

## Нелинейные уравнения Максвелла

С. Я. Котковский

На основании анализа бикватернионных квадратичных форм поля показано, что уравнения Максвелла возникают как следствие принципа сохранения потока энергии-импульса поля в пространстве-времени. При этом оказывается, что этот принцип предполагает существование более общих нелинейных уравнений поля. Классические линейные уравнения Максвелла особым образом вложены в новые нелинейные уравнения и являются их частным случаем. Показано, что в ряде важных случаев нелинейные уравнения в отличие от линейных допускают решения, обладающие закрученностью потока энергии. Решения полученных нами уравнений дают возможность волнового описания заряженных частиц в рамках нелинейной классической электродинамики. Особое внимание в работе уделяется проблеме разделения поля на «собственное» поле заряженной частицы и «внешнее» по отношению к нему поле. Из нелинейных уравнений поля следуют как сами классические уравнения Максвелла, так и уравнения движения заряда под действием силы Лоренца. Таким образом решается задача нахождения нелинейных уравнений поля, включающих в себя взаимодействие. В рамках нашего подхода заряд частицы является электромагнитным (комплекснозначным), периодически проходящим различные линейные комбинации электрического и магнитного зарядов от чисто электрического до чисто магнитного. В реальных процессах играет роль не сам заряд частицы, а его соотношение по фазе с другими зарядами и полями.

Ключевые слова: электромагнитное поле, нелинейная электродинамика, нелинейные уравнения Максвелла, вектор Римана-Зильберштейна, тензор энергии-импульса, сингулярности, бикватернионы, регулярные токи, кулоновская волна.

### 1. Введение

Уравнения Максвелла по праву занимают одно из центральных мест в классической и современной физике. Однако до сих пор они оставались в статусе постулата, обобщающего экспериментальные данные о явлениях электромагнетизма. Не приводилось вывода этих уравнений из более фундаментальных принципов. Стоящая здесь перед нами цель есть аксиоматический вывод уравнений электромагнитного

поля на основании базового принципа сохранения потока энергии-импульса поля в пространстве и времени.

Классическая, а вслед за ней и квантовая электродинамика рассматривают элементарные заряды (электроны и позитроны) и электромагнитное поле (далее *поле*) как две взаимодействующие между собой, но отдельные сущности. Исследование поведения взаимодействующих заряженных частиц и поля решается путем совместного рассмотрения уравнений Максвелла для поля, порожденного зарядами, и лагранжиана взаимодействия зарядов и поля. Вместе с тем многими авторами уже давно предлагалось рассматривать заряды как сингулярности поля, а не как отдельные объекты (напр.[1]). Мы также строим наш подход на предположении, что заряженные частицы представляют собой сингулярности поля, причем исходным требованием служит то, что только через эти сингулярности поле может терять или приобретать энергию-импульс.

Для описания поля и его лоренцевой структуры мы задействуем математический аппарат бикватернионов. Бикватернионы описывают преобразования Лоренца в простой и удобной форме билинейных операторов [2]. Электромагнитное поле представляется в виде трехмерного комплекснозначного вектора.

Наибольшего успеха, на наш взгляд, в применении бикватернионного анализа к описанию электромагнитного поля достиг К.Имаеда, давший новую формулировку электродинамики на основе введенной им бикватернионной аналитичности [5]. Концептуальный шаг, сделанный этим исследователем, заключается в утверждении единства электромагнитного поля и пространства-времени Минковского. Уравнения Максвелла представляют собой не независимый постулат, а являются следствием лоренцевой структуры поля. В своей работе Имаеда исследует функционал от квадратичной формы, образованной бикватернионной функцией поля, и связанную с ним функциональную производную. Условия регулярности функции поля дают одновременно как уравнения Максвелла, так и уравнение для силы Лоренца, действующей на заряд в этом поле. В настоящем исследовании мы следуем методу Имаеды изучения гиперповерхностных интегралов от квадратичной формы поля, но при этом основываемся на других исходных принципах и приходим к принципиально новым результатам.

Отсутствие взаимодействия зарядов в составе самих уравнений Максвелла, их незамкнутость, есть один из главных посылов к поиску нелинейных уравнений электромагнитного поля [3],[4]. В самом деле, линейность уравнений предполагает независимость каждого из его решений, поскольку сумма решений автоматически становится новым решением. Каждое из решений при этом не влияет на другое; иначе говоря, в уравнениях поля отсутствует их взаимодействие. Обычно последнее вводится отдельно и представляет собой кулоновское взаимодействие или силу Лоренца. Для решения указанной дилеммы А.А.Черницким было предложено использовать нелинейную модель Борна-Инфельда [3]. В этом направлении им был получен ряд успешных решений, таких как полевые солитоны. В целом уравнения Борна-Инфельда можно рассматривать как первую попытку нелинейного обобщения уравнений Максвелла.

В нашем подходе мы следуем той же идеологии единого нелинейного поля, в которой заряженные частицы есть особые сингулярные конфигурации этого поля, но не прибегаем к модели, а выводим уравнения из универсальных принципов.

пов. Мы исходим из фундаментального физического принципа сохранения энергии-импульса, согласно которому сколько его втекает в заданный 4-объем, столько должно и вытекать [6]. Мы ищем описание движения этой «реки» энергии-импульса в лоренц-ковариантных полевых структурах в их бикватернионном представлении. Получение при этом нелинейных уравнений оказывается приятным сюрпризом. В то же время не утрачивается красота классических линейных уравнений Максвелла - они оказываются вложенными в новые нелинейные уравнения.

Раздел 2 кратко знакомит читателя с матаппаратом и основами подхода. Разделы 3-10 посвящены выводу и анализу нелинейных уравнений свободного поля. В разделе 5 мы приводим вывод этих уравнений в более общепринятой тензорной форме. В разделах 12-14 изучаются нелинейные поля частиц и их взаимодействие.

## 2. Основные положения

Пространство-время представляется вещественным бикватернионным пространством<sup>1</sup>  $Z = (t, \mathbf{r})$ . Основные операции с бикватернионами приведены в Приложении 1 (также см. [8]). Общие преобразования Лоренца пространства-времени, включающие в себя бусты и повороты, имеют вид бикватернионного произведения [2]:

$$Z' = U^* Z U, \quad (2.1)$$

где  $U$  - некоторый унитарный бикватернион:  $|U|^2 = 1$ .  $U$  представляется в виде:

$$U = e^{\boldsymbol{\theta}} = \text{ch } \theta + \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} \text{sh } \theta, \quad (2.2)$$

где  $\boldsymbol{\theta}$  - произвольный трехмерный комплексный вектор ненулевой величины  $\theta$  ( $\boldsymbol{\theta}^2 \neq 0$ ). Вещественные  $\boldsymbol{\theta}$  задают частные преобразования Лоренца (бусты), в то время как мнимые  $\boldsymbol{\theta}$  задают пространственные повороты.

В частности буст со скоростью  $\mathbf{V}$ , т.е. переход в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $(-\mathbf{V})$ , имеет вид бикватерниона:

$$U = \left( \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}, \frac{\mathbf{V}}{V} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \right), \quad (2.3)$$

где стандартно обозначено  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$ . Параметр  $\boldsymbol{\theta}$  связан со скоростью буста соотношением:  $\mathbf{V} = \text{th } 2\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} \text{th } 2\theta$ .

Рассмотрим движение частицы некоторой массы. Её энергия-импульс  $P = (\epsilon, \mathbf{p})$  преобразуется подобно  $Z$ , т.е. является *4-вектором*:

$$P' = U^* P U \quad (2.4)$$

Над  $Z$  можно ввести комплексное векторное поле, описывающее электромагнитное поле (вектор Римана-Зильберштейна) [9] (с.8-9):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(Z) = \mathbf{E} + i\mathbf{H}, \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Мы используем систему единиц, в которой скорость света равна единице:  $c = 1$ .

составляющие которого  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  есть напряженности электрического и магнитного полей соответственно.<sup>2</sup> Лоренцевы преобразования поля  $\mathbf{F}$  имеют вид:

$$\mathbf{F}' = \bar{U}\mathbf{F}U, \quad (2.6)$$

где  $\bar{U}$  обозначает бикватернион, сопряженный бикватерниону  $U$ . Для  $U = (s, \mathbf{u})$ :  $\bar{U} = (s, -\mathbf{u})$ .

Приведенные выше утверждения о лоренцевой структуре поля и частиц, вместе с центральным принципом - законом сохранения энергии-импульса в пространстве-времени, а также требование квадратичности энергии по полю, и составляют аксиоматику нашего подхода.

Опишем вкратце наш метод. Сначала, на основе векторного поля  $\mathbf{F}(Z)$  мы находим вид вещественной бикватернионной квадратичной по полю формы, которая ведёт себя при преобразованиях Лоренца подобно энергии-импульсу. Такая структура определена в каждой точке пространства-времени и выражается в виде дифференциала некоторой бикватернионной функции  $\Sigma(Z)$ , которая имеет смысл потока энергии-импульса поля. В тензорном представлении функции  $\Sigma(Z)$  соответствует тензор энергии-импульса поля.

Затем, мы формулируем принцип сохранения  $\Sigma(Z)$  в пространстве-времени, который выражается в равенстве нулю интеграла от  $d\Sigma$  по любой замкнутой гиперповерхности четырехмерного псевдоевклидова пространства. Пользуясь бикватернионной версией формулы Остроградского-Гаусса, последний интеграл мы заменяем на интеграл по пространственно-временной области, окруженной данной гиперповерхностью. В итоге мы получаем дифференциальные уравнения поля, которые и являются нелинейным обобщением уравнений Максвелла.

### 3. Нелинейные уравнения свободного поля

*Сингулярностями* поля мы назовём те его участки, которые обращаются в бесконечность внутри конечного пространственно-временного объема. В этом разделе мы выведем уравнения *свободного поля* (или поля в пустоте), т.е. поля, не имеющего в данной области пространства-времени сингулярностей. Уточним, что наше определение свободного поля не одно и то же с определением свободного поля в классической линейной электродинамике, где под свободным полем подразумевается поле, не связанное ни с одним источником.

Энергия-импульс свободного поля должна полностью сохраняться в пространстве-времени, значит, не переходить в другие виды энергии, как это имеет место при наличии сингулярностей, играющих роль каналов обмена энергией между различными видами движения.

Рассмотрим некоторую пространственно-временную гиперповерхность (трехмерное многообразие)  $S_3$ . Для любого элемента этой гиперповерхности можно определить бикватернион  $dZ$  ортогональный к ней, величина которого равна 3-объему элемента гиперповерхности<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Здесь и далее любая функция переменной  $Z$  включает в себя зависимость как от  $Z$ , так и от  $\bar{Z}$ , другими словами означает функцию переменных  $t$  и  $\mathbf{r}$ .

<sup>3</sup>Подробно внешние дифференциальные формы кватернионов изучены в работе [14]. Обобщение на случай вещественных бикватернионов приведено в работе [5].

Для поля  $\mathbf{F}$  на произвольном участке гиперповерхности можно определить вещественнозначную квадратичную форму, ведущую себя при лоренцевых преобразованиях подобно энергии-импульсу частицы (2.4)<sup>4</sup>:

$$d\Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{F}^* dZ \mathbf{F} \quad (3.1)$$

Действительно, в согласии с (2.1),  $dZ$  преобразуется как

$$dZ' = U^* dZ U \quad (3.2)$$

и с учетом (2.6) величина  $d\Sigma$  преобразуется как

$$d\Sigma' = \frac{1}{2} U^* \mathbf{F}^* \bar{U}^* U^* dZ U \bar{U} \mathbf{F} U = U^* \frac{1}{2} \mathbf{F}^* dZ \mathbf{F} U \quad (3.3)$$

или

$$d\Sigma' = U^* d\Sigma U, \quad (3.4)$$

что совпадает по форме с преобразованием Лоренца энергии-импульса (2.4).

Можно непосредственно убедиться, что кроме (3.1) других вещественнозначных квадратичных форм поля, преобразующихся подобно энергии-импульсу, не существует<sup>5</sup>. Например, форма вида  $d\Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{F}^* dZ$  не обладает подобным свойством.

Величина  $\Sigma$  имеет смысл потока энергии-импульса поля, который включает в себя как пространственные плотности энергии и импульса поля, так и их потоки в пространстве. Для краткости мы будем также называть  $\Sigma$  *потоком энергии* поля. Формула (3.1) связывает три фундаментальных величины: энергию, поле и пространство-время. Согласно (3.1) энергия факторизуется полем, осуществляя при этом пространственно-временное наполнение. Более подробно структура потока энергии  $d\Sigma$  рассмотрена в Приложении 6.

Потребуем непрерывности (сохранения) потока  $\Sigma$  в пространстве-времени. Это будет означать, что суммарный поток  $\Sigma$  через любую замкнутую пространственно-временную гиперповерхность  $S_3$  равен нулю:

$$\oint_{S_3} d\Sigma = \frac{1}{2} \oint_{S_3} \mathbf{F}^* dZ \mathbf{F} = 0 \quad (3.5)$$

По формуле Остроградского-Гаусса, при условии непрерывной по-координатной дифференцируемости компонент функции  $\mathbf{F}$ , интеграл в левой части уравнения (3.5) представляется в виде интеграла по четырехмерному пространственно-временному объему  $V_4$ , окруженному гиперповерхностью  $S_3$  (см. Приложение 2):

$$\oint_{S_3} \mathbf{F}^* dZ \mathbf{F} = \int_{V_4} (\mathbf{F}^* D \mathbf{F}) dV_4 \quad (3.6)$$

где  $(\mathbf{F}^* D \mathbf{F})$  обозначает квадратичную форму:

$$(\mathbf{F}^* D \mathbf{F}) = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{F}^*(D \mathbf{F})\} = \mathbf{F}^*(D \mathbf{F}) + (\mathbf{F}^* D) \mathbf{F}, \quad (3.7)$$

<sup>4</sup>Множитель  $\frac{1}{2}$  введен нами для согласования с общепринятым определением вектора Умова-Пойнтинга (см. далее (4.4)).

<sup>5</sup>см. Приложение 6

а  $D = (\partial_t, \nabla)$  есть бикватернионный градиент, действие которого на некоторый бикватернион  $(s, \mathbf{u})$  слева и справа выражается по правилам бикватернионного произведения (14.24) как:

$$D(s, \mathbf{u}) = (\partial_t, \nabla)(s, \mathbf{u}) = (\partial_t s + \nabla \cdot \mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u} + \nabla s + i\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3.8)$$

$$(s, \mathbf{u})D = (s, \mathbf{u})(\partial_t, \nabla) = (\partial_t s + \nabla \cdot \mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u} + \nabla s - i\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3.9)$$

соответственно. Уравнение (3.5) запишется в виде:

$$\int_{V_4} (\mathbf{F}^* D\mathbf{F}) dV_4 = 0 \quad (3.10)$$

Поскольку это условие должно выполняться для любого замкнутого 4-объема  $V_4$ , то в любой точке пространства-времени имеем:

$$(\mathbf{F}^* D\mathbf{F}) = 0 \quad (3.11)$$

или

$$\text{Re}\{\mathbf{F}^*(D\mathbf{F})\} = 0 \quad (3.12)$$

Распишем последнее уравнение в виде:

$$\begin{cases} \text{Re}\{(\partial_t \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^* - i[\nabla \mathbf{F}] \cdot \mathbf{F}^*\} = 0 \\ \text{Re}\{(\nabla \mathbf{F})\mathbf{F}^* + i(\partial_t \mathbf{F}) \times \mathbf{F}^* + [\nabla \mathbf{F}] \times \mathbf{F}^*\} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

или более развернуто:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \cdot (\partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E}) = 0 \\ \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) = \mathbf{E} \times (\partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{H} \times (\partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H}) \end{cases} \quad (3.14)$$

Уравнения (3.14) есть *нелинейные уравнения Максвелла для свободного поля*. В силу своего построения эти уравнения лоренц-ковариантны: они сохраняются при переходе в любую другую систему отсчета. Каждое из уравнений (или систем уравнений) (3.11), (3.12), (3.13) эквивалентно уравнениям (3.14), тем самым являясь альтернативными записями нелинейных уравнений Максвелла.

#### 4. Энергетическое представление

Уравнения (3.14) можно также представить в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \partial_t (E^2 + H^2) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0 \\ \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} \end{cases} \quad (4.1)$$

В последних уравнениях фигурируют пространственная плотность энергии поля  $W$  и её поток  $\mathbf{S}$  (плотность импульса, или вектор Умова-Пойнтинга), вместе образующие бикватернион плотности энергии-импульса:

$$P = (W, \mathbf{S}) = \frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{F}^* \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} W = \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^* = \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \\ \mathbf{S} = \frac{i}{2} \mathbf{F} \times \mathbf{F}^* = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \end{cases} \quad (4.3)$$

С помощью  $W, \mathbf{S}$  (4.1) представляются в *энергетическом виде*:

$$\begin{cases} \partial_t W + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \\ \partial_t \mathbf{S} + \nabla W = \mathbf{Q}, \end{cases} \quad (4.4)$$

где обозначено:

$$\mathbf{Q} = ((\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + ((\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} \quad (4.5)$$

Первое из уравнений (4.4) есть уравнение сохранения (непрерывности) плотности энергии поля, а второе - плотности его импульса. Как показано в следующем разделе, эти уравнения эквивалентны уравнениям непрерывности энергии-импульса, следующим из классического тензора энергии-импульса поля.

Обратим внимание на то, что для обычных линейных уравнений Максвелла не существует энергетического представления, аналогичного (4.4). Наличие последнего является, таким образом, исключительным свойством нелинейных уравнений поля.

## 5. Вывод нелинейных уравнений из тензора энергии-импульса

По мнению Зоммерфельда тензор энергии-импульса поля имеет более непосредственное отношение к физической реальности, чем сами полевые величины, а связанные с этим тензором уравнения имеют более фундаментальный характер, чем уравнения Максвелла [12] (с.64).

Тензор энергии-импульса поля  $T^{ik}$  обладает пятью независимыми компонентами, в то время как само поле - шестью, что косвенно свидетельствует о наличии еще одной степени свободы. Это позволяет ввести т.н. *дуальные повороты* [12], которые сводятся к умножению всех электромагнитных полей на некоторый постоянный, один и тот же всюду и для всех полей фазовый множитель. Дуальные повороты приводят к появлению в теории наряду с существующими электрическими также и магнитных зарядов. Как оказывается, такая теория описывает те же самые наблюдаемые эффекты взаимодействия полей и заряженных частиц, что и теория однозарядовая, оперирующая одним только электрическим зарядом.

В разделе 14 мы выясним, что дуальный поворот не обязан быть глобальным - постоянным во всём пространстве-времени и для всех частиц. В изученном нами далее случае двух частиц для соответствия теории существующим наблюдаемым эффектам достаточно лишь определённого согласования дуальных поворотов полей этих частиц. На примере дуальных поворотов, как известных глобальных, так и вводимых здесь локальных, мы видим, что классический тензор энергии-импульса поля разрешает более широкий чем общепринято класс взаимодействующих полей.

Покажем эквивалентность бикватернионного потока энергии-импульса  $\Sigma$ , введенного нами в разделе 3, классическому тензору энергии-импульса  $T^{ik}$ . Для этого мы приведём другой вывод уравнений нелинейных уравнений поля (3.14) - из классического тензора энергии-импульса. В отличие от основной части статьи в этом разделе мы следуем тензорному представлению поля и терминологии [10]<sup>6</sup>.

Тензор энергии-импульса поля имеет вид [10](32.15):

$$T^{ik} = \begin{bmatrix} W & S_x & S_y & S_z \\ S_x & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

где  $W$  и  $\mathbf{S}$  - плотности энергии и импульса поля, определённые нами выше в (4.3), а  $\sigma_{\alpha\beta}$  - максвелловский тензор напряжений [10](33.3):

$$\sigma_{\alpha\beta} = E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \quad (5.2)$$

В уравнениях (5.1),(5.2) латинские индексы пространственно-временные и пробегают значения от 0 до 3, тогда как греческие индексы чисто пространственные и пробегают значения от 1 до 3.

Уравнения непрерывности энергии-импульса получаются путём применения операции дивергенции к тензору  $T^{ik}$  [10](32.4):

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad (5.3)$$

Разделяя это уравнение по пространственным и временным компонентам, получаем вместо него два других уравнения ( [10] (32.12)):

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (5.5)$$

Согласно значениям компонент тензора  $T^{ik}$  в (5.1) уравнение (5.4) принимает вид:

$$\partial_t W + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (5.6)$$

что совпадает с первым из наших уравнений (4.4).

Перейдём теперь ко второму из уравнений непрерывности - уравнению (5.5). Возьмём, к примеру, это уравнение для координаты  $x$ :

$$\frac{\partial S_x}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = 0, \quad (5.7)$$

где  $\boldsymbol{\chi}$  есть следующий вектор:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) \\ E_x E_y + H_x H_y \\ E_x E_z + H_x H_z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = & E_x(\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) + E_y(\partial_y E_x - \partial_x E_y) + E_z(\partial_z E_x - \partial_x E_z) + \\ & + H_x(\partial_x H_x + \partial_y H_y + \partial_z H_z) + H_y(\partial_y H_x - \partial_x H_y) + H_z(\partial_z H_x - \partial_x H_z) \end{aligned} \quad (5.9)$$

---

<sup>6</sup>Наши единицы измерения полевых величин отличаются от принятых в [10] на множитель  $\frac{1}{4\pi}$ , а также в нашей системе единиц скорость света  $c = 1$ .



Уравнение (5.7) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial t} = & E_x(\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) + E_y(\partial_y E_x - \partial_x E_y) + E_z(\partial_z E_x - \partial_x E_z) + \\ & + H_x(\partial_x H_x + \partial_y H_y + \partial_z H_z) + H_y(\partial_y H_x - \partial_x H_y) + H_z(\partial_z H_x - \partial_x H_z) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Убедимся, что это уравнение совпадает со вторым из наших уравнений (4.4) для  $x$ -компоненты. Действительно:

$$(\nabla W)_x = E_x \partial_x E_x + E_y \partial_x E_y + E_z \partial_x E_z + E_x \partial_x E_x + E_y \partial_x E_y + E_z \partial_x E_z \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} Q_x = & (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z + E_x \partial_x + E_y \partial_y + E_z \partial_z) E_x + \\ & + (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z + E_x \partial_x + E_y \partial_y + E_z \partial_z) E_x \end{aligned} \quad (5.12)$$

откуда непосредственно следует совпадение второго из уравнений (4.4) и уравнения (5.10) для  $x$ -компонент. Очевидно, что эти уравнения совпадают и для  $y$  и  $z$  компонент, а, значит, совпадают вообще. Мы убедились, что второе из тензорных уравнений непрерывности (5.5) эквивалентно второму из уравнений (4.4):

$$\partial_t \mathbf{S} + \nabla W = \mathbf{Q} \quad (5.13)$$

Итак, нами показано, что энергетические уравнения (4.4) эквивалентны уравнениям непрерывности энергии-импульса (5.4), (5.5), связанным с классическим тензором энергии-импульса. Но это означает эквивалентность нелинейных уравнений Максвелла (3.14) тензорному уравнению непрерывности энергии-импульса (5.3), что мы и хотели доказать.

## 6. Структура потоков энергии поля. Разнонаправленность во времени потоков энергии частицы и поля.

Детально, на основе дифференциальных форм, структура потока энергии-импульса поля исследована в книге [6] (с.174-181). Здесь мы дадим простую схему, дающую базовое понимание этой структуры. Поток энергии  $d\Sigma$ , проходящий через ориентированную трехмерную гиперповерхность пространства-времени  $dS_3$ , даётся формулой (3.1):

$$d\Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{F}^* dZ \mathbf{F} \quad (6.1)$$

«Площадка»  $dS_3$  выражается посредством бикватерниона  $dZ$ . По определению, скалярная часть  $d\Sigma$  равна потоку энергии, а векторная - потоку импульса. Рисунок 6 условно изображает два особых случая потока  $d\Sigma$ , о которых пойдёт речь ниже. По абсциссе - пространство (схематично три пространственных измерения сжаты в одно), по ординате - время.

В первом случае площадка  $dZ_V$  - некоторый трехмерный объём, «ориентированный» вперёд по времени, а  $d\Sigma_T$  - времениподобный поток.

$$d\Sigma_T = \frac{1}{2} \mathbf{F}^* dZ_V \mathbf{F} = (W dt, -\mathbf{S} dt) \quad (6.2)$$

Гиперплощадка  $dZ_T$ , выражаемая через направленный элемент времени  $dt$ , ортогональна всем пространственным измерениям. Непрерывность потока энергии в

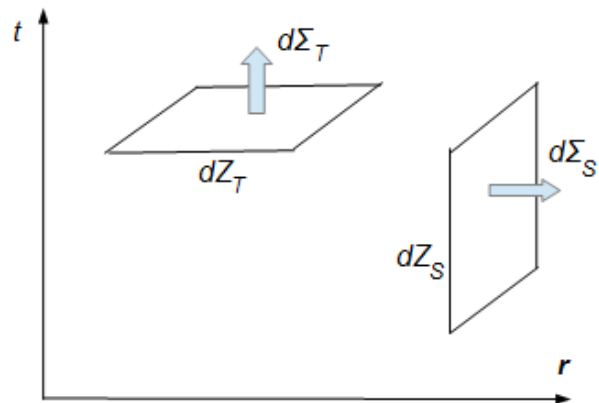


Рис. 1. Структура потока энергии поля.

данном случае означает сохранение энергии и импульса во времени. «Площадь» гиперплощадки  $dZ_T$  (обозначаемая величиной  $dt!$ ) равна трехмерному объёму  $dV$ , через который проходит поток. Этим подтверждается, что величины  $W$  и  $-\mathbf{S}$  выражают пространственные плотности энергии и импульса поля.

$d\Sigma_T$  это «вертикальный» поток энергии-импульса обратный во времени, что выражается знаком «-» перед вектором Умова-Пойтинга  $\mathbf{S}$ . Обратный во времени характер импульса-энергии поля обусловлен видом дифференциала потока энергии (3.1). В качестве дифференциала потока энергии можно было бы выбрать величину сопряжённую (3.1):  $d\Sigma_S = \overline{d\Sigma} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\overline{dZ}\mathbf{F}^*$ . Такой поток энергии поля был бы направлен по времени, а не обратно ему. Однако  $d\Sigma_S$  преобразуется не как 4-импульс энергии-импульса, а как сопряжённый ему бикватернион<sup>7</sup>. Значит, такой выбор неправомерен, если мы хотим, чтобы общая величина энергии-импульса поля и частицы сохраняла свойства лоренцева 4-вектора. Отсюда следует важный вывод: энергия поля частицы течёт в направлении времени противоположном тому, в котором течёт энергия самой частицы.

Во втором случае гиперплощадка  $dZ_S$  имеет в качестве «ребер» промежуток времени  $dt$  и участок ориентированной двумерной пространственной поверхности (вектор  $d\mathbf{r}$ ). Поток энергии-импульса  $d\Sigma_S$  времениподобен.

$$d\Sigma_S = (Wdt + (\mathbf{S}d\mathbf{r}), -\mathbf{S}dt + \mathbf{E}(\mathbf{E}d\mathbf{r}) + \mathbf{H}(\mathbf{H}d\mathbf{r}) - Wd\mathbf{r}) \quad (6.3)$$

Слагаемые  $Wdt$  и  $-\mathbf{S}dt$  имеют тот же смысл потоков во времени, что и в первом случае. Величина  $(\mathbf{S}d\mathbf{r})$  определяет изменение энергии за счет переноса её в пространственном измерении. Это отвечает тому известному факту, что вектор Умова-Пойтинга есть плотность потока энергии в пространстве. Величина  $\mathbf{E}(\mathbf{E}d\mathbf{r}) + \mathbf{H}(\mathbf{H}d\mathbf{r}) - Wd\mathbf{r}$  даёт перенос импульса в пространстве. Она отвечает максвелловскому тензору напряжений.

<sup>7</sup>Бикватернионное сопряжение соответствует переходу от ковариантных к контрвариантным 4-векторам в тензорном представлении.

## 7. Регулярные токи

В выведенных нами нелинейных уравнениях поля особую роль играет бикватернионная величина *4-тока* данного поля:

$$\mathcal{J} \equiv D\mathbf{F} = (\nabla \cdot \mathbf{F}, \partial_t \mathbf{F} + i\nabla \times \mathbf{F}) \quad (7.1)$$

Для свободного поля 4-ток, как и само поле, есть регулярная (не сингулярная) функция пространственно-временной координаты  $Z$ . Такой несингулярный ток мы назовём *регулярным током*.  $\mathcal{J}$  есть некоторая регулярная функция  $Z$ , определяемая самим полем  $\mathbf{F}$ .

4-ток раскладывается в виде суммы комплексных заряда и тока:

$$\mathcal{J} = (e_0 + ig_0, \mathbf{J}_0 + i\mathbf{I}_0) \quad (7.2)$$

$e_0$  и  $\mathbf{J}_0$  есть регулярные электрический заряд и ток,  $g_0$  и  $\mathbf{I}_0$  - регулярные магнитный заряд и ток, определяемые как:

$$\begin{cases} e_0 = \nabla \cdot \mathbf{E} \\ g_0 = \nabla \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{J}_0 = \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} \\ \mathbf{I}_0 = \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} \end{cases} \quad (7.3)$$

В терминах регулярного 4-тока нелинейные уравнения (3.11) запишутся как:

$$Re\{\mathbf{F}^* \mathcal{J}\} = 0, \quad (7.4)$$

или в раскрытом виде:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{H} = 0 \\ e_0 \mathbf{E} + g_0 \mathbf{H} - \mathbf{J}_0 \times \mathbf{H} + \mathbf{I}_0 \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Заметим, что наши определения (7.3) совпадают по форме с классическими уравнениями Максвелла с правой частью в симметричной электродинамике, допускающей заряды и токи, как электрического, так и магнитного типов [12]. К тому же, легко убедиться в выполнении условия непрерывности для регулярных зарядов и токов:

$$\begin{cases} \frac{\partial e_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_0 = 0 \\ \frac{\partial g_0}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{I}_0 = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Обычные (точечные) заряды и токи принципиально отличаются от регулярных зарядов и токов своим сингулярным характером. Однако, используя подобие регулярных и обычных зарядов и токов, можно увидеть в уравнениях (7.5) тот факт, что свободное поле не совершает работы над своими регулярными токами (первое уравнение), и что суммарная сила, приложенная со стороны поля к его регулярным зарядам и токам, равна нулю (второе уравнение). Это является естественным следствием исходного принципа сохранения энергии поля. Нелинейные уравнения поля (3.14) являются *рекурсивными* в том смысле, что источниками свободного поля могут быть его собственные несингулярные структуры - регулярные токи, с которыми это поле взаимодействует, не совершая над ними работы.

Важно не путать введенные нами регулярные заряды и токи с пространственной плотностью зарядов и токов макроскопической электродинамики [11], несмотря на их кажущуюся близость. В электродинамике сплошных сред мы имеем дело с усредненными по пространственной области распределенными точечными зарядами и токами, в то время как регулярные заряды и токи не есть результат усреднения. Далее (в разделе Выводы) указано, что регулярные токи могут служить классическим аналогом вакуумных токов квантовой теории поля.

## 8. Классические уравнения Максвелла как линейный предел

Исходя из общих соображений, если имеют место некоторые нелинейные уравнения электромагнитного поля, то классические уравнения Максвелла должны быть их линейным приближением [4] (с.6). При этом линейные уравнения перестают работать при достаточно больших значениях напряженности поля. В нашем случае именно так и происходит: классические уравнения Максвелла в пустоте являются частным случаем нелинейных (3.12) при нулевых регулярных 4-токах:

$$D\mathbf{F} = 0 \quad (8.1)$$

Действительно, используя определение (3.9), легко убедиться, что уравнение (8.1) в развернутом виде выглядит как:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = 0 \\ \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

Нелинейные уравнения (3.14) всегда выполняются при выполнении классических уравнений Максвелла (8.2), но обратное неверно. Примеры нелинейных полей, для которых выполняются нелинейные, но не выполняются обычные уравнения Максвелла, приведены ниже в разделе 9.

Убедимся, что для наших уравнений линейное приближение перестаёт работать при больших значениях напряженности поля. Нелинейные уравнения (3.12) линеаризуются при достаточно малых значениях полного тока:

$$|D\mathbf{F}| < \delta \quad (8.3)$$

где  $\delta$  некоторая малая величина, определяемая точностью конкретного наблюдения; оценка по модулю относится как к скалярной, так и к векторной составляющим тока. Уравнения (3.14) приближенно выполняются при таких значениях поля, при которых:

$$|\mathbf{F}^*(D\mathbf{F})| \ll 1 \Leftrightarrow |\mathbf{F}| \ll \frac{1}{\delta} \quad (8.4)$$

из чего следует, что при значениях величины напряженности поля  $|\mathbf{F}| > \frac{1}{\delta}$  линейное приближение перестаёт выполняться.

## 9. Сопутствующие поля

Решения нелинейных уравнений (3.14), которые в общем случае не являются решениями линейных уравнений (8.2), мы назовём *нелинейными полями*. Как правило сумма двух или более нелинейных полей уже не является решением полевых уравнений (3.14).

Пусть  $\mathbf{F}_0$  есть некоторое решение линейных уравнений (8.2), а  $(\omega_1, \mathbf{k}_1)$  некоторый 4-вектор. С помощью последнего можно построить скалярную функцию:

$$f(t, \mathbf{r}) = e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad (9.1)$$

Тогда

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 f(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}_0 e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad (9.2)$$

есть решение нелинейных уравнений (3.14). Таким образом, нелинейные поля можно получать из линейных умножением последних на лоренц-инвариантный фазовый волновой множитель  $f(t, \mathbf{r})$ . Построенное таким образом нелинейное поле  $\mathbf{F}$  мы назовём *сопутствующим* линейному полю  $\mathbf{F}_0$ . Внутри волновой фазы в (9.2) можно взять и знак «плюс», но связанные с этим эффекты будут важны лишь в дальнейшем - при рассмотрении полей сингулярностей, поэтому здесь мы для простоты ограничиваемся знаком «минус». Заметим, что существует более общий чем (9.2) вид решений сопутствующего типа:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\Phi(t, \mathbf{r})}$ , где  $\Phi(t, \mathbf{r})$  - некоторый лоренц-инвариант.

Поле  $\mathbf{F}_0$  удовлетворяет линейным уравнениям Максвелла (8.1):  $D\mathbf{F}_0 = 0$ . После простых выкладок мы получаем:

$$D\mathbf{F} = (\mathbf{F}_0 \cdot \nabla f, \mathbf{F}_0 \partial_t f - i\mathbf{F}_0 \times \nabla f), \quad (9.3)$$

где мы учли, что  $\partial_t f = i\omega f$ ,  $\nabla f = -if\mathbf{k}$ ,  $ff^* = 1$ . Нелинейные уравнения для поля  $\mathbf{F}$  в виде (3.13) дают:

$$\begin{cases} \text{Re}\{i\omega_1(\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^*) + [\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^*] \cdot \mathbf{k}_1\} = 0 \\ \text{Re}\{i\mathbf{k}(\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^*) + \omega[\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^*] - i(\mathbf{F}_0\mathbf{k}_1)\mathbf{F}_0^* - i(\mathbf{F}_0^*\mathbf{k}_1)\mathbf{F}_0\} = 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

С учетом вещественности величин  $\frac{1}{2}\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^*$ ,  $\frac{i}{2}\mathbf{F} \times \mathbf{F}^*$  и  $(\mathbf{F}_0\mathbf{k}_1)\mathbf{F}_0^* + (\mathbf{F}_0^*\mathbf{k}_1)\mathbf{F}_0$  оба из этих уравнений очевидным образом выполняются.

Из (9.3) следует  $D\mathbf{F} \neq 0$ . Это означает, что поле  $\mathbf{F}$  (9.2) в общем случае не удовлетворяет обычным уравнениям Максвелла (8.1) и, стало быть, является нелинейным полем.

Исходя из (9.3) 4-ток сопутствующего поля имеет вид:

$$\mathcal{J} = D\mathbf{F} = f(-i(\mathbf{F}_0\mathbf{k}_1), i\omega_1\mathbf{F}_0 + [\mathbf{F}_0\mathbf{k}_1]) = if\mathbf{F}_0\bar{K}_1 \quad (9.5)$$

## 10. Нелинейная плоская волна

Возьмём в качестве исходного классического поля  $\mathbf{F}_0$  в (9.2) линейную плоскую волну с круговой поляризацией

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{A}e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{A}^2 = 0, \quad \mathbf{A} = \text{const} \quad (10.1)$$

Волновой 4-вектор линейной волны (10.1)  $(\omega_0, \mathbf{k}_0)$  изотропен:  $\omega_0^2 = \mathbf{k}_0^2$ , и эта волна поперечна:  $\mathbf{k}_0 \perp \mathbf{A}$ . Решение сопутствующее (10.1) с фазовым множителем  $f = e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})}$  имеет вид:

$$\mathbf{F} = f\mathbf{F}_0 = \mathbf{A}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (10.2)$$

где

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \omega_1 \\ \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 \end{cases} \quad (10.3)$$

Волновой 4-вектор нелинейной волны  $(\omega, \mathbf{k})$  также должен быть изотропен, что требуется равенством фазовой скорости волны скорости света (1 в наших единицах измерения):  $\omega^2 = \mathbf{k}^2$ . Если  $\mathbf{k}_1$  параллелен  $\mathbf{k}_0$ , то в качестве  $\mathbf{F}$  мы снова получаем обычную поперечную линейную волну. Если же векторы  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0$  не параллельны, то  $\mathbf{k}$  уже не будет поперечен по отношению к  $\mathbf{A}$ . Следовательно, в отличие от классического случая линейных плоских волн, *нелинейная плоская волна* (10.2) может и не быть поперечной.

Определим 4-ток нелинейной волны (10.2). Согласно (9.5):

$$\mathcal{J} = D\mathbf{F} = (-i(\mathbf{F}\mathbf{k}_1), i\omega_1\mathbf{F} + [\mathbf{F}\mathbf{k}_1]) \quad (10.4)$$

Отсюда видно, что критерием поперечности волны (10.2)  $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$  является отсутствие тока:  $\mathcal{J} = 0$ .

Итак, мы видим, что нелинейные уравнения допускают существование продольных электромагнитных волн, но исключительно при наличии регулярных токов. Направление распространения плоской волны в таких решениях может не совпадать с направлением переноса энергии, определяемым вектором Умова-Пойнтинга.

## 11. Закрученность потока энергии

*Закрученностью потока энергии* мы назовём ротор вектора Умова-Пойнтинга  $\mathbf{S}$ , определяемого согласно (4.3):

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{S} = \nabla \times [\mathbf{E}\mathbf{H}] = ((\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{E} - ((\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{H} \quad (11.1)$$

Ниже мы покажем, что для определённого, достаточно широкого класса свободных полей закрученность потока энергии невозможна для линейных уравнений Максвелла, но возможна для нелинейных. В качестве такого класса полей мы рассмотрим плоские нормальные поля. *Нормальным* полем мы назовём поле, компоненты которого равны по величине и перпендикулярны друг другу:  $E = H, \mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ . В бикватернионном представлении нормальное поле  $\mathbf{F}$  это нульвекторное поле:  $\mathbf{F}^2 = 0$ . В силу важных причин, в первую очередь требования нулевой массы, для описания световых волн требуются именно нормальные поля. *Плоским* полем мы назовём поле, всегда остающееся в некоторой фиксированной плоскости  $\mathcal{P}$ :  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathbf{F} \in \mathcal{P}$ . Примером линейных плоских полей являются классические плоские электромагнитные волны. Нелинейный пример нормального плоского поля был рассмотрен в предыдущем разделе.

Плоское нормальное поле в общем виде представляется как:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = (\mathbf{a}\cos\phi + \mathbf{b}\sin\phi)f \\ \mathbf{H} = (\mathbf{a}\sin\phi - \mathbf{b}\cos\phi)f, \end{cases} \quad (11.2)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  - два фиксированных вещественных взаимно-перпендикулярных единичных вектора, лежащих в плоскости  $\mathcal{P}$ , а  $f$  и  $\phi$  - некоторые скалярные дифференцируемые функции  $t$  и  $\mathbf{r}$ . По-другому (11.2) можно записать как:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{a}e^{i\phi} + \mathbf{b}e^{-i\phi})f \quad (11.3)$$

Исходя из определения (11.1) можно получить выражение для закрученности поля (11.2):

$$\mathbf{\Omega} = 2f(\mathbf{b}f_x - \mathbf{a}f_y), \quad (11.4)$$

где  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  и  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ .

Не представляет большого труда убедиться в том, что, если нормальное плоское поле удовлетворяет линейным уравнениям Максвелла (8.2), то у него отсутствует закрученность:  $\mathbf{\Omega} = 0$ . В то же время нелинейные уравнения (3.14) допускают решения вида (11.2), для которых  $\mathbf{\Omega} \neq 0$ . Такие решения имеют вид волны, для которой  $f = f_1(t \pm z)f_2(x, y)$ , в чём несложно убедиться непосредственной подстановкой этого решения в уравнения.

Вывод этого раздела заключается в том, что в ряде важных случаев нелинейные уравнения в отличие от линейных допускают решения, обладающие закрученностью потока энергии. Нелинейность здесь проявляется как способность к образованию вихревых структур потока энергии-импульса, поскольку этот поток во многом определяется вектором Умова-Пойнтинга (см. Приложение 6) - закрученность определена нами в виде ротора этого вектора. Приведённый здесь анализ служит лишь для демонстрации на конкретных примерах принципиального отличия решений нелинейных уравнений от решений линейных уравнений в плане возможности существования вихревых структур свободного поля.

## 12. Центральное-симметричное поле

Нелинейные уравнения (3.13) выведены нами для свободного поля без сингулярностей. Однако, в силу своего вывода, они также работают в любой 4-области, лежащей вне сингулярностей (хотя при наличии сингулярностей такое поле уже нельзя назвать свободным). Обратимся к поиску центрально-симметричного (в некоторой системе отсчета) решения этих уравнений.

$$\mathbf{F} = f(t, r) \mathbf{r} \quad (12.1)$$

где  $f(t, r)$  - некоторая дифференцируемая по обоим аргументам комплекснозначная функция. Как будет видно из дальнейшего, в центральной точке  $r = 0$  такое поле обращается в бесконечность. Поэтому мы будем искать решение (12.1) в области вне центра-сингулярности.

Для поля (12.1) при  $r \neq 0$  имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &\equiv \nabla f = f_r \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \partial_t \mathbf{F} &= f_t \mathbf{r} \\ (\nabla \mathbf{F}) &= 3f + (\mathbf{g}\mathbf{r}) \\ [\nabla \mathbf{F}] &= [\mathbf{g}\mathbf{r}] \end{aligned} \quad (12.2)$$

При подстановке (12.1) в (3.13) после простых выкладок получаем:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{f^* f_t\} = 0 \\ \operatorname{Re}\{f^*(3f + f_r r)\} = 0 \end{cases} \quad (12.3)$$

Второе из этих уравнений приводится к виду:

$$\operatorname{Re}\{f^* f_r\} = -\frac{3|f|^2}{r} \quad (12.4)$$

Представляя функцию  $f$  в виде:

$$f(t, r) = s e^{i\phi}, \quad s(t, r) \in \mathbb{R}, \quad \phi(t, r) \in \mathbb{R} \quad (12.5)$$

преобразуем уравнение (12.4) к виду:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{s_r}{s} + \frac{3}{r}\right\} = i\phi_r \quad (12.6)$$

Последнее уравнение выполняется только при обоих его сторонах равных 0, откуда следует:

$$\phi_r = 0 \Rightarrow \phi = \phi(t) \quad (12.7)$$

$$\frac{s_r}{s} = -\frac{3}{r} \Rightarrow s = \frac{\alpha}{r^3}, \quad \alpha = \text{const} \in \mathbb{R} \quad (12.8)$$

$$f = \frac{\alpha}{r^3} e^{i\phi(t)} \quad (12.9)$$

Как легко проверить, для  $f$  в (12.9) всегда выполняется также и первое из уравнений (12.3).

Таким образом, общее центрально-симметричное решение (3.13) имеет вид обычного кулоновского поля с фазовым множителем  $e^{i\phi(t)}$ :

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} e^{i\phi(t)} \quad (12.10)$$

Поскольку решение (12.10) найдено нами в некоторой системе отсчета, то необходимо привести его лоренц-ковариантную форму. Таковой является:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\Phi} \quad (12.11)$$

где  $\mathbf{F}_0$  обычное кулоновское поле, преобразованное к данной системе отсчета согласно (2.6), а  $\Phi$  - некоторый лоренц-инвариант. Если считать, что сингулярность в центре поля (12.11) связана с некоторым вещественным 4-вектором  $K = (\omega, \mathbf{k})$ , то лоренц-инвариант имеет вид:  $\Phi = \omega t \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , а *нелинейное кулоновское поле* (12.11) имеет волновой характер:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i(\omega t \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (12.12)$$

Примечательно, что это есть решение сопутствующее обычному кулоновскому полю в смысле, определённом нами выше в (9.2).

Полученное поле связано с некоторой сингулярностью, т.е. с некоторой заряженной частицей. Определим, как соотносятся между собой 4-импульс этой кулоновской



частицы  $P$  и волновой 4-вектор  $K$ . В системе отсчета покоя частицы все направления одинаковы. Поэтому в ней  $\mathbf{k}_1 = 0$ , и поле имеет вид:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t} = \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} e^{i\omega t}$ . При переходе в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{F}_0$  преобразуется в кулоновское поле движущегося со скоростью  $\mathbf{v} = -\mathbf{V}$  заряда. 4-вектор при этом преобразуется так, что  $\mathbf{k} = \omega \mathbf{v}$ . Последнее означает:

$$K = \lambda P \quad (12.13)$$

где  $\lambda$  - определенная для данной частицы вещественная константа.

Нелинейное кулоновское поле (12.10) можно интерпретировать как кулоновское поле комплексного заряда  $q$ :

$$\mathbf{F} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad (12.14)$$

Комплекснозначный заряд  $q$  имеет смысл электромагнитного заряда, переменного сочетающего в себе электрический и магнитный заряды:

$$q = \alpha e^{i\phi(t)} \quad (12.15)$$

При линейно изменяющейся фазе комплексный заряд периодически проходит все комплексные значения заданной величины. При вещественных значениях  $q$  становится электрическим зарядом, а при мнимых значениях магнитным. Однако, как оказывается, при взаимодействии с другими зарядами важна не сама фаза заряда, а то, как фазы различных зарядов соотносятся между собой. Как будет показано ниже (Раздел 14), простейшее согласование полей двух зарядов приводит к согласованию их фаз, выливающимся в эффективное электрическое взаимодействие между ними.

В следующем разделе с помощью соответствующих обобщенных функций мы продлим полученное решение вне сингулярности на саму сингулярность.

### 13. Уравнения с одной сингулярностью

В разделе 3 мы вывели уравнения поля в пустоте, т.е. в пространственно-временной области, не содержащей сингулярностей поля. Предположим теперь, что в рассматриваемой области имеется одна точечная (центрально-симметричная) сингулярность. При наличии сингулярности энергия поля в области, содержащей эту сингулярность, уже не сохраняется. Полезна следующая наглядная модель энергообмена между двумя видами, или *планами* движения: полевым и кинематическим. Полевая сингулярность играет роль канала, по которому энергия может перетекать из полевого плана в кинематический и обратно. В кинематическом плане сингулярность поля представлена частицей<sup>8</sup>. Мы предполагаем, и это в значительной степени подтверждается опытом, что кроме сингулярностей других каналов обмена энергией между полевым и кинематическим планами нет. Поэтому через регулярные токи энергия из поля вытекать не может.

Как мы видели в предыдущем разделе, вне точечной сингулярности поле есть кулоновское с фазовым множителем (12.12). В качестве четырехмерной области, содержащей линию сингулярности, мы возьмем некоторый гиперцилиндр  $V_4$  «высоты» (в некоторой системе отсчета)  $\Delta t = t_2 - t_1$ , ограниченный «сверху и снизу» двумя временными срезами, т.е. пространственными объемами  $S_3^{(1)}$  и  $S_3^{(2)}$  (Рис.2).

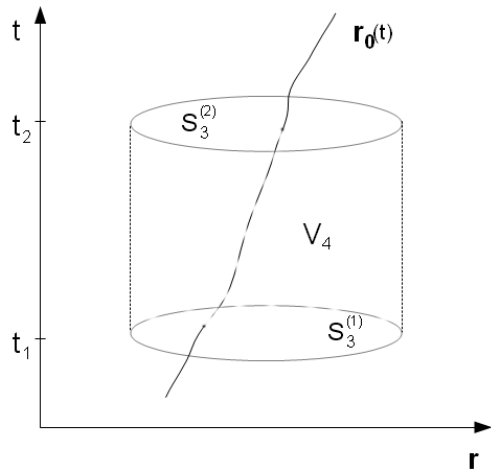


Рис. 2. Область с сингулярностью

Скорость перетекания энергии-импульса от поля к частице или от частицы к полю в 4-объеме  $V_4$  определяется как  $\frac{dP}{dt} \Delta t$ , где  $P = (\epsilon, \mathbf{p})$  - 4-импульс частицы. Для баланса энергии вместо (3.5) мы получаем:

$$\frac{1}{2} \oint_{S_3} \mathbf{F}^* dZ \mathbf{F} = \frac{dP}{dt} \Delta t \quad (13.1)$$

где  $S_3$  - полная гиперповерхность, ограничивающая  $V_4$ .

Бикватернионная формула Остроградского-Гаусса (14.37), сформулированная для непрерывно-дифференцируемых функций, может быть перенесена на случай сингулярных функций при помощи аппарата обобщенных функций. Рассматривая функцию  $\mathbf{F}(Z)$  в (13.1) как обобщенную, можно переписать интеграл по гиперповерхности  $S_3$  в виде интеграла по 4-объему, как мы это делали выше в (3.6) для регулярной функции:

$$\oint_{S_3} \mathbf{F}^* dZ \mathbf{F} = \int_{V_4} (\mathbf{F}^* D \mathbf{F}) dV_4 \quad (13.2)$$

Предполагая, что временной интервал  $\Delta t$  достаточно мал, чтобы можно было пренебречь изменением  $(\mathbf{F}^* dZ \mathbf{F})$  на нём, интеграл (13.2) можно выразить, как произведение интеграла по пространственному объему  $V_3 = S_3^{(1)} = S_3^{(2)}$  на время:

$$\int_{V_4} (\mathbf{F}^* D \mathbf{F}) dV_4 = \Delta t \int_{V_3} (\mathbf{F}^* D \mathbf{F}) dV_3 \quad (13.3)$$

Тогда (13.1) преобразуется к виду:

$$\int_{V_3} (\mathbf{F}^* D \mathbf{F}) dV_3 = \frac{dP}{dt} \quad (13.4)$$

В заданной 4-области (не содержащей других сингулярностей) во всех точках вне траектории сингулярности  $\mathbf{r}_1(t)$  функция  $(\mathbf{F}^* D \mathbf{F})$  обращается в 0. Это позволяет

<sup>8</sup>Здесь и далее под частицей понимается точечная заряженная частица.

заменить неопределённую в центре регулярную функцию  $(\mathbf{F}^* D\mathbf{F})$  на обобщенную  $\delta$ -функцию:

$$(\mathbf{F}^* D\mathbf{F}) = A(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) \quad (13.5)$$

где  $A(t)$  - некоторая регулярная функция времени. Подставляя (13.5) в (13.4), находим эту функцию:  $A(t) = \frac{dP}{dt}$ , и в результате из (13.4) получаем:

$$(\mathbf{F}^* D\mathbf{F}) = \frac{dP}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) \quad (13.6)$$

Это есть *нелинейное уравнение Максвелла с правой частью*, служащее аналогом уравнения (3.11) в присутствии сингулярности.

В уравнении (13.6) поле  $\mathbf{F}$  единое - в нём нет разделения на поле частицы и внешнее поле. Такое условное разделение можно осуществить в *квазилинейном случае*, когда общее поле можно представить в виде суммы полей частицы  $\mathbf{F}_1$  и внешнего поля  $\mathbf{F}_e$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_e \quad (13.7)$$

так, что каждое из них в отдельности удовлетворяет нелинейному уравнению в пустоте (3.11),

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_1^* D\mathbf{F}_1) = 0 \\ (\mathbf{F}_e^* D\mathbf{F}_e) = 0 \end{cases} \quad (13.8)$$

а суммарное поле  $\mathbf{F}$  удовлетворяет нелинейному уравнению с сингулярностью (13.6).

Заметим, что для того, чтобы получить собственное поле заряда  $\mathbf{F}_1$ , удовлетворяющее первому из уравнений (13.8), достаточно дополнить центрально-симметричное решение (12.12) нулевым значением в центре сингулярности:  $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}_1(t)) = 0$ . Последнее условие означает отсутствие самодействия. Тогда, энергообмен через сингулярность, описываемый уравнением (13.4), сведется к уравнению, содержащему только *взаимодействие полей*:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{F}_1^* D\mathbf{F}_e) + (\mathbf{F}_e^* D\mathbf{F}_1) = \frac{dP}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) \quad (13.9)$$

или

$$Re\{\mathbf{F}_e^* \mathcal{J}_1 + \mathbf{F}_1^* \mathcal{J}_e\} = \frac{dP}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) \quad (13.10)$$

где  $\mathcal{J}_1 = D\mathbf{F}_1$  - ток частицы (который для нелинейных решений содержит в себе как сингулярную, так и регулярную части),  $\mathcal{J}_e = D\mathbf{F}_e$  - регулярный ток внешнего поля. Каждый из членов вида  $\mathbf{F}^* \mathcal{J}$  в (13.10) есть выражение работы (в единицу времени) соответствующего поля над «противоположным» током.

Представим ток  $\mathcal{J}_1$  в виде суммы сингулярного и регулярного токов:

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_{1sng} + \mathcal{J}_{1reg} \quad (13.11)$$

и сообразно этому разделим уравнение (13.10) на сингулярную и регулярную части:

$$\begin{cases} Re\{\mathbf{F}_e^* \mathcal{J}_{1sng}\} = \frac{dP}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) \\ Re\{\mathbf{F}_e^* \mathcal{J}_{1reg} + \mathbf{F}_1^* \mathcal{J}_e\} = 0 \end{cases} \quad (13.12)$$

Смысл первого из уравнений (13.12) обычный и состоит в том, что передача энергии заряженной частице равна работе внешнего поля над зарядом. Второе же из этих

уравнений имеет чисто нелинейную природу и означает взаимную компенсацию работ поля частицы и внешнего поля над «противоположным» регулярным током.

Проследим, как из уравнений (13.12) в предельном случае получаются обычные уравнения движения заряженной частицы во внешнем поле. Для этого надо взять линейное внешнее поле:  $\mathcal{J}_e = 0$ , и чисто электрический ток сингулярности:  $Im \mathcal{J}_1 = 0$ . При данных условиях, второе уравнение (13.12) выполняется тривиально, а из первого уравнения (13.12) и соображений лоренц-ковариантности для 4-тока сингулярности получаем:

$$\mathcal{J}_{1sng} = e\gamma(1, \mathbf{v})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) \quad (13.13)$$

где  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$  - скорость сингулярности,  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ , а  $e$  - некоторая вещественная постоянная. Первое из уравнений (13.12) приобретает известный вид силы Лоренца и её работы в единицу времени над электрическим зарядом величины  $e$  со стороны внешнего поля  $\mathbf{F}_e = \mathbf{E}_e + i\mathbf{H}_e$ :

$$\begin{cases} e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_e = \frac{d\epsilon}{dt} \\ e\mathbf{E}_e + e\mathbf{v} \times \mathbf{H}_e = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \end{cases} \quad (13.14)$$

Вспомним теперь, что поле сингулярности имеет центрально-симметричный вид (12.10). Из тождества<sup>9</sup>

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (13.15)$$

следует, что ток для поля (12.10), продолженный в центральную точку, в системе отсчета покоя равен:

$$\mathcal{J}_{1sng} = D\mathbf{F} = \nabla \cdot \frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\alpha\delta(\mathbf{r}) \quad (13.16)$$

Сопоставляя последнее с (13.13), получаем:

$$e = 4\pi\alpha \quad (13.17)$$

Постоянная  $\alpha$  в (12.10) совпадает с зарядом  $e$  в (13.13) (с точностью до множителя  $4\pi$ , что обусловлено нашим выбором системы единиц). Это означает, что величина заряда частицы как источника поля совпадает с величиной её «пробного» заряда во внешнем поле.

Убедимся, что скорость сингулярности  $\mathbf{v}$  совпадает со скоростью частицы  $\frac{\mathbf{p}}{\epsilon}$ . Из постоянства массы частицы  $\epsilon^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$  следует соотношение:

$$\epsilon \frac{d\epsilon}{dt} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (13.18)$$

Умножая первое из уравнений (13.14) на  $\epsilon$ , а второе скалярно на  $\mathbf{p}$  и применяя (13.18), приходим к следующему уравнению:

$$\mathbf{E}_e \cdot (\epsilon\mathbf{v} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot [\mathbf{v}\mathbf{H}_e] \quad (13.19)$$

Это соотношение должно выполняться при любом внешнем поле  $\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e$ , что возможно только при  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\epsilon}$ .

<sup>9</sup>Это тождество доказывается аналогично более известному тождеству  $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$

Итак, мы убедились, что в линейном приближении осуществляется переход от нелинейных уравнений к обычным уравнениям для заряда во внешнем поле. При таком переходе вместо одного нелинейного уравнения у нас оказывается два отдельных уравнения: классическое уравнение Максвелла с правой частью (которое в нашем случае есть определение тока) и уравнение энергетического баланса или силы Лоренца.

#### 14. Согласованные поля

Применим те же рассуждения, к которым мы прибегли в предыдущем разделе при выводе формулы (13.6), к случаю, когда в рассматриваемой области имеется  $n$  сингулярностей, описываемых траекториями  $\mathbf{r}_i(t)$ . В результате мы получим лоренц-ковариантное уравнение:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^* D\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{dP_i}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (14.1)$$

где  $P_i$  - 4-импульсы каждой из частиц, соответствующих этим сингулярностям.

Рассмотрим квазилинейный случай двух *одинаковых частиц*. При этом будем исходить из предположения, что общее поле  $\mathbf{F}$  может быть получено как сумма полей  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  от каждой сингулярности в отдельности:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (14.2)$$

Рассмотрим некоторую 4-область, лежащую *вне траекторий обеих сингулярностей*. В качестве индивидуальных полей каждой из сингулярностей мы возьмем их волновые кулоновские поля (12.12):

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 = f_1 \mathbf{F}_{10}, & f_1 = e^{i\phi_1} = \mathbf{F}_{10} e^{i(\omega_1 t \pm \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{F}_2 = f_2 \mathbf{F}_{20}, & f_2 = e^{i\phi_2} = \mathbf{F}_{20} e^{i(\omega_2 t \pm \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} \end{cases} \quad (14.3)$$

где  $\mathbf{F}_{10}$  и  $\mathbf{F}_{20}$  обычные кулоновские поля каждой из частиц в рассматриваемой системе отсчета. Знак плюс или минус внутри волновых фаз для каждого из полей будет определён ниже.

По аналогии со вторым уравнением (13.12) нелинейное взаимодействие полей (вне сингулярностей) запишется как:

$$Re\{\mathbf{F}_1^* \mathcal{J}_2 + \mathbf{F}_2^* \mathcal{J}_1\} = 0 \quad (14.4)$$

где  $\mathcal{J}_1 = D\mathbf{F}_1$  и  $\mathcal{J}_2 = D\mathbf{F}_2$  - регулярные токи каждой из частиц. Исходя из (9.5) и (14.3) для тока  $\mathcal{J}_1$  получаем:

$$\mathcal{J}_1 = if_1 \mathbf{F}_{10} \bar{K}_1 \quad (14.5)$$

где  $K_1 = K_1(t) = (\omega_1, \mathbf{k}_1)$ . Аналогичное выражение получается и для тока  $\mathcal{J}_2$ . Уравнение (14.4) переписывается как:

$$Im\{fA + f^*B\} = 0 \quad (14.6)$$

где  $f = f_2 f_1^*$  и

$$\begin{cases} A = \mathbf{F}_{20} \bar{K}_2 \mathbf{F}_{10}^* \\ B = \mathbf{F}_{10} \bar{K}_1 \mathbf{F}_{20}^* \end{cases} \quad (14.7)$$

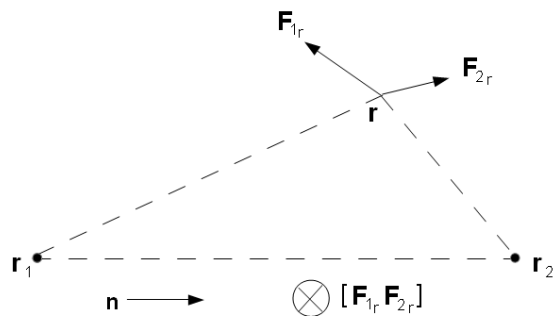


Рис. 3. Два заряда

Обозначим  $\Delta K = K_2 - K_1$ . Тогда  $A$  можно представить как:

$$A = \mathbf{F}_{2_0}(\overline{K_1} + \overline{\Delta K})\mathbf{F}_{1_0}^* = B^* + \mathbf{F}_{2_0}\overline{\Delta K}\mathbf{F}_{1_0}^* \quad (14.8)$$

В результате (14.6) выразится как:

$$Im\{fB^* + f^*B + f\mathbf{F}_{2_0}\overline{\Delta K}\mathbf{F}_{1_0}^*\} = 0 \quad (14.9)$$

или

$$Im\{f\mathbf{F}_{2_0}\overline{\Delta K}\mathbf{F}_{1_0}^*\} = 0 \quad (14.10)$$

Рассмотрим движение частиц в системе их центра масс. Поскольку частицы предполагаются одинаковыми, то 4-х импульс и волновой 4-вектор каждой из них связаны соотношением (12.13) с одним и тем же  $\lambda$ . Следовательно,  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ ,  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\Delta K = -2\mathbf{k}$ .

$$f\mathbf{F}_{2_0}\overline{\Delta K}\mathbf{F}_{1_0}^* = -2f(i[\mathbf{F}_{1_0}^*\mathbf{F}_{2_0}] \cdot \mathbf{k}, (\mathbf{F}_{2_0}\mathbf{k})\mathbf{F}_{1_0}^* + \mathbf{F}_{2_0}(\mathbf{F}_{1_0}^*\mathbf{k}) - \mathbf{k}(\mathbf{F}_{1_0}^*\mathbf{F}_{2_0})) \quad (14.11)$$

Поля движущихся зарядов в системе центра масс  $\mathbf{F}_{1_0}, \mathbf{F}_{2_0}$  получаются из полей покоящихся зарядов  $\mathbf{F}_{1_r}, \mathbf{F}_{2_r}$  с помощью двух подходящих бустов противоположных скоростей  $\mathbf{V}$  и  $-\mathbf{V}$  (2.6):

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{1_0} = \text{ch } 2\theta\mathbf{F}_{1_r} - 2\text{sh}^2\theta(\mathbf{F}_{1_r}\mathbf{n})\mathbf{n} + i\text{sh } 2\theta[\mathbf{F}_{1_r}\mathbf{n}] \\ \mathbf{F}_{2_0} = \text{ch } 2\theta\mathbf{F}_{2_r} - 2\text{sh}^2\theta(\mathbf{F}_{2_r}\mathbf{n})\mathbf{n} - i\text{sh } 2\theta[\mathbf{F}_{2_r}\mathbf{n}] \end{cases} \quad (14.12)$$

где параметры буста  $\mathbf{n}$  и  $\theta$  связаны с его скоростью соотношением  $\mathbf{V} = \mathbf{n}\text{th } 2\theta$ . Очевидно,  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{n}$ .

$\mathbf{F}_{1_r}$  и  $\mathbf{F}_{2_r}$  - обычные (вещественные) кулоновские поля каждой из частиц, взятые каждое в системе покоя своей частицы, в которых они направлены по своим радиус-векторам. Последние можно выразить с помощью преобразования Лоренца (2.1) через координаты рассматриваемой точки  $(t, \mathbf{r})$ . Так, относительный радиус-вектор  $\mathbf{R}'_1$  для  $\mathbf{F}_{1_r} = \frac{\alpha\mathbf{R}'_1}{R_1'^3}$  равен

$$\mathbf{R}'_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{n}(t\text{sh } 2\theta - 2(\mathbf{R}_1\mathbf{n})\text{sh}^2\theta) \quad (14.13)$$

где  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  - радиус-вектор в системе центра масс. Подобное же выражение имеем и для  $\mathbf{R}'_2$  - радиус-вектора, задающего  $\mathbf{F}_{2,r}$ . Важно, что вектора  $\mathbf{F}_{1,r}$  и  $\mathbf{F}_{2,r}$  лежат в плоскости векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$ , изображенной на Рис.3. Это вполне очевидно из того, что эти вектора направлены по соответствующим радиусам-векторам  $\mathbf{R}'_1$  и  $\mathbf{R}'_2$  в своих системах покоя, а радиус-вектор при преобразовании в систему отсчета центра масс не приобретает поперечной по отношению к  $\mathbf{n}$  составляющей. Из этого, согласно (14.12), следует:

$$\begin{cases} [\mathbf{F}'_{1_0} \mathbf{F}'_{2_0}] \cdot \mathbf{k} = 0 \\ \text{Im}\{(\mathbf{F}'_{1_0} \mathbf{F}'_{2_0})\} = 0 \end{cases} \quad (14.14)$$

Тогда, с учетом (14.11) условие (14.10) сводится к вещественности функции  $f$ :

$$\text{Im}f = 0 \quad (14.15)$$

Т.к.

$$f = e^{i(\phi_2(t,\mathbf{r}) - \phi_1(t,\mathbf{r}))} \quad (14.16)$$

то условие (14.15) означает *согласование по фазе* волновых полей сингулярностей при любых значениях  $t$  и  $\mathbf{r}$ :

$$\phi_1(t, \mathbf{r}) = \phi_2(t, \mathbf{r}) \quad (14.17)$$

Как видно из дальнейшего, дополнительный ненулевой сдвиг по фазе  $2\pi n$  невозможен.

Теперь можно обратиться к вопросу, какой знак («плюс» или «минус») следует выбирать для фаз каждой из частиц в их волновых функциях (14.3). Возьмём для первой частицы знак «минус»:

$$\phi_1 = \omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} \quad (14.18)$$

Отсюда, из (14.17) в системе центра масс для второй частицы получаем:

$$\phi_2 = \phi_1 = \omega_2 t + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} \quad (14.19)$$

т.е. в её фазе должен быть выбран знак «плюс». Мы приходим к важному выводу, что для согласования полей частиц их волновые фазы должны быть *сопряжены*: знаку «минус» первой частицы соответствует знак «плюс» второй, и наоборот - знаку «плюс» первой частицы соответствует знак «минус» для второй частицы. Первый из этих вариантов записывается как:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{1_0} e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{2_0} e^{i(\omega_2 t + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} \end{cases} \quad (14.20)$$

Из вышеприведённого разбора следует, что согласование полей по фазе требуется для квазилинейного представления общего поля в виде суммы полей каждой из частиц (14.2). Если же поля не согласованы, то такое представление невозможно, что эффективно требует введения в сумму третьего поля, которым должно быть поле излучения. Работу по компенсации этого поля можно оценить как левую часть (14.4), которая поэтому играет роль нелинейного взаимодействия несогласованных полей. Исходя из сказанного можно предположить, что согласованные поля минимизируют нелинейное взаимодействие, которое в случае рассогласования приводит к излучению.

Знаки «минус» и «плюс» внутри фазы волны очевидно описывают волны, бегущие по направлению скорости частицы и в противоположном направлении соответственно. При согласовании фаз частиц, движущихся навстречу друг другу, их волны оказываются бегущими в одном направлении.

Выше мы исследовали совместное поле двух тождественных частиц в квазилинейном случае в области вне сингулярностей. Посмотрим теперь, что происходит на самих сингулярностях. Из первого уравнения (13.12), примененного к первой из сингулярностей, получается следующее уравнение движения её частицы:

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{F}_2^* \mathcal{J}_{1sng}\} = \frac{dP_1}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) \quad (14.21)$$

Но поскольку фазы  $\mathcal{J}_{1sng}$  и  $\mathbf{F}_2$  для согласованных полей компенсируют друг друга, мы приходим к уравнениям движения одной заряженной частицы под действием электрического кулоновского поля другой заряженной частицы, которые имеют место в обычной электродинамике.

Квазилинейное согласование полей «скрадывает» нелинейные эффекты в наблюдении движения заряженных частиц, и вместо взаимодействия электромагнитных зарядов мы в этом случае получаем взаимодействие обычных электрических зарядов, как это было заявлено выше в конце Раздела 12. Однако, в принципе возможны более сложные нелинейные случаи взаимодействия зарядов, при которых может проявляться их электромагнитный характер. В настоящей работе мы не рассматриваем такие случаи, оставляя их исследование на будущее.

## Выводы

Главная цель, поставленная в этой работе, заключалась в том, чтобы показать, что уравнения Максвелла есть следствие принципа сохранения потока энергии поля. Однако, решая эту задачу, мы получили более широкие нелинейные уравнения. В общем виде, включающем уравнения (3.11) для свободного поля и уравнения (14.1) для поля с  $n$  сингулярностями, эти уравнения имеют вид:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^* D\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{dP_i}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad n \geq 0 \quad (14.22)$$

Существенно, что в этих уравнениях  $\mathbf{F}$  есть единое поле, не разделенное на свободные поля и поля отдельных частиц.

Классические линейные уравнения Максвелла оказываются особым образом вложены в эти нелинейные уравнения и являются их предельным случаем. Физический смысл полученных нами уравнений свободного поля заключается в том, что это поле может создаваться своими же структурами-источниками, над которыми оно не совершает работы. Такое взаимоотношение между полем и его собственными источниками мы определили как рекурсивное.

Хорошо известно, что свет существенно пространственно-временное явление, в котором невозможно отделить пространственные и временные компоненты друг от друга. Но в классических уравнениях Максвелла для поля в пустоте (8.2) операторы дифференцирования по пространственной координате и по времени линейно разделены (входят как слагаемые). В то же время аналогичные нелинейные уравнения



(3.14) характеризуются неразделимостью этих операторов, поскольку они входят в уравнения в более сложном виде, чем простая сумма. Это говорит в пользу большей пригодности нелинейных, чем линейных уравнений для описания реального света.

Собственные источники поля мы назвали регулярными зарядами и токами в отличие от обычных сингулярных зарядов и токов. Классическая электродинамика имеет дело либо с сингулярными источниками, либо с полным отсутствием источников. Наше исследование рассматривает теоретическую возможность существования несингулярных (регулярных) источников поля.

Нелинейные уравнения свободного поля допускают среди своих решений не полностью поперечные, обладающие продольной составляющей, плоские волны. Критерием существования таких решений является наличие ненулевого регулярного тока. В противном случае мы имеем обычную поперечную волну. Наличие продольной составляющей у волн света может объяснить тот факт, что свет обладает собственным моментом импульса, что невозможно в случае чисто поперечных волн.

В разделе 11 выяснено, что если ограничить рассмотрение плоскими нормальными полями, то нелинейные уравнения в отличие от линейных допускают решения, обладающие закрученностью потока энергии. Нелинейность здесь проявляется как способность к образованию вихревых структур потока энергии-импульса, который во многом определяется вектором Умова-Пойнтинга - закрученность определена нами в виде ротора этого вектора. На конкретных примерах показано принципиальное отличие решений нелинейных уравнений от решений линейных уравнений в плане возможности существования вихревых структур свободного поля.

Особое внимание в работе уделяется проблеме разделения поля на «собственное» поле заряженной частицы и «внешнее» по отношению к нему поле. Из нелинейных уравнений поля следуют как сами классические уравнения Максвелла, так и уравнения движения заряда под действием силы Лоренца. Таким образом нами дано решение поставленной во введении задачи нахождения нелинейных уравнений поля, включающих в себя взаимодействие. В отличие от классической электродинамики, из наших уравнений отчетливо видно, почему пробный заряд частицы и её заряд как источника поля совпадают. Еще одним важным следствием включенности взаимодействия в фундаментальные уравнения поля является отсутствие необходимости использования лагранжева формализма.

Наиболее простым и в то же время важным классом нелинейных полей являются сопутствующие решения вида (9.2), которые представляют собой обычные максвелловские поля, наделенные волновым множителем. Существование таких решений показывает, по крайней мере для изученного нами случая двух частиц, что известные глобальные дуальные преобразования [12] имеют обобщение в виде локальных фазовых преобразований.

Появление полевых решений вида кулоновской волны (12.12), объединяющих в себе поле точечного заряда и волну, сближает между собой классическую электродинамику и квантовую механику и указывает на возможность электромагнитного описания дебройлевской волны электрона. Это позволяет нам говорить об ином взгляде на корпускулярно-волновой дуализм. Понятие электромагнитной волны в нелинейной электродинамике, таким образом, не ограничивается светом, но относится и к полям частиц. При этом волны, описывающие эти два фундаментальных типа структур поля, принципиально различны.

В работах [9],[13] было показано, что само поле электромагнитной волны в определённом смысле играет роль квантово-механической волновой функции фотона: квадрат её модуля определяет математическое ожидание плотности энергии (а не положения частицы фотона, что невозможно) в данной точке пространства. Полученное нами нелинейное решение (12.12) указывает на то, что и для заряженной частицы подобная «энергетическая» волновая функция может задаваться её комплекснозначным электромагнитным полем.

В таблице 1 приведена сводка основных отличий электродинамики, получающейся на основе нелинейных уравнений (14.22), от классической линейной электродинамики<sup>10</sup>.

ТАБЛИЦА 1

	Линейная ЭД	Нелинейная ЭД
Базовые принципы	ур. Максвелла + взаимодействие	закон сохранения энергии
Энергетическое представление	нет	есть
Простр. и врем. операторы	разделены	неразделимы
Описание частиц и поля	раздельное	совместное
Свет	поперечные волны	+ продольные волны
Закрученность потока энергии	нет	есть
Заряженная частица	точечная сингулярность	+ волна
Заряды и токи	сингулярные	+ регулярные
Заряды	электрические	электромагнитные
Взаимодействие зарядов	кулоновское	+ фазовое

Помимо описания частицы в виде электромагнитной волны, нелинейная электродинамика, основанная на уравнениях (14.22), обнаруживает ряд других общих черт с квантовой теорией поля. Так, согласование по фазе для двух тождественных заряженных частиц является классическим аналогом принципа Паули: поля этих частиц согласованы, когда их фазы сопряжены.

Согласование по фазе приводит к существованию наряду с обычным кулоновским еще и фазового взаимодействия, подобного квантово-механическому спиновому, или обменному, взаимодействию. В обоих случаях взаимодействие определяется перекрытием соответствующих волновых функций. Знак «±» внутри волновой фазы выражает собой дискретную степень свободы, подобную полуцелому спину.

Комплекснозначность заряда и наличие у него фазы это, пожалуй, наиболее яркое следствие нелинейности полученных нами уравнений поля. В рамках нашего подхода заряд частицы является электромагнитным, периодически проходящим различные линейные комбинации электрического и магнитного зарядов от чисто электрического до чисто магнитного. В реальных процессах взаимодействия заряженных частиц между собой и полем играет роль не сам заряд частицы, а его соотношение по фазе с другими зарядами и полями. Таким образом разрешается старая загадка «отсутствия» в природе магнитных зарядов при их наличии в теории.

<sup>10</sup>Под закрученностью потока энергии понимается ротор вектора Умова-Пойнтинга, а возможные решения ограничены классом нормальных плоских полей.

На самом деле нет ни чисто электрических, ни чисто магнитных зарядов. Обычное взаимодействие заряженных частиц, в силу требований энергетической эффективности, сводится к взаимодействию подобному кулоновскому взаимодействию электрических зарядов. Другими словами, электромагнитные заряды «в обычной жизни» выглядят как электрические. При всем при этом можно ожидать наблюдения новых физических эффектов нелинейного взаимодействия, в которых проявится электромагнитный характер зарядов – взаимодействия, при котором фазы частиц не успевают подстраиваться друг под друга.

Согласно квантовой теории поля сильные электромагнитные поля поляризуют вакуум, что в свою очередь приводит к появлению поправок в максвелловском лагранжиане этих полей [17]. Учет эффектов поляризации вакуума можно трактовать как нелинейность электродинамики. «Квантовые эффекты создают отличную от нуля правую часть (ток) даже при отсутствии заряженных частиц в исходном состоянии» [18]. Это позволяет соотнести наши регулярные токи с вакуумными токами. И те и другие токи оказывают дополнительный эффект по сравнению с обычными «внешними» токами.

Между тем, имеет место принципиальное различие этих двух подходов. В нашем случае непрерывные токи существуют изначально в нелинейных уравнениях Максвелла, в то время как в квантовой теории поля линейные уравнения Максвелла дополняются токами, построенными на суммировании множества дискретных событий рождения пар частица-античастица.

В настоящей статье мы изучили сингулярности центрально-симметричного типа, которым отвечает заряд частиц. Для полноты картины требуется исследование осесимметричного решения нелинейных уравнений, описывающего магнитный момент частицы. В этой же плоскости лежат вопросы о связи полученных нами нелинейных уравнений с моментом импульса электромагнитного поля и его спином. Также естественным продолжением темы должно стать нелинейное описание процессов излучения. Раскрытие этих и других вопросов поможет выявить более глубокие связи классической нелинейной электродинамики и квантовой теории поля и в полной мере использовать возможности уравнений Максвелла и их обобщений.

Автор благодарит А.В.Горюнова за обсуждение и полезные советы.

## Приложения

**1. Алгебра бикватернионов.** Как и в нашей работе [15](с.160) мы используем скалярно-векторное представление бикватернионов, в котором бикватернион  $\mathcal{B}$  есть связка комплексного числа  $s$  и трёхмерного комплексного вектора  $\mathbf{u}$ :

$$\mathcal{B} = (s, \mathbf{u}) \equiv s + \mathbf{u}, \quad s \in \mathbb{C}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^3 \quad (14.23)$$

а произведение двух бикватернионов  $\mathcal{B}_1 = (s_1, \mathbf{u}_1)$  и  $\mathcal{B}_2 = (s_2, \mathbf{u}_2)$  определяется как:

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = (s_1 s_2 + (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2), s_1 \mathbf{u}_2 + s_2 \mathbf{u}_1 + i(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)), \quad (14.24)$$

где  $(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)$  и  $(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$  — скалярное и векторное произведения  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  соответственно.

В этом представлении кватернионы, как частный случай бикватернионов, имеют вид:

$$Q = (\alpha, i\mathbf{a}), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \quad (14.25)$$

Важно отличать кватернионы от вещественных бикватернионов, которые имеют вид:

$$\mathcal{B} = (\alpha, \mathbf{a}), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \quad (14.26)$$

Вещественные бикватернионы играют особую роль в нашем подходе, поскольку пространственно-временная координата  $Z$  и энергия-импульс  $K$  являются именно такими величинами.

Пространство бикватернионов обладает базисом [5](с.141)  $e_n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ :  $e_0 = 1$  и при  $k > 0$ :

$$\begin{cases} e_k^2 = 1 \\ e_i e_j = -e_j e_i = i e_k, \end{cases} \quad (14.27)$$

где  $i, j, k$  есть циклически перестановочные индексы 1,2,3. Базисные бикватернионы  $e_n$  вещественны. Произвольный бикватернион  $\mathcal{B}$  раскладывается по этому базису:

$$\mathcal{B} = \sum_{n=0}^3 e_n b_n, \quad b_n \in \mathbb{C} \quad (14.28)$$

Так, для вещественнозначной пространственно-временной координаты  $Z$  мы имеем:

$$Z = (t, \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^3 e_n x_n, \quad (14.29)$$

где  $x_0 = t$ ,  $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{r}$ .

Бикватернион, сопряженный данному  $U = (s, \mathbf{u})$ , есть  $\bar{U} = (s, -\mathbf{u})$ . Комплексное число

$$\|\mathcal{B}\| = \mathcal{B}\bar{\mathcal{B}} = s^2 - \mathbf{u}^2 \quad (14.30)$$

есть мера, или квадрат модуля, бикватерниона  $\mathcal{B} = (s, \mathbf{u})$ . Величина бикватерниона  $\mathcal{B}$  есть  $\sqrt{\|\mathcal{B}\|}$

Бикватернион, мера которого равна 1, называется *унитарным*.

Операции сопряжения и комплексного сопряжения, примененные к произведению бикватернионов, меняют порядок сомножителей:

$$\overline{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = \bar{\mathcal{B}}_2 \bar{\mathcal{B}}_1 \quad (14.31)$$

$$(\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2)^* = \mathcal{B}_2^* \mathcal{B}_1^* \quad (14.32)$$

Два бикватерниона  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$  ортогональны, если  $Sc(\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2) = 0$ .

**2. Бикватернионные формулы Остроградского-Гаусса.** Для кватернионных функций  $f(Q)$  кватернионного аргумента<sup>11</sup>  $Q = (t, \mathbf{r})$ , непрерывно дифференцируемых по каждой из координат  $t, x, y, z$  внутри некоторой области  $V_4$  псевдоевклидова пространства и на его границе  $S_3 = \partial V_4$ , имеют место формулы типа Остроградского-Гаусса [7],[14]:

$$\oint_{S_3} f dQ = \int_{V_4} f \hat{D} dV_4 \quad (14.33)$$

<sup>11</sup>Здесь используется представление кватерниона, отличающееся от (14.25) отсутствием множителя  $i$  перед векторной частью.

$$\oint_{S_3} dQ f = \int_{V_4} \hat{D}f dV_4 \quad (14.34)$$

где  $\hat{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  - базисные кватернионы,  $Q = t + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ . В (14.33) оператор  $\hat{D}$  действует влево от себя, а в (14.34) - вправо.

В [5] доказано, что аналогичные формулы имеют место и для бикватернионных функций  $F$  вещественного бикватернионного аргумента  $Z$ :

$$\oint_{S_3} F dZ = \int_{V_4} (FD) dV_4 \quad (14.35)$$

$$\oint_{S_3} dZ F = \int_{V_4} (DF) dV_4 \quad (14.36)$$

Здесь  $D$  обозначает бикватернионный градиент<sup>12</sup>:  $D = (\partial_t, \nabla)$

Покажем, что существует расширение этих формул на случай двух функций  $F(Z), G(Z)$  вещественного бикватернионного аргумента  $Z$ .

$$\oint_{S_3} F dZ G = \int_{V_4} (FDG) dV_4 \quad (14.37)$$

где

$$(FDG) = (FD)G + F(DG) \quad (14.38)$$

Оператор  $D$  раскладывается по бикватернионному базису (14.27) как:  $D = \sum_{k=0}^3 e_k \partial_k$ ,

а дифференциал координаты как:  $dZ = \sum_{i=0}^3 e_i dx_i$ . Левая часть формулы (14.36) выразится как:

$$\oint_{S_3} dZ F = \oint_{S_3} \left( \sum_{i=0}^3 e_i dx_i \right) F = \oint_{S_3} \sum_{i=0}^3 (e_i F) dx_i = \oint_{S_3} \sum_{i=0}^3 F_i dx_i \quad (14.39)$$

где обозначено:  $F_i = e_i F$ . Для правой части (14.36) получаем:

$$\int_{V_4} (DF) dV_4 = \int_{V_4} \left( \sum_{k=0}^3 e_k \partial_k \right) F dV_4 = \int_{V_4} \sum_{k=0}^3 \partial_k (e_k F) dV_4 = \int_{V_4} \sum_{k=0}^3 \partial_k F_k dV_4 \quad (14.40)$$

Т.о. (14.36) можно выразить в виде, стандартном для векторного анализа:

$$\oint_{S_3} \sum_{i=0}^3 F_i dx_i = \int_{V_4} \sum_{k=0}^3 \partial_k F_k dV_4 \quad (14.41)$$

Важно отметить, что коэффициенты  $F_i = (s_i, \mathbf{F}_i)$  сами являются бикватернионами. При этом вообще говоря не требуется существования функции  $F$ :  $F_i = e_i F$ , а достаточно лишь непрерывной дифференцируемости каждой из четверки функций  $F_i$

<sup>12</sup>Наше определение отличается от определения, используемого в статье [5], где  $D$  обозначает  $(\partial_t, -\nabla)$ .

по каждой из координат. Действительно, рассмотрим формулу (14.41) в частности для скалярных компонент  $s_i$ :

$$\oint_{S_3} \sum_{i=0}^3 s_i dx_i = \int_{V_4} \sum_{k=0}^3 \partial_k s_k dV_4 \quad (14.42)$$

Это есть формула Остроградского-Гаусса в 4-мерном евклидовом пространстве для векторной функции, имеющей компоненты  $s_i$ . Подобным же образом формула (14.41) выполняется и для каждой из векторных компонент  $F_i$ .

Применим этот же прием разложения по базису для доказательства формулы (14.37). Его левая часть:

$$\oint_{S_3} F dZG = \oint_{S_3} F \left( \sum_{i=0}^3 e_i dx_i \right) G = \oint_{S_3} \sum_{i=0}^3 (F e_i G) dx_i = \oint_{S_3} \sum_{i=0}^3 A_k dx_i, \quad (14.43)$$

где обозначено  $A_k = F e_k G$ . К последнему интегралу применима формула (14.41):

$$\oint_{S_3} \sum_{i=0}^3 A_k dx_i = \int_{V_4} \sum_{k=0}^3 \partial_k A_k dV_4 = \int_{V_4} (FDG) dV_4, \quad (14.44)$$

где мы учли, что:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 \partial_k A_k &= \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (F e_k G) = \sum_{k=0}^3 \left( \frac{\partial F}{\partial x_k} e_k G + F e_k \frac{\partial G}{\partial x_k} \right) = \\ &= \left( \sum_{k=0}^3 \frac{\partial F}{\partial x_k} e_k \right) G + F \left( \sum_{k=0}^3 e_k \frac{\partial G}{\partial x_k} \right) = (FDG) \end{aligned} \quad (14.45)$$

Тем самым формула (14.37) доказана.

Как известно из теории дифференциальных форм, формулы Остроградского-Гаусса и Стокса являются следствием общей теоремы о внешней производной [16] (с.154). Замечательным обстоятельством оказывается то, что бикватернионная формула (14.35), примененная к векторным функциям в трехмерном пространстве даёт одновременно обе эти формулы. Если взять в (14.35)  $F = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , тогда интегрирование по временной координате сведется к умножению на соответствующий временной интервал  $\Delta t$ , и мы получим следующую формулу:

$$\Delta t \oint_{S_2} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, i\mathbf{F} \times d\mathbf{r}) = \Delta t \int_{V_3} (\nabla \cdot \mathbf{F}, -i\nabla \times \mathbf{F}) dV_3, \quad (14.46)$$

которое распадается на скалярную и векторную части:

$$\oint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{V_3} (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV_3 \quad (14.47)$$

$$\oint_{S_2} d\mathbf{s} \times \mathbf{F} = \int_{V_3} (\nabla \times \mathbf{F}) dV_3, \quad (14.48)$$

В формуле (14.47) мы заменили  $d\mathbf{r}$  на  $d\mathbf{s}$ , т.к. здесь  $d\mathbf{r}$  имеет привычный в векторном анализе смысл ориентированной площадки двумерной поверхности  $S_2$ :  $d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds$ , где

$\mathbf{n}$  - нормаль к этой поверхности. (14.47) есть классическая формула Остроградского-Гаусса. (14.48) есть обобщенная формула Стокса для трехмерного объема, которая, как можно показать, эквивалентна обычной формуле Стокса для циркуляции по границе двумерной поверхности.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. L. Lanczos, *The Functional Theoretical Relationships of the Homogeneous Maxwell Equations* Verlagsbuchhandlung Josef Nemeth, Budapest (1919), arXiv:physics/0408079
- [2] L. Silberstein, *Philos. Mag. S. 6*, **23** (137) (1912), “Quaternionic Form of Relativity”, 1912, № 23 (137), 790-809.
- [3] А. А. Черницкий, *Нелинейная электродинамика: сингулярные солитоны и их взаимодействия*, СПбГИЭУ, СПб., 2012.
- [4] D. Delphenich, “Nonlinear Electrodynamics and QED”, arXiv:hep-th/0309108, 2003.
- [5] K. Imaeda, “A new formulation of classical electrodynamics”, *Nuovo Cimento B*, **32:1** (1978), 138-162.
- [6] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, **1**, Мир, М, 1977, 186.
- [7] C. A. Deavours, “The Quaternion Calculus”, *American Mathematical Monthly*, 1973, 995–1008.
- [8] А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев., *Кватернионы в релятивистской физике*, Наука и техника, Минск, 1989.
- [9] I. Bialynicki-Birula, “Photon Wave Function”, *Progress in Optics*, **36** (1996), 8-9 arXiv:quant-ph/0508202.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика.*, **2**, Наука, М., 1988.
- [11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, **8**, Наука, М., 1982, 15.
- [12] В. И. Стражев , Л. М. Томильчик, *Электродинамика с магнитным зарядом*, Наука и техника, Минск, 1975.
- [13] M.G. Raymer, B.J. Smith, “The Maxwell wave function of the photon”, arXiv:quant-ph/0604169, 2006.
- [14] A. Sudbery, “Quaternionic analysis”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **85** (1979), 199-225.
- [15] С. Я. Котковский, “Нульвекторная алгебра”, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **2(23)**, том **12** (2015), 159-172 <http://hypercomplex.xpsweb.com/page.php?lang=ru&id=761>.
- [16] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974, 164.
- [17] А. А. Гриб , С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, Энергоатомиздат, М., 1988.
- [18] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, Наука, М., 1975, 639-647.

**С. Я. Котковский**

*E-mail:* s\_kotkovsky@mail.ru

Поступило

27 февраля 2022 г.