TRANSVERSES	140
9.4.1	Les Représentations cylindriques transverses équidistantes	140
9.4.2	La Représentation U.T.M. (Universal Transverse Mercator)	141
9.5	EXERCICES ET PROBLÈMES	160

10 Représentation Mériconique Equivalente ou Représentation de Bonne	161
10.1 L'ORIGINE DU DÉCOUPAGE DE LA CARTOGRAPHIE 1/50000 TYPE ANCIEN	161
10.2 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA REPRÉSENTATION DE BONNE.....	162
10.2.1 Formules	162
10.3 CALCUL DES COORDONNÉES	165
10.3.1 Modèle sphérique.....	165
10.3.2 Le modèle ellipsoïdique.....	166
10.3.3 Les altérations angulaires et linéaires	168
10.4 APPLICATION : LE CALCUL DES ANGLES DES FEUILLES À L'ÉCHELLE 1/50000	170
10.5 LA DÉSORIENTATION ENTRE LES AXES DES COORDONNÉES LAMBERT TUNISIE ET LAMBERT ALGÉRIE	171
11 Les Représentations ou Transformations Quasi-Conformes ..	173
11.1 DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN UN POINT z_0	174
11.2 ÉTUDE DE LA TRANSFORMÉE D'UN CERCLE	175
11.2.1 Calcul d'un élément de longueur sur le plan.....	176
11.3 EXEMPLE DE TRANSFORMATION QUASI-CONFORME	178
12 Exercices et Problèmes	181
Bibliographie	189
Liste des Figures	191
Liste des Tables	193
Index.....	195
Index	197

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

He who understands geometry may understand anything in this world.

Galileo Galilée (1564 - 1642)

1.1 Introduction

La cartographie mathématique est l'étude des représentations mathématiques d'un modèle de la terre (ellipsoïde ou sphère) ou d'une planète quelconque sur une autre surface (plan le plus souvent).

Avant de passer en revue les représentations les plus courantes, l'étude portera sur les principes généraux de la représentation d'une surface sur une autre, l'analyse des déformations (ou altérations) et les caractéristiques des représentations planes.

Une représentation fidèle d'un modèle sphérique est donnée par un globe : en égard des dimensions réalisables, l'aplatissement peut être négligé (l'aplatissement est de l'ordre de $1/300$: soit une différence entre les deux demi-axes de l'ordre de $2mm$, pour un demi grand-axe de $0.60m$). Mais les dimensions possibles pour une telle réalisation (et les difficultés mêmes de celle-ci) en limitent l'intérêt : en dehors des préoccupations d'ordre décoratif, cette représentation est réservée à des fins pédagogiques élémentaires.

On peut imagier une infinité de représentations planes de la terre, mais le modèle (sphère ou ellipsoïde) n'étant pas une surface applicable, **toutes** les représentations entraînent des déformations, qu'il convient de savoir définir et analyser.

Pour de nombreux besoins, notamment - bien que cela ne soit pas absolument nécessaire - pour les calculs géodésiques, le choix se porte sur les représentations conformes - D'autres utilisateurs ont besoin de conserver le rapport des surfaces et font appel aux représentations équivalentes - Pour étudier des phénomènes plus ou moins liés à la latitude, il peut être commode d'utiliser des représentations où les images des parallèles sont des droites (représentations cylindriques ou méricylindriques). D'autres impératifs conduiront éventuellement à adopter des solutions différentes.

Enfin de nombreux cartographes ont imaginé des représentations (auxquelles ils attachent leurs noms...) d'une grande diversité, soit pour définir une construction simple (pas toujours) du canevas, soit pour obtenir un résultat estimé esthétique.

Historiquement, les premières représentations planes d'une sphère ont été établies par les géomètres grecs : ceux-ci, en particulier, pour les cartes du ciel, ont étudié des perspectives ou encore projections. Plus tard, ces perspectives géométriques n'ont pas suffi pour les besoins de la cartographie ; elles ont été remplacées par des représentations planes, définies comme des correspondances analytiques entre les points du modèle et ceux du plan, mais la tradition aidant, le terme " projection " a subsisté : mal adapté et souvent mal compris, ce mot est source de confusion et il n'y a aucune raison de le conserver. Dans la suite de ce cours, il ne sera utilisé que lorsqu'il correspond exactement à son sens mathématique propre (représentations perspectives).

On donne ci-après un rappel sur les courbes planes et gauches et la théorie des surfaces.

1.2 Courbes Planes - Courbure

Définition 1.1 Une courbe plane (μ) est une application de $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^2$ entièrement déterminée par la donnée d'une fonction vectorielle $\mathbf{M}(t)$ d'un paramètre $t \in I$ un intervalle de \mathbb{R} :

$$t \in I \subset \mathbb{R} \longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{OM}(x, y) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j}$$

où (\mathbf{i}, \mathbf{j}) la base orthonormée du plan XOY.

1.2.1 Longueur d'un arc de la courbe

L'élément élémentaire de longueur d'un arc est la quantité ds telle que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (x'^2 + y'^2) \cdot dt^2 = d\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} = \|d\mathbf{M}\|^2$$

avec x' et y' désignent les dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à la variable t , d'où :

$$ds = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} \cdot dt$$

Soit pour $t = t_0 \in I$, M_0 le point origine de l'arc, d'où en intégrant s , on obtient :

$$s = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'^2 + y'^2)} \cdot dt = F(t, t_0) \quad (1.1)$$

l'application s définit par : $t \in I \longrightarrow s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right\| dt$ est dite abscisse curviligne d'origine M_0 . De l'équation (1.1), on peut exprimer t en fonction de s . On peut alors adopter comme paramètre l'abscisse curviligne soit la longueur d'un arc de (μ) d'origine M_0 et de considérer la courbe définie par $M(s)$.

1.2.2 La Tangente

Au point M , la courbe admet une tangente définie par le vecteur unitaire \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

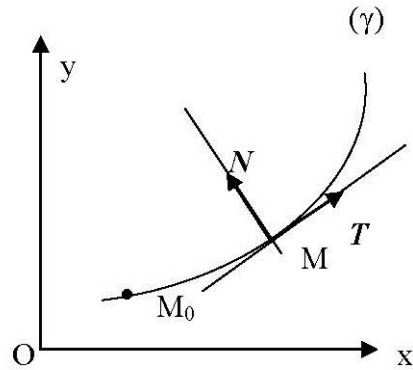


Fig. 1.1 Courbe plane

1.2.3 Normale et Courbure

Définition 1.2 La dérivée de \mathbf{T} par rapport à s (lorsqu'elle existe et n'est pas nulle) définit une direction orthogonale à la tangente portant le vecteur unitaire \mathbf{N} dite la normale au point M . On a alors :

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\mathbf{T}}{ds} \quad (1.3)$$

avec :

$$\alpha = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{R} \quad (1.4)$$

R est appelé rayon de courbure au point M .

Problème 1.1 Soit l'ellipse (E) définie par les équations paramétriques :

$$M \begin{cases} x = a \cos u \\ y = b \sin u \\ \text{avec } a > b > 0 \end{cases}$$

On pose :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

1. Calculer la position sur l'axe des abscisses des deux points F et F' appelés foyers tels que $MF + MF' = 2a$.

2. Montrer que le produit des distances des foyers à la tangente à l'ellipse en M est indépendant de u .
 3. Donner l'expression de ds .
 4. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires \mathbf{T} et \mathbf{N} et en déduire le rayon de courbure de l'ellipse.
 5. Montrer qu'il passe par M deux cercles tangents en ce point à la courbe et centrés sur Ox, Oy respectivement (appelés cercles surosculateurs).
 6. Que deviennent ces cercles lorsque M est un sommet de l'ellipse.
-
-

1.3 Courbes Gauches

1.3.1. Trièdre de Frenêt¹ - Courbure-Torsion

Définition 1.3 Une courbe gauche (μ) est une application de $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^3$ entièrement déterminée par la donnée d'une fonction vectorielle $\mathbf{OM}(t)$ d'un paramètre $t \in I$ un intervalle de \mathbb{R} :

$$t \in I \subset \mathbb{R} \Rightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{OM}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

1.3.2. Longueur d'un arc de la courbe

L'élément élémentaire de longueur d'un arc est la quantité ds telle que

$$ds^2 = dM \cdot dM = \|dM\|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) \cdot dt^2$$

avec x', y' et z' désignent les dérivées de $x(t), y(t)$ et $z(t)$ par rapport à la variable t , d'où :

1. **Jean Frédéric Frenêt** (1816-1900) : mathématicien, astronome et météorologue français.

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

Soit pour $t = t_0 \in I$, M_0 le point origine de l'arc, d'où en intégrant s , on obtient :

$$s = F(t, t_0) \quad (1.6)$$

l'application s définit par : $t \in I \longrightarrow s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right\| dt$ est dite abscisse curviligne d'origine M_0 . De l'équation (1.6), on peut exprimer t en fonction de s . On peut alors adopter comme paramètre l'abscisse curviligne soit la longueur d'un arc de (μ) d'origine M_0 et de considérer la courbe gauche définie par $M(s)$.

1.3.3. La Tangente

Au point M , la courbe admet une tangente définie par le vecteur unitaire \mathbf{T} .

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

1.3.4. La Normale - Courbure

Définition 1.4 La dérivée de \mathbf{T} par rapport à s , lorsqu'elle existe et n'est pas nulle, définit une direction orthogonale à la tangente portant le vecteur unitaire \mathbf{N} dite la normale au point M . On a alors :

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\mathbf{T}}{ds} \quad (1.8)$$

avec :

$$\alpha = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{R} \quad (1.9)$$

R est appelé rayon de courbure .

En effet, $\|\mathbf{T}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \Rightarrow 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$. Donc : le vecteur \mathbf{T} est orthogonal à $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$.

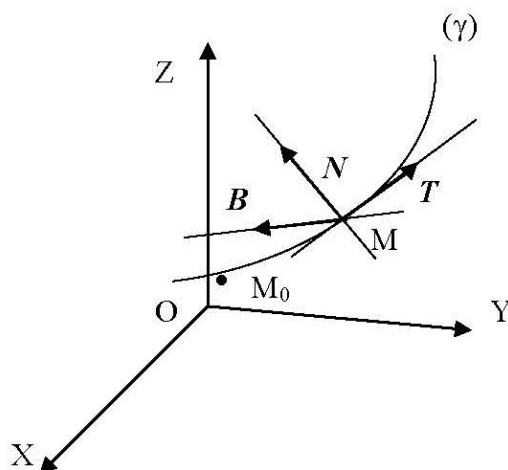


Fig. 1.2 Le Trièdre de Frenêt

1.3.5. Binormale

Définition 1.5 La binormale est la droite passant par le point M et de direction le vecteur \mathbf{B} défini par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \quad (1.10)$$

On a évidemment : $\|\mathbf{B}\| = 1$. Le triplet $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ est direct et forme un trièdre dénommé le trièdre de Frenêt (Fig. 1.2).

Définition 1.6 Les plans définis par les vecteurs (\mathbf{T}, \mathbf{N}) , (\mathbf{N}, \mathbf{B}) et (\mathbf{B}, \mathbf{T}) sont appelés respectivement plan osculateur, plan normal et plan rectifiant.

1.3.6. Torsion

On calcule la dérivée du vecteur \mathbf{B} par rapport à s , on obtient :

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \wedge \mathbf{N} + \mathbf{T} \wedge \frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

car \mathbf{T} et $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ sont colinéaires, par conséquent $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ est orthogonal à \mathbf{T} . Comme \mathbf{B} est unitaire, $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ est aussi orthogonal à \mathbf{B} , donc $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ est colinéaire à \mathbf{N} . On pose :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{-1}{\tau(s)} \mathbf{N}} \quad (1.11)$$

Définition 1.7 Le réel $1/\tau(s)$ est appelé torsion de (μ) au point $M(s)$.

On calcule la dérivée du vecteur \mathbf{N} . Comme $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$, on obtient :

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \wedge \mathbf{T} + \mathbf{B} \wedge \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{-1}{\tau(s)} \mathbf{N} \wedge \mathbf{T} + \mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{N}}{R}$$

donc :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{-\mathbf{T}}{R} + \frac{\mathbf{B}}{\tau(s)}} \quad (1.12)$$

Les trois relations exprimant les dérivées premières des vecteurs du repère de Frenêt peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\boxed{\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{-1}{R} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & \frac{-1}{\tau} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}} \quad (1.13)$$

Problème 1.2 Soit la courbe (C) définie par les formules :

$$M \begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \\ z = \frac{9}{16}at^4 \end{cases} \quad \text{avec } a > 0$$

1. Calculer l'abscisse curviligne s d'un point M quelconque de cette courbe lorsqu'on prend pour origine des arcs l'origine des coordonnées et qu'on prend pour sens des arcs croissants celui des y croissants.
 2. Déterminer au point M les vecteurs unitaires du trièdre de Frenêt.
 3. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.
-

1.4 Surfaces

Définition 1.8 Une surface (σ) de \mathbb{R}^3 est une application d'un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ à $(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ fait correspond un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ où x, y, z sont des fonctions continues des deux paramètres (u, v) :

$$(u, v) \in \mathcal{D} \Rightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{OM}(u, v) = \begin{pmatrix} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Les paramètres (u, v) sont appelés coordonnées curvilignes sur (σ) .

Donc $(u, v) \in \mathcal{D} \Rightarrow (x, y, z) \in (\sigma)$.

Si la fonction $\mathbf{OM}(u, v)$ est dérivable dans le domaine \mathcal{D} , on peut définir en tout point de (σ) un plan tangent et une normale.

Soient \mathbf{M}'_u et \mathbf{M}'_v les deux vecteurs dérivées au point M avec :

$$\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u}(u, v) = \mathbf{M}'_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial v}(u, v) = \mathbf{M}'_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Alors l'équation du plan tangent est définie par :

$$\mathbf{MP} \cdot (\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v) = 0$$

P est un point courant du plan tangent. Le vecteur tangent \mathbf{MP} s'écrit :

$$\mathbf{MP} = \alpha.\mathbf{M}'_u + \beta.\mathbf{M}'_v \quad (1.16)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v}{\|\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v\|} \quad (1.17)$$

c'est un vecteur unitaire porté par la normale à la surface (σ) au point M .

Une courbe tracée sur la surface est définie par une relation $g(u, v) = 0$ ou par $u = u(t)$; $v = v(t)$ avec t un paramètre réel. En particulier, les courbes $u = \text{constante}$ et $v = \text{constante}$ sont dites les *courbes coordonnées*.

1.5 La Première Forme Fondamentale

L'élément linéaire ds sur la surface (σ) est la distance de deux points infiniment voisins, le carré de ds est le carré scalaire de $d\mathbf{M}$ soit :

$$ds^2 = d\mathbf{M}.d\mathbf{M} = d\mathbf{M}^2 = \|d\mathbf{M}\|^2 \quad (1.18)$$

Or :

$$\mathbf{OM}(u, v) \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \implies d\mathbf{M} = \mathbf{M}'_u du + \mathbf{M}'_v dv = \begin{pmatrix} dx = x'_u du + x'_v dv \\ dy = y'_u du + y'_v dv \\ dz = z'_u du + z'_v dv \end{pmatrix}$$

Par suite :

$$d\mathbf{M}^2 = ds^2 = \mathbf{M}'_u.\mathbf{M}'_u du^2 + 2\mathbf{M}'_u.\mathbf{M}'_v dudv + \mathbf{M}'_v.\mathbf{M}'_v dv^2$$

On pose :

$$\begin{cases} E = \mathbf{M}'_u.\mathbf{M}'_u \\ F = \mathbf{M}'_u.\mathbf{M}'_v \\ G = \mathbf{M}'_v.\mathbf{M}'_v \end{cases} \quad (1.19)$$

alors ds^2 s'écrit :

$$\boxed{ds^2 = E.du^2 + 2.F.dudv + G.dv^2} \quad (1.20)$$

(1.20) est dite la première forme fondamentale, elle définit la métrique de la surface (σ) .

1.5.1 *Écriture matricielle de la première forme fondamentale*

On appelle $g = (g_{ij})$ la matrice carrée 2×2 telle que :

$$\begin{aligned} g_{11} &= E \\ g_{12} &= g_{21} = F \\ g_{22} &= G \end{aligned}$$

Soit :

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Alors l'équation (1.20) s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = (du, dv) \cdot g \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

La matrice g s'appelle la matrice du tenseur métrique.

1.5.2 *Angles de deux courbes coordonnées et Élément d'aire*

* On a : $F = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_v = \|\mathbf{M}'_u\| \cdot \|\mathbf{M}'_v\| \cos \alpha$, d'où :

$$\cos \alpha = \frac{F}{\|\mathbf{M}'_u\| \cdot \|\mathbf{M}'_v\|} = \frac{F}{\sqrt{E} \sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

et en considérant $\alpha \in [0, \pi]$:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{E \cdot G}} = \sqrt{\frac{E \cdot G - F^2}{E \cdot G}}$$

On pose parfois :

$$H = \sqrt{E \cdot G - F^2} = h^2(u, v) \quad (1.23)$$

soit :

$$H = \|\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v\| = \|\mathbf{M}'_u\| \cdot \|\mathbf{M}'_v\| \sin \alpha \quad (1.24)$$

Par suite, le vecteur unitaire normal \mathbf{n} a pour expression :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v}{\|\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v\|} = \frac{\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v}{H} \quad (1.25)$$

* En considérant maintenant le parallélogramme curviligne de sommet $M(u, v)$ et de côtés les vecteurs $\mathbf{M}'_u du$ et $\mathbf{M}'_v dv$, alors l'élément infinitésimal d'aire $d\mathcal{A}$ a pour expression :

$$d\mathcal{A} = \|\mathbf{M}'_u du \wedge \mathbf{M}'_v dv\| = \|\mathbf{M}'_u\| \cdot \|\mathbf{M}'_v\| du \cdot dv \cdot \sin\alpha = \sqrt{E \cdot G - F^2} dudv = Hdudv$$

On le note aussi :

$$\boxed{d\mathcal{A} = \sqrt{E \cdot G - F^2} du \wedge dv = H du \wedge dv} \quad (1.26)$$

1.5.3 Coordonnées Orthogonales et Coordonnées Symétriques

Les coordonnées (u, v) sont dites **orthogonales** si $F = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_v = 0$, soit $\cos\alpha = 0$, donc α est un angle droit.

Les coordonnées orthogonales sont dites **coordonnées symétriques** si de plus $E = G$. Alors la première forme quadratique s'écrit :

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 = E(du^2 + dv^2) = H(du^2 + dv^2) = h^2(u, v)(du^2 + dv^2)$$

Exemple :

On considère une sphère de rayon R qu'on note (σ) , elle est paramétrée par :

$$\mathbf{OM} \begin{vmatrix} R \cos\varphi \cos\lambda \\ R \cos\varphi \sin\lambda \\ R \sin\varphi \end{vmatrix}$$

avec $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, $\lambda \in [0, +2\pi[$. Les courbes coordonnées de (σ) sont les méridiens $\lambda = \text{constante}$ et les parallèles $\varphi = \text{constante}$. On remarque qu'elles se coupent en un angle droit. On calcule la première forme fondamentale de la sphère :

$$\mathbf{OM}'_\varphi = \begin{vmatrix} -R \sin\varphi \cos\lambda \\ -R \sin\varphi \sin\lambda \\ R \cos\varphi \end{vmatrix}, \quad \mathbf{OM}'_\lambda = \begin{vmatrix} -R \cos\varphi \sin\lambda \\ R \cos\varphi \cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.27)$$

D'où :

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{OM}'_{\varphi} \cdot \mathbf{OM}'_{\varphi} = R^2 \\ F &= \mathbf{OM}'_{\varphi} \cdot \mathbf{OM}'_{\lambda} = 0 \\ G &= \mathbf{OM}'_{\lambda} \cdot \mathbf{OM}'_{\lambda} = R^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$F = 0$ justifie ce qui a été dit ci-dessus sur l'orthogonalité des courbes coordonnées. Ces dernières sont orthogonales mais non symétriques. En effet :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 = R^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi^2}{\cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right)$$

La variable L telle que :

$$dL = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \quad (1.28)$$

forme avec λ un couple de coordonnées symétriques, car :

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi (dL^2 + d\lambda^2) \quad (1.29)$$

L est appelée **latitude croissante** ou **latitude ou variable de Mercator**². On pose :

$$t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \implies \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

d'où :

$$dt = (1+t^2) \frac{d\varphi}{2} \implies d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2}$$

De (1.28), on obtient L vérifiant $L(0) = 0$:

$$L = \int_0^{\varphi} \frac{dw}{\cos w} = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \frac{2dt}{1-t^2} \quad (1.30)$$

On se restreint à $\varphi \in [-\varphi_1, +\varphi_1]$ où $0 < \varphi_1 < \pi/2$. L'équation (1.30) s'écrit :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\varphi} \frac{dw}{\cos w} = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \frac{dt}{1+t} + \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \frac{dt}{1-t} = \left[\operatorname{Log} \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_0^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.31)$$

car $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) > 0$, donc :

$$\boxed{L = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \quad (1.32)$$

2. **Gerhardus Mercator** (1512-1594) : cartographe, astronome et ingénieur belge. Son nom était donné à la représentation cylindrique conforme proposée par lui-même.

D'où :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \exp(L) = e^L$$

Soit l'expression de la latitude φ en fonction de L :

$$\varphi = 2\operatorname{Arctg}(e^L) - \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1.1 Soit (Γ) la surface paramétrée par (u, v) dans \mathbb{R}^2 telle que :

$$M(u, v) \begin{cases} X = u(1-u^2)\cos v \\ Y = u(1-u^2)\sin v \\ Z = 1-u^2 \end{cases}$$

1. Calculer l'expression de ds^2 .
2. Montrer que l'équation cartésienne de (Γ) est :

$$x^2 + y^2 = (1-z)z^2$$

1.6 La Deuxième Forme Fondamentale

On calcule maintenant le vecteur $d^2\mathbf{M}$ la différentielle seconde de \mathbf{OM} . On a alors :

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{M} &= d(d\mathbf{M}) = d(\mathbf{OM}'_u \cdot du + \mathbf{OM}'_v \cdot dv) = d\mathbf{OM}'_u \cdot du + d\mathbf{OM}'_v \cdot dv \\ &= (\mathbf{OM}''_{uu} \cdot du + \mathbf{OM}''_{uv} \cdot dv) \cdot du + (\mathbf{OM}''_{uv} \cdot du + \mathbf{OM}''_{vv} \cdot dv) \cdot dv \end{aligned}$$

soit :

$$d^2\mathbf{M} = \mathbf{OM}''_{uu} \cdot (du)^2 + 2 \cdot \mathbf{OM}''_{uv} \cdot du \cdot dv + \mathbf{OM}''_{vv} \cdot (dv)^2$$

car $\mathbf{OM}''_{uv} = \mathbf{OM}''_{vu}$. On peut écrire l'équation précédente sous la forme :

$$d^2\mathbf{M} = \frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial v^2} dv^2 \quad (1.33)$$

Soit (γ) une courbe tracée sur la surface (σ) , définie par $u = u(s), v = v(s)$ où s désigne l'abscisse curviligne. Soit \mathbf{n} le vecteur normal à la surface et \mathbf{N} le

vecteur unitaire porté par la normale principale à la courbe (γ) . Si \mathbf{T} est le vecteur porté par la tangente à (γ) au point $M(u, v)$, d'après les formules de Frenêt, on a :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{R}$$

où $\frac{1}{R}$ est la courbure de (γ) au point M . Or $d\mathbf{M} = \mathbf{T}ds$, par suite :

$$d(d\mathbf{M}) = d^2\mathbf{M} = d(\mathbf{T}ds) = ds.d\mathbf{T} = ds.\left(\frac{\mathbf{N}}{R}\right) \quad (1.34)$$

On multiplie vectoriellement l'équation (1.33) par le vecteur normal unitaire \mathbf{n} , on obtient :

$$\mathbf{n}.d^2\mathbf{M} = \mathbf{n}.\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial u^2}du^2 + 2\mathbf{n}.\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial u\partial v}dudv + \mathbf{n}.\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial v^2}dv^2 \quad (1.35)$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \mathbf{n}.\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial u^2} \\ M = \mathbf{n}.\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial u\partial v} \\ N = \mathbf{n}.\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial v^2} \end{array} \right. \quad (1.36)$$

(1.35) s'écrit alors :

$$\mathbf{n}.d^2\mathbf{M} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (1.37)$$

On multiplie aussi l'équation (1.34) par le vecteur \mathbf{n} , d'où :

$$\mathbf{n}.d^2\mathbf{M} = \mathbf{n}.ds.\left(\frac{\mathbf{N}}{R}\right) = \mathbf{n}.\mathbf{N}\frac{ds^2}{R}$$

Soit θ l'angle formé par \mathbf{n} et \mathbf{N} , d'où :

$$\mathbf{n}.d^2\mathbf{M} = \mathbf{n}.\mathbf{N}\frac{ds^2}{R} = \frac{\cos\theta}{R}ds^2 \quad (1.38)$$

Comme (1.37) est égal à (1.38), on obtient :

$$\frac{\cos\theta}{R}ds^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = \Phi(u, v)$$

soit :

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{\cos\theta}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{II(u,v)}{I(u,v)}} \quad (1.39)$$

avec $I(u,v)$ la première forme fondamentale et l'expression :

$$\boxed{II(u,v) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = \Phi(u,v)} \quad (1.40)$$

est appelée **la deuxième forme fondamentale**. D'où :

Théorème 1.1 *Le produit de la courbure en un point donné d'une courbe tracée sur une surface dans l'espace à trois dimensions par le cosinus de l'angle entre la normale à la surface et la normale principale à la courbe est égale au rapport de la deuxième et la première formes fondamentales du vecteur tangent à la courbe en ce point.*

Définition 1.9 *La quantité $\frac{\cos\theta}{R}$ invariante pour toutes les courbes ayant même vecteur tangent \mathbf{T} en un point donné est dite la courbure normale de la surface en ce point.*

Proposition 1.1 *Si la courbe est la section d'une surface par un plan normal, on a :*

$$\boxed{\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \pm \frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}} \quad (1.41)$$

Problème 1.3 *On définit une surface (Σ) par les équations :*

$$M(u,v) \begin{cases} X = a.\cos u.\cos v \\ Y = a.\cos u.\sin v \\ Z = b.\sin u \end{cases}$$

avec a, b deux constantes positives.

1. Calculer les composantes des vecteurs \mathbf{OM}'_u et \mathbf{OM}'_v .
2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Σ) .
3. En déduire l'expression de ds^2 .

4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

5. Calculer un vecteur unitaire normal \mathbf{n} de (Σ) .

6. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

7. Calculer les coefficients L, M et N .

1.6.1. Trièdre de Darboux³ - Ribaucour⁴

Soit (γ) une courbe tracée sur une surface (σ) pour laquelle on sait définir en un point donné M le repère de Frénet $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$.

Définition 1.10 On appelle repère de Darboux - Ribaucour $(\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{g})$ le repère orthonormé formé par les vecteurs \mathbf{T} , \mathbf{n} et le vecteur $\mathbf{g} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{n}$.

La position relative des deux repères est donnée par l'angle :

$$\theta = \widehat{\mathbf{N}, \mathbf{n}} \tag{1.42}$$

1.6.2. Section Normale

Définition 1.11 Soit la courbe (γ) tracée sur (σ) et définie comme intersection de (σ) et du plan passant par le point M et de directions \mathbf{n} et \mathbf{T} , alors (γ) est appelée section normale de (σ) en M dans la direction \mathbf{T} .

La normale principale de (γ) est la droite portée par le vecteur \mathbf{n} . Si R_n est le rayon de courbure de (γ) au point M , on a par définition :

3. Jean Gaston Darboux (1842-1917) : mathématicien français.

4. Albert Ribaucour (1845-1893) : ingénieur et mathématicien français.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R_n}$$

par suite :

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{R_n}$$

or (1.34) donne :

$$d\mathbf{T} = \frac{d^2\mathbf{M}}{ds}$$

d'où :

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{n} \cdot \frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \frac{1}{R_n} = \frac{II(u,v)}{I(u,v)}$$

soit :

$$\frac{1}{R_n} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{II(u,v)}{I(u,v)} \quad (1.43)$$

En comparant l'équation ci-dessus avec l'équation (1.39), on obtient :

$$\boxed{R = R_n \cdot \cos\theta} \quad (1.44)$$

D'où le deuxième théorème de Meusnier⁵ :

Théorème 1.2 *Le rayon de courbure R d'une courbe (γ) tracée sur une surface (σ) et ayant même tangente de direction \mathbf{T} est égal au produit de R_n rayon de courbure de la section normale par le cosinus de l'angle θ entre les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{N} .*

1.6.3. Indicatrice de Dupin⁶

On considère le repère orthonormé \mathcal{R} au point M défini par les vecteurs :

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$$

Définition 1.12 *L'indicatrice de Dupin est l'ensemble des points P du plan tangent en M vérifiant :*

$$\mathbf{MP} = \sqrt{R_n} \mathbf{T} \quad (1.45)$$

5. **Jean Baptiste Meusnier** (1754-1793) : militaire, géomètre et mathématicien français.

6. **Charles Dupin** (1784-1873) : ingénieur et mathématicien français.

quand \mathbf{T} varie autour de M .

Soit un point $P(\alpha, \beta)$ dans \mathcal{R} , on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{MP} &= \frac{\alpha}{\sqrt{E}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \frac{\beta}{\sqrt{G}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \\ \mathbf{MP} &= \sqrt{R_n} \mathbf{T} = \sqrt{R_n} \left(\frac{du}{ds} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \frac{dv}{ds} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\alpha}{\sqrt{ER_n}} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\beta}{\sqrt{GR_n}}$$

En utilisant la deuxième forme quadratique, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_n} &= L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{R_n} &= L \frac{\alpha^2}{ER_n} + 2M \frac{\alpha\beta}{R_n \sqrt{EG}} + N \frac{\beta^2}{GR_n} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{L}{E} \alpha^2 + 2 \frac{M}{\sqrt{EG}} \alpha\beta + \frac{N}{G} \beta^2 = 1} \quad (1.46)$$

C'est l'équation d'une conique (ellipse, parabole, hyperbole) suivant le signe du discriminant $\frac{M^2 - LN}{EG}$ ou $M^2 - LN$ respectivement (négatif, nul ou positif).

1.6.4. Les Directions principales

On suppose que $M^2 - LN < 0$.

Définition 1.13 On appelle directions principales les directions des axes de symétrie de l'indicatrice de Dupin.

Définition 1.14 On appelle les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 les rayons de courbure normale dans les deux directions principales.

Les directions principales sont orthogonales.

1.6.5. Formule d'Euler⁷

En supposant que l'indicatrice de Dupin est une ellipse d'équation :

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \quad (1.47)$$

où a, b sont les 2 rayons de courbure normale principaux, on peut écrire :

$$\mathbf{MP} = \sqrt{R_n} \mathbf{T} = \mathbf{i} \sqrt{R_n} \cos \psi + \mathbf{j} \sqrt{R_n} \sin \psi$$

avec $\psi = \widehat{\mathbf{T}, \mathbf{i}}$, or : $\mathbf{MP} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$, avec l'équation (1.47), on obtient alors la formule d'Euler :

$$\frac{R_n \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{R_n \sin^2 \psi}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2}$$

D'où :

Théorème 1.3 (Formule d'Euler) : La courbure de la section normale $\frac{1}{R_n}$ en un point donné est égale à :

$$\boxed{\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2}} \quad (1.48)$$

où $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$ sont les courbures principales au point considéré et ψ l'angle sur la surface entre le vecteur tangent à la section normale et la direction principale correspondante.

Définition 1.15 Le produit des courbures principales est la courbure de Gauss⁸ ou courbure totale de la surface et la courbure moyenne la somme des courbures principales.

Pour la première forme fondamentale ds^2 , on a déjà noté (1.21) :

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

et concernant la deuxième forme fondamentale $\Phi(u, v)$ donnée par l'équation (1.40), elle peut s'écrire sous la forme :

7. **Leonhard Euler** (1707-1783) : mathématicien et physicien suisse.

8. **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) : mathématicien et géomètre prussien, fondateur de la théorie des surfaces.

$$\Phi = \Phi(u, v) = (du, dv) \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

où par abus de notation, on a noté par Φ la matrice ci-dessus.

Alors, on annonce les deux théorèmes suivants sans les démontrer (*B. Doubrovine - S. Novikov - A. Fomenko*, [1]) :

Théorème 1.4 *La courbure totale K en un point d'une surface est égale au rapport des déterminants de ses deuxième et première formes fondamentales :*

$$K = \frac{\text{Dét}\Phi}{\text{Dét}g} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (1.50)$$

et :

Théorème 1.5 *La courbure moyenne H en un point d'une surface est égale à la trace de la matrice $g^{-1} \cdot \Phi$:*

$$H = \text{Tr}(g^{-1} \cdot \Phi) \quad (1.51)$$

Exercice 1.2 *Soit la surface d'Enneper⁹ :*

$$M(u, v) \begin{cases} X = u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ Y = v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ Z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1. *Montrer que :*

$$ds^2 = (1 + u^2 + v^2)^2 \cdot (du^2 + dv^2)$$

2. *Calculer un vecteur unitaire normal à la surface.*

3. *Montrer que la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle en chaque point.*

Exercice 1.3 *On suppose que la métrique d'une surface donnée est :*

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2, \quad A = A(u, v), \quad B = B(u, v)$$

9. Surface paramétrée par le mathématicien allemand **Alfred Enneper** (1830-1885).

1. Montrer alors que l'expression de la courbure totale est :

$$K = -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{A'_v}{B} \right)'_v + \left(\frac{B'_u}{A} \right)'_u \right]$$

' désigne la dérivation partielle.

1.7 Les Surfaces Isothermes

1.7.1 Introduction

Soit \mathcal{F} une surface définie dans \mathbb{R}^3 , paramétrée par la fonction vectorielle $\mathbf{OM} = F(u, v)$ telle que :

$$F(u, v) \begin{cases} x = F_1(u, v) \\ y = F_2(u, v) \\ z = F_3(u, v) \end{cases}$$

F est dite une paramétrisation conforme de \mathcal{F} si on a les conditions suivantes [7] :

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = e^{\Phi(u, v)} \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \quad (1.53)$$

C'est-à-dire que la première forme fondamentale de \mathcal{F} s'écrit :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{\Phi(u, v)}(du^2 + dv^2)$$

Le vecteur normal unitaire est donné par :

$$n = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \right\|}$$

avec :

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot n = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot n = 0$$

Quand le point M varie sur la surface \mathcal{F} , le repère $(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, n)$ est un repère mobile.

La deuxième forme fondamentale de \mathcal{F} est définie par [6] :

$$n \cdot d^2 F = L du^2 + 2M dudv + N dv^2$$

1.7.2 Présentation des Surfaces Isothermes

Définition 1.16 Si cette deuxième forme fondamentale s'écrit sous la forme :

$$-n \cdot d^2 F = e^{\Phi(u,v)} \left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2} \right) \quad (1.54)$$

alors, la paramétrisation de \mathcal{F} est dite isotherme.

Dans ce cas, ρ_1, ρ_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface \mathcal{F} , et les courbes $u = \text{constante}$ et $v = \text{constante}$ sont les antécédents des lignes de courbure du modèle.

Définition 1.17 Une surface qui admet des coordonnées isothermes est dite isotherme.

Exemple : soit la sphère définie par :

$$M = \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \quad R > 0$$

On a alors :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 = R^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi^2}{\cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right)$$

Posons :

$$d\mathcal{L}_M = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \implies \mathcal{L}_M = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (1.55)$$

\mathcal{L}_M est la variable de Mercator, ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) = e^{\Phi(\mathcal{L}_M, \lambda)} (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) \quad (1.56)$$

$$\text{avec } e^{\Phi(\mathcal{L}_M, \lambda)} = e^{\Phi(\mathcal{L}_M)} = R^2 \cos^2 \varphi \quad (1.57)$$

Comme :

$$\mathcal{L}_M = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \implies \varphi = 2 \text{Arctg}(e^{\mathcal{L}_M}) - \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne ($\varphi \in]-\pi/2, +\pi/2[, \cos \varphi > 0$) :

$$\Phi(\mathcal{L}_M) = 2 \text{Log} R + 2 \text{Log} \cos \varphi = 2 \text{Log} R + 2 \text{Log}(2 \sin(\text{Arctg} e^{\mathcal{L}_M})) \quad (1.58)$$

De (1.56), la sphère paramétrée par (\mathcal{L}_M, λ) est conforme. Calculons maintenant la deuxième forme fondamentale. On a :

$$n = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{vmatrix} \quad (1.59)$$

$$dF = \begin{vmatrix} dF_1 = -R \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - R \cos \varphi \sin \lambda d\lambda \\ dF_2 = -R \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + R \cos \varphi \cos \lambda d\lambda \\ dF_3 = R \cos \varphi d\varphi \end{vmatrix} \quad (1.60)$$

et :

$$d^2 F = \begin{vmatrix} d^2 F_1 = -R \cos \varphi \cos \lambda d\varphi^2 + 2R \sin \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda - R \cos \varphi \cos \lambda d\lambda^2 \\ d^2 F_2 = -R \cos \varphi \sin \lambda d\varphi^2 - 2R \sin \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda - R \cos \varphi \sin \lambda d\lambda^2 \\ d^2 F_3 = -R \sin \varphi d\varphi^2 \end{vmatrix} \quad (1.61)$$

D'où l'expression de $n \cdot d^2 F$ la deuxième forme fondamentale :

$$n \cdot d^2 F = \cos \varphi \cos \lambda \cdot d^2 F_1 + \cos \varphi \sin \lambda \cdot d^2 F_2 + \sin \varphi \cdot d^2 F_3 = -R d\varphi^2 - R \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

Soit :

$$-n \cdot d^2 F = R d\varphi^2 + R \cos^2 \varphi d\lambda^2 = e^{\Phi(\mathcal{L}_M)} \left(\frac{d\mathcal{L}_M^2}{R} + \frac{d\lambda^2}{R} \right)$$

On retrouve l'équation (1.54) avec : $\rho_1 = \rho_2 = R$, donc la sphère est une surface isotherme.

On laisse à titre d'exercice pour le lecteur d'étudier le cas de l'ellipsoïde de révolution. En général, les surfaces de révolution de \mathbb{R}^3 sont des surfaces isothermes.

1.7.3 Les Equations de Gauss-Weingarten et Gauss-Codazzi

1.7.3.1 Les équations de Gauss-Weingarten

Considérons la base du repère mobile $(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, n)$ et exprimons les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ des vecteurs de cette base dans la même base, en tenant compte que la surface est isotherme c'est-à-dire qu'on a l'équation (1.54) :

$$-n.d^2F = e^{\Phi(u,v)} \left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2} \right)$$

or de [6], la deuxième forme fondamentale s'écrit aussi :

$$n.d^2F = L.du^2 + 2Mdu.dv + N.dv^2 \quad (1.62)$$

avec :

$$\begin{aligned} L &= n. \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \\ M &= n. \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \\ N &= n. \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Or en utilisant (1.54), on obtient :

$$\begin{aligned} L &= -\frac{e^\Phi}{\rho_1} \\ M &= 0 \\ N &= -\frac{e^\Phi}{\rho_2} \end{aligned}$$

Commençons par calculer $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)$. Posons :

$$e_1 = \frac{\partial F}{\partial u} \quad (1.63)$$

$$e_2 = \frac{\partial F}{\partial v} \quad (1.64)$$

$$e_3 = n \quad (1.65)$$

On écrit :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 \quad (1.66)$$

Il faut déterminer les coefficients, a, b et c , d'où en utilisant (1.52) et (1.53) :

$$e_1 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = a.e_1.e_1 + b.e_1.e_2 + c.e_1.e_3 = a.e^\Phi + 0 + 0 = a.e^{\Phi(u,v)} \quad (1.67)$$

Or :

$$e_1 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} e^{\Phi(u,v)} = \frac{e^{\Phi(u,v)}}{2} \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} \quad (1.68)$$

Par suite :

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} = \frac{\Phi'_u}{2}$$

De même :

$$e_2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = a.e_2.e_1 + b.e_2.e_2 + c.e_2.e_3 = 0 + b.e^\Phi + 0 + 0 = b.e^{\Phi(u,v)} \implies b = e^{-\Phi} \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \quad (1.69)$$

Comme :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \right) = 0 \implies \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0 \quad (1.70)$$

Et :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 = 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial e^\Phi}{\partial v} = e^\Phi \cdot \Phi'_v \implies \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} e^\Phi \cdot \Phi'_v \quad (1.71)$$

D'où :

$$b = e^{-\Phi} \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = e^{-\Phi} \frac{-1}{2} e^\Phi \cdot \Phi'_v = \frac{-\Phi'_v}{2}$$

Enfin :

$$e_3 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = a.e_3.e_1 + b.e_3.e_2 + c.e_3.e_3 = 0 + 0 + c \implies c = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = L = -\frac{e^\Phi}{\rho_1} \quad (1.72)$$

Finalement :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\Phi'_u}{2} e_1 - \frac{\Phi'_v}{2} e_2 - \frac{e^\Phi}{\rho_1} e_3$$

On a aussi :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\Phi'_v}{2} e_2 - \frac{\Phi'_u}{2} e_1 - \frac{e^\Phi}{\rho_2} e_3 = -\frac{\Phi'_u}{2} e_1 + \frac{\Phi'_v}{2} e_2 - \frac{e^\Phi}{\rho_2} e_3 \quad (1.73)$$

Et :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 \implies \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = a_1 \cdot e^\Phi = \frac{1}{2} e^\Phi \cdot \Phi'_v \quad (1.74)$$

Par suite : $a_1 = \frac{\Phi'_v}{2}$, d'une part :

$$\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = a_2 \cdot e^\Phi$$

Comme :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 = 2 \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = e^\Phi \cdot \Phi'_v \quad (1.75)$$

Ce qui donne : $a_2 = \frac{\Phi'_v}{2}$, d'autre part :

$$e_3 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = a_3 = M = 0 \quad (1.76)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{\Phi'_v}{2} e_1 + \frac{\Phi'_v}{2} e_2 \quad (1.77)$$

Maintenant, on va déterminer $\frac{\partial n}{\partial u}$ et $\frac{\partial n}{\partial v}$. Comme $n \cdot n = n^2 = 1 \implies n \cdot \frac{\partial n}{\partial u} = 0$ c'est à-dire qu'on peut écrire :

$$\frac{\partial n}{\partial u} = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 \quad (1.78)$$

Alors :

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial n}{\partial u} = b_1 \cdot e^\Phi$$

Or :

$$L = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(n \cdot \frac{\partial F}{\partial u} \right) - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = L$$

Soit :

$$\frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = -L = \frac{e^\Phi}{\rho_1} \implies b_1 = \frac{1}{\rho_1} \quad (1.79)$$

Maintenant :

$$\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial n}{\partial v} = b_2 \cdot e^\Phi$$

Or :

$$M = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(n \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \right) - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0 = M$$

Soit :

$$\frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0 = b_2 \cdot e^\Phi \implies b_2 = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial u} &= \frac{1}{\rho_1} e_1 \\ \text{et de même } \frac{\partial n}{\partial v} &= \frac{1}{\rho_2} e_2 \end{aligned}$$

En résumé, on peut écrire sous forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_u}{2} & -\frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^\Phi}{\rho_1} \\ \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ -\frac{\Phi'_u}{2} & \frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^\Phi}{\rho_2} \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

Les relations (1.80) et (1.81) sont appelées les équations de Gauss-Weingarten ¹⁰.

Posons :

$$\sigma = \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix}$$

Alors, Les relations (1.80) et (1.81) peuvent être écrites sous la forme :

$$\sigma'_u = A \cdot \sigma \quad (1.82)$$

$$\sigma'_v = B \cdot \sigma \quad (1.83)$$

où A et B sont les matrices 3x3 ci-dessus.

1.7.3.2 Les équations de Gauss-Codazzi

Comme $\frac{\partial}{\partial v}(\sigma'_u) = \frac{\partial}{\partial u}(\sigma'_v)$, on obtient :

10. **Julius Weingarten** (1836 - 1910) : mathématicien allemand.

$$A'_v \sigma + A \cdot \sigma'_v = B'_u \sigma + B \cdot \sigma'_u \quad (1.84)$$

soit en tenant compte des relations (1.82) et (1.83) pour tout $\sigma \neq 0$:

$$A'_v - B'_u + A \cdot B - B \cdot A = 0 \quad (1.85)$$

Qu'on écrit sous la forme :

$$A'_v - B'_u + [A, B] = 0 \quad (1.86)$$

avec : $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$. L'ensemble des équations de (1.85) constitue les équations dites de Gauss-Codazzi¹¹.

Calculons $[A, B]$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{e^\Phi}{\rho_1 \rho_2} & \frac{\Phi'_v}{2} e^\Phi \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \\ \frac{e^\Phi}{\rho_1 \rho_2} & 0 & -\frac{\Phi'_u}{2} e^\Phi \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \\ \frac{\Phi'_v}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) & \frac{\Phi'_u}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.87)$$

Par suite, l'équation (1.85) donne après calculs les équations suivantes de Gauss-Codazzi :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{e^\Phi}{\rho_1 \rho_2} = 0 \\ \frac{2}{\rho_2^2} \cdot \frac{\partial \rho_2}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 0 \\ \frac{2}{\rho_1^2} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.88)$$

Dans le cas de l'exemple étudié, on a :

$$e^\Phi = R^2 \cos \varphi$$

$$\rho_1 = \rho_2 = R$$

et

$$u = \mathcal{L}_M; \quad d\mathcal{L}_m = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

On vérifie facilement les trois équations ci-dessus. On laisse au lecteur d'écrire ces équations pour l'ellipsoïde de révolution.

11. **Delfino Codazzi** (1824 – 1873) : mathématicien italien.

1.7.4 Les Surfaces Isothermes Discrètes

Dans cette section, on va présenter les surfaces isothermes discrètes. On considère le cas de l'ellipsoïde de révolution. Soit $E(a, e)$ un ellipsoïde de révolution de paramètres a et e respectivement le demi-grand axe et la première excentricité.

Un point $M(\varphi, \lambda)$ est défini par ses coordonnées tridimensionnelles dans un référentiel 3D donné par :

$$\begin{cases} X = N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases} \quad (1.89)$$

On considère que $(\varphi, \lambda) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$. Soient l, q deux entiers positifs non nuls, on pose :

$$\varphi_i = \frac{i\pi}{2l} \quad i = 0, 1, \dots, l \quad (1.90)$$

$$\lambda_j = \frac{j\pi}{q} \quad j = 0, 1, \dots, q \quad (1.91)$$

On note le point $M_{i,j} = M(\varphi_i, \lambda_j)$.

Définition 1.18 *Un quadrilatère $\mathcal{Q}_{i,j}$ de la surface discrète de l'ellipsoïde est formé par les sommets telsqu'on a le chemin fermé suivant :*

$$M_{i,j} \mapsto M_{i,j+1} \mapsto M_{i+1,j+1} \mapsto M_{i+1,j} \mapsto M_{i,j}.$$

$$\begin{array}{ccc} M_{i+1,j}(4) & \longleftarrow & M_{i+1,j+1}(3) \\ \downarrow & & \uparrow \\ M_{i,j}(1) & \longrightarrow & M_{i,j+1}(2) \end{array}$$

Définition 1.19 *La surface discrète de l'ellipsoïde est formée par l'ensemble des quadrilatères $\mathcal{Q}_{i,j}$.*

Etudions la position du quadrilatère $\mathcal{Q}_{i,j}$ par rapport à la surface de l'ellipsoïde E . Le quadrilatère $\mathcal{Q}_{i,j}$ est un morceau de plan passant par les quatre sommets

du quadrilatère ou encore passant par M_{ij} et engendré par le vecteur $M_{ij}M_{i,j+1}$ et le vecteur $M_{ij}M_{i+1,j}$. Pour simplifier les notations, appelons :

$$M_{i,j} = M_1 \quad (1.92)$$

$$M_{i,j+1} = M_2 \quad (1.93)$$

$$M_{i+1,j} = M_4 \quad (1.94)$$

Le quadrilatère \mathcal{Q}_{ij} est engendré donc par les vecteurs M_1M_2 et M_1M_4 , leurs composantes sont :

$$M_1M_2 = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{vmatrix} ; \quad M_1M_4 = \begin{vmatrix} X_4 - X_1 \\ Y_4 - Y_1 \\ Z_4 - Z_1 \end{vmatrix} \quad (1.95)$$

1.7.4.1 Equation du plan passant par \mathcal{Q}_{ij}

Soit $P(X, Y, Z)$ un point quelconque du plan en question, son équation vectorielle s'écrit :

$$M_1P = \begin{cases} X - X_1 = \alpha(X_2 - X_1) + \beta(X_4 - X_1) \\ Y - Y_1 = \alpha(Y_2 - Y_1) + \beta(Y_4 - Y_1) \\ Z - Z_1 = \alpha(Z_2 - Z_1) + \beta(Z_4 - Z_1) \end{cases} \quad (1.96)$$

L'équation du plan est obtenu en disant que les vecteurs M_1P , M_1M_2 , M_1M_4 sont coplanaires, donc le déterminant ci-dessous est nul :

$$\begin{vmatrix} X - X_1 & X_2 - X_1 & X_4 - X_1 \\ Y - Y_1 & Y_2 - Y_1 & Y_4 - Y_1 \\ Z - Z_1 & Z_2 - Z_1 & Z_4 - Z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.97)$$

ou encore :

$$\begin{vmatrix} X - X_1 & \Delta X_{12} & \Delta X_{14} \\ Y - Y_1 & \Delta Y_{12} & \Delta Y_{14} \\ Z - Z_1 & \Delta Z_{12} & \Delta Z_{14} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.98)$$

avec :

$$\Delta X_{12} = X_2 - X_1; \quad \Delta X_{14} = X_4 - X_1 \quad (1.99)$$

$$\Delta Y_{12} = Y_2 - Y_1; \quad \Delta Y_{14} = Y_4 - Y_1 \quad (1.100)$$

$$\Delta Z_{12} = Z_2 - Z_1; \quad \Delta Z_{14} = Z_4 - Z_1 \quad (1.101)$$

L'équation du plan sera de la forme :

$$A.X + B.Y + C.Z = H \quad (1.102)$$

où les coefficients A, B, C, H dépendent des $\Delta(\cdot)_{kl}$ ci-dessus.

Soit un point $T(\varphi, \lambda)$ de l'ellipsoïde de coordonnées (X_T, Y_T, Z_T) , avec $\varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1}$ et $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. La distance de T au plan du quadrilatère est donnée par :

$$Dist(T, \mathcal{Q}) = \frac{|H - A.X - B.Y - C.Z|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1.103)$$

1.7.4.2 Recherches de la distance maximale

Quand le point $T(\varphi, \lambda)$ se mouve sur la portion de l'ellipsoïde avec $\varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1}$ et $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$, on veut chercher le maximum de la distance du point T au quadrilatère \mathcal{Q}_{ij} . Pour cela, on étudie la fonction :

$$(\varphi, \lambda) \longrightarrow g(\varphi, \lambda) = (H - A.X - B.Y - C.Z)^2 \quad (1.104)$$

Calculons $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial g}{\partial \lambda}$:

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 2(H - A.X - B.Y - C.Z) \left(-A \cdot \frac{\partial X}{\partial \varphi} - B \cdot \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - C \cdot \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (1.105)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 2(H - A.X - B.Y - C.Z) \left(-A \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} - B \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right) = 0 \quad (1.106)$$

Comme $T \notin \mathcal{Q}_{ij}$ donc $H - A.X - B.Y - C.Z \neq 0$, par suite, on a :

$$A \cdot \frac{\partial X}{\partial \varphi} + B \cdot \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + C \cdot \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.107)$$

$$A \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} + B \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0 \quad (1.108)$$

Rappelons que :

$$d(N \cos \varphi) = -\rho \sin \varphi d\varphi$$

Donc :

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \cos \lambda \quad (1.109)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \sin \lambda \quad (1.110)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi \quad (1.111)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = -N \cos \varphi \sin \lambda \quad (1.112)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = N \cos \varphi \cos \lambda \quad (1.113)$$

Les équations (1.107) et (1.108) deviennent :

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{B}{A} \implies \cos \lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1.114)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{A} \cos \lambda \quad (1.115)$$

D'où :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1.116)$$

Note historique : La théorie des surfaces élaborée par Gauss était surtout influencée essentiellement par son travail comme géomètre topographe dans le Royaume de Hannover au Nord de l'Allemagne durant la période 1821-1825. En 1822, il présenta son mémoire intitulé " General solution of the problem of mapping parts of a given surface onto another given surface in such a way that image and pre-image become similar in their smallest parts", à la Société Royale des Sciences à Copenhague (Danemark) où il recevait un prix officiel.

Où se réside donc l'importance de son mémoire ? Ce dernier concernait l'étude du problème de cartographier une surface sur une autre en satisfaisant certaines propriétés. C'est le problème de base de la cartographie. Parmi les représentations planes dites abusivement projections sont celles qui conservent les angles ou représentations conformes. Elles ont un aspect pratique pour la navigation maritime. Ainsi, Gauss avait réussi à trouver une procédure pour déterminer toutes les représentations conformes localement pour les surfaces analytiques. Il ajouta dans le titre de son mémoire cette phrase en latin :

Ab his via sterniture ad maiora.

soit " **De là, le chemin de quelque chose plus importante est préparé** ". En effet, Gauss présentait en octobre 1827 une théorie générale des surfaces à travers son papier " Disquisitiones generales circa superficies curvas¹² " (Investigations about curved surfaces). L'important résultat de son papier est le théorème egregium dit encore le théorème merveilleux. Ce dernier dit que la courbure de Gauss est une propriété intrinsèque pour les surfaces de dimension 2. La courbure de Gauss dépend des composantes g_{ij} du tenseur métrique et de ses dérivées partielles premières et secondes par rapport aux coordonnées

12. Voir aussi (P. Dombrowski, 1979).

locales. (E. Zeidler,[10])

1.8 Exercices et Problèmes

Problème 1.4 On définit une surface (S) par les équations :

$$M(u,v) \begin{cases} X = u^2 + v \\ Y = u + v^2 \\ Z = uv \end{cases}$$

1. Calculer les composantes des vecteurs \mathbf{OM}'_u et \mathbf{OM}'_v .
2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (S) .
3. En déduire l'expression de ds^2 .
4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?
5. Calculer un vecteur normal de (S) .

Problème 1.5 On considère la surface (Γ) définie par les équations :

$$M(u,v) \begin{cases} X = \sin u \cdot \cos v \\ Y = \sin u \cdot \sin v \\ Z = \cos u + \text{Log} \text{tg} \frac{u}{2} + \psi(v) \end{cases}$$

avec $\psi(v)$ est une fonction définie de classe C^1 de v .

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ) .
2. Montrer que les courbes coordonnées $v = \text{constante}$ constituent une famille de courbes planes de (Γ) et que leur plan coupe (Γ) sous un angle constant.
3. Calculer les composantes des vecteurs \mathbf{OM}'_u et \mathbf{OM}'_v .
4. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ) .
5. En déduire l'expression de ds^2 .

6. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?
7. On suppose pour la suite que $\psi(v) = 0$, calculer un vecteur unitaire normal \mathbf{n} de Γ .
8. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

9. Calculer les coefficients L, M et N .
10. En déduire l'expression des courbures moyenne et totale.

Problème 1.6 Soit la surface (Γ) définie paramétriquement par :

$$M(u, v) \begin{cases} X = thu \cdot \cos v \\ Y = thu \cdot \sin v \\ Z = \frac{1}{chu} + \text{Logth} \frac{u}{2} \end{cases}$$

avec chu et thu sont respectivement le cosinus et la tangente hyperboliques définies par :

$$chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad thu = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

- Donner le domaine de définition de la surface (Γ) .
- Calculer les composantes des vecteurs \mathbf{OM}'_u et \mathbf{OM}'_v .
- Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ) .
- En déduire l'expression de ds^2 .
- Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?
- Calculer un vecteur unitaire normal \mathbf{n} de (Γ) .
- Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

8. Calculer les coefficients L, M et N .

9. Déterminer les courbures moyenne et totale.

Problème 1.7 Soit (Σ) une surface de \mathbb{R}^3 paramétrée par $OM(u, v)$ telle que sa première forme fondamentale s'écrit : $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

$$i) - \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

ii) - le vecteur $\frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est parallèle au vecteur normal N à la surface,

iii) - les côtés opposés de tout quadrilatère curviligne formés par les courbes coordonnées (u, v) ont même longueur.

2. Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que les courbes coordonnées de (Σ) forment un réseau de Tchebychev.¹³ Montrer que dans ce cas, on peut paramétrer la surface par (\tilde{u}, \tilde{v}) telle que ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2\cos\theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

où θ est une fonction de (\tilde{u}, \tilde{v}) . Montrer que θ est l'angle entre les courbes coordonnées \tilde{u}, \tilde{v} .

3. Montrer que l'expression de la courbure totale est donnée par :

$$K = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{v}}$$

4. On pose :

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \tilde{u} + \tilde{v} \\ \hat{v} &= \tilde{u} - \tilde{v} \end{aligned}$$

Montrer que ds^2 s'écrit avec les nouvelles variables (\hat{u}, \hat{v}) :

$$ds^2 = \cos^2\omega d\hat{u}^2 + \sin^2\omega d\hat{v}^2$$

avec $\omega = \theta/2$.

13. Pafnouti Tchebychev (1821 - 1894) : mathématicien russe.

CHAPITRE 2

REPRÉSENTATION D'UNE SURFACE SUR UNE AUTRE

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Représenter une surface sur une autre, c'est établir une correspondance entre un point a d'une surface ou portion de surface (σ), appelée modèle et un point A d'une surface ou portion de surface (Σ), appelée image.*

Le but poursuivi (cartographie mathématique) permet de restreindre l'étude aux cas où les hypothèses suivantes sont réalisées :

- a - la surface modèle est sans points singuliers; la correspondance peut introduire des points singuliers (ou points critiques), mais en dehors de ceux-ci, elle est bijective;
- b - en tout point où la correspondance est bijective, elle est continue (donc respecte les relations de voisinage).

Dans ces conditions, et mis à part les éventuels points critiques sur la surface image, représenter (σ) sur (Σ) consiste à définir une bijection B de (σ) sur (Σ), dans les cas particuliers où :

- la surface σ est sphérique ou ellipsoïdique ;
- la surface Σ est sphérique ou plane.

2.2 Éléments correspondants

Représenter la surface σ sur Σ consiste à définir une bijection B de $\sigma \Rightarrow \Sigma$ (**Fig. 2.1**) :

à $m(u,v) \in (\sigma) \Rightarrow M(U,V) \in (\Sigma)$ avec :

$(u,v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $U = U(u,v)$, $V = V(u,v)$ et $\mathbf{OM} = B(\mathbf{om})$ avec $(U,V) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. C'est aussi équivalent de définir une bijection \mathcal{B} de \mathcal{D} sur Ω . On suppose que l'application \mathcal{B} est différentiable et de jacobien non nul.

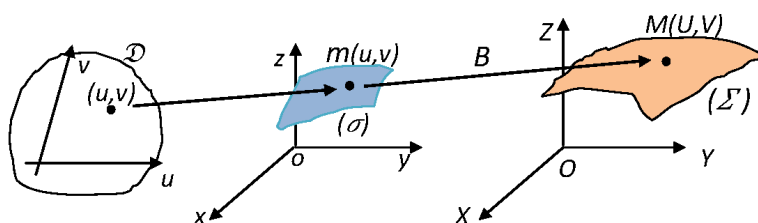


Fig. 2.1 Représentation plane

(u,v) les paramètres qui définissent la surface (σ) et $U = U(u,v), V = v(u,v)$ sont ceux de la surface (Σ) .

Les points $m(u,v)$ et $M(U,V)$ sont appelés points correspondants. Si le point m décrit une courbe (γ) sur (σ) , son image M décrit une courbe (Γ) , on dit que les courbes (γ) et (Γ) sont dites courbes correspondantes.

De même, on appelle tangentes correspondantes, les tangentes à deux courbes correspondantes en deux points correspondants (**Fig. 2.2**). L'angle de deux

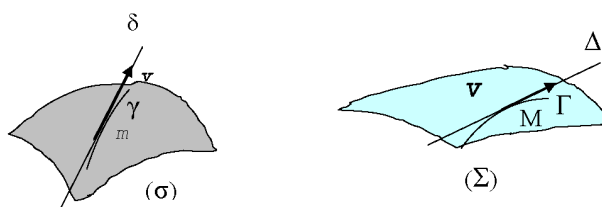


Fig. 2.2 Tangentes correspondantes

tangentes à deux courbes sur (σ) et l'angle des tangentes correspondantes sont dites angles correspondants (**Fig. 2.3**).

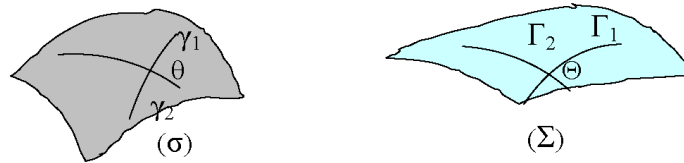


Fig. 2.3 Angles correspondants

2.3 Canevas

Les représentations sont différenciées par deux aspects qui sont :

- la nature des courbes coordonnées du modèle et celles de l'image qui définissent le caractère du canevas ;
- le type de l'altération : longueurs et/ou angles et/ou surfaces.

Définition 2.2 *On appelle canevas les images des courbes coordonnées du modèle.*

Pour passer au plan, on peut considérer le passage du modèle ellipsoïdique au plan ou celui du modèle ellipsoïdique au plan via le modèle sphérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'ellipsoïde} \implies \text{au plan} \\ \text{l'ellipsoïde} \implies \text{à la sphère} \implies \text{au plan} \end{array} \right.$$

Les représentations peuvent être classées selon la nature des courbes coordonnées (u, v) et (U, V) . Pour le modèle sphérique, les courbes coordonnées (u, v) déterminent toujours deux familles de courbes orthogonales, méridiens et parallèles ou pseudo-méridiens et pseudo-parallèles.

Soit DD' le diamètre de référence du modèle, le point D est le pivot de la représentation (**Fig. 2.4**).

La représentation est dite :

- directe, si le diamètre de référence est choisi sur la ligne des pôles PP' ;
- transverse si le diamètre de référence est perpendiculaire à PP' ;
- oblique : les autres cas, le pivot n'est ni pôles, ni sur l'équateur. Quant aux

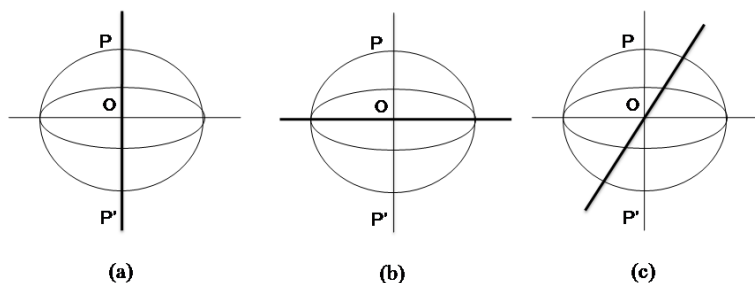


Fig. 2.4 Types de représentation

courbes coordonnées de l'image plane, elles sont :

- soit deux familles de droites perpendiculaires ; U, V sont alors les coordonnées cartésiennes X et Y du plan ;
- soit une famille de droites concourantes (Ω) et la famille de cercles orthogonaux (R) définissant des coordonnées polaires.

2.4 Les Représentations Cylindriques

Définition 2.3 *Les représentations cylindriques sont définies par les représentations ayant comme courbes coordonnées images les coordonnées cartésiennes X, Y correspondantes aux courbes coordonnées du modèle.*

Les représentations cylindriques quelconques ont pour équations sous la forme :

$$\begin{aligned} X = X(u) &\iff u = u(X) \\ Y = Y(v) &\iff v = v(Y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cas des représentations cylindriques directes : les paramètres du modèle sont φ, λ respectivement la latitude et la longitude et les équations de la représentations sont de la forme :

$$\begin{aligned} X = X(\varphi) &\iff \varphi = \varphi(X) & \text{ou} & & X = X(\lambda) &\iff \lambda = \lambda(X) \\ Y = Y(\lambda) &\iff \lambda = \lambda(Y) & & & Y = Y(\varphi) &\iff \varphi = \varphi(Y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Cas des représentations cylindriques transverses : les paramètres du modèle sont les coordonnées de Cassini-Soldner (L, H) et les équations sont de la forme :

$$\begin{aligned} X = X(L) &\iff L = L(X) & \text{ou} & & Y = Y(L) &\iff L = L(Y) \\ Y = Y(H) &\iff H = H(Y) & & & X = X(H) &\iff H = H(X) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En remplaçant L et H en fonction de φ et de λ , on obtient :

$$\begin{aligned} X = X(\varphi, \lambda) &\iff \varphi = \varphi(X, Y) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) &\iff \lambda = \lambda(X, Y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.5 Les Représentations Coniques et Azimutales

Définition 2.4 *Ce sont les représentations planes telles que les courbes coordonnées images sont définies par les coordonnées polaires R, Ω . Les courbes $R = \text{Constante}$ et $\Omega = \text{constante}$ sont les courbes correspondantes des courbes coordonnées u et v du modèle.*

Les équations générales de ces représentations sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega(u) &\iff u = u(\Omega) \\ R = R(v) &\iff v = v(R) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$u = \text{cte} \implies \Omega = \text{cte} \implies$ les images de $u = \text{cte}$ sont des droites concourantes.

$v = \text{cte} \implies R = \text{cte} \implies$ les images de $v = \text{cte}$ sont des arcs de cercles concentriques.

Parmi les représentations coniques, on trouve un groupe particulier de représentations où l'angle Ω est égal à l'angle du cercle méridien correspondant

soit l'azimut de la tangente au méridien au pôle D de la représentation, ces représentations sont dites **représentations azimutales** :

$$\begin{aligned} \Omega = Az &\iff Az = \Omega \\ R = R(v) &\iff v = v(R) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les représentations **coniques directes** ont leurs équations comme suit :

$$\begin{aligned} R = R(\varphi) &\iff \varphi = \varphi(R) \\ \Omega = \Omega(\lambda) &\iff \lambda = \lambda(\Omega) \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.6 Les Altérations

2.6.1 L'Altération Angulaire

Définition 2.5 On appelle altération angulaire la différence des deux angles correspondants soit :

$$\boxed{\Theta - \theta} \quad (2.8)$$

2.6.2 Le Module Linéaire dans une direction δ

Soit δ la direction de la tangente en un point donné m du modèle (σ) , s et S les abscisses curvilignes sur les 2 courbes correspondantes (γ) et (Γ) .

Définition 2.6 On appelle module linéaire dans la direction δ le rapport :

$$\boxed{m_\delta(u, v) = \frac{dS}{ds} = \frac{\|\mathbf{dM}(U, V)\|}{\|\mathbf{dm}(u, v)\|} = \frac{\|\mathbf{V}\|}{\|\mathbf{v}\|}} \quad (2.9)$$

où \mathbf{V} est l'image du vecteur \mathbf{v} unitaire dans la direction δ .

En utilisant les éléments de la 1ère forme fondamentale des surfaces (σ) et (Ω) , on a alors :

$$m_\delta^2 = \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}$$

soit :

$$m_\delta = \sqrt{\frac{EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}} \quad (2.10)$$

2.6.3 L'Altération Linéaire

Définition 2.7 On appelle altération linéaire dans la direction δ la quantité sans unité :

$$\boxed{\epsilon = m_\delta - 1} \quad (2.11)$$

2.6.4 Le Module aréolaire

Soient $da(\sigma)$ et $dA(\Sigma)$ des aires de domaines limités par des contours correspondants, alors :

Définition 2.8 Le module aréolaire ou rapport des aires est donné par :

$$\boxed{m_a = \frac{dA(\Sigma)}{da(\sigma)} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{eg - f^2}}} \quad (2.12)$$

2.7 Indicatrice de Tissot

Le Lemme de Tissot¹

Lemme 2.1 En 2 points correspondants, il existe au moins deux 2 vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 orthogonaux sur (σ) admettant deux vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 correspondants orthogonaux sur (Σ) (**Fig. 2.5**).

Le couple de directions correspondantes orthogonales à la fois sur la surface image (Σ) et sur la surface modèle (σ) sont appelées directions principales (au sens de Tissot).

1. Nicolas Auguste Tissot (1824 - 1897) : cartographe français.

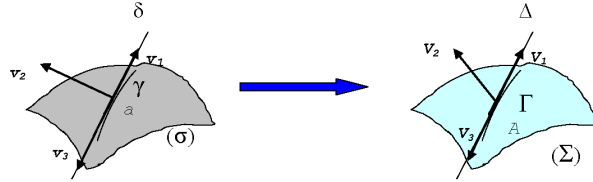


Fig. 2.5 Les directions principales

Soient δ_1 et δ_2 les directions principales sur (σ) . Les modules linéaires dans les directions δ_1 et δ_2 sont dits modules principaux :

$$m_{\delta_1} = m_1$$

$$m_{\delta_2} = m_2$$

Indicatrice de Tissot : Soient a un point de (σ) , dans le plan tangent à (σ) au point a et le repère orthonormé (a, du, dv) de vecteurs unitaires \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Soit b un point voisin de a tel que $\|\mathbf{ab}\| = 1$. Au repère (a, du, dv) correspond le repère orthonormé (A, dU, dV) sur la surface Σ , et au point b correspond le point B (**Fig. 2.6**).

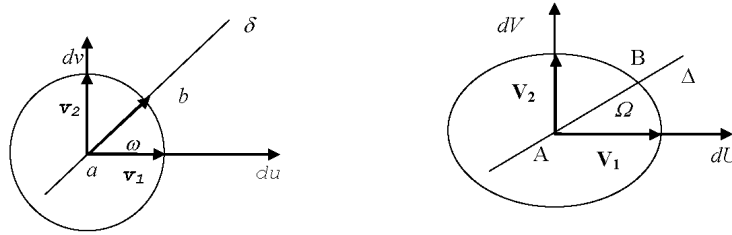


Fig. 2.6 Indicatrice de Tissot

Par définition, on a :

$$m_{\delta} = \frac{\|\mathbf{AB}\|}{\|\mathbf{ab}\|} = \|\mathbf{AB}\|$$

et :

$$m_1 = \frac{\|\mathbf{V}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|} = \|\mathbf{V}_1\|$$

$$m_2 = \frac{\|\mathbf{V}_2\|}{\|\mathbf{v}_2\|} = \|\mathbf{V}_2\|$$

Par les définitions des modules linéaires m_1 et m_2 , on peut écrire :

$$m_1 = \frac{\|\mathbf{AB}\|\cos\Omega}{\|\mathbf{ab}\|\cos\omega} = \frac{m_\delta\cos\Omega}{1.\cos\omega} \Rightarrow m_1\cos\omega = m_\delta\cos\Omega$$

$$m_2 = \frac{\|\mathbf{AB}\|\sin\Omega}{\|\mathbf{ab}\|\sin\omega} = \frac{m_\delta\sin\Omega}{1.\sin\omega} \Rightarrow m_2\sin\omega = m_\delta\sin\Omega$$
(2.13)

Les coordonnées du point B dans (A, dU, dV) sont donc :

$$dU = AB\cos\Omega = m_\delta.\cos\Omega = m_1.\cos\omega$$

$$dV = AB\sin\Omega = m_\delta.\sin\Omega = m_2.\sin\omega$$
(2.14)

Théorème 2.1 (Indicatrice de Tissot) *Quand le point b varie c'est-à-dire ω varie, le point B image de b décrit une ellipse d'équation :*

$$\boxed{\frac{dU^2}{m_1^2} + \frac{dV^2}{m_2^2} = 1}$$
(2.15)

*Cette ellipse est appelée **indicatrice de Tissot**.*

Elle est l'image du cercle de rayon unité dans le plan tangent au point a de (σ) . Les longueurs des demis grands et petits axes sont les modules principaux m_1 et m_2 . La longueur d'un demi-diamètre est le module linéaire dans la direction δ soit m_δ .

Dans le cas général, il existe un seul couple de vecteurs orthogonaux correspondants.

Corollaire 2.1 *S'il y'a une infinité de couples de vecteurs orthogonaux correspondants, l'indicatrice de Tissot est un cercle quelque soit la direction δ et le module linéaire est indépendant de la direction :*

$$\boxed{m_\delta = m_1 = m_2 = m}$$
(2.16)

L'indicatrice de Tissot est entièrement déterminée par les modules principaux et l'une des directions principales (placée par rapport à l'une des lignes coordonnées). Elle peut être définie par la donnée (en grandeur et en position) de deux demi-diamètres conjugués, images de deux directions rectangulaires sur le modèle. Si par exemple (u, v) sont des coordonnées orthogonales, les modules correspondants m_u et m_v correspondent à deux diamètres conjugués de l'indicatrice ; l'angle des deux demi-diamètres est Θ_0 avec :

$$\sin\Theta_0 = \sqrt{\frac{EF - G^2}{ef}} \quad (2.17)$$

On obtient les modules principaux à partir du théorème d'Apollonius :

$$m_1^2 + m_2^2 = m_u^2 + m_v^2 = \frac{E}{e} + \frac{G}{g} \quad (2.18)$$

$$m_1 \cdot m_2 = m_u \cdot m_v \sin\Theta_0 = \sqrt{\frac{EG - F^2}{eg}} \quad (2.19)$$

Démonstration du théorème d'Apollonius :

Lemme 2.2 *Deux diamètres d'une ellipse sont conjugués si leurs projections sur le grand axe coïncident avec les projections de deux diamètres perpendiculaires entre eux (ou conjugués) du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. La réciproque est vraie.*

Considérons une ellipse de paramètres (a, b) (Fig. :2.7) qu'on note $E(a, b)$. Soient les deux demi-diamètres OC et OD de l'ellipse. L'angle $n\hat{O}m$ est droit, alors les triangles OPC et DQO sont égaux, d'où $OP = nQ$ et $OQ = Pm$. On veut calculer $OC^2 + OD^2$:

$$OC^2 = OP^2 + PC^2 = OP^2 + \frac{b^2}{a^2}Pm^2, \quad OD^2 = OQ^2 + QD^2 = OQ^2 + \frac{b^2}{a^2}Qn^2$$

Par suite :

$$\begin{aligned} OC^2 + OD^2 &= OP^2 + \frac{b^2}{a^2}Pm^2 + OQ^2 + \frac{b^2}{a^2}Qn^2 \implies \\ OC^2 + OD^2 &= OP^2 + \frac{b^2}{a^2}Pm^2 + Pm^2 + \frac{b^2}{a^2}OP^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(OP^2 + Pm^2) \implies \\ OC^2 + OD^2 &= \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot a^2 = a^2 + b^2 \implies \\ &\boxed{OC^2 + OD^2 = a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

D'où le théorème d'Apollonius² :

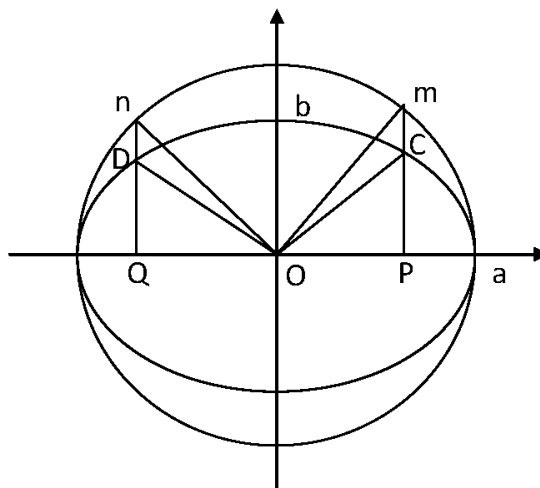


Fig. 2.7 Théorème d'Apollonius

Théorème 2.2 (Théorème d'Apollonius) : La somme des carrés des demi-diamètres conjugués d'une ellipse $E(a,b)$ est constante et vaut $a^2 + b^2$.

2.7.1 Altération Angulaire

L'altération angulaire est donnée par $\Omega - \omega$. Or d'après les coordonnées de B données par les équations (2.13), on a :

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}\omega$$

On calcule :

$$\frac{\operatorname{tg}\Omega - \operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\Omega + \operatorname{tg}\omega} = \frac{\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) \operatorname{tg}\omega}{\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) \operatorname{tg}\omega} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Or :

2. **Apollonius de Perge** (-262,-190) : mathématicien géomètre grec, connu pour ses travaux sur les coniques.

$$\frac{tg\Omega - tg\omega}{tg\Omega + tg\omega} = \frac{\sin(\Omega - \omega)}{\sin(\Omega + \omega)} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Si l'altération angulaire est nulle $\implies \Omega - \omega = 0 \implies \Omega = \omega$. D'où $m_2 = m_1$ et l'indicatrice de Tissot est un cercle. Par suite, on a l'équivalence :

$$\boxed{\text{Altération angulaire nulle} \Leftrightarrow m_2 = m_1 \text{ et pour toute } \delta \ m_\delta = m = \text{cte}} \quad (2.21)$$

La représentation est dite dans ce cas **conforme**.

2.7.2 Directions et lignes automécoïques

Si les modules principaux sont tels que : $m_2 < m_1$, il existe deux directions Δ_1 et Δ_2 (resp. D_1 et D_2) telles que :

$$m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} = 1 \quad (2.22)$$

Ces directions sur le modèle ou sur l'image sont dites automécoïques, ce sont les diamètres communs à l'indicatrice de Tissot et au cercle concentrique de rayon unité, elles sont symétriques par rapport aux directions principales.

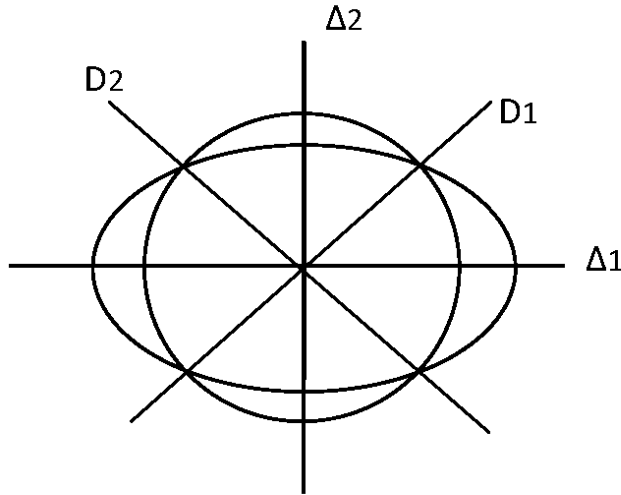


Fig. 2.8 Les Directions automocoïques

Les courbes admettant en tout point une tangente portée par une direction automécoïque sont dites lignes automécoïques - les lignes automécoïques sur le modèle et sur l'image sont des courbes correspondantes. Sur l'une ou l'autre des deux surfaces, elles sont les courbes intégrales d'une équation différentielle du premier degré.

En effet, soit Γ une courbe sur le modèle qui est automécoïque donc $m_\Gamma = 1 \implies m_\Gamma^2 = 1$ or :

$$m_\Gamma^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2} = 1$$

avec $U = U(u, v)$, $V = V(u, v)$. Le numérateur de la dernière fraction devient $E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2$ où $E' = E'(u, v)$, $F' = F'(u, v)$ et $G' = G'(u, v)$. Par suite, on obtient l'équation différentielle :

$$(E' - e)du^2 + 2(F' - f)dudv + (G' - g)dv^2 = 0$$

En éliminant les cas triviaux ($du = 0, dv = 0$), on obtient une équation sous la forme :

$$(E' - e) \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2(F' - f) \frac{du}{dv} + (G' - g) = 0$$

Quand l'équation précédente a des solutions réelles, on arrive à une équation différentielle du premier degré :

$$\frac{du}{dv} = H(v, u)$$

qu'il faut intégrer de façon à avoir $u = u(v)$.

CHAPITRE 3

LES REPRÉSENTATIONS PLANES EN CARTOGRAPHIE

Diverses représentations planes d'une sphère sont utilisées pour des buts non cartographiques :

- * les cristallographes se servent de la projection stéréographique pour représenter de façon commode les schémas cristallins ;
- * la représentation directe de Littrow (voir 5.2.5) est employée dans le compas solaire Abramus ;
- * la représentation de Lecoq a été imaginée pour une résolution graphique simple du relèvement en navigation.

Les chapitres suivants sont plus particulièrement consacrés à l'étude des représentations planes utilisées en cartographie. Avant de définir les critères permettant de classer les principales d'entre elles, il convient de préciser la notion "échelle".

3.1 Echelle nominale

S'il s'agit de cartes, la notion d'échelle est essentielle dans la pratique. La définition élémentaire qu'on en donne est : rapport d'homothétie entre le modèle

(terre) et l'image (la carte), elle n'est correcte que pour un plan, c'est-à-dire la représentation d'une toute petite portion de la surface terrestre, qu'on peut légitimement assimiler au plan tangent à un modèle sphérique, par exemple. Sinon, la définition élémentaire n'est qu'une première - souvent grossière - approximation. En effet, il n'y a pas homothétie entre le modèle et l'image, si ce n'est, dans certains cas, localement et pour des figures infiniment petites. L'échelle n'est, en aucun cas, uniforme dans toute l'étendue de la zone représentée (ou champ de la représentation), puisqu'il faut faire intervenir un rapport proportionnel au module linéaire, lui-même en général fonction non seulement du point considéré, mais de la direction.

Mais deux cartes, établies dans le même type de représentation et qui ne diffèrent entre elles que par l'échelle au sens ordinaire (et peu correct) du terme, sont deux figures semblables : elles ont au point de vue des déformations, les mêmes caractéristiques. L'étude des déformations est donc indépendante du choix de cette échelle.

Or il est toujours possible de faire subir à une carte quelconque une homothétie telle que l'échelle suivant une direction (automécoïque) soit égale à 1/1, au moins en un point, le plus souvent suivant une ou plusieurs lignes (automécoïques). Toute carte devrait donc mentionner de façon explicite non pas l'échelle mais l'échelle nominale : c'est-à-dire le facteur par lequel il faut multiplier le modèle de la terre pour que la correspondance entre le modèle ainsi modifié et la carte considérée présente au moins un point automécoïque, ou une ou plusieurs lignes automécoïques.

Il apparaît donc que, pour l'étude des représentations, il suffit d'adapter comme échelle nominale 1/1 : c'est ce que sous-entendu de façon souvent peu explicite l'expression souvent utilisée : les longueurs sont conservées sur telle ou telle ligne du modèle (il voudrait mieux dire : le long de telle ligne). L'expression " ligne d'échelle conservée " est un jargon peu admissible. Il apparaît aussi que pour une représentation plane, les dimensions du modèle sont indifférentes : on pourra toujours considérer un modèle ellipsoïdique tel que $a = 1$ ou un modèle sphérique de rayon unité, pour toute étude des déformations.

3.2 Classification d'après les caractères locaux

On désigne par caractères locaux d'une représentation plane ceux qui sont liés aux déformations, donc concernent le voisinage d'un point et peuvent être précisés par la seule indicatrice de Tissot. Les paragraphes suivants précisent le vocabulaire utilisé.

3.2.1 *Les Représentations conformes*

les représentations conformes sont celles dans lesquelles l'altération angulaire est nulle en tout point. La condition de conformité (condition nécessaire et suffisante) s'écrit : $m_1 = m_2$, égalité des modules principaux. Il faut noter que le caractère de conformité concerne les tangentes et non les cordes : il s'agit d'un caractère local, relatif à des figures infiniment petites (qui sont semblables sur l'image à celles du modèle) et non à des figures finies.

3.2.2 *Les Représentations équivalentes*

Les représentations équivalentes sont celles pour lesquelles le module aréolaire est égal à l'unité ; la condition d'équivalence (condition nécessaire et suffisante) s'écrit : $m_1 m_2 = 1$. Le domaine limité par l'indicatrice de Tissot et le domaine limité par le cercle ont des aires égales ou encore sont d'aires équivalentes.

Le caractère d'équivalence se conserve pour les domaines finis, dont l'aire est la somme intégrale d'aires infiniment petites. Ainsi une représentation équivalente d'une sphère de rayon unité est tout entière comprise dans un domaine plan limité par un contour fermé et dont l'aire intérieure est 4π : la condition est nécessaire mais n'est pas suffisante.

Une représentation d'ellipsoïde sur la sphère ou d'un modèle de la terre sur le plan ne peut être à la fois conforme et équivalence : la double condition $m_1 = m_2$ et $m_1 m_2 = 1$ entraîne $m_1 = m_2 = 1$ et ne peut être réalisée que si les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre.

3.2.3 Les Représentations aphylectiques

Les représentations qui ne sont ni conformes ni équivalentes sont dites aphylectiques (adjectif dont l'étymologie grecque donne la signification ne conserve rien). Dans ce cas, l'indicatrice de Tissot peut être une ellipse quelconque.

Certains caractères locaux concernent les lignes automécoïques, une représentation est dite :

- tangente si elle admet un parallèle automécoïque ;
- sécante si elle admet deux parallèles automécoïques.

(Plus précisément, la représentation est tangente si le parallèle automécoïque est double, limite de deux parallèles automécoïques).

Une représentation est dite équidistante si tous les méridiens sont automécoïques :

$$\forall \lambda, m_\lambda = 1 \quad (3.1)$$

Certaines représentations sont telles que tous les parallèles sont automécoïques (représentation de Bonne, représentation polyconique du *Coast and Geodetic Survey - USA*) :

$$\forall \varphi, m_\varphi = 1 \quad (3.2)$$

Elles ne portent pas de nom particulier.

3.3 Classification d'après les caractères globaux

3.3.1 Caractères du canevas

Le canevas est, par définition, l'ensemble des images planes des méridiens et des parallèles. Suivant la nature du canevas, on désigne la représentation par les adjectifs indiqués dans le tableau ci-après (**Fig. 3.1**) : Le signe \ni indique que les images des méridiens ne sont ni des droites ni des arcs de cercle : ces images sont omises sur les schémas ci-dessous : Les flèches \implies indique un caractère d'inclusion, avec la signification : " contient comme cas particulier ".

Représentation	Images	
	Des parallèles	Des méridiens
Cylindriques	Droites parallèles $\Delta(\varphi)$	Droites parallèles perpendiculaires aux $\Delta(\varphi)$
Méricylindrique	Droites parallèles	~
Conique	Arcs de cercles de centre S	Droites concourantes en S
Mériconique	Arcs de cercles concentriques	~
Azimutale (ou zénithale) Cas particulier: perspective (projection)	Cercles concentriques de centre S	Droites issues de S
Polyconique Cas particulier : circulaire	Cercles non concentriques centrés sur une droite, image d'un méridien -idem-	~ arcs de cercles

Fig. 3.1 Les caractères globaux

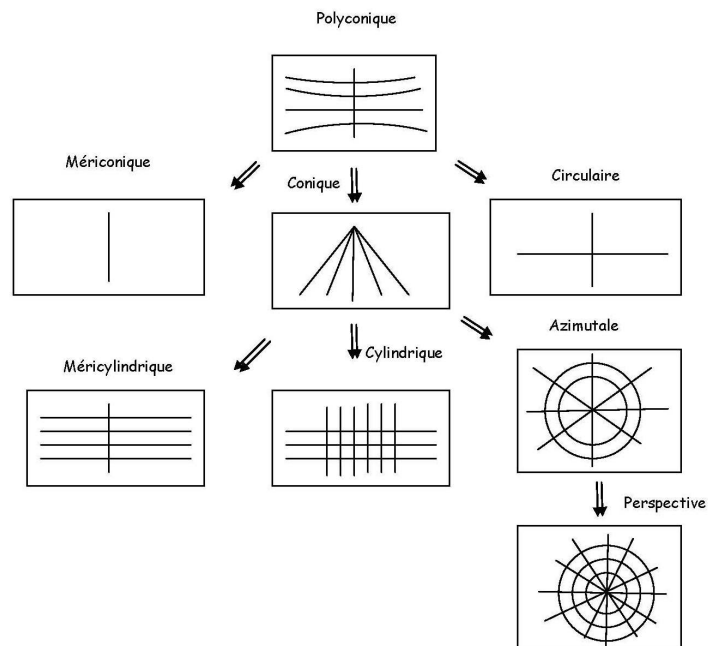


Fig. 3.2 Les caractères

3.3.2 Caractères d'orientation

Lorsque le modèle est une sphère, on peut définir un point a par deux coordonnées sphériques (x, y) , le plus souvent désignées sous le nom de coordonnées de Cassini-Soldner, à partir d'un grand cercle quelconque dit pseudo-équateur et de l'un des pôles, q de ce grand cercle. Les grands cercles issus de q sont dits pseudo-méridiens, les petits cercles de pôle q pseudo-parallèles. Si le pseudo-

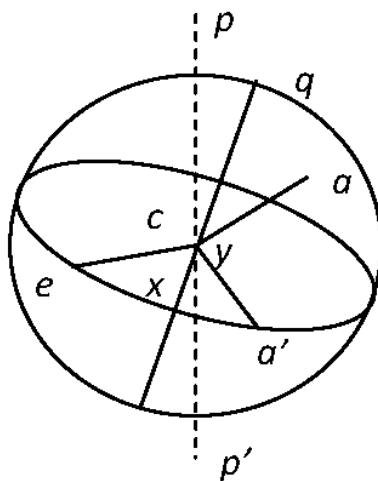


Fig. 3.3 Caractères d'orientation

méridien de a coupe en a' le pseudo-équateur, coupé en e par le pseudo-méridien origine, les coordonnées de Cassini-Soldner sont par exemple :

$$x = (\widehat{ce}, \widehat{ca'}), \quad y = (\widehat{ca'}, \widehat{ca}) \quad (3.3)$$

Le point q , les pseudo-méridiens et pseudo-parallèles peuvent jouer un rôle analogue au pôle p et aux méridiens et parallèles considérés dans le paragraphe précédent. On dit alors que q est le pivot de la représentation. Dans le paragraphe précédent (3.3.1), le pivot était implicitement l'un des pôles p ou p' .

Suivant le choix du pivot, la représentation est désignée par l'un des qualificatifs suivants :

Pivot	Représentation
- Un des pôles p ou p'	- Directe (ou polaire)
- Sur l'équateur	- Transverse (ou méridienne)
- Quelconque	- Oblique (ou sur l'horizon de tel lieu)

Tableau 3.1 Les types de pivot

On dit aussi aspect direct, aspect transverse, aspect oblique de telle ou telle représentation. Dans l'aspect direct d'une représentation azimutale, les longitudes sont conservées ; dans l'aspect oblique, ce sont les azimuts qui sont représentés par des angles égaux : d'où le nom d'azimutale.

Si le modèle qu'on cherche à représenter est un ellipsoïde, bien qu'on ne puisse, comme pour la sphère, faire appel à un ensemble de courbes jouant le rôle analogue aux méridiens et aux parallèles, on conserve néanmoins, par analogie, les qualificatifs précédents, on peut d'ailleurs considérer qu'on se ramène au cas de la sphère en imaginant une double représentation : représentation de l'ellipsoïde sur la sphère, puis de celle-ci sur le plan.

3.3.3 Etude d'une représentation plane

Une représentation plane sera entièrement déterminée par la donnée d'un certain nombre de caractères compatibles choisis parmi les caractères définis en 3.2 et 3.3.

On peut ensuite être amené à considérer le champ de la représentation et imposer d'autres conditions, par exemple une valeur maximale de la valeur absolue de l'altération linéaire.

L'étude des représentations planes peut être entreprise. On peut, par exemple :

- a - fixer la nature du canevas, et l'orientation ;
 - b - imposer un caractère local (conformité, équivalence,...) ;
 - c - préciser la ou les lignes automécoïques ;
- ou bien :
- d - fixer l'orientation et les lignes automécoïques ;
 - e - en déduire le caractère local (conformité, équivalence,...) ;

f - étudier le canevas.

A titre d'exemple, une représentation est entièrement déterminée par les conditions suivantes :

- * elle est directe et mériconique ;
- * un méridien est automécoïque et a pour image une droite ;
- * tous les parallèles sont automécoïques ;
- * l'image du parallèle de latitude φ_0 est un arc de cercle et de rayon R_0 .

Ces conditions (compatibles) entraînent de façon immédiate à la conclusion : la représentation est équivalente. Il faut ensuite étudier les images des méridiens, préciser l'orientation de l'indicatrice de Tissot, les modules principaux,...

L'étude d'une représentation peut être également faite à partir des données initiales purement analytiques :

- on peut imposer par exemple $X = X(\lambda)$ et chercher à déterminer une fonction f telle que si $Y = f(\varphi)$, la représentation présente tel ou tel caractère local ;
- on peut définir une représentation conforme en associant à tout point du modèle un affixe complexe z et son image l'affixe Z : toute fonction analytique $Z(z)$ définit une représentation conforme (voir 4ème chapitre ci-après).

3.3.4 Cas particuliers des représentations conformes

Dans une représentation conforme, le module linéaire est indépendant de la direction : il existe des courbes n'ayant aucun point d'intersection deux à deux, telles que $m = \text{constante}$. Ces courbes sont dites lignes isométriques ou isomètres. Leurs trajectoires orthogonales sont dites isomorphes. On peut, naturellement, définir le modèle et l'image en utilisant ces deux familles de courbes et leurs images comme lignes coordonnées. Par exemple : les isomètres sont les courbes $u = \text{constante}$, les isomorphes les courbes $v = \text{constante}$, alors le module linéaire m est fonction d'une seule variable à savoir u . $m(u)$ est essentiellement positive, elle admet un minimum $m(u_0)$ correspond à $u = u_0$. L'isomètre correspondant est dit isomètre stationnaire c'est-à-dire :

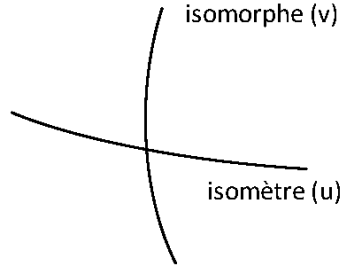


Fig. 3.4 Les isomètres et les isomorphes

$$\left(\frac{dm}{du}\right)_{u=u_0} = 0 \quad (3.4)$$

Isomètres et isomorphes étant sur les deux surfaces des courbes correspondantes, les coordonnées (u, v) et (U, V) peuvent être choisies de telle façon que :

$$\frac{dU}{du} = \frac{dV}{dv} \quad (3.5)$$

Il apparaît alors qu'on obtient une autre représentation homothétique de la précédente, en multipliant U et V par un facteur k ; le module linéaire est lui-même multiplié par k .

Si, initialement, la valeur stationnaire du module était égale à 1, (donc $m(u) > 1$), et qu'on choisisse $k \ll 1$, la valeur absolue de l'altération linéaire est déterminée.

Par exemple, si le champ de la représentation s'étend de u_0 à u_M , $m(u)$ varie de $m(u_0) = 1$ à $m(u_M) = M$, on peut prendre :

$$k = \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (3.6)$$

Le nouveau module linéaire varie de $\frac{1}{\sqrt{M}}$ à \sqrt{M} et l'altération linéaire est minimisée en valeur absolue dans l'ensemble du champ.

k est souvent appelé facteur de réduction d'échelle, expression qu'on peut avantageusement remplacer par facteur d'homothétie. Il revient au même d'ailleurs de considérer qu'on a multiplié les dimensions du modèle par ce facteur k :

ce procédé est souvent utilisé dans le cas de double représentation ; la sphère intermédiaire sur laquelle on représente d'abord l'ellipsoïde, est choisie avec un rayon non plus égal à 1, mais à $k < 1$.

CHAPITRE 4

LES REPRÉSENTATIONS PLANES ET LES FONCTIONS ANALYTIQUES

4.1 Rappels Mathématiques

On considère le plan complexe tel que à un point de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et on peut écrire :

$$z = |z|e^{i \cdot \arg(z)} = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))) \quad (4.1)$$

où $|z|$ est le module et $\arg(z)$ est l'argument du nombre complexe z défini à $2k\pi$ avec :

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}(\arg(z)) &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1.1 Logarithme Complexe

Soit t un nombre complexe donné, on cherche tous les nombres complexes z tels que $e^z = t$. Il n'en existe que si $t \neq 0$. Supposons $t \neq 0$, on a alors :

$z = x + iy \implies e^z = t \implies e^x e^{iy} = t = |t| e^{i \cdot \arg(t)} \implies x = \text{Log } |t|$ et $y = \arg(t)$ à $2k\pi$ près

On a donc :

$$z = x + iy = \text{Log } |t| + i \cdot \arg(t)$$

Par définition, on pose :

$$\boxed{z = \text{Log } t = \text{Log } |t| + i \cdot \arg(t)} \quad (4.3)$$

Définition 4.1 On appelle détermination de $\text{Log } t$ dans un ouvert connexe \mathcal{D} du plan complexe toute fonction g continue de t définie dans \mathcal{D} et telle que :

$$\boxed{\forall t \in \mathcal{D}, e^{g(t)} = t} \quad (4.4)$$

4.2 Fonction analytique

A tout nombre complexe $z = x + iy$ on peut lui faire correspondre un nombre complexe $Z = X + iY$ par l'intermédiaire d'une fonction f . On note, en appelant P et Q les parties réelle et imaginaire de f :

$$Z = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (4.5)$$

Cette correspondance entre z et Z définit une représentation d'un plan (p) sur un plan (P) dans laquelle le point A d'affixe Z du plan (P) est l'image d'un point a d'affixe z du plan (p). L'extension des propriétés concernant les limites

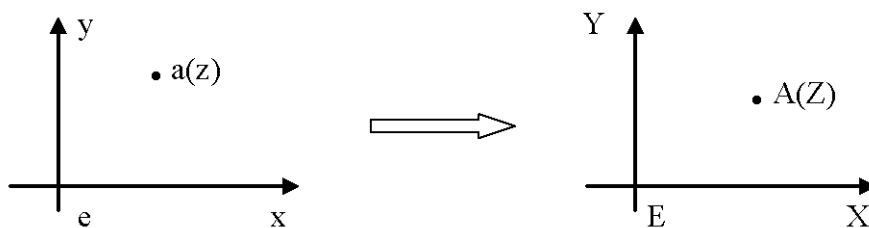


Fig. 4.1 Correspondance

et la continuité, pour la fonction f , se déduit immédiatement des propriétés analogues concernant les fonctions P et Q des deux variables (x, y) .

Pour étendre à la fonction f la notion de dérivée, il faut étudier la limite, lorsque $z \rightarrow 0$, du rapport $\frac{dZ}{dz}$, qui s'écrit :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dX + idY}{dx + idy} = \frac{P'_x dx + P'_y dy + i(Q'_x dx + Q'_y dy)}{dx + idy} = \frac{(P'_x + iQ'_x)dx + (P'_y + iQ'_y)dy}{dx + idy}$$

Ce rapport dépend en général de $\frac{dy}{dx}$, sa limite dépend de la manière dont dz tend vers zéro, ou encore de la façon dont le point a' d'affixe $z + dz$ tend vers le point a d'affixe z : si a' tend vers a en décrivant une spirale dont a est le point asymptotique, par exemple, la limite n'existe pas.

Mais le rapport $\frac{dZ}{dz}$ est une fonction homographe de (dx, dy) . La limite quand $dz \rightarrow 0$, est indépendante de la façon dont $dz \rightarrow 0$, c'est-à-dire dont dx et dy tendent (indépendamment) vers 0, si :

$$P'_x + iQ'_x = \frac{P'_y + iQ'_y}{i} \quad (4.6)$$

C'est-à-dire si :

$$\boxed{P'_x = Q'_y \quad \text{et} \quad P'_y = -Q'_x} \quad (4.7)$$

ou en revenant à X et Y :

$$\boxed{\text{Conditions de Cauchy} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{array} \right.} \quad (4.8)$$

relations connues sous le nom de **conditions de Cauchy**¹. Lorsque ces conditions sont satisfaites, la fonction f admet, en tout point de son domaine de définition, une dérivée notée :

$$\boxed{f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{dZ}{dz} = P'_x + iQ'_x = Q'_y - iP'_y} \quad (4.9)$$

La fonction f est dite **analytique**.

1. **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) : mathématicien français.

4.2.1 Autre définition de la fonction analytique

Soit $F(x, y)$ une fonction complexe donc une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que F soit différentiable entraîne que :

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy \quad (4.10)$$

On pose :

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned}$$

qui sont 2 fonctions différentiables en x et y , d'où :

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ d\bar{z} &= dx - idy \end{aligned}$$

Par suite :

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad (4.11)$$

$$dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \quad (4.12)$$

On les remplace dans l'équation (4.10), on obtient :

$$dF(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

En remplaçant x par $(z + \bar{z})/2$ et y par $(z - \bar{z})/2i$, $F(x, y)$ devient une fonction $G(z, \bar{z})$, ce qui donne en posant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ dF(x, y) = dG(z, \bar{z}) &= \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial z} dz + \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned} \quad (4.13)$$

On considère maintenant le cas où la fonction F est analytique. De l'équation précédente, on a :

$$dF(x, y) = dG(z, \bar{z}) = \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial z} dz + \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = F'(z) dz$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (4.14)$$

On vérifie bien si ce terme là est nul :

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial y} \right) \quad (4.15)$$

On introduit la notation suivante :

$$F(x, y) = G(z, \bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y) = P + iQ$$

On a donc de (4.15) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(P+iQ)}{\partial x} + i \frac{\partial(P+iQ)}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Comme la fonction F ou G est analytique, et en utilisant les conditions de Cauchy (4.7), on a finalement :

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (4.16)$$

Définition 4.2 Une fonction $f(z, \bar{z})$ est analytique en z si elle ne dépend que de z soit :

$$\boxed{\frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0} \quad (4.17)$$

Avec les notations de l'équation (4.5), au point a du plan (p), quelle que soit la direction du vecteur $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}$, d'affixe dz , on peut écrire :

$$dZ = f'(z_0) dz = |f'(z_0)| e^{i \cdot \arg f'(z_0)} dz$$

relation qui exprime que le vecteur $\mathbf{A}_0 \mathbf{A}$ se déduit du vecteur $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}$ par une similitude, dont le rapport est $|f'(z_0)|$ et l'angle $\arg f'(z_0)$.

La représentation du plan (p) sur le plan (P) est donc conforme. On peut écrire :

$$dS = |dZ| \quad \text{et} \quad ds = |dz| \quad (4.18)$$

Le module linéaire de la représentation est :

$$m = \left| \frac{dZ}{dz} \right|$$

$$\text{et } \arg \left(\frac{dZ}{dz} \right) = \text{Arctg} \left(\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x}} \right) = \alpha \quad (4.19)$$

α angle de la tangente en A_0 à l'image y_0 de la droite $y = y_0$ du plan (p) (**Fig. 4.2**). En effet, cette image est définie en fonction du paramètre x , par :

$$\begin{cases} X = X(x, y_0) \\ Y = Y(x, y_0) \end{cases} \quad (4.20)$$

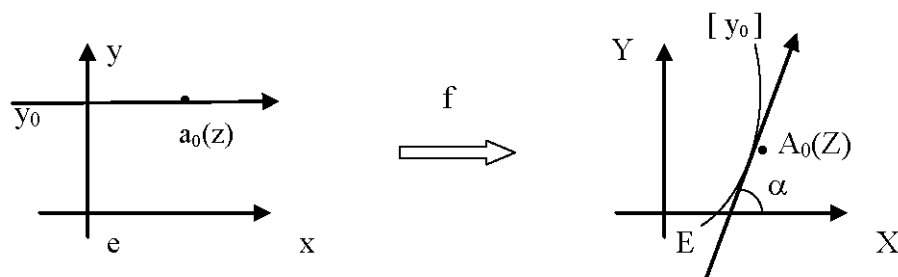


Fig. 4.2 Image de $y = y_0$

Les conditions de Cauchy données par (4.8) se traduisent aussi en disant que les fonctions P et Q sont des fonctions harmoniques, c'est-à-dire qu'elles satisfont chacune l'équation de Laplace :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}} \quad (4.21)$$

On démontre les propriétés suivantes (*J. Dieudonné*², [2]) :

- si f est une fonction analytique, elle admet des dérivées de tous les ordres : elle est donc développable en série entière en tout point de son domaine de définition ;

2. **Jean Dieudonné** (1906 - 1992) : mathématicien français.

- une fonction analytique est déterminée dans tout son domaine d'existence, si elle est définie dans une région, aussi petite qu'on la suppose, entourant un point a ; ou même tout le long d'un arc de courbe, aussi petit qu'on le suppose, aboutissant au point a .

En effet, la connaissance de f au voisinage de a permet (théoriquement tout au moins) de former la suite des dérivées de f au point a , donc, d'écrire son développement en série de Taylor. Si b est un point intérieur au cercle de convergence de cette série, on peut alors calculer les dérivées successives de f au point b , et ainsi de suite. L'opération est dite prolongement analytique de f .

4.3 Exercices et Problèmes

Exercice 4.1 Soit a un nombre complexe tel que $|a| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1 - Montrer que la fonction homographique :

$$z \longrightarrow w = e^{i\alpha} \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

est une représentation conforme du disque $|z| < 1$ sur lui-même (montrer que $|w| < 1$).

2 - Quelle est l'image de a .

3 - Chercher les points fixes ($w(z) = z$) de la représentation suivant les valeurs de a .

CHAPITRE 5

REPRÉSENTATION CONFORME D'UNE SURFACE SUR UNE AUTRE

Conformal mappings play also a fundamental role in modern physics, namely, in string theory and conformal quantum field theory.

(E. Zeidler¹, [10])

5.1 Etablissement de la condition pour une représentation conforme

La représentation d'une surface modèle (σ) sur une surface image (Σ) est définie en établissant une correspondance entre les coordonnées curvilignes $a(u, v)$ de (σ) et $A(U, V)$ de (Σ) :

$$U = U(u, v) \tag{5.1}$$

$$V = V(u, v) \tag{5.2}$$

1. E. Zeidler (1905 - 2016) : éminent physicien allemand.

Le module linéaire est alors :

$$m(u, v) = \frac{dS}{ds} \Rightarrow m^2(u, v) = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{EdU^2 + 2FdU.dV + GdV^2}{edu^2 + 2fdu.dv + gdv^2}$$

En remplaçant dU et dV en fonction de du et dv en utilisant (5.1) et (5.2), on peut écrire dS^2 sous la forme :

$$dS^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du.dv + \mathcal{G}dv^2 \quad (5.3)$$

Soient le plan tangent à (σ) au point $a(u, v)$, et deux courbes (γ_1) et (γ_2) passant par a dont les tangentes respectivement à (γ_1) et (γ_2) appartiennent au plan tangent. $(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v})$ est une base du plan tangent.

Soit la direction de la tangente à (γ_1) de direction :

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} dv$$

De même, soit la direction de la tangente à (γ_2) de direction :

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} \delta v$$

La forme fondamentale de (σ) est :

$$ds^2 = edu^2 + 2fdu.dv + gdv^2$$

En notant Ω l'angle des deux tangentes en a , on a la relation :

$$(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} dv) \cdot (\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} \delta v) = \|\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} dv\| \cdot \|\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} \delta v\| \cdot \cos \Omega$$

En posant :

$$ds = \|\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} dv\| \Rightarrow ds^2 = edu^2 + 2fdu.dv + gdv^2$$

et :

$$\delta s = \|\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} \delta v\| \Rightarrow \delta s^2 = e\delta u^2 + 2f\delta u.\delta v + g\delta v^2$$

Ce qui donne :

$$\cos \Omega = \frac{edu\delta u + f(du\delta v + \delta u dv) + g\delta v\delta v}{ds\delta s}$$

On pose :

$$\begin{cases} p = \frac{dv}{du} \Rightarrow dv = pdu \\ q = \frac{\delta v}{\delta u} \Rightarrow \delta v = q\delta u \end{cases} \quad (5.4)$$

D'où :

$$\cos\Omega = \frac{edu\delta u + f(du.q\delta u + \delta u.pdu) + g.pdu.q.\delta u}{ds\delta s}$$

ou encore :

$$\cos\Omega = \frac{edu\delta u + f(p+q)du\delta u + gpqdu\delta u}{ds\delta s}$$

En utilisant les notations p et q , on a :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (e + 2fp + gp^2)du^2 \\ \delta s^2 &= (e + 2fq + gq^2)\delta u^2 \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\cos\Omega = \frac{e + f(p+q) + gpq}{\sqrt{e + 2fp + gp^2}\sqrt{e + 2fq + gq^2}}} \quad (5.5)$$

Sur la surface image (Σ), l'expression de dS^2 donnée par l'équation (5.3) :

$$dS^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du.dv + \mathcal{G}dv^2$$

Soit Ω' l'angle des tangentes correspondantes à (γ_1) et (γ_2) , on a aussi :

$$\boxed{\cos\Omega' = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{F}(p+q) + \mathcal{G}pq}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}p + \mathcal{G}p^2}\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}q + \mathcal{G}q^2}}} \quad (5.6)$$

Il y'a conservation des angles si $\forall p, q$ on a :

$$\boxed{\cos\Omega = \cos\Omega'} \quad (5.7)$$

En particulier si :

$$q = \frac{\delta v}{\delta u} = 0$$

c'est-à-dire, on prend Ω l'angle d'une tangente avec la courbe coordonnée $v = \text{constante} \Rightarrow \delta v = 0$ et cela suffit. Alors l'équation (5.7) devient $\forall p = \frac{dv}{du}$:

$$\frac{e + fp}{\sqrt{e^2 + 2efp + egp^2}} = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{F}p}{\sqrt{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{F}p + \mathcal{E}\mathcal{G}p^2}}$$

Elevant au carré, les deux membres de l'équation précédente s'écrivent :

$$1 + \frac{f^2 p^2 - e g p^2}{e^2 + 2e f p + e g p^2} = 1 + \frac{\mathcal{F}^2 p^2 - \mathcal{E} \mathcal{G} p^2}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E} \mathcal{F} p + \mathcal{E} \mathcal{G} p^2}$$

En éliminant le 1 et simplifiant par $p \neq 0$, on obtient :

$$\frac{f^2 - e g}{e^2 + 2e f p + e g p^2} = \frac{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E} \mathcal{G}}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E} \mathcal{F} p + \mathcal{E} \mathcal{G} p^2}$$

Si :

$$f^2 - e g = 0 \Rightarrow \mathcal{F}^2 - \mathcal{E} \mathcal{G} = 0$$

On a donc :

$$\cos \Omega = \cos \Omega' = \pm 1$$

Maintenant on suppose que :

$$f^2 - e g \neq 0 \Rightarrow \mathcal{F}^2 - \mathcal{E} \mathcal{G} \neq 0$$

On doit avoir $\forall p$ le rapport :

$$\frac{e^2 + 2e f p + e g p^2}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E} \mathcal{F} p + \mathcal{E} \mathcal{G} p^2}$$

égal à $\frac{f^2 - e g}{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E} \mathcal{G}}$.

Pour cela, il faudra donc $\forall p$:

$$\boxed{\frac{e^2 + 2e f p + e g p^2}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E} \mathcal{F} p + \mathcal{E} \mathcal{G} p^2} = \frac{f^2 - e g}{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E} \mathcal{G}} = \mu^2(u, v)} \quad (5.8)$$

Ce qui donne (avec $\mu > 0$) :

$$\begin{aligned} e^2 + 2e f p + e g p^2 = \mu^2 \mathcal{E}^2 + 2\mu^2 \mathcal{E} \mathcal{F} p + \mu^2 \mathcal{E} \mathcal{G} p^2 &\Rightarrow e^2 - \mu^2 \mathcal{E}^2 + 2p(e f - \mu^2 \mathcal{E} \mathcal{F}) \\ &+ p^2(e g - \mu^2 \mathcal{E} \mathcal{G}) = 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} e^2 - \mu^2 \mathcal{E}^2 = 0 \Rightarrow \mu^2 = \frac{e^2}{\mathcal{E}^2} \\ e f - \mu^2 \mathcal{E} \mathcal{F} = 0 \Rightarrow \mu^2 = \frac{e f}{\mathcal{E} \mathcal{F}} \\ e g - \mu^2 \mathcal{E} \mathcal{G} = 0 \Rightarrow \mu^2 = \frac{e g}{\mathcal{E} \mathcal{G}} \end{cases}$$

Comme $\frac{e}{\mathcal{E}} \neq 0$, on a :

$$\frac{e}{\mathcal{E}} = \frac{f}{\mathcal{F}} = \frac{g}{\mathcal{G}} \Rightarrow \mu^2 = \frac{f^2 - e g}{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E} \mathcal{G}}$$

La condition (5.8) est vérifiée si et seulement si :

$$\frac{e}{\mathcal{E}} = \frac{f}{\mathcal{F}} = \frac{g}{\mathcal{G}} \Rightarrow \cos\Omega = \cos\Omega' \Rightarrow \begin{cases} \text{la représentation est conforme} \\ \text{et le module linéaire } m = m(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\mu(u, v)}} \\ \text{est indépendant de la direction} \end{cases} \quad (5.9)$$

- Si les coordonnées (u, v) sont orthogonales ($f = 0$), les deux conditions précédentes à gauche deviennent :

$$\mathcal{F} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{E}}{e} = \frac{\mathcal{G}}{g} \quad (5.10)$$

- Si les coordonnées (u, v) sont symétriques, alors $e = g$, les conditions de conformité s'écrivent :

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{E} = \mathcal{G} \implies \text{les coordonnées } U \text{ et } V \text{ sont symétriques} \quad (5.11)$$

Or :

$$\begin{cases} \mathcal{F} = 0 \implies U'_u U'_v + V'_u V'_v = 0 \\ \mathcal{E} = \mathcal{G} \implies U'^2_u + V'^2_u = U'^2_v + V'^2_v \end{cases} \quad (5.12)$$

De la première relation de (5.12), on tire en supposant $V'_v \neq 0$:

$$V'_u = -\frac{U'_u U'_v}{V'_v} \quad (5.13)$$

D'où :

$$U'^2_u \left(1 + \frac{U'^2_v}{V'^2_v}\right) = U'^2_v + V'^2_v \Rightarrow (U'^2_u - V'^2_v)(U'^2_v + V'^2_v) = 0$$

Soit :

$$\boxed{U'_u = \pm V'_v} \quad (5.14)$$

L'équation (5.13) donne :

$$\boxed{U'_v = \mp V'_u} \quad (5.15)$$

Les équations (5.14), (5.15) sont, pour les fonctions U et V , les conditions de Cauchy.

La correspondance entre le plan des (u, v) et celui des (U, V) est une représentation conforme (*G. Julia*, [3]) et on peut poser :

$$Z = U + iV, \quad z = u + iv$$

Toute fonction analytique f définit une représentation conforme de (σ) sur (Σ) .

(u, v) et (U, V) étant des coordonnées symétriques, les éléments linéaires ds et dS s'écrivent :

$$ds^2 = h^2(u, v)(du^2 + dv^2) \quad \text{ou} \quad ds = |h(u, v)||dz|$$

et :

$$dS^2 = H^2(U, V)(dU^2 + dV^2) \quad \text{ou} \quad dS = |H(U, V)||dZ|$$

Alors le module linéaire est donné par :

$$m = \left| \frac{H(U, V)}{h(u, v)} \right| \left| \frac{dZ}{dz} \right| \quad (5.16)$$

L'argument de $\frac{dZ}{dz}$ s'interprète d'une manière analogue à ce qui se passe dans la représentation d'un plan sur un plan.

Si en particulier, la surface image est un plan :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2$$

et :

$$m = \left| \frac{1}{h(u, v)} \right| \left| \frac{dZ}{dz} \right| \quad (5.17)$$

Si la surface modèle est un modèle de la terre, on a :

$$ds^2 = r^2(d\lambda^2 + dL^2) \quad (5.18)$$

- pour un ellipsoïde : $r = N \cos \varphi$ et L est la latitude isométrique ;

- pour une sphère : $r = a \cos \varphi$ et L est la latitude croissante ou latitude de Mercator.

Pour une représentation plane conforme, le module linéaire est :

$$m = \frac{1}{r} \left| \frac{dZ}{dz} \right| \quad (5.19)$$

avec $z = \lambda + iL$ et $Z = X + iY$ ou $z = L + i\lambda$ et $Z = Y + iX$. Dans ce dernier cas, on a :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\partial Y}{\partial L} + i \frac{\partial X}{\partial L} \quad (5.20)$$

Donc :

$$\arg\left(\frac{dZ}{dz}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{\frac{\partial X}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial L}}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{dX}{dY}\right) \quad (5.21)$$

qui n'est autre que le gisement de l'image du méridien.

5.2 Exemples

Posons :

$$z = \lambda + iL \quad (5.22)$$

$$Z = X + iY \quad (5.23)$$

5.2.1 La représentation $Z = kz$

Elle définit toutes les représentations cylindriques directes. Le module linéaire est :

$$m = \frac{1}{r} \cdot \left| \frac{dZ}{dz} \right| = \frac{k}{r} \quad (5.24)$$

5.2.2 La représentation $Z = ae^{iz}$

On considère que le modèle est une sphère de rayon a . La représentation $Z = ae^{iz}$ définit une représentation plane conforme. Si on désigne par R et Ω le module et l'argument du nombre complexe Z , on a alors :

$$Z = Re^{i\Omega} = ae^{i(\lambda+iL)} = ae^{-L}e^{i\lambda} = a.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)e^{i\lambda} \quad (5.25)$$

D'où :

$$\Omega = \lambda \quad \text{et} \quad R = a.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Il s'agit de la projection stéréographique directe, perspective de la sphère à partir du pôle p' sur le plan de l'équateur. Le module linéaire s'écrit comme suit :

$$m = \frac{-dR}{ad\varphi} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \sin\varphi} \quad (5.26)$$

ou en appliquant (5.19) :

$$m = \frac{1}{a\cos\varphi} \left| \frac{dZ}{dz} \right| = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} = \frac{1}{1 + \sin\varphi} \quad (5.27)$$

5.2.3 La représentation $Z = ke^{iz}$

Elle définit, pour l'ellipsoïde une représentation azimutale directe, analogue à la précédente, mais qui n'est pas une "projection" et qu'il est préférable de ne pas qualifier de stéréographique, comme pour la sphère.

5.2.4 Les représentations coniques conformes directes

Les représentations coniques conformes directes d'un modèle de la terre (sphérique ou ellipsoïdique) peuvent être définies par :

$$Z = C.e^{niz} \iff R.e^{i\Omega} = C.e^{-nL}e^{in\lambda} \quad (5.28)$$

Le module linéaire est donné par :

$$m = \frac{1}{r} \cdot \left| \frac{dZ}{dz} \right| = \frac{1}{r} \cdot nCe^{-nL} = n\frac{R}{r} \quad (5.29)$$

L'argument de (dZ/dz) est $n\lambda$: c'est au signe près le gisement du méridien.

5.2.5 La représentation de Littrow

Comme modèle, on considère la sphère \mathbb{S}^2 , la représentation conforme de Littrow² est définie par $Z = \sin(z) = \sin z$. On laisse au lecteur l'étude de cette représentation (voir problème 6.1 ci-dessous).

2. En hommage à **Joseph Johann Littrow** (1781-1840) astronome autrichien.

5.2.6 La projection stéréographique d'une sphère

La projection stéréographique d'une sphère est la seule représentation plane conforme qui couvre tout le plan. Pour la sphère \mathbb{S}^2 , elle est définie par :

$$Z = e^{iz} \quad (5.30)$$

On peut définir une autre variable complexe :

$$\zeta = e^{iz} \quad (5.31)$$

qu'on désigne par variable stéréographique. Alors toute fonction analytique de ζ définit une nouvelle représentation plane conforme. Ainsi :

$$\boxed{Z = C\zeta^n} \quad (5.32)$$

définit toutes les représentations coniques conformes.

On peut aussi prendre pour f un polynôme en ζ et déterminer les coefficients de ce polynôme en imposant à la représentation considérée certaines conditions particulières. A titre d'exemple, deux cartes (l'une de l'Afrique, l'autre de l'Océan Pacifique) ont été réalisées de la façon suivante :

- on définit une projection stéréographique sécante d'un modèle sphérique, projection oblique de pivot q . Les isomètres sont des cercles de pôle q sur la sphère, de centre Q dans le plan ; en particulier l'isomètre $m = 1$. La variable ζ' étant définie par rapport à φ' et λ' pseudo-longitude et pseudo-latitude, comme ζ est définie par rapport à φ et λ , on obtient une autre représentation conforme en écrivant :

$$Z = C_1\zeta^3 + C_2\zeta \quad (5.33)$$

On détermine les deux constantes C_1 et C_2 en imposant les deux conditions suivantes :

* le module linéaire est égal à l'unité en deux points a et b choisis sur deux grands cercles orthogonaux issus de q . Les isomètres sont alors des ovales ;

* sur la carte du Pacifique, par exemple, les coefficients sont déterminés pour que l'isomètre automécoïque épouse sensiblement l'ensemble des côtes des continents qui bordent cet océan.

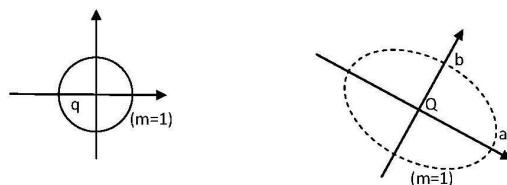


Fig. 5.1 Les conditions requises

5.2.7 Les représentations polyconiques circulaires conformes de la sphère

Définition 5.1 Une représentation est dite circulaire si le canevas est composé de cercles ou d'arcs de cercles.

Une représentation circulaire conforme est nécessairement polyconique : en effet, les images des méridiens appartiennent au faisceau des cercles à points de base P et P' images des pôles p et p' de la sphère, l'un des méridiens a comme image la droite PP' et les images des parallèles sont centrées sur cette droite, puisqu'elles appartiennent au faisceau à points limites P et P' .

Toute projection stéréographique (de pivot quelconque) appartient à cette famille de représentations. Or la projection stéréographique directe est définie par :

$$Z = \zeta \quad (5.34)$$

Et la fonction la plus générale qui, à des cercles orthogonaux du plan des ζ fait correspondre dans le plan des Z des cercles orthogonaux est la fonction homographique la plus générale de ζ^n (n réel positif).

Donc les représentations polyconiques circulaires conformes de la sphère peuvent être définies par :

$$\boxed{Z = \frac{a\zeta^n + a'}{b\zeta^n + b'}} \quad (5.35)$$

où a, a', b, b' sont des paramètres complexes et n un réel positif.

On ne restreint pas la généralité en choisissant comme axe des Y l'image du méridien origine ($\lambda = 0$) et pour images P et P' des pôles p et p' les points de cet axe d'ordonnées $+1$ et -1 . Dans le plan des ζ , le pôle sud p' est rejeté à l'infini ; dans le plan des Z , l'affixe de P' est $-i$:

$$\zeta = \infty \quad \text{et} \quad Z = -i \implies \boxed{\frac{a}{b} = -i} \quad (5.36)$$

Dans le plan des ζ , le pôle nord p a pour affixe $\zeta = 0$; dans le plan des Z , l'affixe de P est $+i$:

$$\zeta = 0 \quad \text{et} \quad Z = +i \implies \boxed{\frac{a'}{b'} = +i} \quad (5.37)$$

Les images des méridiens sont les cercles du faisceau à points de base P et P' ; l'axe des X médiatrice de PP' , est donc l'image d'un cercle orthogonal à tous les méridiens, donc l'image d'un parallèle de latitude φ_0 .

Alors l'origine est l'image du point $(\varphi = \varphi_0, \lambda = \lambda_0)$, c'est-à-dire du point dont l'affixe dans le plan des ζ est $\zeta_0 = e^{-nL_0}$:

$$\zeta_0 = e^{-nL_0} \quad \text{et} \quad Z = 0 \implies \boxed{\frac{a'}{a} = -\zeta_0^n} \quad (5.38)$$

Finalement, les paramètres a', b et b' sont liés à a et ζ_0 par les relations :

$$a' = -a\zeta_0^n, \quad b = a.i, \quad b' = a.i.\zeta_0^n \quad (5.39)$$

Donc les représentations polyconiques circulaires conformes sont définies par :

$$\boxed{Z = \frac{1}{i} \cdot \frac{\zeta^n - \zeta_0^n}{\zeta^n + \zeta_0^n} = i \cdot \frac{\zeta_0^n - \zeta^n}{\zeta_0^n + \zeta^n} = tg \frac{n}{2}(z - z_0)} \quad (5.40)$$

avec $\zeta_0 = e^{-L_0} \quad \text{et} \quad z_0 = iL_0$

Si en particulier, on choisit $\varphi_0 = 0$, l'axe des X est alors l'image de l'équateur, et :

$$\boxed{Z = tg \frac{n}{2} z} \quad (5.41)$$

représentations connues sous le nom de représentations de Lagrange³

Si $n = 1/2$, l'ensemble de la sphère esr représenté à l'intérieur du cercle de diamètre PP' .

3. **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) : mathématicien français.

Si $n = 1$, la représentation est la projection stéréographique de pivot $q(\varphi = 0, \lambda = 0)$, perspective de la sphère à partir du point $q'(\varphi = 0, \lambda = \pi)$ sur le plan des méridiens $\lambda = \pm\pi/2$.

Si $n = 2$, la représentation est l'aspect transverse de la représentation de Littrow (voir précédemment).

5.3 Aspect transverse des représentations conformes

La seconde propriété mentionnée (prolongement analytique) permet de déterminer très simplement la fonction f définissant pour une sphère, une représentation conforme transverse de tel ou tel type.

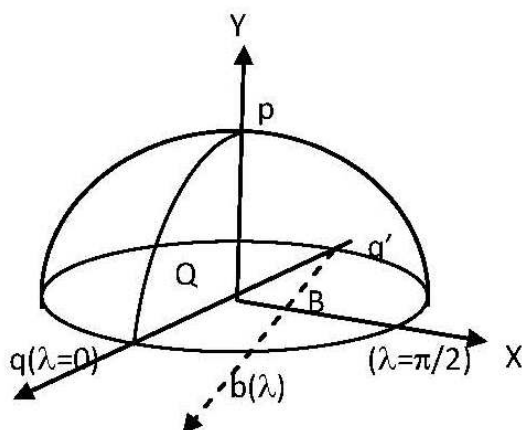


Fig. 5.2 Représentations conformes

* Ainsi, soit f la fonction analytique définissant la projection stéréographique transverse (ou méridienne), de pivot $q(\varphi = 0, \lambda = 0)$, c'est-à-dire la perspective de la sphère à partir de $q'(\varphi = 0, \lambda = \pi)$ sur le plan des méridiens $\lambda = \pm\pi/2$.

On adopte comme axes :

- QX image de l'équateur ;
- QY image du méridien $\lambda = 0$;

et : $Z = X + iY = f(\lambda + iL)$.

Si $\varphi = 0$, alors $L = 0$ et on veut que $Y = 0$, alors $X = f(\lambda)$. Or le point b de l'équateur de longitude λ a pour image le point B de l'axe QX , d'abscisse :

$$X = tg(\lambda/2) \quad (5.42)$$

La fonction f est ainsi déterminée par :

$$f(\lambda) = tg\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (5.43)$$

et la fonction stéréographique de pivot q est donc définie par :

$$\boxed{Z = tg\frac{z}{2}} \quad (5.44)$$

Autre méthode : tout point de longitude nulle, de latitude φ , a pour image sur l'axe des Y , d'abscisse nulle $X = 0$ et d'ordonnée $tg(\lambda/2)$. Or si $\lambda = 0, X = 0$ donc $iY = f(iL)$ et $Y = tg(\varphi/2) = th(L/2)$ relation qui permet d'écrire $iY = i.th(L/2) = tg(iL/2)$ et $iY = f(i.L)$ ce qui donne :

$$\boxed{Z = tg\frac{z}{2}} \quad (5.45)$$

La représentation considérée peut être aussi définie à partir de la variable stéréographique ζ .

$$Z = f(\zeta) = f(e^{-L}.e^{i\lambda}) \quad (5.46)$$

L'équateur ($\varphi = 0$) a pour image l'axe des X ($Y = 0$). Or pour $\varphi = 0, e^{-L} = 1$. Donc pour tout point d'ordonnée nulle, on a :

$$\left. \begin{array}{l} X = f(e^{i\lambda}) \\ \text{et } X = tg\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i\lambda} - 1}{e^{i\lambda} + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{i} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}} \quad (5.47)$$

D'une façon analogue, l'image du méridien origine ($\lambda = 0$) a pour image l'axe des Y ($X = 0$). Alors, pour tout point d'abscisse nulle, on a :

$$\left. \begin{array}{l} iY = f(e^{i\lambda}) \\ \text{et } Y = tg\frac{\varphi}{2} = th\frac{L}{2} \text{ ou } iY = ith\frac{L}{2} = i \frac{e^L - 1}{e^L + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Z = i \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}} \quad (5.48)$$

* Une représentation cylindrique conforme transverse de la sphère, de pivot $q(\varphi = 0, \lambda = \pi/2)$ peut être précisée dans le plan par l'un ou l'autre système d'axes :

- $(PX1)$ et $(PY1)$ images des méridiens $(\lambda = 0)$ et $(\lambda = \pi/2)$;
- (EX) et (EY) images de l'équateur et du méridien origine.

Si on pose $Z_1 = X_1 + iY_1$, $z = \lambda + iL$ ou encore $\zeta = e^{iz} = e^{-L}.e^{i\lambda}$, dans le premier système (P, X_1, Y_1) , on a :

$$\lambda = 0 \implies Y = 0 \implies X_1 = f(e^{-L}) \quad (5.49)$$

Le méridien origine est automécoïque donc :

$$X_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi \implies tg \frac{X_1}{2} = tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = e^{-L}$$

La représentation est alors définie par :

$$\boxed{Z = 2Arctg(\zeta) = 2Arctg(e^{iz})} \quad (5.50)$$

Maintenant dans le deuxième système : $X + iY = f(\lambda + iL)$, on a :

$$\lambda = 0 \implies X = 0 \implies iY = f(iL) \quad (5.51)$$

Le méridien origine est automécoïque donc : $Y = \varphi \implies i\varphi = f(iL)$, or :

$$tg \frac{\varphi}{2} = th \frac{L}{2} \implies itg \frac{\varphi}{2} = ith \frac{L}{2} \implies th \left(\frac{i\varphi}{2} \right) = tg \left(\frac{iL}{2} \right)$$

La représentation est alors définie par :

$$\boxed{Z = 2Arcth \left(tg \frac{z}{2} \right) \quad \text{ou} \quad Z = Logtg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right)} \quad (5.52)$$

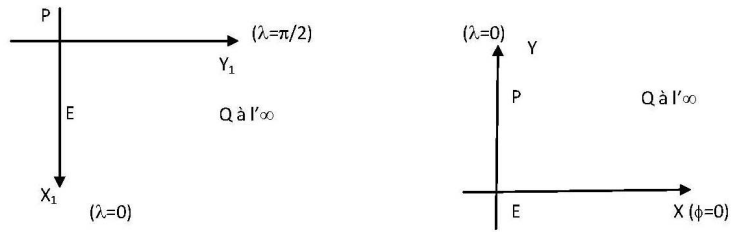


Fig. 5.3 les représentations conformes

CHAPITRE 6

REPRÉSENTATION D'UN ELLIPSOÏDE SUR UNE SPHÈRE

6.1 Généralités

La représentation d'un ellipsoïde sur une sphère intervient d'une part en cartographie, comme intermédiaire pour définir une représentation plane (double projection), en particulier lorsque le pivot n'est pas l'un des pôles ; d'autre part, dans les différentes questions de géodésie géométrique, en raison de la faible valeur de l'excentricité, le module linéaire d'une représentation sphérique reste voisin de l'unité, les longueurs sur l'ellipsoïde pourront être facilement obtenues à partir des longueurs calculées sur une sphère au moyen des formules finies de la trigonométrie sphérique.

La notion d'échelle nominale d'une carte peut naturellement être étendue à une représentation sphérique, et les remarques du 3ème chapitre restent valables dans ce cas. Pour l'étude d'une représentation plane, il est commode et suffisant d'adopter comme unité de longueur, sur le modèle et sur l'image, un élément du modèle : rayon de la sphère ou demi-grand axe de l'ellipsoïde. Pour l'étude d'une représentation d'un ellipsoïde sur une sphère, il est préférable de définir le modèle par son excentricité et la longueur a du demi-grand axe de l'ellipse méridienne, l'image par son rayon R .

Une représentation sphérique quelconque est alors définie :

A - si on précise la valeur du rayon R de la sphère ;

B - si on établit entre le point $i(\varphi, \lambda)$ du modèle (ellipsoïde) et le point $I(\phi, \Lambda)$ de l'image (sphère) une correspondance de la forme :

$$\phi = \phi(\varphi, \lambda) \quad (6.1)$$

$$\Lambda = \Lambda(\varphi, \lambda) \quad (6.2)$$

Mais pour la résolution des problèmes envisagés en géodésie ou en cartographie, il suffit de généraliser, de considérer les seules représentations sphériques dans les quelles les méridiens et les parallèles ellipsoïdiques ont pour images respectivement les grands cercles de la sphère passant par un point et les petits cercles orthogonaux leurs sont (méridiens et parallèles sphériques) autrement dit, l'étude faite dans les paragraphes suivants se bornera à des correspondances de la forme :

$$\phi = \phi(\varphi) \quad (6.3)$$

$$\Lambda = \Lambda(\lambda) \quad (6.4)$$

Dans ces conditions, les directions principales sont sur les deux surfaces, les méridiens et les parallèles ; et les modules principaux sont les modules linéaires m_λ (suivant les méridiens) et m_φ (suivant les parallèles) ; avec les notations précédentes, ceux-ci ont pour valeurs :

$$m_1 = m_\varphi = \frac{R \cos \phi d\Lambda}{N \cos \varphi d\lambda} \quad \text{et} \quad m_2 = m_\lambda = \frac{R d\phi}{\rho d\varphi} \quad (6.5)$$

C'est aux représentations conformes que le plus souvent, le géodésien donne la préférence, le cartographe peut en outre, avoir besoin, pour définir une représentation plane équivalente, d'une représentation intermédiaire sur une sphère, représentation qu'il convient alors de choisir équivalente. Ces deux types de représentations amènent à introduire deux nouveaux paramètres : latitude conforme et latitude équivalente. Mais d'autres types de représentations peuvent être envisagées : le plus simple est décrit dans le paragraphe suivant.

6.2 La Représentation de Bessel

La représentation de Bessel¹ utilise la sphère de rayon a tangente à l'ellipsoïde le long de l'équateur - la correspondance entre le modèle et l'image est l'affinité qui permet de passer de l'ellipse méridienne à son cercle principal.

Il apparaît immédiatement que tous les parallèles sont automécoïques :

$$\forall \varphi, m_\varphi = 1 \quad (6.6)$$

Le module linéaire suivant les méridiens a pour valeur :

$$m_\lambda = \frac{ad\phi}{\rho d\varphi} \quad (6.7)$$

avec :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = a(1-e^2) \frac{1}{W^3} \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{W^2} \quad (6.8)$$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi \quad (6.9)$$

D'où :

$$m_\lambda = \frac{W}{\sqrt{1-e^2}} = V = \sqrt{1+e' \cos^2 \varphi} \quad (6.10)$$

avec e' la deuxième excentricité de l'ellipsoïde de référence du modèle.

6.3 Les Représentations conformes

Remarque importante : il convient de bien noter que la lettre ϕ est toujours relative à une sphère, mais et ceci pour éviter de multiplier les notations que la signification de ce symbole est propre à la sphère considérée. Dans le paragraphe précédent, ϕ est la latitude réduite, déjà utilisée. Dans ce paragraphe et les suivants si φ est la latitude ellipsoïdique du point i , ϕ est la latitude du point correspondant I d'une sphère image qui sera précisée ultérieurement.

1. Bessel(1800 - 1890) : mathématicien anglais.

6.3.1 Cas général

La condition de conformité $m_\varphi = m_\lambda$ s'écrit :

$$\frac{Rd\phi}{\rho d\varphi} = \frac{R\cos\phi d\Lambda}{N\cos\varphi d\lambda} \quad \text{ou} \quad \frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{N\cos\varphi d\phi}{\rho\cos\phi d\varphi} \quad (6.11)$$

Si on considère uniquement les représentations dans lesquelles Λ est fonction de la seule variable λ et ϕ fonction de la seule variable φ , l'égalité précédente ne peut être réalisée que si les deux membres sont constants. n étant une constante, la représentation conforme est donc définie par :

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = n \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{\cos\phi} = n \frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi}$$

ou encore par :

$$d\Lambda = n d\lambda \quad \text{et} \quad dL_S = n dL_E \quad (6.12)$$

en désignant par L_S la latitude croissante (sphère) et L_E la latitude isométrique (ellipsoïde).

Si on adopte comme origines des longitudes sur les deux surfaces deux méridiens correspondants, l'intégration de ces deux équations différentielles conduit à :

$$\Lambda = n\lambda \quad (6.13)$$

$$\text{et} \quad \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = C \left(\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi} \right)^{e/2} \right)^n \quad (6.14)$$

$$\text{ou} \quad \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = \frac{1}{C} \cdot \left(\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi} \right)^{e/2} \right)^n \quad (6.15)$$

Les relations qui définissent ϕ , où C est une constante d'intégration, montrent que les pôles sont des points correspondants. La place qu'y occupe la constante n justifie le nom qu'on lui donne d'exposant de la représentation.

Enfin, le module linéaire, fonction de la seule variable φ a pour expression :

$$m(\varphi) = n \frac{R\cos\phi}{N\cos\varphi} \quad (6.16)$$

Si on considère les variables complexes :

$$\begin{aligned} Z_S &= \Lambda + iL_S \\ Z_E &= \lambda + iL_E \end{aligned} \quad (6.17)$$

Les résultats précédents sont résumés par la relation linéaire :

$$Z_S - (Z_S)_0 = n(Z_E - (Z_E)_0) \quad (6.18)$$

où l'indice zéro correspond à la latitude ϕ_0 sur la sphère et à la latitude φ_0 sur l'ellipsoïde. Les carrés des éléments linéaires s'écrivent :

$$dS^2 = R^2 \cos^2 \phi (d\Lambda^2 + dL_S^2) \quad (6.19)$$

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (d\lambda^2 + dL_E^2) \quad (6.20)$$

$$\text{avec } n = \left| \frac{dZ_S}{dZ_E} \right| \quad (6.21)$$

On retrouve ainsi la valeur du module linéaire par la méthode indiquée précédemment.

La représentation dépend de trois paramètres R, n et C . Dans tous les cas, les pôles sont des points correspondants : ce sont en général, puisque $\Lambda = n\lambda$, des points singuliers sauf si $n = 1$. Les équateurs ne sont des courbes correspondantes que si $C = 1$.

Suivant les valeurs de n , l'image du parallèle ellipsoïdique de latitude φ est un arc de cercle d'amplitude inférieur à 2π ($n < 1$), égale à 2π ($n = 1$) ou supérieur à 2π ($n > 1$), dans ce dernier cas, la représentation de la surface totale de l'ellipsoïde présente sur la sphère un recouvrement partiel. S'il existe un parallèle

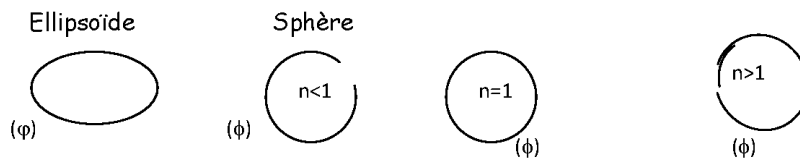


Fig. 6.1 Etude des cas

automécoïque (φ_0) sur l'ellipsoïde, son image est un parallèle (φ_0) de la sphère (qui peut se présenter sous l'une des trois formes précédentes) φ_0 et ϕ_0 étant liés par :

$$n \frac{R \cos \phi_0}{N \cos \varphi_0} = 1 \quad (6.22)$$

Relation satisfaite également pour les latitudes correspondantes $(-\varphi_0)$ et $(-\phi_0)$. Donc s'il existe un parallèle automécoïque, il en existe nécessairement deux, de latitudes opposées : la représentation est dite **sécante**.

Les deux parallèles automécoïques ne peuvent être confondus que si $\varphi_0 = 0$ et $\phi_0 = 0$, c'est-à-dire si les équateurs sont des courbes correspondantes. Dans ce cas, $C = 1$ et $N_0 = a$ entraînent :

$$n.R = a \quad (6.23)$$

La représentation est dite **tangente**.

6.3.2 Représentations de Soldner

Les représentations les plus simples sont obtenues pour $n = 1$: les longitudes sont conservées $\Lambda = \lambda$.

Si les parallèles automécoïques ont pour latitudes (φ_0) et $(-\varphi_0)$ et qu'on pose $\varphi_0 = \phi_0$, de la relation :

$$\frac{R \cos \phi_0}{N_0 \cos \varphi_0} = 1$$

on tire :

$$R = N_0 \quad (6.24)$$

C'est la représentation conforme sécante sur la sphère de rayon N_0 ou **sphère de Soldner**.

Si $n = 1$ et $C = 1$, les équateurs se correspondent : $\varphi = 0 \implies \phi = 0$.

Si, en outre, la représentation est tangente (équateur automécoïque), $\varphi_0 = \phi_0 = 0$ et $(L_S)_0 = (L_E)_0$. On obtient la représentation conforme tangente sur la sphère de Soldner de rayon a , définie par :

$$\Lambda = \lambda \quad (6.25)$$

$$L_S = L_E \quad \text{ou} \quad \phi = \varphi_c$$

φ_c étant la latitude conforme définie par :

$$\frac{d\varphi_c}{\cos\varphi_c} = \frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi} \quad (6.26)$$

ou :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{e/2} \quad (6.27)$$

La latitude conforme, ou plus exactement, la différence $\varphi - \varphi_c$ est tabulée (O. Adams,[4]) pour les différents ellipsoïdes utilisés, à partir d'un développement qui s'écrit (en négligeant les termes en e^6) :

$$\varphi - \varphi_c = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{5e^4}{24} + \dots\right] \sin 2\varphi - \left[\frac{5e^4}{48} + \dots\right] \sin 4\varphi + \dots \quad (6.28)$$

La différence $\varphi - \varphi_c$, toujours positive, est nulle pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 90^\circ$; sa valeur maximale, pour $\varphi = 45^\circ$ est environ $11'30''$.

On appelle latitude géocentrique φ_g l'angle que fait un demi-diamètre de l'ellipse méridienne avec son grand axe. La différence $\varphi - \varphi_g$ peut s'écrire :

$$\varphi - \varphi_g = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{6e^4}{24} + \dots\right] \sin 2\varphi - \left[\frac{e^4}{8} + \dots\right] \sin 4\varphi + \dots \quad (6.29)$$

La partie principale de la différence $\varphi_g - \varphi_c$ est donc :

$$\varphi_g - \varphi_c = \left[\frac{e^4}{24} + \dots\right] \sin 2\varphi - \left[\frac{e^4}{48} + \dots\right] \sin 4\varphi + \dots \quad (6.30)$$

dont la valeur maximale n'excède pas $0.5''$.

La représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère de rayon a peut donc être considérée sensiblement comme une perspective de l'ellipsoïde sur cette sphère à partir de son centre.

Remarques : Les sphères de Soldner sont souvent appelées sphères tangentes le long de tel parallèle. Pour éviter toute faute d'interprétation, il serait préférable de dire simplement sphère de Soldner ou sphère de rayon N_0 .

L'épithète 'tangente' risque d'entraîner une confusion avec représentation tangente. Dans la (**Fig. 6.2**), si le cas (a) met en évidence le rayon de la sphère, il semble plus correct de schématiser la représentation par le cas (b).

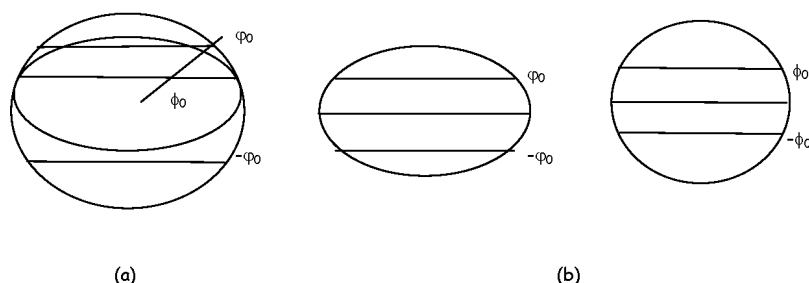


Fig. 6.2 Sphère de Soldner

Il convient aussi de noter que l'expression " représentation sécante " doit être comprise avec la signification donnée : la qualificatif résume simplement le fait que la représentation admet deux parallèles automécoïques. Il ne s'agit, bien entendu en aucune manière de la sphère coupant l'ellipsoïde suivant les deux parallèles (φ_0) et ($-\varphi_0$).

La représentation de Bessel (affinité) et la représentation conforme tangente de Soldner utilisent l'un et l'autre une sphère de rayon a . mais le point I correspondant au point i de latitude ellipsoïdique φ est défini :

- sur la sphère de Bessel par la latitude réduite ϕ ;
- sur la sphère de Soldner par la latitude conforme φ_c .

6.3.3 Représentation conforme à déformation minimale - sphère de Gauss

On peut chercher à déterminer les trois paramètres R, n, C dont dépend la représentation pour que le module linéaire reste aussi voisin que possible de l'unité.

Soit φ_0 la latitude du parallèle automécoïque et ϕ_0 la latitude sphérique correspondante. Ces deux quantités et les trois paramètres R, n, C sont liées par :

$$m(\varphi_0) = 1 \implies nR \cos \phi_0 = N_0 \cos \varphi_0 \quad (6.31)$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2}\right) = C \left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) \left(\frac{1 - e\sin\varphi_0}{1 + e\sin\varphi_0}\right)^{e/2} \right)^n \quad (6.32)$$

On peut donc encore imposer deux conditions, on obtiendra une représentation à déformation minimale comme suit :

a - si le module linéaire est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, c'est-à-dire si :

$$\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_0 = 0 \quad (6.33)$$

b - si on peut également (sous réserve que ces deux conditions soient compatibles) annuler pour $\varphi = \varphi_0$ la dérivée seconde du module linéaire c'est-à-dire :

$$\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_0} = \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)_0 = 0 \quad (6.34)$$

Puisque, $m(\varphi_0) = 1$, il revient au même de chercher à annuler les deux premières dérivées de $Logm(\varphi)$. Le module linéaire a pour valeur :

$$m(\varphi) = n \frac{R\cos\phi}{N\cos\varphi} = n \frac{R\cos\phi}{r} = \frac{Rd\phi}{\rho d\varphi} \quad (6.35)$$

Donc :

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{\rho}{r} n \cos\phi \quad \text{or} \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\rho \sin\varphi$$

Les dérivées première et seconde de $Logm$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dLogm}{d\varphi} &= -tg\phi \frac{d\phi}{d\varphi} - \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\rho}{r} (n\sin\phi - \sin\varphi) \\ \frac{d^2Logm}{d\varphi^2} &= -\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right) (n\sin\phi - \sin\varphi) - \frac{\rho}{r} \left(n\cos\phi \frac{d\phi}{d\varphi} - \cos\varphi\right) \implies \\ \frac{d^2Logm}{d\varphi^2} &= -\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right) (n\sin\phi - \sin\varphi) - \frac{\rho^2}{r^2} \left(n^2\cos^2\phi - \frac{r}{\rho}\cos\varphi\right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Et :

$$\left(\frac{dLogm}{d\varphi}\right)_0 = 0 \implies n\sin\phi_0 = \sin\varphi_0 \quad (6.37)$$

$$\left(\frac{d^2Logm}{d\varphi^2}\right)_0 = 0 \implies n^2\cos^2\phi_0 = \frac{N_0}{\rho_0}\cos^2\varphi_0 = V_0^2\cos^2\varphi_0 \quad (6.38)$$

soit :

$$n\cos\phi_0 = V_0\cos\varphi_0 \quad (6.39)$$

Des équations (6.37) et (6.39), on tire :

$$n^2 = V_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \Rightarrow n^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0 \quad (6.40)$$

avec e' la deuxième excentricité de l'ellipsoïde et $V_0^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0$. Les deux conditions sont compatibles, et la représentation est déterminée par :

- n , la relation (6.40) montre que, sauf pour $\varphi_0 = \pi/2$, n est supérieur à l'unité : $n > 1$, il y a donc recouvrement (**Fig.** 6.1) ;

- la relation (6.37) :

$$\sin \phi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{n} \quad (6.41)$$

a une solution en ϕ_0 , puisque $|\varphi_0| < \pi/2$ et $|\sin \varphi_0|/n < 1$;

- C, n, φ_0 et ϕ_0 étant déterminés, la relation (6.32) donne C ;

- R , de la relation (6.31), on tire l'expression de R :

$$R = \frac{N_0 \cos \varphi_0}{n \cos \phi_0} \quad (6.42)$$

expression dans laquelle $n \cos \phi_0 = V_0 \cos \varphi_0$. Le rayon de la sphère est donc :

$$R_S = \frac{N_0}{V_0} = \frac{C}{V_0^2} = \sqrt{\frac{C}{V_0} \cdot \frac{C}{V_0^3}} = \sqrt{N_0 \rho_0} \quad (6.43)$$

Cette sphère, dont la courbure est égale à la courbure totale de l'ellipsoïde est dite sphère de Gauss ou sphère de courbure totale (abusivement sphère de courbure moyenne).

On obtient le premier terme non nul du développement de $m(\varphi) - 1$ en fonction de $(\varphi - \varphi_0)$ en calculant la dérivée troisième pour $\varphi = \varphi_0$ de $\text{Log} m(\varphi)$. En utilisant (6.36), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \text{Log} m}{d\varphi^3} &= -\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{\rho}{r} \right) (n \sin \phi - \sin \varphi) - 2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \left(n \cos \phi \frac{d\phi}{d\varphi} - \cos \varphi \right) \\ &\quad - \frac{\rho}{r} \left(\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) n^2 \cos^2 \phi - 2 \frac{\rho}{r} n^2 \sin \phi \cos \phi \frac{d\phi}{d\varphi} + \sin \varphi \right) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Pour $\varphi = \varphi_0$, les deux premiers termes sont nuls. Pour le troisième terme, on a :

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{N \cos \varphi} = \frac{1}{V^2 \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) = \frac{\sin \varphi (1 + 3e'^2 \cos^2 \varphi)}{V^4 \cos^2 \varphi} \quad (6.45)$$

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{\rho}{r} n \cos\phi = \frac{n \cos\phi}{V^2 \cos\varphi} \quad (6.46)$$

et pour $\varphi = \varphi_0$, on a en tenant compte que $n \cos\phi_0 = V_0 \cos\varphi_0$:

$$\left(\frac{d\phi}{d\varphi}\right)_0 = \frac{1}{V_0} \quad (6.47)$$

En reportant ces valeurs et en tenant compte de (6.37) et (6.39), il vient :

$$\left(\frac{d^3 \text{Log} m}{d\varphi^3}\right)_0 = -\frac{\sin\varphi_0}{V_0^2 \cos\varphi_0} \left(\frac{1 + 3e'^2 \cos\varphi_0}{V_0^2} - \frac{1}{V_0^2} + 1\right) = -\frac{4e'^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{V_0^4} \quad (6.48)$$

On peut donc écrire :

$$m(\phi) = 1 - \frac{2e'^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{3V_0^4} (\phi - \phi_0)^3 + O^4(\varphi - \varphi_0)$$

ou :

$$m(\phi) = 1 - \frac{e'^2 \sin 2\varphi_0}{3V_0^4} (\phi - \phi_0)^3 + O^4(\varphi - \varphi_0) \quad (6.49)$$

6.4 Cas particuliers

Pour $\varphi_0 = 0$ et $|\varphi_0| = \pi/2$, on obtient des représentations particulières, et il est intéressant de comparer, dans ces cas limites, les représentations sur une sphère de Gauss, d'une part, et sur une sphère de Soldner, d'autre part.

Dans le cas général, sur ces deux sphères, la représentation est définie par :

$$\Lambda = n\lambda \quad \text{et} \quad Z_S - (Z_S)_0 = n(Z_E - (Z_E)_0)$$

et elle est entièrement déterminée si on fixe φ_0 , d'où ϕ_0, R, n et $C = (L_S)_0 - n(L_E)_0$. La relation entre les latitudes peut s'écrire aussi, en utilisant la latitude conforme (6.26) :

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = C \left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_c}{2}\right)\right)^n = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2}\right) \left(\frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_c}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{c0}}{2}\right)}\right)^n \quad (6.50)$$

Le module linéaire est :

$$m(\varphi) = n \frac{R \cos\phi}{N \cos\varphi} \quad (6.51)$$

Sur la sphère de Gauss :

$$R = \sqrt{N_0 \rho_0}, \quad n = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0}, \quad \sin \phi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{n} \text{ ou } \operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{V_0} \quad (6.52)$$

et :

$$C = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right)}{\left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{(\varphi_c)_0}{2} \right) \right)^n} \quad (6.53)$$

Sur la sphère de Soldner :

$$R = N_0, \quad n = 1, \quad \varphi_0 = \phi_0, \quad C = \left(\frac{1 + e \sin \varphi_0}{1 - e \sin \varphi_0} \right)^{e/2} \quad (6.54)$$

6.4.1 Cas $\varphi_0 = 0$

La représentation ne peut être tangente que si les équateurs se correspondent dans ces conditions :

$$\varphi_0 = \phi_0 = (\varphi_c)_0, \quad C = 1, \quad \forall n$$

On obtient alors :

- sur la sphère de Gauss :

$$R = b, \quad n = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 + e'^2} \quad (6.55)$$

$$\Lambda = \lambda \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2} \right) \right)^{a/b} \quad (6.56)$$

et :

$$m(\varphi) = \frac{a}{b} \frac{b \cos \phi}{N \cos \varphi} = \frac{a \cos \phi}{N \cos \varphi} \quad (6.57)$$

- sur la sphère de Soldner, on a :

$$R = a, \quad n = 1 \quad (6.58)$$

$$\Lambda = \lambda, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2} \right) \Rightarrow \phi = \varphi_c \quad (6.59)$$

et :

$$m(\varphi) = \frac{a \cos \phi}{N \cos \varphi} \quad (6.60)$$

Les modules linéaires ont, dans les deux représentations, la même expression littérale, simplement parce que les latitudes sphériques sont désignées par la même lettre ϕ mais ϕ n'est pas la même fonction de φ dans les deux cas.

6.4.2 Cas $|\varphi_0| = \frac{\pi}{2}$

Les pôles sont toujours des points correspondants si $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ce qui entraîne $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, les pôles sont les deux seuls points automécoïques de la représentation. On obtient alors :

- sphère de Gauss :

$$R = c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1+e'^2}, \quad n = 1, \quad C = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{e/2} \quad (6.61)$$

$$\Lambda = \lambda, \quad tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = C\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right)\right) \quad (6.62)$$

- sphère de Soldner :

$$R = c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1+e'^2}, \quad n = 1, \quad C = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{e/2} \quad (6.63)$$

$$\Lambda = \lambda, \quad tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = C\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right)\right) \quad (6.64)$$

Les deux représentations, dans ce cas limite, sont identiques. Le module linéaire est :

$$m(\varphi) = \frac{c \cdot \cos \phi}{N \cos \varphi} \quad (6.65)$$

6.5 Les Représentations équivalentes

La condition d'équivalence $m_1 \cdot m_2 = 1$ s'écrit :

$$\frac{R^2 \cos \phi}{\rho N \cos \varphi} \frac{d\phi}{d\varphi} \frac{d\Lambda}{d\lambda} = 1 \implies \frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{\rho N \cos \varphi d\varphi}{R^2 \cos \phi d\phi} \quad (6.66)$$

Le même raisonnement qu'au paragraphe 6.3.1 conduit, n étant une constante, à :

$$\begin{cases} \frac{d\Lambda}{d\lambda} = n \\ nR^2 \cos\phi d\phi = \rho N \cos\varphi d\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} \Lambda = n\lambda \\ nR^2 \sin\phi = \int_0^\varphi \rho N \cos t dt + K \end{cases} \quad (6.67)$$

où K est une constante. L'intégrale précédente se calcule facilement :

$$\int_0^\varphi \rho N \cos t dt = \int_0^\varphi \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 t)^2} \cos t dt = a^2(1-e^2) \frac{1}{e} \int_0^\varphi \frac{d(e \sin t)}{(1-e^2 \sin^2 t)^2} \quad (6.68)$$

D'où l'on tire :

$$nR^2 \sin\phi = a^2(1-e^2) \frac{1}{4e} \left(\text{Log} \left(\frac{1+e \sin\varphi}{1-e \sin\varphi} \right) + \frac{2e \sin\varphi}{1-e^2 \sin^2\varphi} \right) + K \quad (6.69)$$

On peut faire un raisonnement analogue à celui du paragraphe 6.3.1 au sujet des parallèles automécoïques, et choisir les constantes φ_0, ϕ_0, n, K et R comme au paragraphe 6.3.3.

Le cas le plus simple correspond aux conditions suivantes :

- les longitudes sont conservées : $n = 1$;
- les équateurs se correspondent : $\varphi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0$, d'où $K = 0$;
- les pôles se correspondent : $\varphi = \pi/2 \Rightarrow \phi = \pi/2$ (ce qui entraîne $\varphi = -\pi/2 \Rightarrow \phi = -\pi/2$). Le rayon de la sphère prend alors une valeur A : $R = A$ telle que :

$$A^2 = a^2(1-e^2) \frac{1}{4e} \left(\text{Log} \left(\frac{1+e}{1-e} \right) + \frac{2e}{1-e^2} \right) = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1-e^2}{2e} \text{Log} \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \right) \quad (6.70)$$

qui peut s'écrire :

$$A^2 = a^2 \left(1 - \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3 \times 5}e^4 - \frac{1}{5 \times 7}e^6 - \dots \right) \quad (6.71)$$

On peut alors écrire $\phi = \varphi_E$, φ_E étant la latitude équivalente, définie par :

$$A^2 \cos\varphi_E d\varphi_E = \rho N \cos\varphi d\varphi$$

ou :

$$\sin\varphi_E = a^2(1-e^2) \frac{1}{2A^2} \left(\frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+e \sin\varphi}{1-e \sin\varphi} \right) + \frac{\sin\varphi}{1-e^2 \sin^2\varphi} \right) \quad (6.72)$$

O.S. Adams [4] a déterminé un développement de la différence $\varphi - \varphi_E$. La valeur maximale de $|\varphi - \varphi_E|$ est environ $7'40''$.

La représentation est bijective : donc l'aire de l'ellipsoïde est égale à l'aire de la sphère soit $4\pi A^2$. L'aire totale d'un ellipsoïde de révolution de demi-grand axe a et de première excentricité e est finalement :

$$\text{Aire de l'ellipsoïde} = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{1-e^2}{e} \text{Log} \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \right) \quad (6.73)$$

6.6 Exercices et Problèmes

Problème 6.1 *On considère comme modèle la sphère S^2 . Soit la représentation conforme définie par $Z = \sin z$, avec $z = \lambda + iL$, $Z = X + iY$, L la latitude de Mercator.*

1. Préciser le canevas, l'image de l'équateur, celles des méridiens.
 2. Vérifier que les points f et f' ($\varphi = 0, \lambda = \pm\pi/2$) sont des points singuliers.
 3. Étudier les images plans des cercles de diamètre ff' et des petits cercles orthogonaux.
 4. Soit s le point ($\varphi = \varphi_0, \lambda = 0$). On appelle segment capable sphérique l'ensemble des points b tels que l'angle $(\widehat{bp, bs}) = \alpha$. Quel est l'image plane de cette courbe dans la représentation de Littrow ? (application : relèvement radiogonométrique en navigation).
-
-

CHAPITRE 7

LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES

Seul l'aspect direct des représentations coniques est couramment employé. Il n'existe guère qu'un exemple d'utilisation d'une représentation conique oblique d'une sphère, elle-même représentation conforme d'un ellipsoïde (Tchécoslovaquie). L'étude suivante se borne à considérer les représentations directes.

Pour définir de façon commode les coordonnées planes d'une représentation conique directe, il suffit de faire appel aux coordonnées polaires, en effet, les images des méridiens sont des droites concourantes en un point S , celles des parallèles des arcs de cercle de centre commun S . Cette condition entraîne que les coordonnées polaires de l'image I du point $i(\varphi, \lambda)$ sont de la forme :

$$SI = R(\varphi) \tag{7.1}$$

$$(\widehat{Su, SI}) = \Omega(\lambda) \tag{7.2}$$

Su étant l'image du méridien origine. R est souvent appelé rayon graphique (de l'image) du parallèle.

Les images $[\varphi]$ et $[\lambda]$ du parallèle et du méridien sont orthogonales donc les directions principales sont l'image du méridien et la tangente à l'image du parallèle et les modules principaux m_1 et m_2 sont :

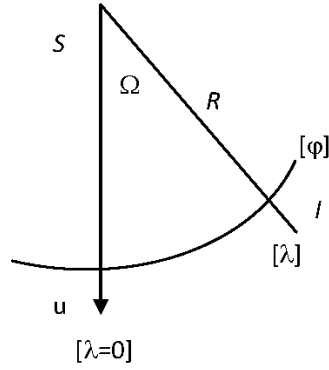


Fig. 7.1 La représentation conique

$$m_1 = m_\lambda = \frac{-dR}{\rho d\varphi} \quad (7.3)$$

$$m_2 = m_\varphi = \frac{R d\Omega}{N \cos \varphi d\lambda}$$

avec ρ et N les deux rayons de courbure de l'ellipsoïde.

7.1 Les Représentations coniques équidistantes

Par définition, tous les méridiens sont automécoïques, par suite $\forall \lambda, m_\lambda = 1$, donc :

$$dR = -\rho d\varphi = -d\beta(\varphi) \quad (7.4)$$

avec $\beta(\varphi)$ la longueur de l'ellipse méridienne donnée par :

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi ds = \int_0^\varphi \rho dt = a(1-e^2) \int_0^\varphi (1-e^2 \sin^2 t)^{-3/2} dt \quad (7.5)$$

La fonction $\Omega(\lambda)$ peut être choisie arbitrairement. On convient de choisir la fonction la plus simple (fonction linéaire), on obtient alors :

$$\begin{cases} R(\varphi) = C - \beta(\varphi) \\ \Omega(\lambda) = n\lambda \end{cases} \quad (7.6)$$

et :

$$\begin{cases} m_1 = m_\lambda = 1 \\ m_2 = m_\varphi = \frac{nR}{N \cos \varphi} = \frac{nR}{r} \end{cases} \quad (7.7)$$

Les deux constantes introduites (C et n) seront déterminées en imposant deux autres conditions.

7.2 Les Représentations coniques équidistantes sécantes

Si on impose à la représentation d'admettre deux parallèles automécoïques de latitude φ_1 et φ_2 , on peut écrire :

$$m_{\varphi_1} = \frac{nR_1}{r_1} = m_{\varphi_2} = \frac{nR_2}{r_2} = 1 \quad (7.8)$$

$$\text{avec } R_1 = C - \beta_1, \quad R_2 = C - \beta_2 \quad (7.9)$$

D'où on tire : $n = \frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} = \frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1}$ et $C = R_1 + \beta_1$, mais $R_1 = r_1/n$, d'où :

$$C = R_1 + \beta_1 = \beta_1 + \frac{r_1}{n} = \frac{\beta_1 r_2 - \beta_2 r_1}{r_2 - r_1}$$

Soit :

$$\boxed{n = \frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1}, \quad C = \frac{\beta_1 r_2 - \beta_2 r_1}{r_2 - r_1}} \quad (7.10)$$

Remarquons que $n > 0$ car $r_2 > r_1 \Rightarrow \beta_2 < \beta_1$. Le rayon graphique de l'image du parallèle est $R(\varphi) = C - \beta(\varphi)$. Si $C \neq \beta(\frac{\pi}{2})$, l'image du pôle est un arc de cercle. L'image du pôle P est un point (le point S) si et seulement si $C = \beta(\pi/2)$. Or C est déterminé par :

$$\frac{r_1}{C - \beta_1} = \frac{r_2}{C - \beta_2} \quad (7.11)$$

L'égalité $\frac{r_1}{\beta(\pi/2) - \beta_1} = \frac{r_2}{\beta(\pi/2) - \beta_2}$ est impossible, en effet, les numérateurs sont les rayons des parallèles, les dénominateurs des arcs de l'ellipse méridienne. L'image du pôle n'est donc un point que si $\beta_2 = \beta(\pi/2)$ c'est-à-dire si le pôle est lui-même automécoïque.

7.2.1 Cas de la sphère de rayon unité

Nous avons : $R = C - \varphi$ et $\Omega(\lambda) = n\lambda$. Si les parallèles φ_1 et φ_2 sont automécoïques, alors :

$$n = \frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad C = \frac{\varphi_1 \cos\varphi_2 - \varphi_2 \cos\varphi_1}{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1} \quad (7.12)$$

C n'est égal à $\pi/2$ que si $\varphi_2 = \pi/2$, c'est-à-dire si le pôle est automécoïque. Dans ce cas, le pôle est automécoïque et le parallèle φ_1 est automécoïque :

$$\begin{cases} R(\varphi) = \frac{\pi}{2} - \varphi \\ \Omega(\lambda) = n\lambda \end{cases} \text{ avec } n = \frac{\cos\varphi_1}{\pi/2 - \varphi_1}, \quad n < 1 \quad (7.13)$$

7.3 Les Représentations équidistantes tangentes

On obtient une représentation tangente en écrivant que le parallèle automécoïque de latitude φ_0 est un parallèle automécoïque double c'est-à-dire en faisant simultanément tendre φ_1 et φ_2 vers φ_0 :

$$\lim_{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \varphi_0} n = \lim_{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \varphi_0} \frac{r_2 - r_1}{\beta_1 - \beta_2} = \left(-\frac{dr}{d\beta} \right)_{\varphi=\varphi_0} \quad (7.14)$$

mais $\frac{dr}{d\beta} = -\sin\varphi$, par suite :

$$n = \sin\varphi_0, \quad \text{et} \quad C = R(\varphi_0) + \beta(\varphi_0) \quad (7.15)$$

$$\text{avec} \quad R(\varphi_0) = \frac{r_0}{n} = N(\varphi_0) \cotg(\varphi_0) \quad (7.16)$$

L'image du pôle est un arc de cercle de rayon :

$$\mathcal{R}(\pi/2) = N(\varphi_0) \cotg(\varphi_0) + \beta(\varphi_0) - \beta(\pi/2)$$

On peut également raisonner en disant que le parallèle automécoïque est stationnaire, c'est-à-dire :

$$m(\varphi_0) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0 \quad (7.17)$$

mais $m_\varphi = \frac{nR}{r} \Rightarrow m_{\varphi_0} = \frac{nR_0}{r_0} = 1 \Rightarrow n = \frac{r_0}{R_0}$, par suite :

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{d\varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = \rho \left(\frac{1}{R} - \frac{\sin\varphi}{r} \right) \quad (7.18)$$

et :

$$\left(\frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0 \implies \sin\varphi_0 = \frac{r_0}{R_0} \quad (7.19)$$

D'où :

$$n = \sin\varphi_0 \quad \text{et} \quad R(\varphi_0) = \frac{r_0}{n} = N(\varphi_0) \cotg(\varphi_0)$$

7.4 Les Représentations coniques conformes (Lambert)

La condition de conformité ($m_1 = m_2$) s'écrit $m_\varphi = m_\lambda$, soit :

$$\frac{-dR}{\rho d\varphi} = \frac{Rd\Omega}{N \cos\varphi d\lambda} \implies \frac{-N \cos\varphi dR}{R \rho d\varphi} = \frac{d\Omega}{d\lambda}$$

La dernière égalité ne peut être réalisée (le premier membre contient la seule variable φ , le second la seule variable λ) que si chaque membre est égal à la même constante n ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\lambda} = n \\ \frac{-N \cos\varphi dR}{R \rho d\varphi} = n \end{cases} \implies \begin{cases} \Omega = n(\lambda - \lambda_0) \\ R = C e^{-nL} \end{cases} \quad (7.20)$$

avec e la base du logarithme népérien = 2.7182818 et L la latitude isométrique donnée par :

$$L = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e \sin\varphi}{1 - e \sin\varphi} \right) \quad (7.21)$$

où e est la première excentricité de l'ellipsoïde (modèle). On peut calculer le module linéaire m par :

$$m = m_\varphi = m_\lambda = \frac{-dR}{\rho d\varphi} = \frac{nR}{r} \quad (7.22)$$

L'image du pôle $p(\varphi = \pi/2)$ est le point $S(R = 0)$, l'autre est rejeté à l'infini.

7.5 Les Représentations coniques conformes sécantes

Les deux constantes n et C de (7.29) seront déterminées par deux conditions : par exemple en imposant deux parallèles (φ_1) et (φ_2) automécoïques. Alors :

$$n \frac{R_1}{r_1} = n \frac{R_2}{r_2} = 1, \quad \text{avec } R_1 = Ce^{-nL_1}, \quad \text{et } R_2 = Ce^{-nL_2}$$

D'où :

$$n = \frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} \implies \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{e^{-L_2}}{e^{-L_1}} \right)^n$$

Soit :

$$\boxed{n = \frac{\text{Log}(r_2/r_1)}{L_1 - L_2}, \quad C = R_1 e^{nL_1} = R_2 e^{nL_2} = \frac{r_1}{n} e^{nL_1}} \quad (7.23)$$

$C = R(0)$ le rayon graphique de l'équateur.

$R(\varphi)$ s'écrit :

$$\boxed{R = C \left(\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right)^{-n}} \quad (7.24)$$

forme qui justifie le nom d'exposant donné à n .

7.6 Les Représentations conformes tangentes

Dans ce cas, le parallèle automécoïque (φ_0) est double, $m(\varphi_0) = 1$ et :

$$n = \frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} = \frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1} \quad (7.25)$$

C'est-à-dire en faisant simultanément tendre φ_1 et φ_2 vers φ_0 :

$$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_0, \quad \varphi_2 \longrightarrow \varphi_0 \implies n = \frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1} \longrightarrow \left(\frac{dr}{dR} \right)_{\varphi=\varphi_0}$$

Or d'après (7.22) :

$$m(\varphi_0) = 1 = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{-dR}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0}, \quad \text{et} \quad \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = -\rho_0 \sin \varphi_0$$

Par suite, on trouve :

$$\boxed{n = \sin\varphi_0} \quad (7.26)$$

On peut alors écrire :

$$\boxed{\begin{cases} R(\varphi) = R(\varphi_0)e^{-\sin\varphi_0(L-L_0)} \\ \text{avec } R(\varphi_0) = \frac{r_0}{n} = N(\varphi_0)\cotg\varphi_0 \end{cases}} \quad (7.27)$$

7.7 Les représentations sécantes et tangentes de même exposant sont semblables

En effet, soit une représentation conique conforme sécante d'exposant n inférieur à 1. Il existe une valeur $\varphi_0 = \text{Arcsin}(n)$ c'est-à-dire $n = \sin\varphi_0$. La représentation tangente de même exposant n ne diffère de la représentation sécante que par la valeur de la constante C :

- représentation sécante : $R(\varphi_s) = C_s e^{-nL}$;
- représentation tangente : $R(\varphi_t) = C_t e^{-nL}$;
- et les angles polaires sont égaux : $\Omega_s = \Omega_t = n\lambda$.

L'une des représentations se déduit de l'autre par une simple homothétie : on obtient la représentation sécante, par exemple, en multipliant $R(\varphi_t)$ par la constante $k = C_s/C_t$ (facteur d'homothétie, souvent désigné par facteur d'échelle).

On peut ainsi établir une représentation sécante à partir d'une représentation tangente. Le module linéaire vaut $m(\varphi) = n.R/r$ en choisissant $k < 1$, on obtient $m(\varphi_0) = k < 1$ ce qui diminue la valeur absolue de l'altération linéaire dans le champ de la représentation considérée.

7.8 Les Représentations coniques équivalentes

La condition d'équivalence $m_1 m_2 = 1$ s'écrit :

$$\frac{-dR}{\rho d\varphi} \cdot \frac{Rd\Omega}{N \cos\varphi d\lambda} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{-\rho N \cos\varphi d\varphi}{RdR} \quad (7.28)$$

L'égalité ne peut avoir lieu que si et seulement si :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{-\rho N \cos\varphi d\varphi}{RdR} = n$$

n étant une constante, on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\lambda} = n \\ nRdR = -\rho N \cos\varphi d\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} \Omega = n\lambda \\ \frac{1}{2}nR^2 = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho N \cos\varphi d\varphi \end{cases} \quad (7.29)$$

Définition 7.1 On appelle latitude équivalente la quantité :

$$L_{eq} = \int_0^{\varphi} \rho N \cos\varphi d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2\varphi)^2} \cos\varphi d\varphi \quad (7.30)$$

Elle s'écrit sous la forme :

$$\boxed{L_{eq} = \int_0^{\varphi} \rho N \cos\varphi d\varphi = a^2(1-e^2) \frac{1}{4e} \left(\text{Log} \left(\frac{1+e \sin\varphi}{1-e \sin\varphi} \right) + \frac{2e \sin\varphi}{1-e^2 \sin^2\varphi} \right)} \quad (7.31)$$

Les équations (7.29) sont les équations de la représentation courante pour les cartes civiles du continent nord-américain (dite représentation d'Albers [14],[15] avec deux parallèles automécoïques).

7.8.1 Cas de la sphère avec un rayon unité

Dans ce cas, les équations (7.29) deviennent :

$$\begin{cases} \Omega = n\lambda \\ \frac{1}{2}nR^2 = C - \sin\varphi \end{cases} \quad (7.32)$$

Les deux paramètres n et C peuvent être déterminés en imposant deux conditions.

7.8.1.1 La représentation sécante

Si φ_1 et φ_2 sont les latitudes des parallèles automécoïques, alors on a :

$$m_{\varphi_1} = m_{\varphi_2} = 1 \implies n \frac{R_1}{\cos \varphi_1} = n \frac{R_2}{\cos \varphi_2} = 1 \quad (7.33)$$

Par suite :

$$n = \frac{\cos \varphi_1}{R_1} = \frac{\cos \varphi_2}{R_2} \Rightarrow n^2 = \frac{\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{n}{2} \frac{\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}$$

d'où :

$$n = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{2} \quad (7.34)$$

$$C = \frac{1}{2} n R_1^2 + \sin \varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi_1}{n} n R_1^2 = \frac{1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2} \quad (7.35)$$

7.8.1.2 La représentation tangente

φ_0 étant la latitude du parallèle automécoïque double, en faisant tendre φ_1 et φ_2 vers φ_0 , on obtient :

$$\begin{cases} n = \sin \varphi_0 \\ C = \frac{1 + \sin^2 \varphi_0}{2 \sin \varphi_0} \end{cases} \quad (7.36)$$

avec :

$$m_{\varphi_0} = 1 = n \frac{R(\varphi_0)}{\cos \varphi_0} \Rightarrow R(\varphi_0) = \cot g(\varphi_0) \quad (7.37)$$

La représentation est ainsi définie par les deux équations :

$$\begin{cases} \Omega = \lambda \sin \varphi_0 \\ R(\varphi) = \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi_0} - 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (7.38)$$

On obtient alors :

$$m_\varphi = \sin \varphi_0 \frac{R(\varphi)}{\cos \varphi} \quad \text{et} \quad m_\lambda = \frac{\cos \varphi}{R(\varphi) \sin \varphi_0} \quad (7.39)$$

L'expression de $R(\varphi)$ montre que le rayon graphique du parallèle de latitude φ est égal à la longueur du segment iS joignant le point $i(\varphi)$ et le point S sommet du cône tangent à la sphère le long du parallèle φ_0 . L'image du pôle p

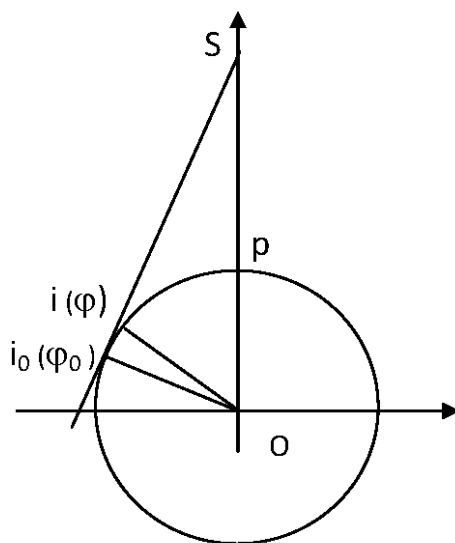


Fig. 7.2 La représentation tangente

est un arc de cercle de rayon :

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - \sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}$$

Il suffit de remplacer $\varphi = \pi/2$ dans l'expression de $R(\varphi)$ dans (7.38).

7.8.2 Représentation où l'image du pôle est un point

* Si on impose comme première condition : l'image du pôle est ponctuelle, c'est-à-dire $C = 1$, on ne dispose que d'une autre condition pour déterminer n . Quelle que soit C , on peut écrire : $\frac{1}{2}nR^2(\pi/2) = C - \sin(\pi/2)$ soit $\frac{1}{2}nR^2(\pi/2) = C - 1$, d'où l'expression de R :

$$R^2(\varphi) = R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{n}(1 - \sin\varphi) = R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Si l'image du pôle est un point donc $R(\pi/2) = 0 \Leftrightarrow C = 1$, d'où :

$$R^2(\varphi) = \frac{4}{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (7.40)$$

* Si on impose (cas des atlas anglais et allemands) la condition supplémentaire : le parallèle φ_0 est automécoïque (simple) : or $m_\varphi = n \frac{R(\varphi)}{\cos(\varphi)} \Rightarrow m_{\varphi_0} = n \frac{R(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)} = 1 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\cos\varphi_0}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)$

Par suite :

$$n = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{1 + \sin\varphi_0}{2} \quad (7.41)$$

(Résultat qu'on obtient immédiatement, d'après 7.8.1.1 en disant que la représentation admet comme parallèles automécoïques le parallèle φ_0 et le parallèle de rayon nul c'est-à-dire le pôle).

* Si on impose (cas Lambert) la condition supplémentaire $R(\varphi_0) = \cotg(\varphi_0)$, alors on obtient :

$$\sqrt{n} = \frac{\cos\varphi_0}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right) = 2\text{tg}\varphi_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right) \quad (7.42)$$

n n'est pas égal à $\sin\varphi_0$ comme dans la représentation tangente. Le pôle est automécoïque et il existe un parallèle automécoïque de latitude φ_1 tel que :

$$\sqrt{n} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (7.43)$$

7.9 Exercices et Problèmes

Problème 7.1 Soit \mathcal{S}^2 une sphère de rayon a comme modèle de la Terre. On considère l'aspect direct de la représentation de Lorgne [16] définie par :

$$M \in \mathcal{S}^2 \longrightarrow m(\gamma, \mathcal{R}) \in xPy / \begin{cases} \gamma = \lambda \\ \mathcal{R} = 2a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

1 - A partir de la valeur de l'angle $PP'M$, montrer que $PM = \mathcal{R} = 2a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$.

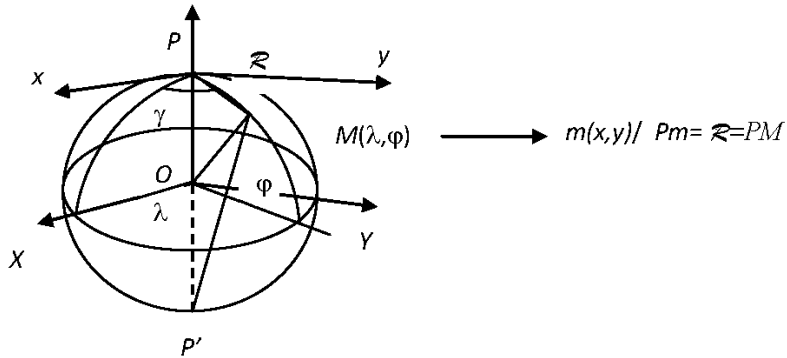


Fig. 7.3 Aspect direct de la représentation de Lorgne

2 - En déduire que les coordonnées cartésiennes (x, y) de m image de M sont :

$$\begin{cases} x = 2a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\lambda \\ y = 2a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\lambda \end{cases}$$

3 - Calculer le carré du module linéaire $K^2(\lambda, \varphi)$.

4 - Donner les expressions des modules linéaires K_φ le long d'un méridien et K_λ le long d'un parallèle. En déduire le type de la représentation plane de Lorgne.

On étudie maintenant l'aspect transverse de la représentation de Lorgne.

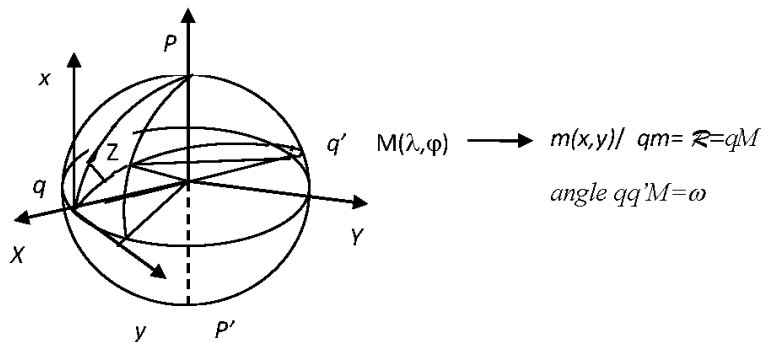


Fig. 7.4 Aspect transverse de la représentation de Lorgne

5 - A l'aide des formules de la trigonométrie sphérique dans le triangle sphérique qPM , déterminer les relations liant λ, φ avec Z, ω .

6 - Montrer que les coordonnées de l'image de M sont :

$$\begin{cases} x = 2a \sin \frac{\omega}{2} \cdot \sin Z = a\sqrt{2} \frac{\sin \omega \sin Z}{\sqrt{1 + \cos \omega}} \\ y = 2a \sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos Z = a\sqrt{2} \frac{\sin \omega \cos Z}{\sqrt{1 + \cos \omega}} \end{cases}$$

7 - Montrer que les coordonnées (x, y) s'écrivent en fonction de λ et φ comme suit :

$$\begin{cases} x = a\sqrt{2} \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}} \\ y = a\sqrt{2} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}} \end{cases}$$

8 - Montrer que les images des méridiens ($\lambda = \text{constante}$) sont des courbes $f(x, y, \lambda) = 0$ de 4ème degré.

9 - Montrer que les images des parallèles ($\varphi = \text{constante}$) sont les courbes $g(x, y, \varphi)$ telles que :

$$g(x, y, \varphi) = (2a^2 \sin^2 \varphi - y^2)^2 + x^2 y^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - y^4 \cos^2 \varphi = 0$$

LA REPRÉSENTATION PLANE LAMBERT TUNISIE

8.1 Définition et Propriétés

La représentation plane Lambert est une représentation conique, conforme et directe d'un modèle ellipsoïdique :

- conique : on utilise les coordonnées polaires R et Ω ;
- conforme : conservation des angles ou l'altération angulaire est nulle ;
- directe : les coordonnées polaires sont des fonctions de la forme :

$$\begin{array}{l} R = R(\varphi) \\ \Omega = \Omega(\lambda) \end{array}$$

où (φ, λ) sont les coordonnées d'un point sur le modèle ellipsoïdique de référence.

Pour la Tunisie, il a été choisi le cas de la représentation tangente c'est-à-dire on utilise un seul parallèle origine. Dans ce chapitre, on va étudier en détail le cas de la représentation Lambert en Tunisie.

Une interprétation de la représentation plane Lambert est comme suit :

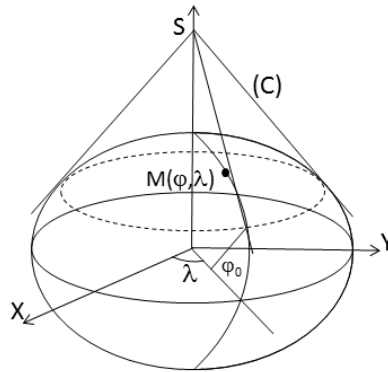


Fig. 8.1 Interprétation géométrique

- on considère un cône (C) (**Fig. 8.1**) de sommet S tangent au parallèle origine de latitude φ_0 de l'ellipsoïde de référence \mathcal{E} . A un point $M(\varphi, \lambda)$ de \mathcal{E} , on lui fait correspondre son image m sur la demi-droite d'origine S tangente à la méridienne de longitude λ et au parallèle origine.

- on développe le cône (C) sur le plan, on obtient l'image d'une portion de l'ellipsoïde (**Fig. 8.2**). Les images des parallèles sont des arcs de cercles concen-

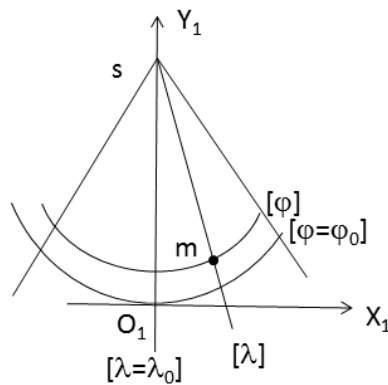


Fig. 8.2 Images des parallèles et des méridiens

triques de centre s , l'image du sommet du cône (C) , celles des méridiens sont

des droites concordantes passant par s (**Fig. 8.2**).

Les courbes coordonnées $\varphi = \text{constante}$ et $\lambda = \text{constante}$ sur le modèle sont orthogonales et leurs images le sont aussi dans le plan.

8.2 Indicatrice de Tissot

D'après la propriété précédente des courbes coordonnées, on déduit que les directions principales sont les tangentes au méridien et au parallèle passant par le point.

La représentation est conforme, par suite l'altération angulaire est nulle, l'indicatrice de Tissot est un cercle et le module linéaire ne dépend pas de la direction, mais seulement du point et on a l'équivalence :

$$\boxed{\text{Altération angulaire nulle} \Leftrightarrow m_\varphi = m_\lambda \Leftrightarrow \forall \delta, m_\delta = m}$$

où δ désigne 'la direction'.

8.3 Calcul des modules principaux

On commence par le calcul du module m_φ . Par définition :

$$m_\varphi = \frac{dS}{ds}$$

avec dS pris sur l'image de la méridienne et ds sur la méridienne du modèle, or $ds = \rho d\varphi$ et $dS = -dR$, le signe - provient du fait que les déplacements infinitésimaux dR et $d\varphi$ sont de signes contraires. On note par ρ le rayon de courbure, d'où :

$$\boxed{m_\varphi = \frac{dS}{ds} = \frac{-dR}{\rho d\varphi}}$$

Maintenant on calcule le module principal m_λ , on a :

$$\boxed{m_\lambda = \frac{dS}{ds} = \frac{Rd\Omega}{rd\lambda}}$$

avec $r = N \cdot \cos \varphi$ le rayon du parallèle de latitude φ .

8.4 Etablissement des Formules $R(\varphi)$ et $\Omega(\lambda)$

Comme on a :

$$m_\lambda = m_\varphi$$

d'où :

$$\frac{Rd\Omega}{rd\lambda} = \frac{-dR}{\rho d\varphi} \implies \frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{-rdR}{\rho R d\varphi}$$

Le terme à gauche est une fonction de λ seulement car Ω ne dépend que de λ , le terme à droite est fonction de φ seulement, donc l'égalité est toujours vérifiée que si les deux termes sont constants, on appelle n cette constante, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\lambda} &= n \\ \frac{-rdR}{\rho R d\varphi} &= n \end{aligned}$$

Par suite, en intégrant la première équation et prenant $\Omega(\lambda_0) = 0$ avec λ_0 la longitude du méridien origine, on obtient :

$$\boxed{\Omega = n(\lambda - \lambda_0)} \quad (8.1)$$

La deuxième équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{dR}{R} = \frac{-n\rho d\varphi}{r} = \frac{-n\rho d\varphi}{N \cos \varphi} = -n dL \quad (8.2)$$

avec :

$$dL = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} \quad (8.3)$$

La variable L appelée la latitude isométrique donnée par la formule :

$$\boxed{L(\varphi) = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)} \quad (8.4)$$

En effet, calculant une primitive de $\frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$ en considérant φ n'atteint pas les valeurs extrêmes $\pm \frac{\pi}{2}$, soit :

$$\begin{aligned} \int \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} &= \int \frac{(1-e^2)d\varphi}{\cos \varphi(1-e^2 \sin^2 \varphi)} = \int \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi)d\varphi}{\cos \varphi(1-e^2 \sin^2 \varphi)} = \\ &= \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \int \frac{e^2 \cos \varphi d\varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - e \int \frac{du}{1-u^2} = \\ \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1+u}{1-u} &= \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} + C \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variables suivant $u = e \sin \varphi$ avec $|u| < 1$. Par suite en prenant l'intégrale entre la latitude origine $\varphi = 0$ et la latitude φ et que $L(0) = 0$, on retrouve la formule donnée par (8.4) où e est la première excentricité de l'ellipsoïde de référence.

On revient à l'équation (8.2) :

$$\frac{dR}{R} = \frac{-n\rho d\varphi}{r} = \frac{-n\rho d\varphi}{N \cos \varphi} = -ndL$$

En posant :

$$L_0 = L(\varphi_0)$$

où φ_0 est la latitude du parallèle origine, l'intégration de (8.2) donne :

$$\text{Log} \frac{R}{R_0} = -n(L - L_0) \implies \boxed{R = R_0 \exp(-n(L - L_0)) = R_0 e^{-n(L - L_0)}} \quad (8.5)$$

8.5 Détermination des Constantes R_0 et n

Pour déterminer les constantes R_0 et n , on impose que le parallèle origine soit un isomètre automécoïque et stationnaire, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} m(\varphi_0) &= 1 \\ \text{et} \left(\frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} &= 0 \end{aligned}$$

soit le module linéaire admet un minimum égal à $m(\varphi_0)$. Comme :

$$m = m_\varphi = m_\lambda = \frac{-dR}{\rho d\varphi}$$

et :

$$dR = -nR dL = -nR \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} \quad (8.6)$$

D'où l'expression du module linéaire :

$$m = \frac{nR}{N \cos \varphi} = \frac{nR_0 e^{-n(L-L_0)}}{N \cos \varphi} \quad (8.7)$$

Pour $\varphi = \varphi_0$, on a :

$$m(\varphi_0) = 1 = \frac{nR_0}{N_0 \cos \varphi_0} \Rightarrow \boxed{nR_0 = N_0 \cos \varphi_0} \quad (8.8)$$

On pose :

$$r = N \cos \varphi$$

Le calcul de $\frac{dr}{d\varphi}$ donne :

$$\frac{dr}{d\varphi} = N'_\varphi \cos \varphi - N \sin \varphi \quad (8.9)$$

comme :

$$N = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$$

on obtient :

$$N'_\varphi = \frac{e^2 N \sin \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

On a alors :

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{e^2 N \sin \varphi \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - N \sin \varphi = N \sin \varphi \left(\frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - 1 \right)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-(1 - e^2) N \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

Or :

$$\rho = \frac{(1 - e^2) N}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

Par suite :

$$\boxed{\frac{dr}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi} \quad (8.10)$$

On revient à l'équation (8.7) : $m = nR/r$ et en prenant sa différentielle logarithmique, d'où le résultat :

$$\frac{dm}{m} = \frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}$$

En utilisant les équations (8.6) et (8.7), on obtient :

$$\frac{dm}{m} = \frac{-n\rho d\varphi}{r} + \frac{\rho \sin\varphi d\varphi}{r} = (n - \sin\varphi) \frac{\rho d\varphi}{r}$$

Soit :

$$\frac{dm}{d\varphi} = (n - \sin\varphi) \frac{m\rho}{r} \quad (8.11)$$

Et pour $\varphi = \varphi_0$, on a :

$$\frac{dm}{d\varphi}_{\varphi_0} = 0 \Rightarrow (n - \sin\varphi_0) \frac{m(\varphi_0)\rho_0}{r(\varphi_0)} = 0$$

D'où :

$$\boxed{n = \sin\varphi_0} \quad (8.12)$$

L'équation (8.8) s'écrit donc :

$$\boxed{R_0 = N(\varphi_0) \cotg\varphi_0 = N_0 \cotg\varphi_0} \quad (8.13)$$

d'où les équations de la représentation plane Lambert :

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega &= (\lambda - \lambda_0) \sin\varphi_0 \\ R &= N_0 \cotg\varphi_0 e^{-\sin\varphi_0(L-L_0)} \end{aligned}} \quad (8.14)$$

avec :

$$L(\varphi) = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e \sin\varphi}{1 - e \sin\varphi} \right)$$

L'expression du module linéaire est égale à :

$$\boxed{m(\varphi) = \frac{\sin\varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi) \cos\varphi}} \quad (8.15)$$

8.6 Expression des Coordonnées Cartésiennes

Dans ce paragraphe, on va décrire les coordonnées cartésiennes en fonction de (Ω, R) . Soit un point $M(\varphi, \lambda)$ ayant pour coordonnées polaires (Ω, R) .

On considère un système d'axes (O, x, y) qu'on nomme repère origine, tel que l'axe Ox est la tangente à l'image du parallèle origine au point O dirigé vers l'Est et Oy est porté par l'image du méridien origine dirigé vers le Nord (**Fig. 8.3**). Soit le point S de Oy avec $OS = R_0$, on a alors :

$$\begin{aligned}x_M &= R \sin \Omega \\y_M &= R_0 - R \cos \Omega\end{aligned}$$

ou encore :

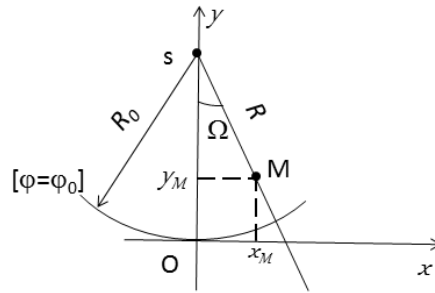


Fig. 8.3 Le repère origine

$$\begin{aligned}x_M &= R \sin((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \\y_M &= R_0 - R \cos((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0)\end{aligned} \quad (8.16)$$

avec λ comptée positivement à l'Est du méridien origine des longitudes.

8.7 Passage des Coordonnées (R, Ω) aux Coordonnées (x, y)

Ayant (φ, λ) et φ_0, λ_0 , on calcule :

$$\begin{aligned}\Omega &= (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 \\L(\varphi) &= \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \\R_0 &= N_0 \cotg \varphi_0 \\R &= R_0 \exp(-\sin \varphi_0 (L - L_0)) \\x &= R \sin \Omega \\y &= R_0 - R \cos \Omega\end{aligned}$$

8.8 Passage des Coordonnées (x, y) aux Coordonnées (R, Ω)

On donne φ_0 et λ_0 et ayant (x, y) , on calcule :

$$\begin{aligned} R_0 &= N_0 \cotg \varphi_0 \\ R \cos \Omega &= R_0 - y \end{aligned}$$

Comme :

$$x = R \sin \Omega$$

d'où :

$$\tg \Omega = \frac{x}{R_0 - y}$$

Par suite :

$$\Omega = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 = \text{Arctg} \left(\frac{x}{R_0 - y} \right)$$

D'où :

$$\boxed{\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\sin \varphi_0} \text{Arctg} \left(\frac{x}{R_0 - y} \right)} \quad (8.17)$$

De :

$$y = R_0 - R \cos \Omega$$

on obtient :

$$R = \frac{R_0 - y}{\cos \Omega}$$

Et de :

$$R = R_0 \exp(-\sin \varphi_0 (L - L_0)) \Rightarrow \text{Log} \frac{R}{R_0} = -\sin \varphi_0 (L - L_0)$$

d'où :

$$\boxed{L = L_0 + \frac{1}{\sin \varphi_0} \text{Log} \frac{R_0}{R}} \quad (8.18)$$

Le problème devient à calculer φ à partir de la donnée de la latitude isométrique L . Ce calcul se fait par itérations comme suit :

1. Ayant L , on calcule φ_1 telle que $L = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)$.
2. On calcule φ_2 telle que $L + \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e \sin \varphi_1}{1 - e \sin \varphi_1} \right) = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)$.
3. On réitère le processus jusqu'à ce que $|\varphi_{i+1} - \varphi_i| < \alpha$ où α une petite quantité fixée à l'avance.

8.9 Etude de l'Altération Linéaire

L'altération linéaire est définie par :

$$\boxed{\epsilon = m - 1} \quad (8.19)$$

où m est le module linéaire. Le développement limité du module linéaire au voisinage de φ_0 s'écrit :

$$m(\varphi) = m(\varphi_0) + (\varphi - \varphi_0) \left(\frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} + o((\varphi - \varphi_0)^3)$$

Or :

$$m(\varphi_0) = 1 \text{ et } \left(\frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

car le parallèle $\varphi = \varphi_0$ est un isomètre automécoïque et stationnaire, d'où :

$$m(\varphi) = 1 + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} + o((\varphi - \varphi_0)^3) \quad (8.20)$$

On est amené à calculer la valeur de la dérivée seconde de m pour $\varphi = \varphi_0$. Or l'équation (8.11) donne l'expression de m'_φ . On dérive m'_φ .

$$\frac{d^2m}{d\varphi^2} = \frac{dm'_\varphi}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{m\rho}{r} (\sin\varphi - n) \right] = \frac{m\rho}{r} \cos\varphi + (\sin\varphi - n) \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{m\rho}{r} \right) \quad (8.21)$$

d'où :

$$\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} = \frac{\cos\varphi_0 m(\varphi_0) \rho(\varphi_0)}{r(\varphi_0)} = \frac{\rho_0}{N_0} \quad (8.22)$$

car $n = \sin\varphi_0$ et $m(\varphi_0) = 1$. (8.20) devient :

$$m(\varphi) = 1 + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \frac{\rho_0}{N_0} + o((\varphi - \varphi_0)^3) = 1 + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \frac{\rho_0^2}{\rho_0 N_0} + o((\varphi - \varphi_0)^3)$$

En posant :

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$$

on a alors :

$$\boxed{m(\varphi) = 1 + \frac{1}{2N_0\rho_0} (\rho_0\Delta\varphi)^2 + o(\Delta\varphi^3)} \quad (8.23)$$

Or $\rho_0\Delta\varphi = \rho_0(\varphi - \varphi_0)$ la distance approchée du point $M(\varphi, \lambda)$ au parallèle origine $\varphi = \varphi_0$, d'où l'expression de l'altération linéaire :

$$\epsilon = m - 1 = \frac{1}{2N_0\rho_0}(\rho_0\Delta\varphi)^2 = \frac{\ell^2}{2N_0\rho_0} \quad (8.24)$$

où ℓ est la distance du point au parallèle origine.

8.9.1 Calculs numériques

On considère comme exemple numérique le cas de la représentation Lambert Nord Tunisie ayant comme parallèle origine $\varphi_0 = 40.0\text{ gr}$ et l'ellipsoïde de référence est celui de Clarke Français 1880.

On a donc les valeurs numériques du module et l'altération linéaires comme suit :

$$\begin{aligned} m(\varphi_0) &= 1 \implies \epsilon = 0 \\ m(42.5\text{ gr}) &= 1.000\,775\,720 \implies \epsilon = 7.75720 \times 10^{-4} \\ m(37.5\text{ gr}) &= 1.000\,760\,827 \implies \epsilon = 7.60827 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Soit une distance de 1000 m sur le parallèle origine, elle se transforme à 1000 m sans altération. Une distance de 1000 m sur le parallèle $\varphi = 42.5\text{ gr}$ devient une distance de 1000.776 m sur le plan, de même une distance de 1000 m sur le parallèle $\varphi = 37.5\text{ gr}$ devient une distance de 1000.761 m sur le plan.

Pour réduire les altérations linéaires, on multiplie le module linéaire par un coefficient k dit facteur de réduction de l'échelle. Le module linéaire devient alors :

$$m' = k.m = \frac{k \sin \varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi) \cos \varphi} \quad (8.25)$$

Par suite, les modules linéaires et les altérations correspondantes deviennent (Cas de la Tunisie, le facteur $k = k_N$ est égal à $0.999\,625\,544$) :

$$\begin{aligned} m'(\varphi_0) &= 0.999\,625\,544 \Rightarrow \epsilon = -0.000\,009\,460 \\ m'(42.5\text{ gr}) &= 1.000\,400\,974 \Rightarrow \epsilon = +0.400\,974 \times 10^{-3} \\ m'(37.5\text{ gr}) &= 1.000\,386\,086 \Rightarrow \epsilon = +0.386\,086 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Sur le parallèle $\varphi = 42.5\text{ gr}$, l'altération linéaire pour 1000 m est passée de $+0.776\text{ m}$ à $+0.401\text{ m}$, d'où réduction des altérations.

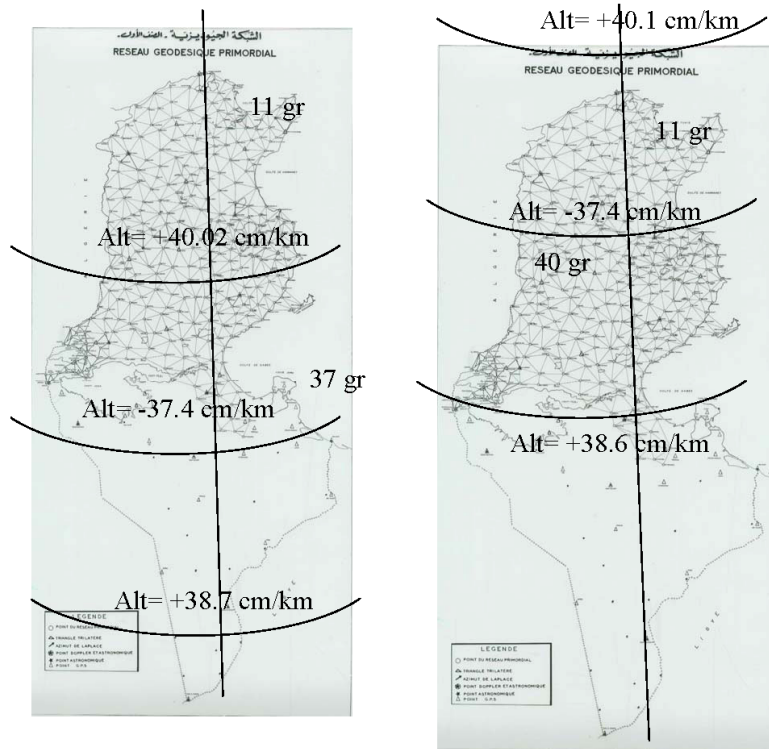


Fig. 8.4 Les variations de l'altération linéaire pour les représentations Lambert Nord Tunisie (d) et Sud Tunisie (g)

Avec l'introduction du facteur de réduction de l'échelle, les formules (8.16) des coordonnées rectangulaires (x, y) s'écrivent :

$$\begin{cases} x_M = kR \sin((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \\ y_M = k(R_0 - R \cos((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0)) \end{cases} \quad (8.26)$$

Pour obtenir des coordonnées rectangulaires positives, on définit un repère (O', X, Y) tels que $O'X$ et $O'Y$ soient dirigés respectivement vers l'Est et le Nord (**Fig. 8.5**) et que :

$$\begin{cases} X = Constante X + x_M \\ Y = Constante Y + y_M \end{cases} \quad (8.27)$$

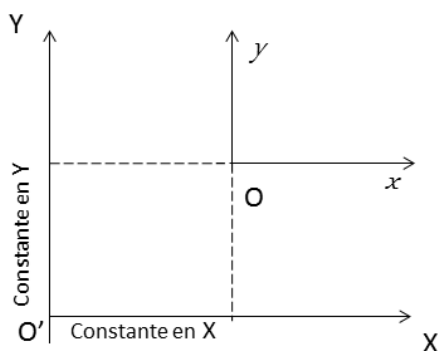


Fig. 8.5 Le repère (O', X, Y)

Les quantités *Constante X* et *Constante Y* sont respectivement les constantes de translation en X (*Est*) et en Y (*Nord*) exprimées en mètres.

8.9.2 Expression des Coordonnées Cartésiennes Translatées (X, Y)

Les expressions des coordonnées cartésiennes (X, Y) des représentations planes Lambert Tunisie (Nord et Sud) dites coordonnées translatées se diffèrent des formules (8) et (7) par un facteur d'échelle k et une translation, comme suit :

$$X = 500\,000,00 + k.R\sin((\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0) \quad (8.28)$$

$$Y = 300\,000,00 + k.(R_0 - R.\cos((\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0)) \quad (8.29)$$

Nous donnons ci-dessous les éléments de définition des deux représentations planes Lambert Tunisie.

8.9.3 Les Eléments de définition du Lambert Nord Tunisie

Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français ($a = 6378249.200m$, $b = 6356515.000m$ et $e^2 = 0.0068034877$)

Latitude parallèle origine = $\varphi_0 = 40gr = 36^\circ$,

Longitude méridien origine = $\lambda_0 = 11gr$ Est Greenwich = $9^\circ 54'$,

Facteur d'échelle = $k_N = 0.999625544$,

Constante translation $X = 500000.00m$,

Constante translation $Y = 300000.00m$,

Amplitude de la latitude = $37.5gr < \varphi < 42.5gr$.

8.9.4 Les Eléments de définition du Lambert Sud Tunisie

Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français ($a = 6378249.200m$, $b = 6356515.000m$ et $e^2 = 0.0068034877$)

Latitude parallèle origine = $\varphi_0 = 37gr = 33^\circ 18'$,

Longitude méridien origine = $\lambda_0 = 11gr$ Est Greenwich = $9^\circ 54'$,

Facteur d'échelle = $k_S = 0.999625769$,

Constante translation $X = 500000.00m$,

Constante translation $Y = 300000.00m$,

Amplitude de la latitude = $34.5gr < \varphi < 39.5gr$.

8.9.5 Calcul de la réduction de la corde

Sur le terrain, on observe une direction AB , la visée AB est très voisine de la géodésique AB . Sa transformée sur le plan de la représentation n'est pas une droite, mais une courbe tournant sa concavité vers l'image du parallèle origine (**Fig. 8.6**).

On observe la direction AB c'est-à-dire l'arc ab . Pour passer de l'arc ab à la corde \overline{ab} , on apporte une correction à la lecture de la direction AB ou \overline{ab} . Cette correction est appelée la correction de réduction à la corde. Elle est donnée par

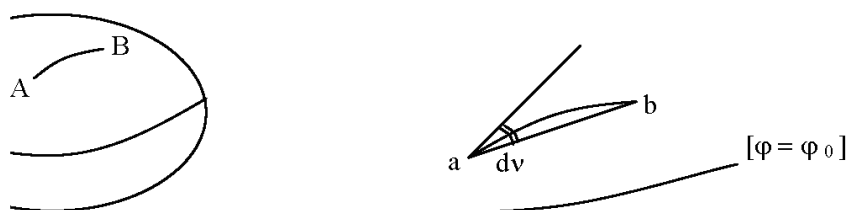


Fig. 8.6 Réduction à la corde

la formule :

$$Dv = \frac{S}{2} \Gamma \left(\frac{S}{3} \right) \quad (8.30)$$

où S représente la longueur AB , $\Gamma \left(\frac{S}{3} \right)$ est la courbure de la transformée de la géodésique AB prise au $1/3$ de la distance de A vers B .

En utilisant la formule de Schols-Laborde¹ donnant la courbure de la transformée d'une géodésique, on démontre que :

$$Dv^{(dmgr)} = K \cdot d\lambda \quad (8.31)$$

avec $d\lambda$ égale à la différence de longitude en km des 2 extrémités de la visée AB et K vaut :

$$K = \frac{1}{2} \frac{(R_0 - R)_{1/3}}{N(\varphi_0) \rho(\varphi_0) \sin 1''} \quad (8.32)$$

où $(R_0 - R)$, $N(\varphi_0)$ et $\rho(\varphi_0)$ en km .

8.10 Convergence des méridiens

Pour passer de l'azimut géodésique sur le modèle ellipsoïdique de la direction M_1M_2 au gisement m_1m_2 sur le plan de la représentation, on a la formule algébrique :

$$G = Az - \gamma + Dv \quad (8.33)$$

1. **Jean Laborde** : colonel de l'armée française et géodésien cartographe. Il a défini la représentation plane qui porte son nom (représentation conforme cylindrique oblique). Celle-ci a été appliquée pour le Madagascar.

avec γ le gisement de l'image du méridien avec son signe positif ou négatif. Or l'image d'un méridien est une droite qui coupe l'axe Ox (du nord) sous l'angle $\Omega = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0$, par suite :

$$\boxed{\gamma = \Omega = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0 = \text{convergence des méridiens}} \quad (8.34)$$

8.11 Exercices et Problèmes

Exercice 8.1 En un point A de coordonnées géodésiques $\varphi = 40.9193\text{gr}$ et $\lambda = 11.9656\text{gr}$ à l'Est de Greenwich, on vise un point B.

1. Calculer les coordonnées planes Lambert du point A, sachant que $\varphi_0 = 40.00\text{gr}$ et $\lambda_0 = +11.00\text{gr}$.
2. L'azimut géodésique de la direction AB est $Az_g = 55.7631\text{gr}$. Sachant que $Dv = 1.52\text{dmgr}$, calculer G le gisement de la direction AB.
3. La distance AB réduite à l'ellipsoïde de référence est $D_e = 5421.32\text{m}$. Sachant que l'altération linéaire dans la région des points A et B vaut -9cm/km , calculer la distance AB réduite au plan.

Exercice 8.2 D'après les coordonnées de deux points A et B vous trouvez la distance $AB = 5427.380\text{m}$. Sachant que :

- a - l'altération linéaire de la représentation dans la région de AB vaut $+8.10^{-5}$;
- b - les altitudes des points A et B sont : $H_A = 1000.00\text{m}$ et $H_B = 1200.00\text{m}$. Calculer la distance suivant la pente D_P entre les points A et B matérialisés sur le terrain.

Problème 8.1 On désire étudier les variations du module linéaire m de la représentation Lambert tangente en fonction de la latitude $\varphi \in [0, +\frac{\pi}{2}]$.

1. Donner l'expression de $m(\varphi)$.
2. Montrer que $m(0)$ est une quantité finie positive que l'on calculera.
3. Montrer que pour $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, m devient une forme indéterminée qu'on précisera.
4. On pose $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ et $m(\varphi) = M(\theta)$. Donner l'expression de $M(\theta)$.

5. Montrer qu'on peut écrire $M(\theta) = A(\theta) \cdot u$ où A est une fonction de θ prenant une valeur finie positive non nulle quand $\theta \rightarrow 0^+$ et u donnée par :

$$u = \frac{\exp\left(\sin\varphi_0 \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta}$$

avec φ_0 la latitude du parallèle origine.

6. On pose $t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. Montrer que u s'écrit :

$$u = \frac{1+t^2}{2t^{1-\sin\varphi_0}}$$

et que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u = +\infty$.

7. En déduire la limite de $m(\varphi)$ quand $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$.

8. Donner l'expression de $\frac{dm}{d\varphi}$ et présenter le tableau de variation de $m(\varphi)$ pour le cas où $\varphi_0 = +40 \text{ gr}$.

Problème 8.2 On a mesuré une distance suivant la pente entre les points $A(H_A = 1319.79 \text{ m})$ et $B(H_B = 1025.34 \text{ m})$ avec $D_P = 16483.873 \text{ m}$.

1. Calculer la distance D_e distance réduite à l'ellipsoïde de référence par la formule rigoureuse, on prendra le rayon de la Terre $R = 6378 \text{ km}$.

2. Calculer la distance D_r réduite à la représentation plane Lambert si l'altération linéaire de la zone est de -14 cm/km .

3. La direction AB a un azimut géodésique $Az_g = 297.56225 \text{ gr}$. Donner l'expression du gisement G de AB en fonction de Az_g, γ la convergence des méridiens et Dv la correction de la corde, sachant que la représentation plane Lambert utilisée a comme $\varphi_0 = 37 \text{ gr}, \lambda_0 = +11.00 \text{ gr}$ que le point A est au nord du parallèle origine.

4. On donne $Dv = -13.7 \text{ dmgr}$ et $\lambda = 9.3474734 \text{ gr}$ la longitude de A , calculer G .

5. En déduire les coordonnées (X_B, Y_B) de B si $X_A = 363044.79 \text{ m}$ et $Y_A = 407020.09 \text{ m}$.

6. Déterminer les coordonnées géographiques (φ, λ) de B .

On rappelle que : $a = 6378249.20 \text{ m}$ et $e^2 = 0.0068034877$.

CHAPITRE 9

LES REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES

9.1 Les Représentations cylindriques directes

Les images des parallèles sont des droites parallèles à l'axe des X par exemple ; celles des méridiens des droites parallèles à l'axe des Y . Les coordonnées rectangulaires de l'image I du point $i(\varphi, \lambda)$ sont donc de la forme :

$$\begin{cases} X = X(\lambda) \\ Y = Y(\varphi) \end{cases} \quad (9.1)$$

Les directions principales sont, dans le plan, parallèles aux axes des coordonnées et les modules linéaires principaux sont :

$$\begin{aligned} m_1 = m_\varphi &= \frac{dX}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{dX}{rd\lambda} \\ m_2 = m_\lambda &= \frac{dY}{\rho d\varphi} = \frac{dY}{d\beta} \end{aligned} \quad (9.2)$$

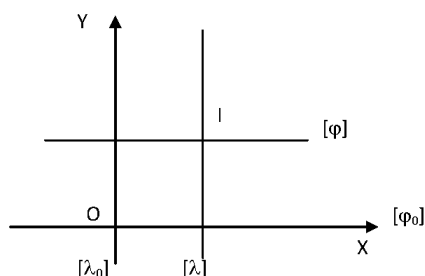


Fig. 9.1 La représentation cylindrique directe

9.1.1 Représentations cylindriques directes équidistantes

Par définition, tous les méridiens sont automécoïques, c'est-à-dire $\forall \lambda, m_\lambda = 1$. Donc $dY = d\beta \Rightarrow Y = \beta - \beta_0$. Pour la sphère de rayon unité, on obtient $Y = \varphi - \varphi_0$ et X est une fonction arbitraire de λ . On peut choisir la fonction la plus simple (fonction linéaire), on a donc :

$$X = A(\lambda - \lambda_0) \quad (9.3)$$

$$Y = \varphi - \varphi_0 \quad (9.4)$$

Par suite, l'expression du module linéaire m_φ :

$$m_\varphi = m_1 = \frac{dX}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{A}{N \cos \varphi} = \frac{A}{r} \quad (9.5)$$

Pour la sphère :

$$m_\varphi = \frac{A}{\cos \varphi} \quad (9.6)$$

* Si $A < 1$, la représentation de la sphère est sécante : elle admet deux parallèles automécoïques $\varphi_0 = \text{Arccos}(A)$ et $-\varphi_0$.

* Si $A = 1$, la représentation est tangente (équateur automécoïque).

Les conclusions sont identiques pour l'ellipsoïde.

La représentation tangente est dite "carte plate carrée", la représentation sécante est dite "carte plate rectangulaire".

Les pôles sont singuliers : leurs images sont des segments de droite.

9.2 Les Représentation cylindriques directes conformes (Mercator)

9.2.1 Condition de conformité

La condition de conformité est donnée par $m_1 = m_2 \Rightarrow m_\varphi = m_\lambda$ soit :

$$\frac{dX}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{dY}{\rho d\varphi} \quad (9.7)$$

ou encore :

$$\frac{dX}{d\lambda} = \frac{N \cos \varphi dY}{\rho d\varphi}$$

L'égalité ne peut être réalisée que si les deux membres sont égaux à une même constante k , alors :

$$\begin{aligned} X &= k(\lambda - \lambda_0) \\ Y &= k(L(\varphi) - L(\varphi_0)) = k(L - L_0) \end{aligned} \quad (9.8)$$

L est la latitude isométrique donnée par (7.21). Le module linéaire est fonction de φ seulement (les isomètres sont les parallèles) :

$$m(\varphi) = \frac{k}{N \cos \varphi} = \frac{k}{r(\varphi)} \quad (9.9)$$

Pour le cas de la sphère (de rayon unité) :

$$m(\varphi) = \frac{k}{\cos \varphi}$$

* Si $k < 1$, les parallèles φ_1 et $-\varphi_1$ tels que $\cos \varphi_1 = k$ sont automécoïques, la représentation est sécante.

* Si $k = 1$, la représentation est tangente (l'équateur est automécoïque).

Mais le choix de k est indifférent pour l'étude des altérations. En effet, toute représentation cylindrique directe conforme se déduit d'une quelconque autre par une similitude, il suffit donc d'étudier la représentation tangente particulière avec $L_0 = 0$ et $\lambda_0 = 0$ et d'écrire :

$$X = \lambda \quad (9.10)$$

$$Y = L \quad (9.11)$$

soit l'axe des X est l'image de l'équateur et l'axe des Y est l'image du méridien origine.

9.2.2 Les Courbes de Favé

La représentation cylindrique directe conforme est couramment utilisée pour les planisphères, et a rendu de grands services à la navigation maritime. Elle est connue sous le nom de représentation de Mercator.

Pour les planisphères (à échelle nominale petite) ou les cartes maritimes, il suffit de considérer la terre un modèle sphérique. Dans ces conditions, les images planes des courbes tracées sur la sphère sont des courbes dont il est aisé de déterminer les équations.

En effet, entre la latitude φ et la latitude croissante \mathcal{L} , on établit facilement les relations :

$$\begin{aligned} ch\mathcal{L} &= \frac{1}{\cos\varphi} \\ sh\mathcal{L} &= tg\varphi \\ th\mathcal{L} &= \sin\varphi \\ th\frac{\mathcal{L}}{2} &= tg\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{9.12}$$

Rappelons que $\mathcal{L} = \text{Log}tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow e^{\mathcal{L}} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + tg(\varphi/2)}{1 - tg(\varphi/2)}$ soit $tg(\varphi/2) = \frac{e^{\mathcal{L}} - 1}{e^{\mathcal{L}} + 1}$ ou encore :

$$tg(\varphi/2) = \frac{e^{\mathcal{L}} - 1}{e^{\mathcal{L}} + 1} = \frac{e^{\mathcal{L}/2} - e^{-\mathcal{L}/2}}{e^{\mathcal{L}/2} + e^{-\mathcal{L}/2}} = \frac{sh(\mathcal{L}/2)}{ch(\mathcal{L}/2)} = th(\mathcal{L}/2)$$

On laisse au lecteur à titre d'exercice la démonstration des trois premières formules de (9.12).

Soit e le point de l'équateur de longitude nulle (**Fig. 9.2**), le point $i(\varphi, \lambda)$ de la sphère de rayon unité, peut être aussi déterminé par s et Ze avec :

- s : arc de grand cercle ei ;
- Ze : azimut équatorial de ce grand cercle.

En i , l'azimut du grand cercle issu de e , orienté, est désigné par Z . les cinq angles φ, λ, Z, s et Ze sont liés par des relations simples (application de la trigonométrie sphérique à un triangle rectangle), par suite :

$$\begin{aligned} \sin\lambda &= tgZe.tg\varphi \\ \cos(s) &= \cos\varphi.\cos\lambda \\ \sin\varphi &= cotgZ.tg\lambda \end{aligned} \quad (9.13)$$

D'où l'on tire, puisque $X = \lambda, Y = \mathcal{L}$:

- équation des grands cercles issus de e d'azimut Ze :

$$\sin X = tgZe.shY \quad (9.14)$$

- équation des petits cercles de pôle e ($s = constante$) :

$$\cos X = \cos(s)\cos Y \quad (9.15)$$

- équation des trajectoires sous l'angle Z des grands cercles issus de e (isoclines des images) :

$$tgX = tgZ.thY \quad (9.16)$$

Ces courbes sont dites **les courbes de Favé**.

Toutes les courbes analogues définies à partir d'un point quelconque e' de l'équateur se déduisent sur la sphère par une rotation d'angle $\lambda_{e'}$ autour de pp' , donc sur le plan par une translation $X_{e'} = \lambda_{e'}$ le long de l'équateur. Les courbes de Favé, tracées sur un calque, permettent de résoudre les problèmes suivants :

- détermination de l'orthodromie (chemin le plus court, c'est-à-dire grand cercle de la sphère) ;
- distance de ces deux points ;
- azimut en un point quelconque de l'orthodromie.

En navigation, on distingue la navigation orthodromique (adoptée pour d'évidents raisons d'économie) et la navigation loxodromique (une loxodromie est la trajectoire sous angle constant des méridiens : la navigation loxodromique est

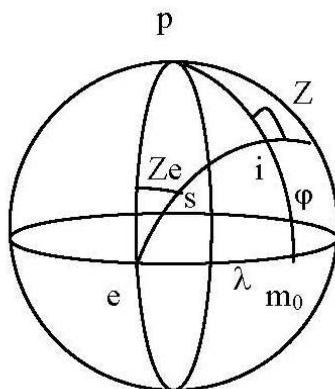


Fig. 9.2 Courbes de Favé

dite à cap constant). La conformité montre immédiatement que l'image d'une loxodromie dans une représentation cylindrique directe conforme est une droite.

En navigation, si on considère un arc d'orthodromie (O) joignant deux points A et B , la corde AB est un segment de loxodromie, et l'angle entre l'arc AB de (O) et la corde (l) est dit : " correction de Givry ".

9.3 Les Représentations cylindriques équivalentes

La condition d'équivalence $m_1 m_2 = 1$ conduit à écrire :

$$\frac{dX}{N \cos \varphi d\lambda} \cdot \frac{dY}{\rho d\varphi} = 1 \implies \frac{dX}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho d\varphi}{dY} \implies \frac{dX}{d\lambda} = \frac{\rho N \cos \varphi d\varphi}{dY} = \text{constante} = n \quad (9.17)$$

soit :

$$\begin{cases} X = n(\lambda - \lambda_0) \\ Y = \frac{1}{n} \int_0^\varphi \rho N \cos t dt \end{cases} \quad (9.18)$$

Sur la sphère \mathbb{S}^2 , en prenant $\lambda_0 = 0$, on obtient :

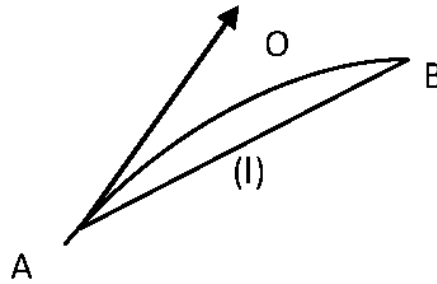


Fig. 9.3 Correction de Givry

$$\begin{cases} X = n\lambda \\ Y = \frac{1}{n} \sin\varphi \end{cases} \quad (9.19)$$

et :

$$m_\varphi = \frac{n}{\cos\varphi} = \frac{1}{m_\lambda} \quad (9.20)$$

- Si $n < 1$, la représentation est sécante, les parallèles automécoïques ayant pour latitudes φ_1 et $-\varphi_1$ telles que $\cos\varphi_1 = n$.

- Si $n = 1$, la représentation est tangente, elle dite représentation isocylindrique :

$$\begin{cases} X = \lambda \\ Y = \sin\varphi \end{cases} \quad (9.21)$$

Cette dernière peut être définie géométriquement de façon simple : l'image I d'un point i de la sphère est la projection orthogonale de i sur la génératrice du cylindre circonscrit à la sphère le long de l'équateur, génératrice ayant même longitude que i . Cette correspondance géométrique ne peut être généralisée à la représentation sécante, on peut envisager une représentation par projection orthogonale sur les génératrices d'un cylindre de rayon $n < 1$, mais cette représentation est aphyllactique.

Si on fait appel à un cylindre intermédiaire, la représentation équivalente admet comme parallèle automécoïque le parallèle φ_1 de la sphère avec $\varphi_1 = \text{Arccos}(n)$; l'image de ce parallèle est un cercle du cylindre de même rayon, mais non confondu avec le cercle intersection du cylindre et de la sphère, en effet $n = \cos\varphi_1$, on a donc :

$$X = \lambda \cos\varphi_1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{\cos\varphi_1} \sin\varphi \quad (9.22)$$

L'ordonnée de I image de i de latitude φ_1 est donc $tg\varphi_1$.

Ces remarques montrent que le schéma simpliste d'une représentation sécante en introduisant une surface cylindrique intermédiaire est dangereuse. Toute représentation plane peut être définie sans faire appel à un cylindre (ou un cône) intermédiaire : cette façon d'exposer les questions relatives aux représentations est plus dangereuse qu'utile et devrait être abandonnée, même pour des représentations élémentaires.

9.4 Les Représentations cylindriques transverses

9.4.1 Les Représentations cylindriques transverses équidistantes

L'aspect transverse de la représentation cylindrique équidistante a été utilisée par Cassini pour sa première carte de la France à l'échelle 1/86000 : il s'agit d'une représentation de l'ellipsoïde dans laquelle le méridien central est automécoïque et représenté par une droite et toutes les géodésiques de l'ellipsoïde orthogonales à ce méridien (ou dont le vertex est sur ce méridien) sont automécoïques.

9.4.2 La Représentation U.T.M. (Universal Transverse Mercator)

*En hommage à mon Professeur de Géodésie
Jean LEMENESTREL, Ingénieur Géographe Général*

9.4.2.1 Définition

Définition 9.1 *La représentation U.T.M. est une représentation :*

- conforme,
- cylindrique,
- transverse,
- d'un modèle ellipsoïdique.

Le type de raisonnement utilisé jusqu'ici pour étudier ces représentations n'est plus applicable; en effet il ferait intervenir un couple de coordonnées symétriques sur l'ellipsoïde; avec un diamètre de référence orthogonal à la ligne des pôles; autrement dit des coordonnées symétriques construites à partir des coordonnées de Cassini-Soldner sur l'ellipsoïde; de telles coordonnées sont très complexes et il est préférable de raisonner autrement.

- Les coordonnées du modèle seront les coordonnées symétriques classiques λ et L (L la latitude isométrique).
- Les coordonnées images seront les coordonnées cartésiennes X et Y .

La représentation sera définie par une fonction analytique f liant les variables complexes $z = L + i\lambda$ et $Z = Y + iX$. Mais dans le cas présent, les courbes coordonnées images, les parallèles aux axes, ne sont pas les courbes correspondantes des courbes coordonnées modèles, les méridiens et parallèles. Les équations de la représentation sont donc de la forme générale :

$$\begin{cases} X = X(\lambda, L) \\ Y = Y(\lambda, L) \end{cases}$$

ce qui revient à dire que $Z = f(z)$ n'est pas une fonction linéaire de z .

La fonction $f(z)$ peut être déterminée en écrivant :

- que l'image du méridien $\lambda = 0$ dit méridien central est l'axe des $Y : X = 0$,
- que ce méridien est automécoïque.

Il faut donc trouver une fonction f d'une variable complexe devant prendre un ensemble de valeurs définies sur un contour donné. Nous admettons l'existence et l'unicité d'une solution (Problème de Dirichlet). Nous admettrons aussi l'existence d'une fonction analytique inverse de f telle que $z = F(Z)$.

- La première condition s'écrit très simplement :

$$Y = f(L) \quad \text{quelque soit } L \text{ et } Y$$

- La seconde exprime que l'arc de méridienne β , compté depuis l'équateur est égal à $Y : Y = \beta$.

Autrement dit la fonction f est définie par :

$$\boxed{\beta = f(L)}$$

Si nous réussissons à trouver une telle fonction, si " généralisation " au plan complexe sera la solution cherchée :

$$\beta = f(L) \implies Z = f(z)$$

Une difficulté importante se présente alors : l'arc de méridien étant une intégrale elliptique de φ , il n'est pas possible d'en donner une expression finie. Il en est donc de même de la fonction f .

La fonction $f(L + i\lambda)$ exprimant la représentation UTM ne peut se calculer que par un développement limité.

Deux solutions sont envisageables :

- 1 - La méthode mise au point par les services cartographiques des U.S.A. utilise des développements limités jusqu'au 5^{ème} ordre et nécessite donc l'usage de "tables de la représentation U.T.M." différentes pour chaque ellipsoïde.
- 2 - La méthode préconisée à l'I.G.N. et développée par Mr. H.M. Dufour utilise une double représentation conforme ou "Doppel-projection" :
 - la première représente l'ellipsoïde sur une sphère ;

- la seconde représente la sphère sur un plan ; elle n'est pas autre chose qu'une représentation classique de Gauss d'un modèle sphérique (chapitre précédent). Cette dernière méthode est spécialement bien adaptée aux calculs électroniques. Nous étudierons successivement ces deux méthodes.

9.4.2.2 Calcul des coordonnées rectangulaires (X, Y) connaissant les coordonnées géographiques (λ, φ)

L'expression de $Z = f(L + i\lambda)$ s'obtient par développement limité à partir des relations différentielles :

$$\begin{cases} d\beta = \rho d\varphi \\ dL = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} \end{cases}$$

d'où l'on tire facilement : $\frac{d\beta}{dL} = \frac{d\beta}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dL} = N \cos \varphi$.

Soit un point M_0 sur le méridien central, de latitude $(\varphi_0 \iff L_0)$ et d'ordonnée Y_0 . Soit le point $M(\lambda, \varphi, L)$. Posons $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$; $\Delta L = L - L_0$. L'ordonnée de M est Y avec $\Delta Y = Y - Y_0$. Nous recherchons un développement limité de

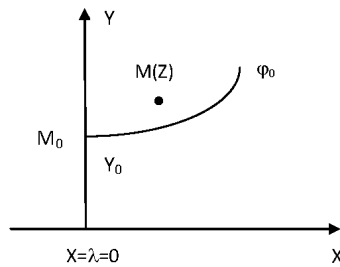


Fig. 9.4 $(\lambda, \varphi) \longrightarrow (X, Y)$

f au voisinage de $M_0(z_0)$: il sera de la forme :

$$Z - Z_0 = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)f'_z(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''_z(z_0) + \dots$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = Y + iX, Z_0 = Y_0 + iX_0, X_0 = 0 \\ z = L + i\lambda \\ z_0 = L_0 + i\lambda_0, \text{ mais } \lambda_0 = 0 \implies z - z_0 = L - L_0 + i\lambda \\ Z_0 = f(z_0) = f(L_0) = \beta_0 \text{ arc d'ellipse méridienne jusqu'en } m_0 \end{array} \right.$$

Le développement peut donc s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Y + iX = a_1(\Delta L + i\lambda) + a_2(\Delta L + i\lambda)^2 + a_3(\Delta L + i\lambda)^3 + \dots \\ \text{avec } a_n = \frac{1}{n!} \cdot f_z^n(z_0) \text{ valeur calculée en } M_0 \end{array} \right.$$

La fonction f étant analytique, ses dérivées peuvent être prises dans une direction quelconque ; nous les calculerons le long du méridien central sur lequel $X = 0$ et $Y = f(L) = \beta$, ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n \beta}{dL^n} \implies \\ a_1 = \frac{d\beta}{dL} = \frac{d\beta}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dL} = \rho \cdot \frac{N \cos \varphi}{\rho} = N_0 \cos \varphi_0 \\ a_2 = \frac{1}{2} \frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dL} = \frac{1}{2} \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dL} = -\frac{1}{2} \rho \sin \varphi \cdot \frac{N \cos \varphi}{\rho} = -\frac{1}{2} N_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\ a_3 = -\frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (1 - \text{tg}^2 \varphi_0 + \eta_0^2) \text{ avec } \eta_0^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_0, e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \end{array} \right.$$

Remarque 1 : On ajoute ci-dessous la suite des coefficients a_i pour $i = 4, 8$ (voir A. Ben Hadj Salem [6]) :

$$a_4 = \frac{1}{24} N \cos^3 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)$$

$$a_5 = \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2 + 13\eta^4)$$

$$a_6 = -\frac{1}{720} N \cos^5 \varphi \sin \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2 \eta^2 + 200\eta^4 - 232t^2 \eta^4)$$

$$a_7 = -\frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi (61 + 131t^2 + 179t^4 + 331\eta^2 - 3298t^2 \eta^2)$$

$$a_8 = \frac{1}{40320} N \cos^7 \varphi \sin \varphi (165 - 61t^2 + 537t^4 + 9679\eta^2 - 23278t^2 \eta^2 + 9244\eta^4 + 358t^4 \eta^2 - 19788t^2 \eta^4)$$

Cas du calcul de X et Y , $m(\lambda, \varphi)$ étant connu

Si le point $m(\lambda, \varphi)$ est donné, c'est-à-dire λ, φ et L sont connus, nous pouvons choisir comme point M_0 , le point de l'axe des Y tel que $\varphi_0 = \varphi$ et $L_0 = L$, nous avons donc $\Delta\varphi = \Delta L = 0$. Quant à Y_0 , elle a pour valeur $\beta_0 = \beta$, donc $\Delta Y = Y - \beta$.

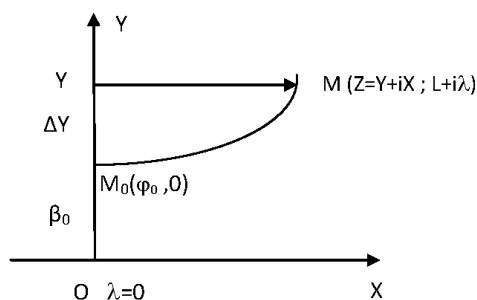


Fig. 9.5 Choix du point M_0

Dans ces conditions le développement ci-dessus s'écrit, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} Y = \beta_0 - a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 + O^6(\lambda) \\ X = a_1\lambda - a_3\lambda^3 + a_5\lambda^5 + O^6(\lambda) \end{cases}$$

Développement dont les premiers termes sont :

$$\begin{cases} X = \lambda N_0 \cos \varphi_0 + \dots \\ Y = \beta_0 + \frac{\lambda^2}{2} N_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \dots \end{cases}$$

Les tables américaines prennent en considérant les termes jusqu'au cinquième ordre.

Ce développement est valable quelque soit β_0 le long du méridien, en revanche il nécessite que λ soit petit. Pratiquement λ sera limité à 3° de part et d'autre du méridien central.

9.4.2.3 Calcul des coordonnées géographiques (λ, φ) connaissant les rectangulaires (X, Y)

Le point $M(Y + iX)$ est donné. On recherchera un développement limité de $z = L + i\lambda = F(Z) = F(Y + iX)$ au voisinage de $M_0(Z_0)$ avec $Z_0 = Y_0 + 0$; F est la fonction inverse de f .

$$z = F(Z) - F(Z_0) = (Z - Z_0)F'_Z(Z_0) + \frac{(Z - Z_0)^2}{2!}F''_Z(Z_0) + \dots$$

avec :

$$\begin{cases} Z = Y + iX \\ Z_0 = Y_0 \\ z = L + i\lambda \\ F(Z_0) = L_0 \end{cases} \implies Z - Z_0 = \Delta Y + iX$$

Soit :

$$\Delta L + i\lambda = b_1 + (\Delta Y + iX) + b_2(\Delta Y + iX)^2 + b_3(\Delta Y + iX)^3 + \dots$$

Mais ici, X et Y étant connus, nous choisissons comme point M_0 le point de coordonnées $(0, Y)$, $Z_0 = Y$ donc $\Delta Y = 0$, les valeurs φ_0, L_0 correspondent au modèle m_0 de M_0 .

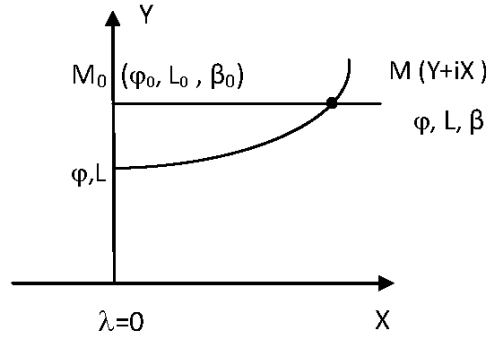


Fig. 9.6 $(X, Y) \implies (\lambda, \varphi)$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, il vient :

$$\begin{cases} L = L_0 - b_2 X^2 + b_4 X^4 + \dots \\ \lambda = b_1 X - b_3 X^3 + b_5 X^5 + \dots \end{cases}$$

équations dans lesquelles les b_0 sont les dérivées successives de $F(Z)$ que nous calculerons dans la direction du méridien, c'est-à-dire comme dérivées de $F(\beta) = L$:

$$b_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{d^n L}{d\beta^n} \right)_0$$

D'où :

$$\begin{cases} b_1 = \frac{dL}{d\beta} = \frac{dL}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{\rho}{N \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \\ b_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{N \cos \varphi} \right) \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2} \rho \sin \varphi \cdot \frac{N \cos \varphi}{\rho} = \frac{\sin \varphi_0}{2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0} \\ b_3 = \text{etc} \dots \end{cases}$$

Remarque 2 : De même, ci-dessous la suite des coefficients $b_j, j = 3, 7,$ [6] :

$$b_3 = \frac{(1 + 2t^2 + \eta^2)}{6N^3 \cos \varphi}$$

$$b_4 = \frac{tg\varphi(5 + 6t^2 + \eta^2 - 4\eta^4)}{24N^4 \cos \varphi}$$

$$b_5 = \frac{(5 + 28t^2 + 6\eta^2 + 24t^4 + 8\eta^2 t^2)}{120N^5 \cos \varphi}$$

$$b_6 = \frac{tg\varphi(61 + 180t^2 + 46\eta^2 + 120t^4 + 48\eta^2 t^2)}{720N^6 \cos \varphi}$$

$$b_7 = \frac{(61 + 622t^2 + 107\eta^2 + 1320t^4 + 1538\eta^2 t^2 + 46\eta^4)}{5040N^7 \cos \varphi}$$

Il reste à calculer $\varphi - \varphi_0$ en fonction de $L - L_0$:

$$\varphi - \varphi_0 = (L - L_0) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dL} \right)_0 + \frac{(L - L_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2\varphi}{dL^2} \right)_0 + \dots$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dL} = \frac{N \cos \varphi}{\rho} \\ \frac{d^2\varphi}{dL^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{N \cos \varphi}{\rho} \right) \cdot \frac{N \cos \varphi}{\rho} \\ \text{etc...} \end{cases}$$

φ_0 est tel que l'arc correspond de méridienne β_0 soit égal à Y .

9.4.2.4 Convergence des méridiens et module linéaire

* La convergence se calcule à partir de $tg\gamma = \frac{dY}{dX}$, or :

$$\begin{cases} dX = (a_1 - 3a_3\lambda^2 + 4a_5\lambda^4)d\lambda \\ dY = (-2a_2\lambda + 4a_4\lambda^3)d\lambda \end{cases}$$

donc $tg\gamma = \frac{2a_2}{a_1}\lambda + \left(\frac{4a_4}{a_1} - \frac{6a_2a_3}{a_1^2} \right)\lambda^3 + \dots$ dont le premier terme est $tg\gamma =$

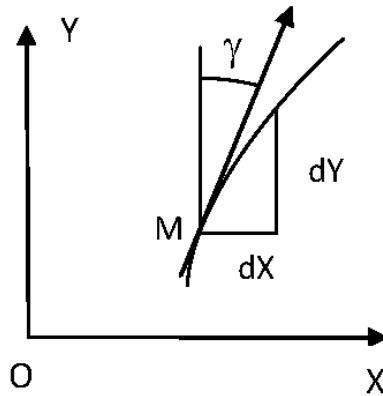


Fig. 9.7 Convergence des méridiens

$$\lambda \sin \varphi \implies \boxed{\gamma \approx \lambda \sin \varphi}.$$

* Le Module linéaire

Il a pour valeur $m = \frac{H}{h} \left\| \frac{dZ}{dz} \right\|$. Le module de la dérivée $\frac{dZ}{dz}$ peut être pris suivant une direction quelconque, par exemple le long du parallèle soit : $\left\| \frac{dZ}{dz} \right\| = \frac{dX}{\cos \gamma} \cdot \frac{1}{d\lambda} \implies m = \frac{dX}{rd\lambda \cos \gamma}$ valeur qui se trouve immédiatement par $m = \frac{dS}{ds}$ pris le long d'un parallèle et de sa transformée.

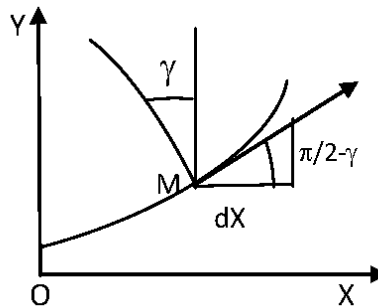


Fig. 9.8 Le Module linéaire

On a donc $m = \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{1}{N \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\cos(\lambda \sin \varphi)}$, or :

$$\frac{dX}{d\lambda} = a_1 - 3a_3 \lambda^2 = N \cos \varphi + \frac{1}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t g^2 \varphi + \eta^2) \lambda^2 \implies$$

$$\frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{1}{N \cos \varphi} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t g^2 \varphi + \eta^2)$$

$$\cos(\lambda \sin \varphi) \cong 1 - \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2} (1 + \eta^2) \implies \text{d'où :}$$

$$\boxed{m = 1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2} (1 + \eta^2), \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (9.23)$$

Cette expression est à rapprocher de celle donnant le module linéaire dans le cas d'un modèle sphérique :

$$m' = \frac{1}{\cosh} = (1 - \sin^2 h)^{-1/2}$$

avec $\sinh = \sin \lambda \cdot \cos \varphi$ en développant en λ :

$$m' = \left[1 - \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right) \cos^2 \varphi \right]^{-\frac{1}{2}} \implies m' = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi + o^{(4)}(\lambda)$$

9.4.2.5 Méthode de calcul adoptée à l'I.G.N.

La représentation UTM est considérée comme résultant de la succession de 3 représentations conformes.

- A- Représentation de l'ellipsoïde sur une sphère
 - B- Représentation de la sphère sur un plan
 - C- Représentation d'un plan sur un autre de façon que le méridien origine soit automécoïque
- } dit "Doppel-projektion"

9.4.2.6 A- Représentation conforme de l'ellipsoïde sur une sphère

Toutes ces représentations partent d'un modèle paramétré par les coordonnées symétriques λ et L .

L'image sphérique est alors paramétrée par λ' et L' coordonnées symétriques de la sphère.

On admet de plus la condition de correspondance entre les courbes coordonnées de l'image et du modèle : les images des méridiens et des parallèles de l'ellipsoïde sont les méridiens et les parallèles de la sphère.

Dans ces conditions au point $m(z = L + iL)$ de l'ellipsoïde correspond le point $m'(z' = L' + i\lambda')$ de la sphère par une fonction analytique, linéaire de z .

$$z' = n(z - z_0)$$

Les équations de la représentation sont alors :

$$\begin{cases} L' = n(L - L_0) \\ \lambda' = n\lambda \end{cases} \quad \text{et le module linéaire } m = n \frac{r'}{r}, r = N \cos \varphi, r' = R \cos \phi'$$

en choisissant même méridien origine sur les deux surfaces.

Les isomètres sont alors les parallèles ; en effet $m = Cte$ si φ et ϕ' constants.

Les dimensions de l'ellipsoïde et de la sphère étant données, toutes ces représentations dépendent de deux paramètres n et L_0 .

Suivant les valeurs de n ($\lambda' = n\lambda$) les images des parallèles sont des arcs de cercles d'amplitude inférieure ($n < 1$), égale ($n = 1$) ou supérieure à 2π ($n > 1$) ; dans ce dernier cas il y a alors recouvrement partiel.

Si la représentation admet un parallèle automécoïque, $m = 1$ donc ses latitudes sont liées par :

$$N_0 \cos \varphi_0 = nR' \cos \phi'_0 \quad (R' \text{ rayon de la sphère image})$$

Il existe alors un second parallèle automécoïque de latitudes $(-\phi'_0, -\phi_0)$: la représentation est sécante.

Les deux parallèles automécoïques sont confondus (isomètre stationnaire) que dans le cas où $\varphi_0 = 0$, $a = nR'$ (a : grand demi-axe de l'ellipsoïde) la représentation est alors tangente.

Les représentations les plus simples correspondent à $n = 1$. Dans ce cas les longitudes sont conservées et les latitudes isométriques et croissantes diffèrent par une constante :

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \\ L' = L - L_0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_0^{\phi'} \frac{du}{\cos u} = \int_0^{\varphi} \frac{\rho d\theta}{N \cos \theta}$$

Les parallèles automécoïques de ces représentations correspondent à ϕ_0, ϕ'_0 et $-\phi_0, -\phi'_0$ tels que $N_0 \cos \varphi_0 = R \cos \phi'_0$.

Il est alors possible d'imposer que ce parallèle automécoïque correspond à la même latitude : $\phi'_0 = \varphi_0$ sur la sphère et sur l'ellipsoïde. Dans ce cas, $R = N_0$ cette sphère est dite "sphère de Soldner".

Si l'équateur est automécoïque $R = a$ et $L_0 = 0$:

$$L' = \int_0^{\phi'} \frac{du}{\cos u} = \int_0^{\varphi} \frac{\rho d\theta}{N \cos \theta}$$

Les équations sont :

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \\ L' = L \end{cases}$$

Pour calculer la représentation U.T.M. la solution adoptée commence par représenter l'ellipsoïde sur une sphère de rayon unité "bitangente en L_0 ", les longitudes étant conservées ($n=1$).

Les équations sont donc :

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \\ L' = L - L_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad m_1 = \frac{\cos \phi'}{N \cos \varphi} = \frac{d\phi'}{\rho d\varphi}$$

On choisira $L_0 = \int_0^{\varphi} \frac{\rho du}{N \cos u}$ de façon que φ_0 soit voisin de φ ,

$$L = \int_0^{\varphi} \frac{\rho du}{N \cos u} \quad \text{et} \quad L' = \int_0^{\phi'} \frac{du}{\cos u}$$

Dans ces conditions :

$$\varphi - \varphi_0 = (\phi' - \varphi_0)(1 + \eta_0^2) - \left(\frac{\phi' - \varphi_0}{2} \right)^2 3e'^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

En fait si on connaît λ et φ et que l'on cherche λ' et ϕ' pour calculer les coordonnées X et Y , il est possible de choisir $L_0 = L'$ et dans ce cas $\varphi = \phi'$.

En revanche la formule ci-dessus sera utilisée pour le calcul de λ et φ connaissant λ' et ϕ' , c'est-à-dire lorsque l'on recherche les coordonnées géographiques.

9.4.2.7 B - Représentation plane, Mercator transverse, de la sphère précédente

On recherche les formules de passage du point $m'(\lambda', \phi')$ au point $M'(X', Y')$. Il s'agit d'une représentation sphérique classique de Gauss déjà étudiée.

Si les coordonnées de Cassini-Soldner de m' sont h et l , il leur correspond des coordonnées symétriques l et $\mathcal{H} = \int_0^h \frac{du}{\cos u}$, la représentation fait correspondre à $m'(z = \mathcal{H} + i.l)$ le point $M'(Z' = Y' + iX')$ du plan par $Z' = z'$ soit :

$$\begin{cases} X' = l \\ Y' = \mathcal{H} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} \right) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \sinh = \sin \lambda \cos \phi' \\ \text{tg} l = \frac{\text{tg} \phi'}{\cos \lambda} \end{cases}$$

9.4.2.8 C-Passage à la représentation U.T.M.

La représentation $A + B$ ne respecte pas les longueurs de l'arc de méridien. Il faut donc introduire une troisième représentation faisant correspondre au point $M'(Z' = X' + iY')$ le point $M(Z = X + iY)$ de telle façon que pour un point $M_0(Z_0 = iY)$, $Y = \beta$, arc d'ellipse méridienne de l'ellipsoïde original.

En fait, on recherche un développement polynomial de Z , au voisinage de Z_0 , ou plus exactement un développement de Y en fonction de Y' que l'on étendra au plan complexe :

$$Y - Y_0 = (Y' - Y'_0) \cdot \left(\frac{dY}{dY'} \right)_0 + \frac{(Y' - Y'_0)^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2Y}{dY'^2} \right)_0 + \dots$$

Or $Y - Y_0$ doit être égal à l'arc de méridienne sur l'ellipsoïde $Y - Y_0 = \beta - \beta_0$ et $Y' - Y'_0$ est égal à l'arc de grand cercle méridien sur la sphère de rayon 1 $\implies dY' = d\phi'$, d'où :

$$\frac{dY}{dY'} = \frac{dY}{d\phi'} = \frac{d\beta}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\phi'} = \rho \cdot \frac{d\varphi}{d\phi'} = \frac{1}{m_1} \quad (m_1 \text{ module de la représentation A})$$

pour $\varphi_0 = \phi'_0$, $m_1 = \frac{1}{N_0}$,

$$\frac{d^2 Y}{dY'^2} = \frac{d^2 \beta}{d\phi'^2} = \frac{d}{d\phi'} \left(\frac{1}{m_1} \right) = -\frac{1}{m_1} \cdot \frac{\sin \varphi - \sin \phi'}{\cos \phi'}$$

en effet, $\frac{d}{d\phi'} \left(\frac{1}{m_1} \right) = \frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\phi'} \cdot \frac{1}{\cos \phi'} + \frac{N \cos \varphi \sin \phi'}{\cos^2 \phi'}$ pour la valeur $\varphi_0, \phi'_0 = \varphi_0$, on obtient $\frac{d^2 Y}{d\phi'^2} = 0$. Enfin :

$$\begin{aligned} \frac{d^3 Y}{d\phi'^3} &= \frac{d^3 \beta}{d\phi'^3} = \frac{d}{d\phi'} \left(-\frac{1}{m_1} \cdot \frac{\sin \varphi - \sin \phi'}{\cos \phi'} \right) \\ &= \frac{d}{d\phi'} \left(-\frac{1}{m_1} \right) \cdot \frac{\sin \varphi - \sin \phi'}{\cos \phi'} - \frac{1}{m_1} \frac{d}{d\phi'} \left(\frac{\sin \varphi - \sin \phi'}{\cos \phi'} \right) \\ &\implies \frac{d^3 Y}{d\phi'^3} = -N_0 e'^2 \cos^2 \varphi_0 \end{aligned}$$

En définitive :

$$Y = N_0 Y' - N_0 e'^2 \cos^2 \varphi_0 Y'^3 + \dots$$

Soit à étendre à l'ensemble du plan complexe :

$$X + iY = N_0 (X' + iY') - N_0 e'^2 \cos^2 \varphi_0 (X' + iY')^3 + \dots$$

D'où :

$$\begin{cases} X = N_0 X' \left(1 + \frac{e'^2}{6} \cos^2 \varphi_0 X'^2 \right) \\ Y = Y_0 + N_0 Y' \left(1 + \frac{e'^2}{2} \cos^2 \varphi_0 X'^2 \right) \end{cases} \quad (9.24)$$

Reste à calculer $Y_0 = \beta_0$ longueur de l'arc de méridienne de l'ellipsoïde de 0 à φ_0 , ce calcul a déjà été étudié (cf. chapitre IX §3).

Compléments sur la Représentation U.T.M.

Nous donnons ci-dessous le calcul de la longueur d'un arc de la méridienne d'un ellipsoïde de révolution [6] : Soit (E) un ellipsoïde de révolution défini par ses paramètres :

- a : le demi-grand axe,
- e : la première excentricité.

L'expression de la longueur de la méridienne entre l'équateur et un point M de latitude géodésique φ est donnée par :

$$\beta = \beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho(u) du \quad (9.25)$$

avec :

$$\rho = \rho(u) = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}$$

ρ est le rayon de courbure de la méridienne. L'intégrale (9.25) est une intégrale, dite elliptique, n'est pas exprimée par une formule finie. Pour la calculer, on fait l'usage d'un développement limité de l'expression $(1-e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}}$.

On utilise la formule :

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-1+p)}{p!}x^p + o(x^{p+1})$$

avec $|x| < 1$, q est un rationnel et $p!$ désigne factoriel p soit $p(p-1)\dots 3.2.1$. Comme $|e^2 \sin^2 u| < 1$, on a donc à l'ordre 12 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}} &= (1-e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 u + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 u + \\ &\frac{35}{16}e^6 \sin^6 u + \frac{315}{128}e^8 \sin^8 u + \frac{693}{256}e^{10} \sin^{10} u + \frac{3003}{1024}e^{12} \sin^{12} u \quad (9.26) \end{aligned}$$

Pour pouvoir calculer les intégrales du type :

$$\int_0^\varphi \sin^p u du$$

on va exprimer les termes $\sin^p u$ en fonction des lignes trigonométriques multiples de l'argument u .

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \sin^2 u &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2} \\
 \sin^4 u &= \frac{3}{8} - \frac{\cos 2u}{2} + \frac{\cos 4u}{8} \\
 \sin^6 u &= \frac{5}{16} - \frac{15\cos 2u}{32} + \frac{13\cos 4u}{16} - \frac{\cos 6u}{32} \\
 \sin^8 u &= \frac{35}{128} - \frac{17\cos 2u}{16} + \frac{7\cos 4u}{32} - \frac{\cos 6u}{16} + \frac{\cos 8u}{128} \\
 \sin^{10} u &= \frac{63}{256} - \frac{105\cos 2u}{256} + \frac{15\cos 4u}{64} - \frac{45\cos 6u}{512} + \frac{5\cos 8u}{256} - \frac{\cos 10u}{512} \\
 \sin^{12} u &= \frac{231}{1024} - \frac{99\cos 2u}{256} + \frac{495\cos 4u}{2048} - \frac{55\cos 6u}{512} + \frac{33\cos 8u}{1024} \\
 &\quad - \frac{3\cos 10u}{512} + \frac{\cos 12u}{2048}
 \end{aligned} \tag{9.27}$$

L'équation (9.26) s'écrit en utilisant les expressions de droite de (9.27) :

$$(1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} = A_0 + A_2 \cos 2u + A_4 \cos 4u + A_8 \cos 8u + A_{10} \cos 10u + A_{12} \cos 12u \tag{9.28}$$

En intégrant (9.28) entre 0 et φ et après multiplication par le coefficient $a(1 - e^2)$, on trouve l'expression ci-dessous de la longueur de la méridienne :

$$\begin{aligned}
 \beta(\varphi) &= a(1 - e^2) \cdot (C_0 \varphi + C_2 \sin 2\varphi + C_4 \sin 4\varphi + C_6 \sin 6\varphi \\
 &\quad + C_8 \sin 8\varphi + C_{10} \sin 10\varphi + C_{12} \sin 12\varphi) \tag{9.29}
 \end{aligned}$$

où les coefficient A_k vérifient :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= A_0 & C_2 &= \frac{A_2}{2} & C_4 &= \frac{A_4}{4} & C_6 &= \frac{A_6}{6} \\
 C_8 &= \frac{A_8}{8} & C_{10} &= \frac{A_{10}}{10} & C_{12} &= \frac{A_{12}}{12}
 \end{aligned} \tag{9.30}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12} \\
 C_2 &= -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12} \\
 C_4 &= \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12} \\
 C_6 &= -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{315}{12288}e^8 - \frac{31185}{786432}e^{10} - \frac{165165}{3145728}e^{12} \\
 C_8 &= \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12} \\
 C_{10} &= -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12} \\
 C_{12} &= \frac{1001}{8388608}e^{12}
 \end{aligned} \tag{9.31}$$

Dans notre ouvrage [6], nous avons obtenu les coordonnées U.T.M. par la représentation de l'ellipsoïde $E(a, b)$ sur le plan complexe \mathbf{C} .

Dans la représentation UTM, on restreint λ à varier dans l'intervalle $[-3^\circ, +3^\circ]$. Cet intervalle définit un fuseau de méridien central $\lambda_0 = 0^\circ$ et d'amplitude 6° . Ainsi, la Terre est divisé en $360^\circ/6^\circ = 60$ fuseaux qu'on numérote de 1 à 60 ce qui explique l'utilisation mondialement de la représentation UTM.

Une interprétation géométrique de la représentation UTM est comme suit :

- on considère un cylindre ayant une base elliptique, tangent à l'ellipsoïde modèle le long de la méridienne de longitude $\lambda = \lambda_0 = 0^\circ$. A un point $m(\varphi, \lambda)$ appartenant au fuseau $[-3^\circ, +3^\circ]$ on lui fait correspondre un point M du cylindre (**Fig. 9.9**).
- après développement du cylindre sur le plan, on obtient l'image $M(X, Y)$.

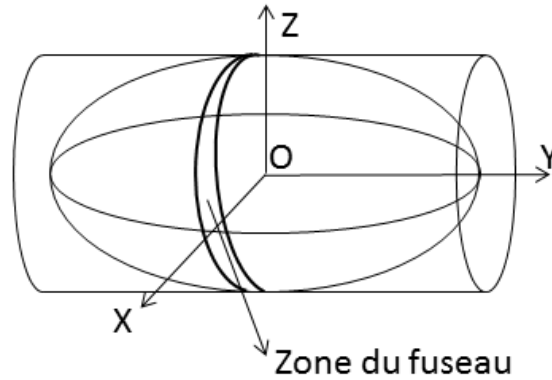


Fig. 9.9 Interprétation géométrique de l'UTM

On considère le méridien central de longitude $\lambda_0 = 0^\circ$: à $m(\lambda, L)z = L + i\lambda \rightarrow M'(X, Y)Z = Y + iX$. λ_0 la longitude du méridien central. On utilise la même méthode décrite ci-dessus à savoir la détermination de la fonction $Z = F(z)$ (et $z = F^{-1}(Z)$) par un développement en série.

* Cas du calcul de $X, Y, m(\lambda, \varphi)$ connu : on obtient les formules :

$$\begin{aligned} X &= a_1\lambda - a_3\lambda^3 + a_5\lambda^5 - a_7\lambda^7 + \dots \\ Y &= \beta(\varphi) - a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 - a_6\lambda^6 + a_8\lambda^8 + \dots \end{aligned} \quad (9.32)$$

où les a_i sont les mêmes donnés ci-dessus.

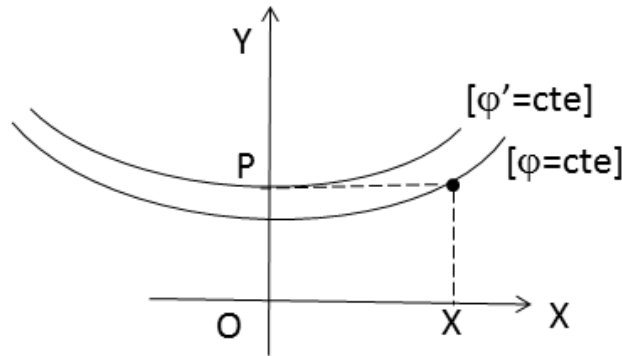


Fig. 9.10 Passage de (X, Y) à (φ, λ)

* Cas du calcul de λ, φ , $M(X, Y)$ connu :

La méthode est légèrement différente. Pour cela, on considère sur l'axe OY le point $P(0, Y)$ (**Fig. 9.10**), il lui correspond l'affixe $Z_0 = Y = \beta(\varphi')$, sur l'ellipsoïde il est l'image de $L' = L'(\varphi') = g(Z_0)$. On détermine numériquement φ' à partir de $\beta(\varphi') = Y$. Par suite, on obtient les formules :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + b_1 X - b_3 X^3 + b_5 X^5 - b_7 X^7 + \dots \\ L(\varphi) = L &= L'(\varphi') - b_2 X^2 + b_4 X^4 - b_6 X^6 + b_8 X^8 + \dots \end{aligned} \quad (9.33)$$

Là aussi, les coefficients b_j sont les mêmes que ceux cités précédemment ci-dessus. Il s'ensuit connaissant la latitude isométrique $L(\varphi)$, on aura facilement φ .

9.5 Exercices et Problèmes

Exercice 9.1 *L'objet de cet exercice est de démontrer que l'image du parallèle ($\varphi = \text{constante}$) est une courbe convexe dans le cas d'une représentation U.T.M. (9.10). On considère que $\lambda \in]-\frac{\pi}{60}, +\frac{\pi}{60}[$ et $\varphi \in]0, +\pi/2[$.*

1 - Montrer que :

$$\begin{cases} dX = a_1 d\lambda - 3a_3 \lambda^2 d\lambda \\ dY = -2a_2 \lambda d\lambda + 4a_4 \lambda^3 d\lambda \end{cases}$$

2 - Donner l'expression de la dérivée première $\frac{dY}{dX}$.

3 - Ecrire $\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{d}{dX} \left(\frac{dY}{dX} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dY}{dX} \right) \cdot \frac{d\lambda}{dX}$ et montrer que la dérivée seconde vaut en gardant les termes en λ^2 :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{-2a_1 a_2 + 6\lambda^2 (2a_1 a_4 - a_2 a_3)}{(a_1 - 3a_3 \lambda^2)^3}$$

4 - Remplacer les a_i par leurs expressions en fonction de φ et montrer que le dénominateur et le numérateur sont positifs.

5 - En déduire que l'image du parallèle est une courbe convexe. Justifier.

CHAPITRE 10

REPRÉSENTATION MÉRICONIQUE EQUIVALENTE OU REPRÉSENTATION DE BONNE

10.1 L'origine du découpage de la cartographie 1/50 000 type ancien

Le découpage de la cartographie à l'échelle 1/50 000 type ancien utilisait le découpage obtenu par la représentation de Bonne¹ (origine $\varphi_0 = 39\text{ gr}$, λ_0 = longitude de Paris), avec modèle ellipsoïdique. Nous présentons ci-dessous les éléments mathématiques de cette représentation utilisée dans l'ancienne cartographie pour les échelles 1/50 000, 1/100 000 et 1/200 000 en Tunisie et en Algérie.

Soit A_0 l'image du point origine de la représentation de Bonne (**Fig.10.2**). L'axe des Y dirigé vers le Nord est l'image du méridien origine λ_0 . L'axe des X dirigé vers l'Est est tangent à l'image du parallèle origine $\varphi_0 = 39\text{ gr}$ (arc de cercle).

1. **Rigobert Bonne (1727-1795)** : ingénieur, mathématicien et cartographe français.

10.2 Définition et Propriétés de la Représentation de Bonne

Définition 10.1. La représentation de Bonne est une représentation équivalente c'est-à-dire elle conserve les surfaces.

Propriété 10.1 *Les images des parallèles sont des arcs de cercles, celles des méridiens des droites non concourantes. La représentation est dite "mériconique".*

Propriété 10.2 *Les longueurs sont conservés sur le méridien origine et sur les parallèles ou encore le méridien origine et les parallèles sont automécoïques.*

Propriété 10.3 *L'image d'un cercle de rayon unité est une ellipse (Fig.10.1).*

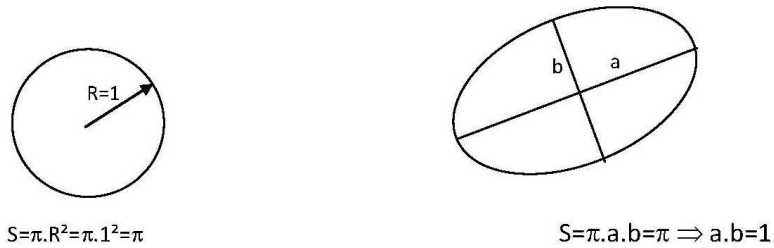


Fig. 10.1 Image du cercle

10.2.1 Formules

10.2.1.1 Modèle sphérique

Considérons un modèle sphérique (sphère de rayon a). A un point $b(\varphi, \lambda)$, on lui correspond son image $B(X, Y)$. Les coordonnées de B dans YA_0X sont (Fig.10.2) :

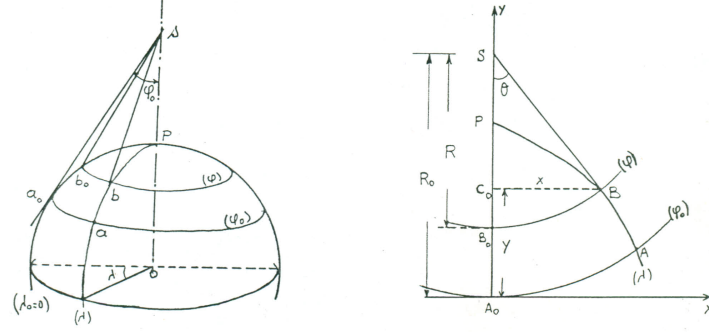


Fig. 10.2 La Représentation de Bonne (Fezzani C., [5])

$$\left. \begin{aligned} X &= SB.\sin\theta = R.\sin\theta \\ Y &= sa_0 - R.\cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

mais $sa_0 = SA_0 = a.\cotg\varphi_0$, d'où :

$$X = R.\sin\theta \quad (10.2)$$

$$Y = a.\cotg\varphi_0 - R.\cos\theta \quad (10.3)$$

Pour $\theta = 0$ ou $\lambda = \lambda_0$, on a :

$$Y = a.\cotg\varphi_0 - R \quad (10.4)$$

et

$$Y = a_0b_0 = a(\varphi - \varphi_0) \implies R = a(\cotg\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)) \quad (10.5)$$

Tout parallèle est automécoïque (le module linéaire $m_\varphi = 1$), donc $B_0B = b_0b$ or $B_0B = R\theta$, d'où :

$$b_0b = a\cos\varphi.(\lambda - \lambda_0) = R.\theta \implies \theta = \frac{a.(\lambda - \lambda_0)\cos\varphi}{R} \quad (10.6)$$

Calculs des modules linéaires :

- le long d'un parallèle ($\varphi = \text{constante} = \varphi_1$), il est donné par :

$$m_\lambda = \frac{dS'}{ds'} = \frac{Rd\theta}{a\cos\varphi_1d\lambda} = \frac{a\cos\varphi_1d\lambda}{a\cos\varphi_1d\lambda} = 1 \implies \forall \lambda, m_\lambda = 1 \quad (10.7)$$

- le long d'un méridien ($\lambda = \text{constante} = \lambda_1$), il est donné par :

$$m_\varphi = \frac{dS'}{ds'} = \frac{dR}{ad\varphi} = \frac{ad\varphi}{ad\varphi} = 1 \implies \forall \varphi, m_\varphi = 1 \quad (10.8)$$

On a obtenu ainsi $m_\lambda \cdot m_\varphi = 1$, donc la représentation de Bonne est une représentation équivalente.

On laisse pour le lecteur le cas du modèle ellipsoïdique.

10.2.1.2 Modèle ellipsoïdique

Considérons maintenant un modèle ellipsoïdique. Les formules (10.1) restent inchangées :

$$\begin{aligned} X &= R \sin \theta \\ Y &= sa_0 - R \cos \theta \end{aligned}$$

avec :

$$sa_0 = N_0 \cot g \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \cdot \cot g \varphi_0 \quad (10.9)$$

où a et e^2 sont respectivement le demi-grand axe et le carré de la première excentricité de l'ellipsoïde de référence à savoir l'ellipsoïde de Clarke 1880 Français² et :

$$R = sb = sb_0 = sa_0 - a_0 b_0 \quad (10.10)$$

or $a_0 b_0$ est la longueur de la méridienne entre les latitudes φ_0 et φ , soit :

$$R = sa_0 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(t) dt = N_0 \cot g \varphi_0 + \int_{\varphi}^{\varphi_0} \rho(t) dt \quad (10.11)$$

où ρ est le rayon de courbure de la méridienne qui vaut :

$$\rho(\varphi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} \quad (10.12)$$

Posons :

$$\beta(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho(t) dt \quad (10.13)$$

Alors R s'exprime comme :

$$R = N_0 \cot g \varphi_0 + \beta(\varphi_0) - \beta(\varphi) \quad (10.14)$$

Pour avoir θ , on utilise la relation que $B_0 B = b_0 b$, soit :

2. $a = 6378249,20 m; e^2 = 0,0068034877$.

$$r(\lambda - \lambda_0) = R.\theta \implies \theta = \frac{r(\lambda - \lambda_0)}{R}$$

mais $r = N \cos \varphi$, d'où :

$$\theta = \frac{N(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{R(\varphi)} \quad (10.15)$$

10.3 Calcul des coordonnées

10.3.1 Modèle sphérique

10.3.1.1 Calcul direct

Ayant (φ, λ) , on calcule :

$$R = a(\cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)) \quad (10.16)$$

$$\text{et } \theta = \frac{(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)} \quad (10.17)$$

$$\text{d'où } X = R.\sin \theta \quad (10.18)$$

$$Y = a \cotg \varphi_0 - R.\cos \theta \quad (10.19)$$

10.3.1.2 Calcul indirect

On donne (X, Y) , l'équation (10.19) donne $R.\cos \theta = a \cotg \varphi_0 - Y$.

Utilisant (10.18), on a :

$$\text{tg} \theta = \frac{X}{a.\cotg \varphi_0 - Y} \quad (10.20)$$

d'où :

$$\theta = \text{Arctg} \left(\frac{X}{a.\cotg \varphi_0 - Y} \right) \quad (10.21)$$

L'équation (10.18) donne :

$$R = \frac{X}{\sin \theta} \quad (10.22)$$

Et utilisant (10.16), on a :

$$\varphi = \cotg \varphi_0 + \varphi_0 - \frac{R}{a} \quad (10.23)$$

et de (10.15), on obtient :

$$\lambda = \theta \cdot \frac{R}{a \cos \varphi} + \lambda_0 \quad (10.24)$$

10.3.2 Le modèle ellipsoïdique

10.3.2.1 Le calcul direct

Ayant (φ, λ) et le modèle ellipsoïde concerné, on veut calculer les coordonnées planimétriques (X, Y) de la représentation plane de Bonne. Utilisant respectivement les équations (10.14) et (10.15), on obtient R et θ :

$$\begin{aligned} R &= N_0 \cotg \varphi_0 + \beta(\varphi_0) - \beta(\varphi) \\ \theta &= \frac{N(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{R(\varphi)} \end{aligned}$$

D'où :

$$X = R \sin \theta \quad (10.25)$$

$$Y = N_0 \cotg \varphi_0 - R \cos \theta \quad (10.26)$$

10.3.2.2 Le calcul inverse

On donne (X, Y) , comme dans le cas du modèle sphérique, on a :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X}{N_0 \cotg \varphi_0 - Y} \implies \theta = \operatorname{Arctg} \left(\frac{X}{N_0 \cotg \varphi_0 - Y} \right) \quad (10.27)$$

$$R(\varphi) = \frac{X}{\sin \theta} \quad (10.28)$$

Le calcul de la latitude géodésique φ se fait en calculant premièrement la valeur numérique de :

$$\beta(\varphi) = L_1 = N_0 \cotg \varphi_0 + \beta(\varphi_0) - R \quad (10.29)$$

puis, on résout en φ l'équation $\beta(\varphi) = L_1$ (voir le paragraphe ci-dessous). On trouve l'expression ci-dessous de la longueur de la méridienne :

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) &= a(1 - e^2) \cdot (C_0 \varphi + C_2 \sin 2\varphi + C_4 \sin 4\varphi + C_6 \sin 6\varphi \\ &\quad + C_8 \sin 8\varphi + C_{10} \sin 10\varphi + C_{12} \sin 12\varphi) \end{aligned} \quad (10.30)$$

Les coefficients C_{2k} sont calculés dans le chapitre précédent. Posons :

$$J(\varphi) = a(1 - e^2) \sum_{n=1}^{n=6} C_{2n} \sin 2n\varphi \tag{10.31}$$

Alors, on obtient :

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2)C_0\varphi + J(\varphi) \tag{10.32}$$

10.3.2.3 Résolution de l'équation $\beta(\varphi) = L_1$

On peut écrire l'équation $\beta(\varphi) = L_1$ comme suit :

$$\varphi = \frac{L_1}{a(1 - e^2)C_0} - \frac{J(\varphi)}{a(1 - e^2)C_0} \tag{10.33}$$

Posons :

$$F(\varphi) = \frac{L_1}{a(1 - e^2)C_0} - \frac{J(\varphi)}{a(1 - e^2)C_0} \tag{10.34}$$

Alors, on a à résoudre :

$$\varphi = F(\varphi) \tag{10.35}$$

La résolution de (10.35) se fait par itérations comme suit :

$$\varphi_1 = \frac{L_1}{a(1 - e^2)C_0} \tag{10.36}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 - \frac{J(\varphi_1)}{a(1 - e^2)C_0} \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{j+1} &= \varphi_1 - \frac{J(\varphi_j)}{a(1 - e^2)C_0} \end{aligned}$$

On fixe un nombre $\epsilon \ll 1$. Si $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| < \epsilon$, alors $\varphi = \varphi_{j+1} = \varphi_j$, sinon on itère le processus. En prenant $\epsilon = 1,57 \times 10^{-10}$, on obtient la précision du *mm*. La résolution de (10.35) par itérations est convergente car on montre que $|F'(\varphi)| < 1$.

10.3.2.4 Calculs d'erreurs

Jusqu'à quel ordre faut-il s'arrêter dans le développement limité de l'expression de la longueur de la méridienne ? Ecrivons (9.26) sous la forme :

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2)I(\varphi) = a(1 - e^2) \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\varphi} a_i \sin^{2i} t dt \quad (10.37)$$

On s'arrête à l'ordre $i - 1$ tel que :

$$|a(1 - e^2)a_i \int_0^{\varphi} \sin^{2i} t dt| < 10^{-4} m \quad (10.38)$$

soit :

$$\begin{aligned} |a(1 - e^2)a_i \int_0^{\varphi} \sin^{2i} t dt| &\leq |a(1 - e^2)a_i \int_0^{\varphi} dt| \leq a(1 - e^2)a_i \frac{\pi}{2} < 10^{-4} m \\ \implies a_i &< \frac{2 \times 10^{-4}}{\pi a(1 - e^2)} \end{aligned} \quad (10.39)$$

Numériquement pour $i = 10$, on trouve que $a_5 = \frac{693}{256}e^{10} > \frac{2 \times 10^{-4}}{\pi a(1 - e^2)}$. Par contre pour $i = 6$, on obtient que $a_6 = \frac{3003}{1024}e^{12} < \frac{2 \times 10^{-4}}{\pi a(1 - e^2)}$. Donc on garde que les coefficients de e^2, e^4, e^6, e^8 et e^{10} de (9.26).

10.3.3 Les altérations angulaires et linéaires

On donne ci-dessous (**Fig.10.3, Fig.10.4**) une idée sur les variations des altérations angulaires et linéaires de la représentation de Bonne pour la Tunisie (C. Fezzani, [5]).

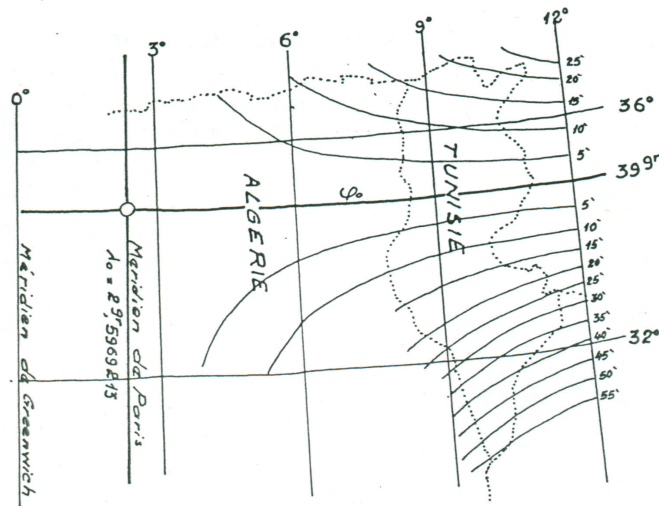


Fig. 10.3 Lignes d'égaies altérations angulaires maxima

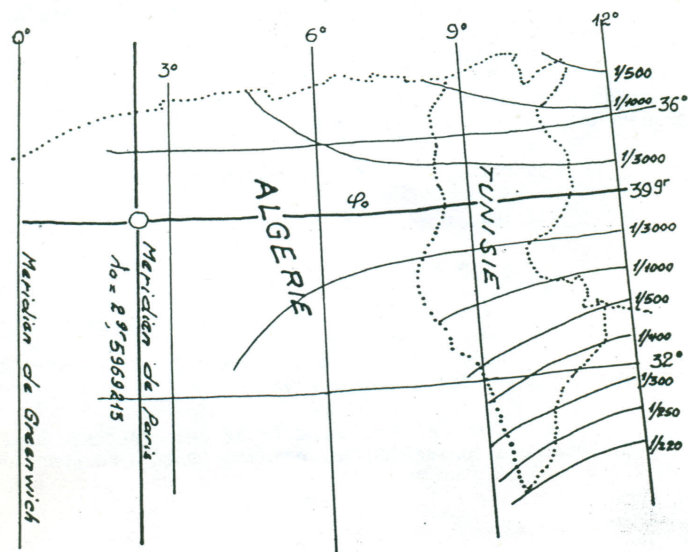


Fig. 10.4 Lignes d'égaies altérations linéaires maxima

10.4 Application : Le calcul des angles des feuilles à l'échelle 1/50000

Le découpage résulte d'un quadrillage rectangulaire de dimensions $L = 32\text{ km}$ et $\ell = 20\text{ km}$. Les coordonnées d'un sommet d'une feuille dans la représentation de Bonne sont (**Fig.10.5**) :

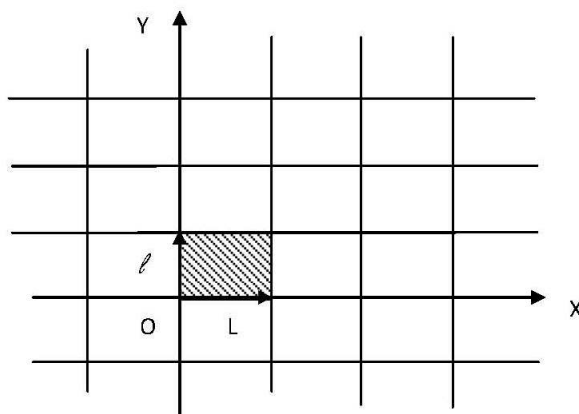


Fig. 10.5 Représentation d'une feuille à l'échelle 1/50000

$$\left. \begin{array}{l} X = n.L \\ Y = m.l \end{array} \right\} \quad (10.40)$$

où n et m sont des entiers positifs.

A partir de l'équation (10.40), on calcule les coordonnées géographiques correspondantes φ, λ . Ces coordonnées sont exprimées dans le système Voirol. On obtient alors les coordonnées rectangulaires (X_A, Y_A) Lambert Algérie (Nord ou Sud) en appliquant à φ, λ les formules du Lambert Algérie.

Quant aux coordonnées des angles de feuilles (X_T, Y_T) Lambert Tunisie (Nord ou Sud), elles sont calculées en utilisant les formules du Lambert Tunisie à $\varphi' = \varphi - \Delta\varphi$ et à $\lambda' = \lambda - \Delta\lambda$ où $\Delta\varphi, \Delta\lambda$ sont les corrections qu'il faut ajouter à φ, λ pour les transformer dans le système géodésique tunisien Carthage34.

10.5 La désorientation entre les axes des coordonnées Lambert Tunisie et Lambert Algérie

Sur certaines cartes à l'échelle 1/50000, sont dessinés 2 quadrillages de coordonnées relatifs respectivement au Lambert Tunisie (système Carthage34) et au Lambert Algérie (Système Voirol). Ces deux quadrillages présentent une désorientation angulaire non négligeable.

En faisant abstraction des translations et en négligeant les différences entre les systèmes Carthage34 et Voirol, on a le schéma suivant pour le Lambert Nord (**Fig. 10.6**).

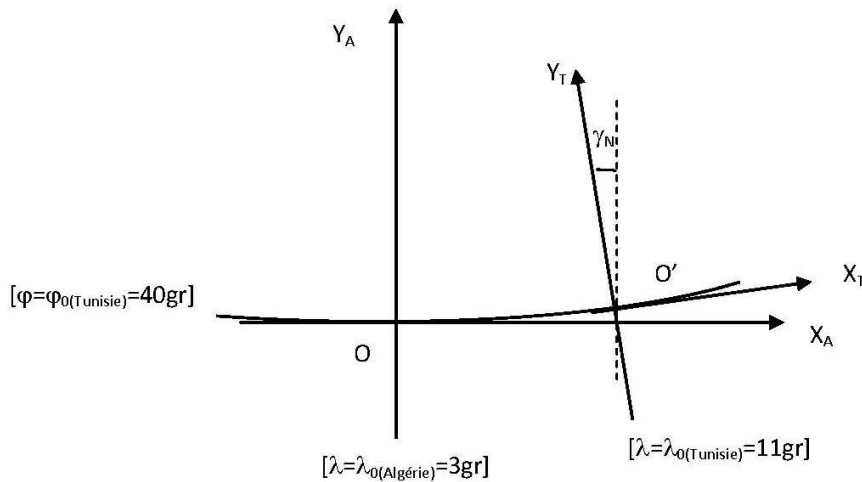


Fig. 10.6 La désorientation entre les axes des systèmes planimétriques Lambert Tunisie et Lambert Algérie

La désorientation des axes est la valeur de la "convergence des méridiens" au point O' , soit pour le Lambert Nord :

$$\gamma_N = (\lambda_{OT} - \lambda_{OA}) \sin \varphi_0 = (11 - 3) \sin(40 \text{ gr}) = 4,7023 \text{ gr} \quad (10.41)$$

et pour le Lambert Sud, on obtient :

$$\gamma_S = (\lambda_{OT} - \lambda_{OA}) \sin \varphi_0 = (11 - 3) \sin(37 \text{ gr}) = 5.1160 \text{ gr} \quad (10.42)$$

CHAPITRE 11

LES REPRÉSENTATIONS OU TRANSFORMATIONS QUASI-CONFORMES

Dans les paragraphes précédents, on a étudié les représentations de la sphère avec les variables (L_M, λ) ou celles de l'ellipsoïde de révolution avec les coordonnées (L, λ) vers le plan (X, Y) avec :

$$\begin{cases} X = X(L_M, \lambda) \\ Y = Y(L_M, \lambda) \end{cases} \quad (11.1)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} X = X(L, \lambda) \\ Y = Y(L, \lambda) \end{cases} \quad (11.2)$$

en notant :

$$L_M = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{la latitude de Mercator}$$
$$L = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad \text{la latitude isométrique}$$

En posant :

$$z = L_M + i\lambda \quad (\text{ou} \quad z = L + i\lambda) \quad (11.3)$$

$$Z = X + iY \quad (11.4)$$

on a considéré les représentations conformes (c'est-à-dire qui conservent les angles) ou encore définies par :

$$Z = Z(z) \quad (11.5)$$

avec $Z(z)$ une fonction dite holomorphe de z soit :

$$\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$$

où \bar{z} est le conjugué de z soit $\bar{z} = L_M - i\lambda$ (ou $\bar{z} = L - i\lambda$).

Définition 11.1 Une fonction $f(z) = Z = Z(z)$ définie et dérivable sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ (l'ensemble des nombres complexes) est dite quasi-conforme si elle vérifie (L. Bers, [8]) :

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \quad \text{avec} \quad |\mu(z)| < 1} \quad (11.6)$$

Le coefficient μ s'appelle coefficient de Beltrami¹.

11.1 Développement d'une fonction en un point z_0

Soit f une fonction quasi-conforme et un point $z_0 \in \mathcal{D}$. En écrivant un développement de f au point z_0 , on a alors :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_0) + \dots$$

Par un changement de variables, on peut prendre $z_0 = 0$, d'où :

$$f(z) = f(z_0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_0) + \dots$$

Utilisant (11.6), l'équation précédente s'écrit en négligeant les termes du deuxième degré :

$$f(z) = f(z_0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \bar{z} \mu(z_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

Donc $f(z)$ s'écrit localement :

1. **Eugeno Beltrami** (1835-1899) : mathématicien italien.

$$f(z) = \alpha + \beta z + \gamma \bar{z} \quad (11.7)$$

$$\text{où } \alpha, \beta, \gamma \text{ des constantes complexes avec } \left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < 1 \quad (11.8)$$

11.2 Etude de la Transformée d'un cercle

On sait que pour une transformation conforme, l'image d'un cercle autour d'un point est un cercle (ou encore l'indicatrice de Tissot est un cercle). Soit un point z_0 qu'on peut prendre égal à 0. Par un changement de l'origine des axes, la fonction f s'écrit :

$$f(z) = \beta z + \mu \beta \bar{z}$$

Par abus, on garde la même notation. On considère autour de l'origine $z_0 = 0$ un point $M(x = a \cos \theta, y = a \sin \theta)$ qui décrit un cercle infiniment petit de rayon a . On étudie ci-après l'image du point M par f .

De l'équation précédente, on a :

$$\begin{aligned} z &= a \cos \theta + i a \sin \theta = a e^{i\theta} \\ \mu &= |\mu| e^{ik} \\ \beta &= |\beta| e^{il} \\ f(z) &= a |\beta| e^{il} (e^{i\theta} + |\mu| e^{i(k-\theta)}) \end{aligned} \quad (11.9)$$

Si $\theta_1 = \frac{k}{2} = \frac{\arg(\mu)}{2}$, on a $z_1 = a e^{ik/2}$ et :

$$\begin{aligned} f(z_1) &= a |\beta| e^{il} e^{ik/2} (1 + |\mu|) \\ |f(z_1)| &= a |\beta| (1 + |\mu|) \end{aligned} \quad (11.10)$$

Maintenant on prend $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{k}{2} + \frac{\pi}{2}$, alors $z_2 = a e^{i\theta_2} = a e^{ik/2} e^{i\pi/2} = i a e^{ik/2}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} f(z_2) &= i a |\beta| e^{il} e^{ik/2} (1 - |\mu|) \\ |f(z_2)| &= a |\beta| (1 - |\mu|) \end{aligned} \quad (11.11)$$

en tenant compte que $|\mu| < 1$.

Des équations (11.9), (11.10) et (11.11), on déduit que l'image de M décrit une ellipse de demi-grand axe et demi-petit axe respectivement (**Fig. 11.1**) :

$$\begin{cases} a' = a|\beta|(1 + |\mu|) \\ b' = a|\beta|(1 - |\mu|) \end{cases} \quad (11.12)$$

On appelle :

$$K = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} \quad (11.13)$$

coefficient de distortion ou de dilatation.

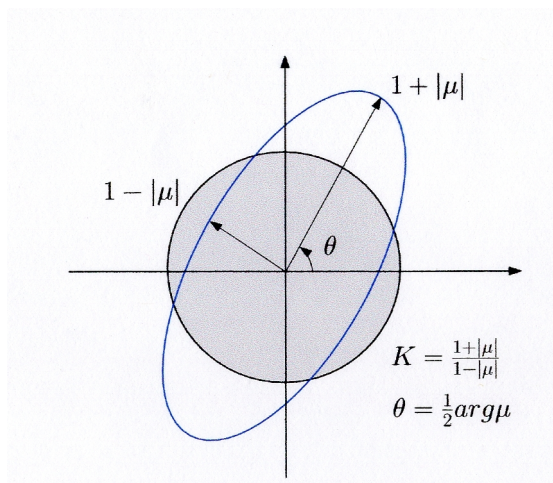


Fig. 11.1 L'image d'un cercle

11.2.1 Calcul d'un élément de longueur sur le plan

Un élément de longueur sur le plan est donné par :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = |df|^2 = df \cdot \overline{df}$$

Comme $df = \beta dz + \gamma d\bar{z}$ et $\overline{df} = \bar{\beta} d\bar{z} + \bar{\gamma} dz$, on a alors :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = |df|^2 = df \cdot \overline{df} = (\beta dz + \gamma d\bar{z})(\bar{\beta} d\bar{z} + \bar{\gamma} dz)$$

$$= \beta\bar{\beta}dzd\bar{z} + \gamma\bar{\gamma}dzd\bar{z} + dzd\bar{z} \left(\beta\bar{\gamma}\frac{dz}{d\bar{z}} + \gamma\bar{\beta}\frac{d\bar{z}}{dz} \right)$$

On pose :

$$ds^2 = dz.d\bar{z}$$

Le carré du module linéaire de la transformation quasi-conforme s'écrit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\gamma|^2 + \left(\beta\bar{\gamma}\frac{dz}{d\bar{z}} + \gamma\bar{\beta}\frac{d\bar{z}}{dz} \right) \quad (11.14)$$

Dans l'équation (11.14), on considère $z = ae^{i\theta}$ varie le long d'un cercle de rayon a infiniment petit et on fait tendre $\theta \rightarrow 2\pi$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\bar{z}} &= \frac{aie^{i\theta}d\theta}{-aie^{-i\theta}d\theta} = -e^{2i\theta} = -1 \\ \frac{d\bar{z}}{dz} &= -e^{-2i\theta} = -1 \end{aligned}$$

L'équation (11.14) devient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\gamma|^2 - (\beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta})$$

Comme :

$$\gamma = \mu\beta$$

on obtient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\beta|^2|\mu|^2 - (\beta\bar{\beta}\bar{\mu} + \mu\beta\bar{\beta}) \quad (11.15)$$

or $\mu + \bar{\mu} = 2|\mu|\cos\arg(\mu)$, par suite l'équation (11.15) s'écrit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2(1 + |\mu|^2 - 2|\mu|\cos\arg(\mu)) \quad (11.16)$$

Remplaçant β par $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, (11.16) devient :

$$\boxed{m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right|^2 (1 + |\mu|^2 - 2|\mu|\cos\arg(\mu))} \quad (11.17)$$

11.3 Exemple de Transformation Quasi-conforme

Lors de passage de coordonnées planes $(X, Y)_i$ d'un système géodésique S_1 à des coordonnées planes $(X', Y')_j$ dans un autre système géodésique S_2 , on utilise souvent une transformation du type :

$$\begin{cases} X' = X_0 + aX + bY \\ Y' = Y_0 + cX + dY \end{cases} \quad (11.18)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (11.19)$$

En posant $Z = X' + iY'$ et $z = X + iY$, on obtient :

$$Z = (X_0 + iY_0) + X(a + ic) + Y(b + id) \quad (11.20)$$

On note par :

$$Z_0 = X_0 + iY_0$$

Comme $X = (z + \bar{z})/2$ et $Y = (z - \bar{z})/2i$, alors l'équation (11.20) s'écrit :

$$Z = Z_0 + z \left(\frac{a+d}{2} + i \frac{c-b}{2} \right) + \bar{z} \left(\frac{a-d}{2} + i \frac{b+c}{2} \right) \quad (11.21)$$

On pose :

$$\beta = \frac{a+d}{2} + i \frac{c-b}{2}, \quad \gamma = \frac{a-d}{2} + i \frac{b+c}{2}$$

Alors (11.21) s'écrit :

$$Z = Z_0 + \beta z + \gamma \bar{z} \quad (11.22)$$

Pour quelles valeurs de a, b, c, d la transformation (11.19) est quasi-conforme ?

En comparant (11.21) avec (11.7), il faut que $|\gamma| < |\beta|$ soit :

$$\begin{aligned} |\gamma| < |\beta| &\Rightarrow |\gamma|^2 < |\beta|^2 \Rightarrow \frac{(a-d)^2 + (b+c)^2}{4} < \frac{(a+d)^2 + (c-b)^2}{4} \\ &\Rightarrow ad - bc > 0 \end{aligned} \quad (11.23)$$

C'est-à-dire que le déterminant de la matrice (11.19) soit strictement positif.

Note historique : La représentation stéréographique de la sphère au plan est l'une des représentations la plus utilisée depuis l'antiquité (voir exercices n°1 et n°5 ci-dessous). Elle était connue par l'astronome et mathématicien Hipparque (190-120 avant J.C) ainsi que Claude Ptolémée (80-168). Ce dernier connaît que

la représentation stéréographique transforme les cercles en cercles ou en droites, mais on ignore s'il savait que l'image de tout cercle de la sphère est un cercle ou une droite. Cette propriété fut démontrée par l'astronome et ingénieur arabe Abul Abbas Al-Farghani (805-880), qui vivait entre le Caire et Bagdad au milieu du 9ème siècle. Cette représentation était employée dans la confection des astrolabes.

C'était Thomas Harriot (1560-1621) mathématicien et astronome anglais qui avait montré que la représentation stéréographique était conforme et approuvée par un papier présenté par l'astronome Edmond Halley (1656-1742) à la Société Royale de Londres.

Le terme "projection stéréographique " fut donné par le mathématicien belge et d'origine espagnole François d'Aiguillon (1567-1617) en 1613 dans le sixième chapitre concernant les projections de son livre d'optique "Opticorum liber extus de proiectionibus".

Rappelons que l'histoire des représentations conformes était le point de départ de la géométrie différentielle moderne avec le papier de Carl Friedrich Gauss de 1827 sur la théorie générale des surfaces. Un autre apport considérable était venu du travail du mathématicien français Gaspard Monge (1746-1818) spécialement son livre sur l'application de l'analyse à la géométrie. (H.A. Kastrup,[11])

CHAPITRE 12

EXERCICES ET PROBLÈMES

Problème 12.1 Soit (S^2) la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = 2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda \\ Y = -2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda \end{cases}$$

1. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \text{constante}$) est une droite dont on donne l'équation.
2. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \text{constante}$) est un cercle dont on précise l'équation.
3. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.
4. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS .
5. Sachant que sur la sphère $ds^2 = R^2d\varphi^2 + R^2cos^2\varphi.d\lambda^2$, calculer le module linéaire m .
6. En déduire le module linéaire m_1 le long du méridien.
7. En déduire le module linéaire m_2 le long d'un parallèle.

8. Comparer m_1 et m_2 . Conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.

Problème 12.2 Soit (Σ) la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = R \cdot \lambda \\ Y = R \cdot \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \end{cases}$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Quelles sont les images des méridiens ($\lambda = \text{constante}$) et des parallèles ($\varphi = \text{constante}$).
2. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS en fonction de φ et de λ et calculer le module linéaire m .
3. En déduire les modules linéaires m_1 le long du méridien et m_2 le long du parallèle.
4. Comparer m_1 et m_2 et conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.
5. On suppose que P décrit sur la surface (Σ) une courbe (γ) telle que φ et λ sont liées par la relation : $\text{tg}\varphi = \sin\lambda$. Pour $\varphi = 0 \text{ gr}, 2 \text{ gr}, 4 \text{ gr}, 6 \text{ gr}, 8 \text{ gr}$ et 10 gr , dresser un tableau donnant les valeurs de λ correspondantes.
6. Sachant que $R = 1000 \text{ m}$, calculer les coordonnées (X, Y) de la représentation plane donnée ci-dessus pour les valeurs de φ et λ de la question 5.
7. Rapporter à l'échelle $1/100$ sur le plan OXY , les positions (X, Y) des points. Que pensez-vous de l'image de la courbe (γ) .

Problème 12.3 Sur une sphère de rayon unité, modèle de la terre, on désigne :

- par p le pôle nord ;
- par (C) un grand cercle qui coupe l'équateur au point i de longitude nulle ;
- par q le pôle de ce grand cercle, de latitude φ_0 positive,
- par ω et h respectivement les points d'intersection de (C) et du méridien de q et du grand cercle issu de q , passant par le point $a(\varphi, \lambda)$.

On pose : $\omega h = x$, $h a = y$.

1. q est le pivot d'une représentation cylindrique conforme oblique tangente, dont (C) est le "pseudo-équateur". Le plan est rapporté aux axes $\Omega X, \Omega Y$ images respectives de (C) et du grand cercle ωpq . Exprimer en fonction de φ, λ et φ_0 les coordonnées X, Y du point A image de a (vérifier que pour $\varphi_0 = 0$, on retrouve les expressions de X, Y d'une représentation transverse).

2. Montrer que l'équation de l'image plane du parallèle de latitude φ_0 peut s'écrire :

$$e^Y \cos X = tg \varphi_0$$

Indications : b désignant un point de latitude φ_0 , le triangle pqb est isocèle, décomposer ce triangle en deux triangles rectangles égaux. Etudier qualitativement les images des autres parallèles.

3. Montrer que l'image plane de l'équateur a pour équation :

$$\cos X + tg \varphi_0 \cdot sh Y = 0$$

Ecrire d'une manière analogue, l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$.

4. Exprimer le gisement du méridien en fonction de φ, λ et φ_0 . Déterminer la valeur du module linéaire, en particulier en p , en un point de l'équateur, et en un point du méridien origine.

Problème 12.4 Etude de la représentation conforme d'une sphère de rayon unité dite représentation de Littrow¹ définie par :

$$Z = \sin z$$

avec $z = \lambda + iL_M$, L_M la latitude de Mercator et $Z = X + iY$.

1. Préciser le canevas, les images des méridiens et celle de l'équateur.
2. Vérifier que les points f et f' ($\varphi = 0, \lambda = \pm\pi/2$) sont des points singuliers.
3. Etudier les images plans des cercles de diamètre ff' et des petits cercles orthogonaux.
4. Soit s le point ($\varphi = \varphi_0, \lambda = 0$). On appelle segment capable sphérique l'ensemble des points b tels que l'angle $\widehat{bp, bs} = \alpha$. Quelle est l'image plane de cette courbe dans cette représentation plane.

Problème 12.5 Soit l'application $F(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1)$ définie par :

1. En hommage à **Joseph Johann Littrow** (1781-1840) astronome autrichien.

$$OM(u, v) = F(u, v) \begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases}$$

1. Calculer la forme fondamentale ds^2 .
2. Montrer que $OM(u, v)$ appartient à la sphère (\mathbb{S}^2) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. Calculer u, v en fonction de x, y et z .
4. Soit le point $N(0, 0, 1)$ de (\mathbb{S}^2) , calculer les coordonnées (X, Y) du point p intersection de la droite NM avec la plan $z = 0$ en fonction de x, y et z .
5. Soit σ l'application $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \rightarrow (X, Y) = (X(x, y, z), Y(x, y, z))$. Montrer que $(\sigma \circ F)(u, v) = \sigma(F(u, v)) = (u, v)$. En déduire que $F = \sigma^{-1}$.
6. Trouver le rapport de ce problème avec le problème 12.1.

Problème 12.6 Soit un ellipsoïde de révolution $E(a, e)$ avec a et e respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution et e la première excentricité. Soit (\mathbb{S}^2) une sphère de rayon R . On veut étudier le passage suivant :

$$p(\varphi, \lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow P(\psi, \Lambda) \text{ de la sphère } \mathbb{S}^2$$

1. Exprimer m le module linéaire de cette représentation.
2. On pose :

$$z = \mathcal{L} + i\lambda, \quad Z = L + i\Lambda$$

\mathcal{L} est la latitude isométrique de l'ellipsoïde de révolution et L la latitude de Mercator. Une transformation conforme entre E et (\mathbb{S}^2) est donnée par $Z = f(z)$ où f est une fonction analytique. On propose le cas le plus simple à savoir :

$$Z = \alpha z + \beta$$

avec $\begin{cases} \alpha = c_1 + ic_2 \\ \beta = b_1 + ib_2 \end{cases}$

les c_1, c_2, b_1, b_2 sont des constantes réelles. Donner les expressions de L et Λ en fonction de \mathcal{L} et λ .

3. On veut que représentation transforme les méridiens et les parallèles de l'ellipsoïde respectivement en méridiens et parallèles de la sphère et que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ soit le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$. Montrer que $c_2 = b_2 = 0$ et $L = c_1\mathcal{L} + b_1$, $\Lambda = c_1\lambda$.

4. Pour avoir la même orientation en longitude, on prendra $c_1 > 0$. On cherchera la transformation à déformation minimale autour d'un parallèle $\varphi = \varphi_0$ tel que le parallèle $\varphi = \varphi_0$ est automécoïque et le module linéaire m est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, c'est-à-dire $m(\varphi_0) = 1$ et $\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, en plus on considère aussi la condition :

$$\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

Pour faciliter les notations, on prendra $b = b_1, c = c_1$. Montrer que la relation liant φ_0 et ψ_0 est :

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \operatorname{tg}\varphi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_0}}$$

5. Déterminer les constantes b, c et R en fonction de φ_0 et ψ_0 telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées.

6. Montrer que l'expression du développement limité de $m(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle φ_0 est donnée par :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}(\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

7. On fait intervenir la deuxième excentricité e' , Montrer que $m(\varphi)$ s'écrit :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1+e'^2\cos^2\varphi_0)^2}(\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

Problème 12.7 Soit $\mathcal{E}(a, b)$ un ellipsoïde de référence de paramètres a et e respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. On considère une représentation plane \mathcal{P} de \mathcal{E} vers le plan (O, X, Y) . On pose :

$$\begin{aligned} z &= \lambda + i\mathcal{L} \\ Z &= X + iY = Z(z) \end{aligned}$$

avec \mathcal{L} la latitude isométrique.

1. Ecrire les expressions du carré des éléments infinitésimaux de longueur sur l'ellipsoïde et le plan. En déduire le module linéaire m .

2. On pose $\zeta = \frac{\partial Z}{\partial z}$. Si γ est le gisement de l'image du méridien passant par le point $z = (\lambda, \mathcal{L})$, montrer que $\arg(\zeta) = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

3. On cherche une représentation plane du type $Z = \alpha + \beta z + \varpi z^2$ où α, β et ϖ des constantes complexes. On impose les conditions suivantes :

- pour $z = 0$, $Z = 0$;

- l'axe des Y coïncide avec le méridien à l'origine.

Montrer que $\Re(\beta) = 0$.

4. En déduire que Z s'écrit : $Z = i\beta_1 z + (\varpi_1 + i\varpi_2)z^2$ avec $\beta_1, \varpi_1, \varpi_2$ des réels.

Problème 12.8 L'objet de ce problème est l'étude de la comparaison de deux réseaux géodésique par l'effet d'une translation tridimensionnelle. On commence par l'étude d'un modèle sphérique, puis celui d'un modèle ellipsoïdique. Le point de départ est deux calculs R_1 et R_2 d'un réseau géodésique \mathcal{R} qu'on considère au voisinage de l'équateur.

I. On considère que les coordonnées de R_1 et R_2 sont exprimées par la représentation plane Mercator directe d'un modèle sphérique (de rayon a). Un point M a pour coordonnées :

$$M(X = a \cos \varphi \cos \lambda, Y = a \cos \varphi \sin \lambda, Z = a \sin \varphi)$$

1. Exprimer les coordonnées géodésiques (φ, λ) en fonction des coordonnées tridimensionnelles X, Y, Z .

2. Une translation tridimensionnelle infinitésimale est exprimée par (dX, dY, dZ) des formules ci-dessus. Montrer que $d\varphi$ et $d\lambda$ en fonction de dX, dY et dZ donnent :

$$d\lambda = \frac{-\sin \lambda}{a \cos \varphi} dX + \frac{\cos \lambda}{a \cos \varphi} dY$$

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{dZ}{a} - \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \lambda}{a} dX - \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin \lambda}{a} dY$$

Or l'équation ci-dessus n'est autre que la différentielle de la latitude de Mercator L , d'où :

$$dL = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{dZ}{a} - \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \lambda}{a} dX - \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin \lambda}{a} dY$$

3. On se place au voisinage du point central $M_0(\varphi = 0, \lambda = 0)$ de l'équateur, on peut écrire au deuxième ordre de petitesse :

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \sin\lambda = \lambda, \quad \cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$$

A partir de la formule de L montrer qu'on peut écrire $L \approx \varphi$.

4. Montrer qu'on peut écrire alors :

$$dL = \frac{dZ}{a} - \frac{dX}{a}L - \frac{dY}{a}L$$

$$d\lambda = \frac{-\lambda(1 + \frac{L^2}{2})}{a}dX + \frac{(1 - \frac{\lambda^2}{2})(1 + \frac{L^2}{2})}{a}dY$$

5. En gardant les termes du 2ème ordre, simplifier l'expression de $d\lambda$.

6. On pose : $z = \lambda + iL$ et $\xi = d\lambda + idL$. Montrer alors la formule de **Dufour-Fezzani** (H.M. Dufour, [12]) :

$$\xi = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a}z - \frac{dY}{2a}z^2$$

7. La transformation ξ est-elle conforme.

II. On considère que les coordonnées de R_1 et R_2 sont exprimées par la représentation UTM d'un modèle ellipsoïdique $E(a, e)$, a et e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. Un point M du modèle ellipsoïdique a pour coordonnées :

$$M (X = N\cos\varphi\cos\lambda, Y = N\cos\varphi\sin\lambda, Z = N(1 - e^2).\sin\varphi)$$

avec : $N = a/\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$. Les coordonnées géodésiques (φ, λ) sont exprimées par :

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{Y}{X}, \quad (1 - e^2)\operatorname{tg}\varphi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

8. On considère une translation tridimensionnelle infinitésimale (dX, dY, dZ) . On note par \mathcal{L} la latitude isométrique :

$$\mathcal{L} = \operatorname{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}\operatorname{Log}\frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi} = L - \frac{e}{2}\operatorname{Log}\frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi}$$

On opère de la même manière qu'en I., montrer qu'au deuxième ordre de petitesse, on a :

$$d\lambda = \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + (1 + e^2)\mathcal{L}^2\frac{dY}{2a} - \frac{\lambda^2}{2a}dY$$

$$d\mathcal{L} = \frac{dZ}{a} - \frac{\mathcal{L}^2 dZ}{2a} - \frac{3e^2\mathcal{L}^2 dZ}{2a} - \mathcal{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathcal{L}\frac{dY}{a}$$

9. On pose : $z = \lambda + i\mathcal{L}$, $\zeta = d\lambda + id\mathcal{L}$. Montrer alors, la formule de **Dufour-Ben Hadj Salem** :

$$\zeta = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a}z - \frac{dY}{2a}z^2 - \frac{e^2(dY - idZ)}{8a}(z - \bar{z})^2$$

10. La transformation ζ est-elle conforme.

Problème 12.9 Pour une représentation plane, on dit qu'elle est **équivalente** si le produit des modules linéaires m_1 et m_2 suivant les directions principales vérifient :

$$m_1.m_2 = 1$$

Soit le modèle terrestre représenté par la sphère de rayon R qu'on note S^2 . Au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane \mathcal{P} suivante définie par les formules :

$$\mathcal{P}(X, Y) = p(X, Y) = \left(X = 2R.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).\cos\lambda, \quad Y = 2R.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).\sin\lambda \right) \quad (12.1)$$

1. Qu'elle est l'image du pôle nord P_N ?
2. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \lambda_0 = \text{constante}$) est une droite qu'on donne l'équation.
3. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$) est un cercle qu'on précise l'équation.
4. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.
5. Soit ds la longueur infinitésimale correspondante sur la sphère, donner l'expression de ds^2 .
6. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan. Montrer que :

$$dS^2 = R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\lambda^2$$

7. En déduire le carré du module linéaire m^2 .
8. Calculer le module linéaire m_1 le long du parallèle.
9. Calculer le module linéaire m_2 le long du méridien.
10. La représentation plane \mathcal{P} définie ci-dessus est-elle équivalente. Justifier votre réponse.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

1. **B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko.** *Géométrie Contemporaine : Méthodes et Application*. Première Partie : Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. Edition Mir, Moscou, 1982, 438p.
2. **Jean Dieudonné.** *Calcul Infinitésimal*. 1ère édition. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris, 1968, 479 pages.
3. **Gaston Julia.** Cours de l'Ecole Polytechnique. *Cours de Géométrie Infinitésimale*. Cinquième Fascicule, Deuxième Partie : Théorie des Surfaces. Deuxième édition entièrement refondue. Editeur Gauthier-Villars. 1955, 141p.
4. **Oscar S. Adams.** *Latitude developments connected with geodesy and cartography*. U.S. Coast and Geodetic Survey. Special Publication n°67. 1921.
5. **Chedly Fezzani.** *Analyse de la Structure des Réseaux Astro-Géodésiques Tunisiens*. Thèse présentée pour l'obtention du grade de Docteur Ingénieur en Sciences Géographiques. Ecole Nationale des Sciences Géographiques, IGN France. 315 pages. 1976.
6. **A. Ben Hadj Salem.** *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*, publié par Nour-Publishing. 2017. 365 pages. ISBN – 13 : 978-3-330-96843-1 (lien : <https://www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-des-moindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1>).
7. **A. Bobenko et U. Pinkall.** *Discrete isothermic surfaces*. Journal für die reine und angewandte Mathematik. N° 475, 1996, pp 187-208.
8. **L. Bers.** *Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol 83, n°6, 1977, pp. 1083-1100. 1977

9. **J. Lemenestrel.** *Cours de Géodésie : 3 fascicules*, Ecole Nationale des Sciences Géographiques, IGN de France, 1978.
10. **E. Zeidler.** *Quantum Field Theory III : Gauge Theory A Bridge between Mathematicians and Physicists*. Springer-Verlag Heidelberg. 2011, 1158p.
11. **H.A. Kastrup.** *On the Advancements of Conformal Transformations and their Associated Symmetries in Geometry and Theoretical Physics*. arxiv : www.arxiv.org/pdf/0808.2730v1.pdf, 2008, 82p.
12. **H.M. Dufour.** *Systèmes de références : Systèmes Projectifs*. Conférence présentée au Colloque national sur la Localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. 27p.
13. **H.M. Dufour et A. Ben Hadj Salem.** *Systèmes de références : Systèmes Projectifs*. Version numérique, 2019, 27 pages. <https://www.vixra.org/pdf/1905.0200v2.pdf>
14. **John P. Snyder.** *Map Projections - A Working Manual* -. pp 97-103. U.S. GEOLOGICAL SURVEY PROFESSIONAL PAPER 1395. Washington 1987.
15. **L. Driencourt et J. Laborde.** *Traité des projections des cartes géographiques, à l'usage des cartographes et des géodésiens. Fascicule 1 : Théorie générale des projections*, pp 130-133, Hermann et C^{ie} Editeurs, Paris. 1932.
16. **L. Driencourt et J. Laborde.** *Traité des projections des cartes géographiques, à l'usage des cartographes et des géodésiens. Fascicule 1 : Théorie générale des projections*, pp 115-116, Hermann et C^{ie} Editeurs, Paris. 1932.
17. **Jean-Jacques Levallois.** *Représentation conforme et Adaptations*. Revue XYZ, n°64, 3ème trimestre, 1995, pp 37-56.

Liste des figures

0.1	En hommage à Mr. J. Commiot : en plus de sa façon d'enseigner, il avait une belle écriture comme le montre ses annotations sur la première page du manuscrit de mon projet de cartographie mathématique que je lui avais présenté (voir https://vixra.org/pdf/1512.0369v1.pdf).	vi
0.2	Photo récente du premier auteur.	vii
1.1	Courbe plane	4
1.2	Le Trièdre de Frenêt	7
2.1	Représentation plane	38
2.2	Tangentes correspondantes	38
2.3	Angles correspondants	39
2.4	Types de représentation	40
2.5	Les directions principales	44
2.6	Indicatrice de Tissot	44
2.7	Théorème d'Apollonius.	47
2.8	Les Directions automocoïques	48

3.1	Les caractères globaux	55
3.2	Les caractères	55
3.3	Caractères d'orientation	56
3.4	Les isomètres et les isomorphes	59
4.1	Correspondance	62
4.2	Image de $y = y_0$	66
5.1	Les conditions requises	78
5.2	Représentations conformes	80
5.3	les représentations conformes	83
6.1	Etude des cas	89
6.2	Sphère de Soldner	92
7.1	La représentation conique	102
7.2	La représentation tangente	110
7.3	Aspect direct de la représentation de Lorgne	112
7.4	Aspect transverse de la représentation de Lorgne	112
8.1	Interprétation géométrique	116
8.2	Images des parallèles et des méridiens	116
8.3	Le repère origine	122
8.4	Les variations de l'altération linéaire pour les représentations Lambert Nord Tunisie (d) et Sud Tunisie (g)	126
8.5	Le repère (O', X, Y)	127
8.6	Réduction à la corde	129
9.1	La représentation cylindrique directe	134
9.2	Courbes de Favé	138
9.3	Correction de Givry	139

9.4	$(\lambda, \varphi) \rightarrow (X, Y)$	143
9.5	Choix du point M_0	145
9.6	$(X, Y) \Rightarrow (\lambda, \varphi)$	147
9.7	Convergence des méridiens	149
9.8	Le Module linéaire	149
9.9	Interprétation géométrique de l'UTM	158
9.10	Passage de (X, Y) à (φ, λ)	159
10.1	Image du cercle	162
10.2	La Représentation de Bonne (Fezzani C., [5])	163
10.3	Lignes d'égaux altérations angulaires maxima	169
10.4	Lignes d'égaux altérations linéaires maxima	169
10.5	Représentation d'une feuille à l'échelle 1/50000	170
10.6	La désorientation entre les axes des systèmes planimétriques Lambert Tunisie et Lambert Algérie	171
11.1	L'image d'un cercle	176

Liste des tables

3.1 Les types de pivot	57
------------------------------	----

Index

- Adams O.S., 99
Aiguillon F., 179
Al-Farghani A.A., 179
Apollonius de Perge, 47
Beltrami E., 174
Bers L., 174
Bessel A.B., 87
Bonne R., 161
Darboux J.G., 17
Dieudonné J., 66, 189
Dombrowski P., 34
Doubrovine B., 21
Dufour H.M., 142, 187, 188
Dupin C., 18
Euler L., 20
Fezzani C., 162, 168, 187
Fomenko A., 21
Frenêt J.F., x, 5
Galileo Galilée, 1
Gauss C.F., 20, 25, 33, 92, 179
Godazzi D., 28
Halley E., 179
Harriot T., 179
Hipparque, 179
Julia G., 73, 189
Kastrup H.A., 179
Laborde J., 129
Lagrange J.L., 79
Levalois J.J., 190
Littrow J.J., 76
Mercator G., 13, 136
Meusnier J.B., 18
Monge G., 179
Novikov S., 21
Ptolémée C., 179
Ribaucour A., 17
Soldner A., 90, 152
Tchebychev P., 36
Tissot N.A., 43
Weingarten J., 25
Zeidler E., 34, 69
- Abscisse curviligne, 3
Affixe, 62
Aire de l'ellipsoïde, 99
Altération angulaire, 42
Altération linéaire, 43, 124
Angles correspondants, 39
Argument, 61
- Binormale, 7
- Canevas, 39
Coefficient de Beltrami, 174
Coefficient de distorsion, 176
Conditions de Cauchy, 63
Convergence des méridiens, 129
Coordonnées curvilignes, 9

- Coordonnées de Cassini-Soldner, 41, 141, 153
 Courbes coordonnées, 10, 40, 117
 Courbes correspondantes, 38
 Courbure de Gauss, 20
 Courbure moyenne, 20
 Courbure normale, 16
 Courbure totale, 20

 Deuxième forme fondamentale, 14
 Deuxième théorème de Meusnier, 18
 Diamètres conjugués de l'ellipse, 46
 Directions principales, 19, 43, 117
 Doppel-projektion, 142, 150

 Eléments correspondants, 38
 Equations de Gauss-Codazzi, 28
 Equations de Gauss-Weingarten, 28

 Facteur de réduction de l'échelle, 125
 Fonction analytique, 63
 Fonction harmonique, 66
 Fonction holomorphe, 174
 Fonction homographique, 63
 Formule d'Euler, 20
 Formule de Dufour-Ben Hadj Salem, 188
 Formule de Dufour-Fezzani, 187
 Formule de Schols-Laborde, 129

 Indicatrice de Dupin, 18
 Indicatrice de Tissot, x , 43, 45, 117
 Intégrale elliptique, 155
 Isoclines des images, 137
 Isomètre automécoïque, 119
 Isomètre stationnaire, 119

 Latitude équivalente, 98
 Latitude conforme, 91
 Latitude croissante, 13, 88
 Latitude de Mercator, 13
 Latitude géocentrique, 91
 Latitude isométrique, 88, 119, 141
 Lemme de Tissot, 43

 Module, 61
 Module aréolaire, 43
 Module linéaire, 42, 120
 Modules principaux, 45, 117

 Normale, 6
 Pivot, 40
 Plan tangent, 9
 Points correspondants, 38
 Première forme fondamentale, 10, 42
 Projection stéréographique, 77

 Réduction à la corde, 128
 Rayon de courbure, 4, 6
 Rayon de courbure de la méridienne, 117
 Rayon graphique, 101
 Représentation équivalente, 188
 Représentation azimutale, 42
 Représentation conforme, 48, 73, 115
 Représentation conique, 41, 115
 Représentation cylindrique, 2, 40
 Représentation de Bessel, 87
 Représentation de Bonne, 161
 Représentation de Gauss, 153
 Représentation de Littrow, 76
 Représentation directe, 40, 115
 Représentation isocylindrique, 139
 Représentation Lambert Tunisie, 115
 Représentation méricylindrique, 2
 Représentation Mercator Transverse, 153
 Représentation oblique, 40
 Représentation quasi-conforme, 173
 Représentation tangente, 115
 Représentation transverse, 40
 Représentation U.T.M., 141
 Représentations de Lagrange, 79
 Représentations de Soldner, 90
 Représentations polyconiques circulaires conformes, 78

 Section normale, 17
 Sphère de Gauss, 92, 94
 Sphère de Soldner, 90, 152

 Tangentes correspondantes, 38
 Tenseur métrique, 11
 Théorème d'Apollonius, 46
 Torsion, 8
 Trièdre de Darboux - Ribaucour, 17
 Trièdre de Frenét, 5

 Variable de Mercator, 13
 Variable stéréographique, 77