Basic Mathematical Reminders For Assistants and Technical Agents

Rappels Mathématiques de Base Pour Les Adjoints Et Agents Techniques

Par

Abdelmajid Ben Hadj Salem

Septembre 2021 - version 3.

Résumé: Dans ce fascicule, on donne les bases mathématiques nécessaires pour suivre les cours de formation en géodésie et en topographie. C'est un rappel des principales formules et connaissances en mathématiques pour les adjoints et agents techniques.

Abstract: In this booklet, we provide the mathematical foundations necessary to follow the training courses in geodesy and topography. It is a reminder of the main formulas and knowledge in mathematics for assistants and technical agents.

RAPPELS MATHEMATIQUES DE BASE
Pour les Adjoints et Agents Techniques

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ancien Ingénieur Général à l'Office de la Topographie et du Cadastre

Septembre 2021

Version 3.

abenhadjsalem@gmail.com

14 septembre 2021

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
e-mail : abenhadjsalem@gmail.com

A tous mes Professeurs,
A tous mes Etudiants.

Table des matières

Préface

Ce cours donne les bases mathématiques nécessaires pour suivre les cours de formation en géodésie et en topographie. C'est un rappel des principales formules et connaissances en mathématiques concernant :

- des notions élémentaires d'algèbre,

- des notions élémentaires de géométrie plane et dans l'espace,

- la trigonométrie plane,

- la résolution des triangles,

- les fonctions,

- introduction au calcul matriciel.

Tunis,
Septembre, 2021

Abdelmajid Ben Hadj Salem
Ingénieur Géographe Général

Chapitre 1

Notions Elémentaires d'Algèbre

1.1 Les Monômes et les Polynômes

Définition 1.1. *Un monôme est une expression algébrique dans laquelle les seules opérations à effectuer sur les variables sont des multiplications ou des élévations à des puissances.*

Exemple : $16xy$, $-12a^5y^3$.

Définition 1.2. *Le degré d'un monôme par rapport à une variable est l'exposant de cette variable. Le degré d'un monôme par rapport à plusieurs variables est égal à la somme des exposants de ces variables dans le monôme.*

Exemple : $-12a^5y^3$ est de degré 3 par rapport à la variable y et de degré 8 (=5+3) par rapport à (a, y).

Définition 1.3. *Un polynôme est une expression algébrique obtenue en faisant la somme algébrique de plusieurs monômes.*

Définition 1.4. *Le degré d'un polynôme par rapport à une variable est égal au plus grand exposant de cette variable dans le polynôme. Le degré d'un polynôme par rapport à plusieurs variables est égal à la plus grande somme des exposants de ces variables dans un même terme.*

Exemple : le polynôme $5a^2x^4 + 3b^2x^3 + 4abx$ et de degré 4 par rapport à x et de degré 6 (=2+4) par rapport à (a, b, x).

Définition 1.5. *Un polynôme est dit* ***homogène*** *si tous ses termes sont du même degré.*

1.1.1 Addition ou soustraction de polynômes

On ordonne les polynômes suivant les puissances croissantes (ou décroissantes) de la variable et on additionne (ou soustrait) les monômes semblables.

Exemple : $(3b^2 + 7ab - 2a^2) + (2b^2 - 3ab + 5a^2) = 5b^2 + 4ab + 3a^2$.

1.1.2 Multiplication des polynômes

On ordonne les polynômes suivant les puissances décroissantes de la variable ; on effectue la multiplication du polynôme A par les différents monômes du polynôme B puis on additionne les monômes semblables.

Exemple :
- polynôme A : $3a^3 + 4a^2b - 2ab^2 + b^3$,

- polynôme B : $ab - 3b^2$,

- 1er produit partiel $A \times ab = 3a^4b + 4a^3b2 - 2a^2b^3 + ab^4$,

- 2ème produit partiel $A \times (-3b^2) = -9a^3b^2 - 12a^2b^3 + 6ab^4 - 3b^5$,

- **Résultat :**$3a^4b - 5a^3b^2 - 14a^2b^3 + 7ab^4 - 3b^5$,

en tenant compte des règles :
$(+ \times + = +)$,
$(+ \times - = -)$,
$(- \times + = -)$,
$(- \times - = +)$.

1.1.3 Identités remarquables

* de degré 2 :
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

* de degré 3 :
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Exercice 1.1. *Soit les polynômes :*
* $A = x$,

* $B = x + x^3$,
* $C = x + x^3 + x^5$.

Montrer que le polynôme $P = 3x^5 - 6x^3 + 2x$ peut s'écrire sous la forme $P = a.A + b.B + c.C$ où a, b, c trois constantes à déterminer.

1.2 Résolution d'un système linéaire

On va considérer les systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconues. Le système général peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

1.2.1 Résolution par substitution

On remplace une équation par une équation équivalente donnant une variable en fonction de l'autre. Exemple :

$$4x + 3y = 15 \tag{1.1}$$
$$2x - y = 15 \tag{1.2}$$

De la deuxième équation (1.2), on tire $y = 2x - 15$ et en reportant cette valeur dans la première équation (1.1), on obtient :

$$4x + 3(2x - 15) = 15 \Longrightarrow 4x + 6x - 45 = 15 \Longrightarrow 10x = 60 \;\Rightarrow\; x = 6 \tag{1.3}$$

En reportant cette valeur dans l'équation $y = 2x - 15$ ci-dessus, on obtient :

$$y = 2 \times 6 - 15 \Longrightarrow y = -3 \tag{1.4}$$

1.2.2 Résolution par combinaison

On multiplie les deux membres d'une équation par des nombres non nuls, de façon que l'une des variables ait dans les deux équations des coefficients opposés.

Exemple :

$$2x - 3y = 8 \tag{1.5}$$
$$3x - 5y = 7 \tag{1.6}$$

On multiplie les deux membres de la première équation (1.5) par $+3$, ceux de la deuxième équation (1.6) par -2 et on ajoute membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} 6x - 9y &= +24 \\ -6x + 10y &= -14 \\ \text{d'où } y &= 10 \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (1.5) :

$$2x - 30 = 8 \Longrightarrow x = 19 \tag{1.7}$$

On obtient $x = 19$. On a un couple de solution : $x = 19; y = 10$.

Exercice 1.2. *Résoudre et discuter le système suivant :*

$$(m-1)x + 3y = 5m \tag{1.8}$$

$$(m-2)x - 4y = 5m - 1 \tag{1.9}$$

où m est un paramètre.

Aide : on peut résoudre par substitution ou combinaisons en éliminant de préférence les y car les coefficients de x dépendent de m, donc peuvent être nuls.

1.3 Système de trois équations du 1er degré à trois inconnues

1.3.1 Cas général

On peut appliquer les méthodes de substitution et d'addition comme pour les systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconnues.

Exemple : Résoudre le système suivant :

$$3x + 5y - 3z = 34 \tag{1.10}$$

$$4x - 7y + z = 3 \tag{1.11}$$

$$2x + 3y - 2z = 22 \tag{1.12}$$

On tire z de la deuxième équation (1.11) et on remplace z par cette valeur respectivement dans les équations (1.10) et (1.12), d'où :

$$3x + 5y - 3(3 - 4x + 7y) = 34$$

$$z = 3 - 4x + 7y$$

$$2x + 3y - 2(3 - 4x + 7y) = 22$$

Après calculs, on obtient le système en (x,y) :

$$15x - 16y = 43$$
$$10x - 11y = 28$$

On résout le système précédent comme il a été présenté ci-dessus, on obtient la solution $x = 5$ et $y = 2$. En revenant à l'équation (1.11), on obtient $z = -3$.

1.4 Equation du second degré à une inconnue

Définition 1.6. *Une équation du second degré à une inconnue x est une équation qui peut être mise sous la forme :*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.13}$$

avec $a \neq 0$.

1.4.1 Cas général

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:
Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$.
Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation a une racine double $x = -b/2a$.
Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{1.14}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{1.15}$$

1.4.2 Equation réduite

Si b est pair, on peut poser $b = 2b'$ et les formules se simplifient. En effet :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta' \tag{1.16}$$

Où Δ' est le discriminant réduit. Si $\Delta' > 0$ (c'est-à-dire $\Delta > 0$), on a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2b' + \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \tag{1.17}$$
$$x_2 = \frac{-2b' - \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \tag{1.18}$$

Si $\Delta' < 0$, l'équation n'a pas de racines.

Exercice 1.3. *Résoudre l'équation* $5x^2 + bx + 5 = 0$ *avec les valeurs suivantes de* b *:*

- $b = 5$,
- $b = 10$,
- $b = 26$,

Notons que 576 est un carré parfait.

Chapitre 2

Notions Elémentaires de Géométrie

2.1 Propriétés des droites parallèles

Si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles, elles forment avec une sécante S (**Fig.** 2.1) :

- deux angles alternes internes égaux :

$$\hat{A}3 = \hat{B}1 \tag{2.1}$$
$$\hat{A}4 = \hat{B}2 \tag{2.2}$$

- deux angles alternes externes égaux :

$$\hat{A}1 = \hat{B}3 \tag{2.3}$$
$$\hat{A}2 = \hat{B}4 \tag{2.4}$$

- deux angles correspondants égaux :

$$\hat{A}1 = \hat{B}1 \tag{2.5}$$
$$\hat{A}4 = \hat{B}4 \tag{2.6}$$

2.2 Angles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires

Théorème 2.1. *Deux angles dont les côtés sont parallèles sont égaux ou supplémentaires (**Fig.** 2.2) :*

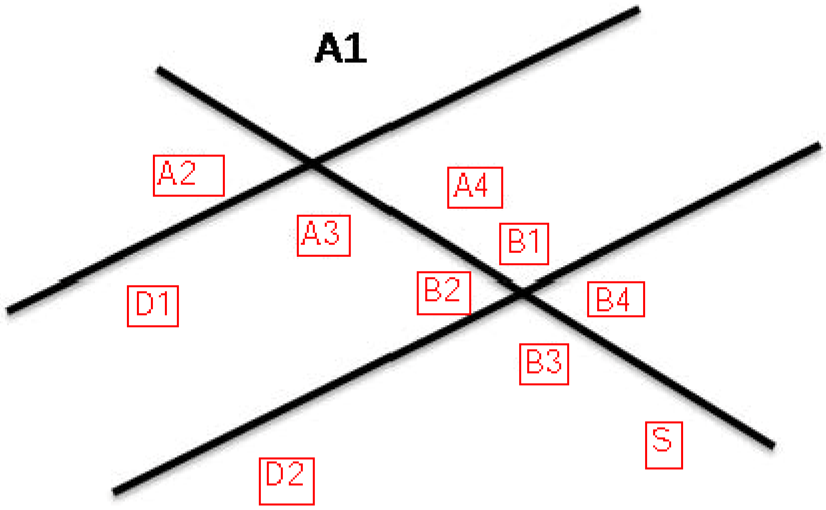

FIGURE 2.1 – Intersections de droites

$$\alpha = \beta \tag{2.7}$$

$$\text{ou} \quad \delta = \pi - \alpha \tag{2.8}$$

Théorème 2.2. *Deux angles dont les côtés sont perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires (**Fig.** 2.3) :*

$$\alpha = \pi - \beta \tag{2.9}$$

$$\alpha = \delta \tag{2.10}$$

2.3 Cas d'égalités des triangles

Ces cas sont les suivants :

1. Deux triangles ayant un côté égal compris entre deux angles adjacents égaux chacun à chacun sont égaux.
2. Deux triangles ayant un angle compris entre deux côtés égaux chacun à chacun sont égaux.
3. Deux triangles ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun sont égaux.

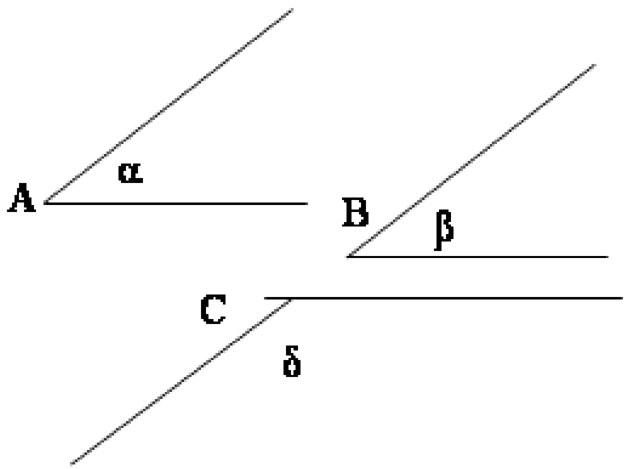

FIGURE 2.2 – Deux angles dont les côtés sont parallèles

2.4 Relations métriques dans un triangle

2.4.1 Triangle quelconque

Théorème 2.3. *Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins deux fois le produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Soit (**Fig.** 3.1) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.cos\hat{A} \tag{2.11}$$

2.4.2 Triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et AH la hauteur relative à la base BC. On a les relations suivantes :

$$AB^2 = BH.BC \tag{2.12}$$

$$\text{et } AC^2 = CH.CB \tag{2.13}$$

$$\text{d'où } AB^2 + AC^2 = BC^2 \tag{2.14}$$

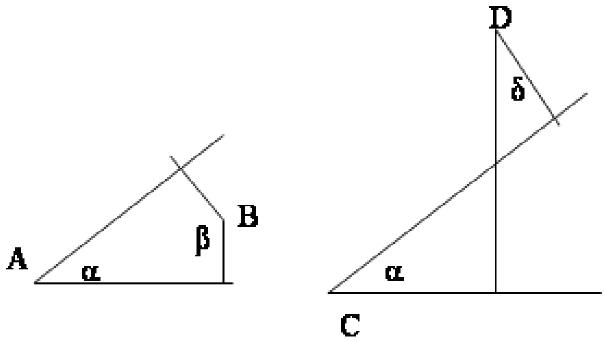

FIGURE 2.3 – Deux angles dont les côtés sont perpendiculaires

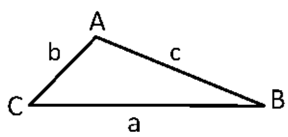

FIGURE 2.4 – Le calcul d'un côté dans un triangle quelconque

et :

$$AB.AC = BC.AH \tag{2.15}$$

$$AH^2 = BH.HC \tag{2.16}$$

2.4.3 Médianes et Hauteurs

Dans un triangle quelconque, on a les propriétés suivantes :

— Les médianes concourent en un point situé au 2/3 de chaque sommet. Ce point est appelé le centre de gravité du triangle.

— les hauteurs concourent en un point appelé l'orthocentre du triangle.

— les médiatrices concourent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

— les bissectrices des angles concourent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

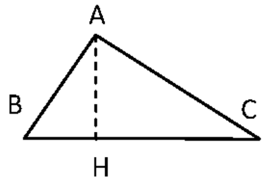

Figure 2.5 – Le Triangle rectangle

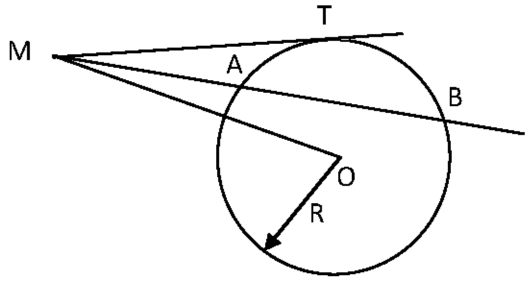

Figure 2.6 – Puissance d'un point par rapport au cercle : cas le point est à l'extérieur.

2.5 Puissance d'un point par rapport à un cercle de rayon R

1. le point M est extérieur au cercle (**Fig.**2.6) : la puissance P de M par rapport au cercle O, de rayon R est donnée par :

$$P = MA.MB = MT^2 = OM^2 - R^2 > 0 \tag{2.17}$$

avec MT une droite issue de M et tangente au cercle en question au point T et $P = OM^2 - R^2$ est positive car $OM > R$.

2. le point M est intérieur au cercle (**Fig.**2.7) : la puissance P de M par rapport au cercle de centre O est :

$$P = MA'.MB' = OM^2 - R^2 = -(R^2 - OM^2) < 0 \tag{2.18}$$

3. Application : Calcul de la flèche d'un segment circulaire. On a (**Fig.** 2.8) :
Rayon du cercle : R,
corde AB : $2L \Longrightarrow |MA| = |MB| = L$,
la flèche MC : $f > 0$.

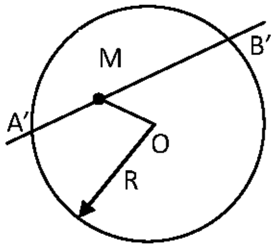

FIGURE 2.7 – Puissance d'un point par rapport au cercle : cas le point est à l'intérieur.

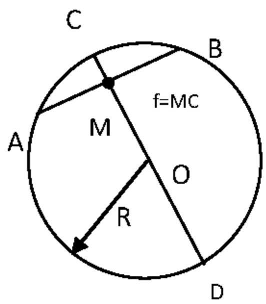

FIGURE 2.8 – Calcul de la flèche

En écrivant la puissance de M de deux façons différentes, M étant à l'intérieur du cercle, donc la puissance P est négative, d'où :

$$P = MA.MB = MC.MD = OM^2 - R^2 \Longrightarrow \tag{2.19}$$
$$-L.L = -f(2R - f) \Longrightarrow \tag{2.20}$$
$$f^2 - 2Rf + L^2 = 0 \tag{2.21}$$

D'où la flèche en prenant la racine positive de la dernière équation ci-dessus :

$$f = R - \sqrt{R^2 - L^2} \tag{2.22}$$

Nota : si f est très petite par rapport à R, on peut écrire l'équation (2.20) comme suit :

$$L^2 = 2Rf \Longrightarrow \; f = \frac{L^2}{2R} \tag{2.23}$$

Chapitre 3

Rappels de la Trigonométrie Plane

3.1 Définitions des fonctions circulaires

Soit la figure suivante (Fig. 3.1) :

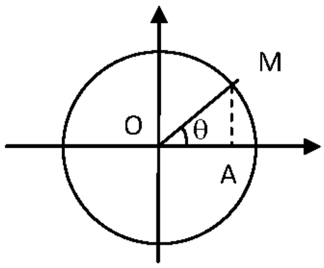

FIGURE 3.1 – Définition des lignes trigonométriques

On définit alors les fonctions circulaires comme suit :

$$sin\theta = AM/OM \tag{3.1}$$
$$cos\theta = OA/OM \tag{3.2}$$
$$tg\theta = AM/OA \tag{3.3}$$
$$cotg\theta = 1/tg\theta \tag{3.4}$$

Ecrivons dans le triangle OAM, le théorème de Pythagore, on obtient :

$$OM^2 = OA^2 + AM^2$$
$$\frac{OA^2}{OM^2} + \frac{AM^2}{OM^2} = 1$$

Soit :

$$\boxed{cos^2\theta + sin^2\theta = 1} \tag{3.5}$$

est dite **la relation fondamentale de la trigonométrie plane**.

3.2 Propriétés des fonctions circulaires

Les fonctions circulaires sont des fonctions périodiques, on a :

$$sin(\theta + 2k\pi) = sin\theta \tag{3.6}$$
$$cos(\theta + 2k\pi) = cos\theta \tag{3.7}$$
$$tg(\theta + k\pi) = tg\theta \tag{3.8}$$

pour k = 1,2,3,...,n.

On peut prendre les domaines de définition comme suit :
- pour les fonctions *sin* et *cos* : $[-\pi, +\pi]$,
- pour la fonction *tg* : $[-\pi/2, +\pi/2]$.

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$sin(-\theta) = -sin\theta \tag{3.9}$$
$$cos(-\theta) = cos\theta \tag{3.10}$$
$$tg(-\theta) = -tg\theta \tag{3.11}$$

Et :

$$sin(\theta + \pi/2) = cos\theta \tag{3.12}$$
$$cos(\theta + \pi/2) = -sin\theta \tag{3.13}$$
$$tg(\theta + \pi/2) = -cotg\theta \tag{3.14}$$
$$sin(\pi - \theta) = sin\theta \tag{3.15}$$
$$cos(\pi - \theta) = -cos\theta \tag{3.16}$$
$$tg(\pi - \theta) = -tg\theta \tag{3.17}$$
$$sin(\theta + \pi) = sin\theta \tag{3.18}$$
$$cos(\theta + \pi) = -cos\theta \tag{3.19}$$
$$tg(\theta + \pi) = tg\theta \tag{3.20}$$

3.3 Formules usuelles

On a les formules suivantes :

$$cos(a+b) = cosa.cosb - sina.sinb \tag{3.21}$$
$$cos(a-b) = cosa.cosb + sina.sinb \tag{3.22}$$
$$sin(a+b) = sina.cosb + sinb.cosa \tag{3.23}$$
$$sin(a-b) = sina.cosb - sinb.cosa \tag{3.24}$$

et

$$cosa + cosb = 2cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2} \tag{3.25}$$
$$cosa - cosb = -2sin\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2} \tag{3.26}$$
$$sina + sinb = 2sin\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2} \tag{3.27}$$
$$sina - sinb = 2cos\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2} \tag{3.28}$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tgatgb} \tag{3.29}$$
$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tgatgb} \tag{3.30}$$
$$tga + tgb = \frac{sin(a+b)}{cosacosb} \tag{3.31}$$
$$sin2a = 2sina.cosa \tag{3.32}$$
$$cos2a = cos^2a - sin^2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a \tag{3.33}$$
$$tg2a = \frac{2tga}{1 - tg^2a} \tag{3.34}$$

Si on pose :

$$tg(a/2) = t$$

Alors :

$$sina = \frac{2t}{1+t^2} \tag{3.35}$$
$$cosa = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{3.36}$$
$$tga = \frac{2t}{1-t^2} \tag{3.37}$$

Pour les valeurs remarquables, on le tableau suivant :

a en radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$sina$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cosa$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tga	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

TABLE 3.1 – Tableau des valeurs remarquables

3.4 Dérivées des fonctions circulaires

Les fonctions circulaires sont des fonctions indéfiniment dérivables dans leurs domaines de définition. On alors :

$$y = sinx \Longrightarrow y' = cosx \tag{3.38}$$

$$y = cosx \Longrightarrow y' = -sinx \tag{3.39}$$

$$y = tgx \Longrightarrow y' = 1 + tg^2x = 1/cos^2x \tag{3.40}$$

Pour x au voisinage de 0 ($x < 3°$) on a les développements limités suivants :

$$sinx = x - x^3/6 + \dots \tag{3.41}$$

$$cosx = 1 - x^2/2 + \dots \tag{3.42}$$

$$tgx = x + x^3/3 + \dots \tag{3.43}$$

Exercice 3.1. *Simplifier les expressions suivantes :*
$A = 2cos^8x - 2sin^8x + 3sin^6x + 5cos^6x + 3cos^4x.$

$B = \dfrac{cos^2x - sin^2y}{sin^2xsin^2y} - cotg^2xcotg^2y.$

Exercice 3.2. *Résoudre les équations :*

1. $tgx = 2sinx.$

2. $sin^4x + cos^4x = 5/8.$

Chapitre 4

Les Espaces Euclidiens

4.1 Introduction

4.1.1 Droite orientée

Définition 4.1. *Une droite orientée est une droite sur laquelle on a choisi un sens positif d'orientation.*

Définition 4.2. *un vecteur est un segment de droite orienté. Un vecteur a une origine et une extrémité.*

Exemple : soit le vecteur $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AB}$. A est l'origine et B est l'extrémité.

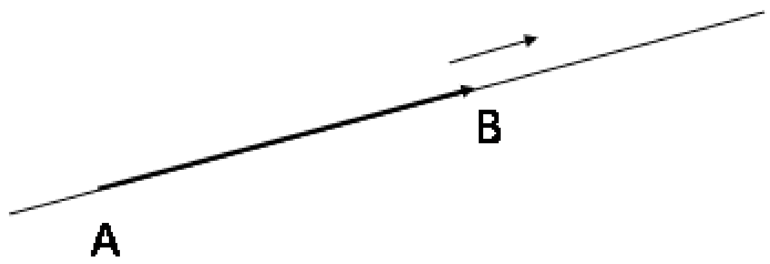

Figure 4.1 – Vecteur AB

4.1.2 Les Coordonnées cartésiennes d'un point M

Dans un plan rapporté à un système d'axes orthonormés c'est-à-dire les axes sont perpendiculaires et l'unité de mesures sur les axes vaut 1 unité de mesure $(1m, 1cm, ..)$, un point M est défini par (x, y) où :
- x est l'abscisse de $M = \overline{OP}$,
- y est l'ordonnée de $M =\overline{OQ}$.

On écrit : $M(x, y)$ où (x, y) sont les coordonnées de M, ou un vecteur $\boldsymbol{OM}$ de composantes x et y et on note :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{OM}\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Si on note $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ les vecteurs unitaires respectivement des axes des x et des y, c'est-dire $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ ont une longueur égale à une unité. On écrira :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \tag{4.2}$$

Si les coordonnées de A sont (x_A, y_A), celles de B (x_B, y_B), les coordonnées de I milieu de AB sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \tag{4.3}$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \tag{4.4}$$

La distance d des deux points A et B est :

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{4.5}$$

Dans un espace rapporté à un système de 3 axes orthonormés, on a :
- $x = OP =$ abscisse de M,
- $y = OQ =$ ordonnée de M,
- $z = OR =$ côte de M.

Si $\boldsymbol{k}$ est vecteur unitaire de Oz, alors on écrira :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{OM}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \tag{4.6}$$

ou :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

4.2 Les Espaces Vectoriels

Définition 4.3. *Un espace vectoriel réel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs, ayant les propriétés suivantes :*

Si $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, sont des vecteurs de l'espace vectoriel V et si $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont des nombres réels, alors la combinaison linéaire $\mu_1.\boldsymbol{x}_1 + \mu_2.\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \mu_n.\boldsymbol{x}_n$ est définie et c'est un élément de V.

A partir de la définition, on a les propriétés suivantes :

Propriétés 4.1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ *et* $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

$$\mu.(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mu.\boldsymbol{x} + \mu.\boldsymbol{y} \tag{4.7}$$

$$(\mu_1 + \mu_2).\boldsymbol{x} = \mu_1.\boldsymbol{x} + \mu_2.\boldsymbol{x} \tag{4.8}$$

$$(\mu_1\mu_2)\boldsymbol{x} = \mu_1(\mu_2.\boldsymbol{x}) = \mu_2.(\mu_1.\boldsymbol{x}) \tag{4.9}$$

$$1.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} \ = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \tag{4.11}$$

Exemples : la droite réelle $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. $\mathbb{R} = \{\alpha/\alpha \in \mathbb{R}\}$.
$\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (a, b, c)\}$ où a, b, c sont les composantes du vecteur $\mathbf{x}$.

4.3 Les Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 4.4. *Un ensemble $(\boldsymbol{e}_i)$ de l'espace vectoriel V est une base de V si :*

a) les vecteurs $(\boldsymbol{e}_i)$ sont indépendants,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \tag{4.12}$$

b) tout vecteur $\boldsymbol{x}$ s'exprime d'une manière unique en fonction de $\boldsymbol{e}_i$ donc

$$\forall \boldsymbol{x} \in V, \exists \lambda_i \ \textit{uniques}/ \ \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \tag{4.13}$$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est une base dite base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4.4 Norme d'un vecteur

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ alors :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{4.15}$$

4.5 Produit scalaire de 2 vecteurs

Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ alors :

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{4.16}$$

et $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ est un réel.

On a aussi :

$$\mathbf{x}.\mathbf{x}' = \|\mathbf{x}\|.\|\mathbf{x}'\|.cos(\mathbf{x}, \hat{} \mathbf{x}') \tag{4.17}$$

4.6 Produit vectoriel de 2 vecteurs

Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ et $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', x_3')^T$, alors le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ est le vecteur $\mathbf{y}$ noté $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'$ telque $\mathbf{y}$ soit orthogonal au plan engendré par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ et que $(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y})$ forme un repère direct. On écrit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{x}' \tag{4.18}$$

Les composantes du vecteur $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ sont :

$$y_1 = x_2 x_3' - x_2' x_3 \tag{4.19}$$

$$y_2 = x_3 x_1' - x_1 x_3' \tag{4.20}$$

$$y_3 = x_1 x_2' - x_1' x_2 \tag{4.21}$$

On a aussi

$$\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|.\|\mathbf{x}'\|.sin(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \tag{4.22}$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \tag{4.23}$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{o} \tag{4.24}$$

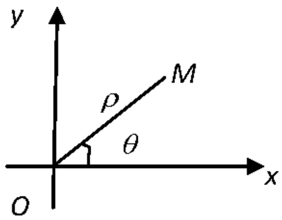

FIGURE 4.2 – Les coordonnées polaires

4.7 Coordonnées polaires d'un point M dans le plan

Utilisant la figure ci-dessus (**Fig.** 4.2), les coordonnées polaires de M sont :

$$\theta = \text{angle orienté} \tag{4.25}$$

$$\rho = \text{longueur de } \boldsymbol{OM} \tag{4.26}$$

Si on choisit un axe Oy perpendiculaire à l'axe polaire et faisant avec lui un angle de $+\frac{\pi}{2} = 90° = 100$ gr, on obtient un système d'axes orthonormés. On peut alors passer des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires et reciproquement par les formules :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4.27}$$

$$\theta = Arctg(\frac{y}{x}) \Longleftrightarrow tg\theta = \frac{y}{x} \tag{4.28}$$

Ou :

$$x = \rho cos\theta \tag{4.29}$$

$$y = \rho sin\theta \tag{4.30}$$

4.8 Les Coordonnées Polaires dans l'Espace

Les coordonnées polaires d'un point M dans l'espace sont :
- λ =angle orienté depuis un méridien origine, c'est la longitude,
- ϕ = angle orienté depuis le plan de l'équateur au parallèle passant par M, c'est la latitude,
- R = la longueur de $\boldsymbol{OM}$.

On écrira $M(\phi, \lambda, R)$.

4.9 Equation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$

4.9.1 Une droite passant par un point $A_0(x_0, y_0)$ et de direction un vecteur $\mathbf{u} = (\alpha, \beta)^t$

Un point $M(x, y)$ appartient à la droite D vérifie **AM** parallèle à **u**. Or **AM**$=(x - x_0, y - y_0)^t$ où t désigne transposée. D'où pour $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \Rightarrow \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \tag{4.31}$$

$$\text{soit } \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0 \tag{4.32}$$

4.9.2 Une droite D passante par 2 points $A_0(x_0, y_0)$ et $A'_0(x'_0, y'_0)$

On considère alors $\mathbf{u} = \mathbf{A}_0\mathbf{A}'_0$ et on traite le cas 4.9.1.

4.9.3 Une droite perpendiculaire à un vecteur $\mathbf{u} = (v, w)^T$ et passant par un point $A_0(x_0, y_0)$

$M(x, y) \in D \Rightarrow \mathbf{AM} \perp \mathbf{u} \Longrightarrow \mathbf{AM}.\mathbf{u} = 0$ Soit :

$$(x - x_0).v + (y - y_0).w = 0$$

ou :

$$vx + wy - vx_0 - wy_0 = 0 \tag{4.33}$$

4.10 Equation d'une droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, y_0 = f(x_0))$

Elle s'écrit tout simplement :

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0) \tag{4.34}$$

4.11 Equation de la normale à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, y_0 = f(x_0))$

Pour x_0 tel que $f'(x_0) \neq 0$, on a l'équation :

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}.(x - x_0) \tag{4.35}$$

Condition pour que deux droites soient perpendiculaires :

a - si les droites sont données par :

$$y = ax + b \text{ et } y = a'x + b'$$

Il faut :

$$aa' = -1 \tag{4.36}$$

b - si les droites sont données par :

$$mx + ny + p = 0 \text{ et } m'x + n'y + p' = 0$$

La condition est :

$$mm' + nn' = 0 \tag{4.37}$$

4.12 Angle de deux droites

Soient les deux droites d'équations :

$$y = ax + b \text{ et } y = a'x + b'$$

Alors l'angle V des deux droites est tel que :

$$tgV = \frac{a' - a}{1 + aa'} \tag{4.38}$$

4.13 Distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à une droite

La distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à une droite d'équation $mx + ny + p = 0$ est :

$$d = \frac{|mx_0 + ny_0 + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \tag{4.39}$$

où $|a|$ désigne valeur absolue de $a = a$ si $a \geq 0$ et $-a$ si $a \leq 0$.

4.14 Intersection de deux droites

Les coordonnées du point d'intersection sont les solutions du système formé par les équations des deux droites.

Exercice 4.1. *Trouver le point d'intersection de la droite D1 passant par* $A(4,3)$ *et* $B(10,6)$ *et de la droite D2 perpendiculaire à* AB *et passant par* $C(5,11)$.

4.15 Equation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$

4.15.1 Equation paramétrique d'une droite

Une droite passant par un point $A_0(x_0, y_0, z_0)$ et de direction le vecteur $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)^t$ On a l'équation :

$$x = x_0 + t\alpha \tag{4.40}$$
$$y = y_0 + t\beta \tag{4.41}$$
$$z = z_0 + t\gamma \tag{4.42}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. En éliminant t des équations précédentes, on obtient l'équation cartésienne d'une droite dans $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \tag{4.43}$$

avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

4.16 Changement d'axes de coordonnées

4.16.1 Translation d'axes

On passe du repère (O, x, y) au repère (O', X, Y) par une translation de vecteur $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{OO'}$, on a alors :

$$x = x_0 + X \tag{4.44}$$
$$y = y_0 + Y \tag{4.45}$$

où (x_0, y_0) sont les coordonnées de O' dans le repère (O, x, y).

4.16.2 Rotation des axes d'un angle α

Les nouvelles coordonnées s'expriment comme suit :

$$X = xcos\alpha + ysin\alpha \tag{4.46}$$
$$Y = -xsin\alpha + ycos\alpha \tag{4.47}$$

4.16.3 Translation et rotation des axes

Dans ce cas, on a les formules suivantes :

$$X = (x - x_0)cos\alpha + (y - y_0)sin\alpha \tag{4.48}$$
$$Y = -(x - x_0)sin\alpha + (y - y_0)cos\alpha \tag{4.49}$$

Chapitre 5

Résolution des Triangles

5.1 Triangles Quelconques

On a les formules suivantes :

$$A + B + C = \pi \tag{5.1}$$

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} \quad \text{Relations des sinus} \tag{5.2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA \tag{5.3}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB \tag{5.4}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC \tag{5.5}$$

$$a = bcosC + ccosB \tag{5.6}$$

$$b = ccosA + acosC \tag{5.7}$$

$$c = acsB + bcosA \tag{5.8}$$

En posant $2p = a + b + c$, on obtient la surface S du triangle par :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = p.r = p^2 tg\frac{A}{2} tg\frac{B}{2} tg\frac{C}{2} \tag{5.9}$$

De plus, on a :

$$sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{(p-b(p-c)}}{bc} \tag{5.10}$$

$$cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)}}{bc} \tag{5.11}$$

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{r}{p-a} \tag{5.12}$$

5.2 Cas classiques de résolution

Ces formules sont très utiles en topographie (mesures de points inaccessibles).

Cas $n°$	Données	Formules à utiliser
1	Un côté a, 2angles B et C	$A = \pi - (B + C)$ $b = a\frac{sinB}{sinA}$; $c = a\frac{sinC}{sinA}$ $S = \frac{bcsinA}{2} = \frac{a^2 sinBsinC}{2sin^2A}$
2	Deux côtés a, b un angle C (entre a et b)	$tg\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}tg\frac{(A+B)}{2}$ or $A + B = \pi - C$. On en déduit $A - B$ donc A puis B. $c = a\frac{sinC}{sinA}$; $S = \frac{absinC}{2}$
3	Deux côtés a, b un angle A (non entre a et b) cas douteux	$sinB = b\frac{sinA}{a}$; $C = \pi - (A + B)$ $c = a\frac{sinC}{sinA}$; $S = \frac{absinC}{2}$ **Discussion** 1°) $A > \pi/2; a \leq b$ o solution $a > b$ 1 solution $B < \frac{\pi}{2}$ 2°) $A < \pi/2; a > b$ 1 solution $B < \pi/2$ $a < b$: $\underline{a < bsinA}$ o solution $\underline{a = bsinA}$ 1 solution $B = \pi/2$ $\underline{a > bsinA}$ 2 solutions B' et $\pi - B'$
4	trois côtés a, b, c	$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $tg\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $tg\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$ on vérifie que $A + B + C = \pi$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

TABLE 5.1 – Cas classiques de résolution

5.2.1 Triangles rectangles

Relations fondamentales

On a :

$$A = B + C = \frac{\pi}{2} \tag{5.13}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ Relation de Pythagore} \tag{5.14}$$

$$a = 2R \tag{5.15}$$

$$sinB = \frac{b}{a} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \tag{5.16}$$

$$cosB = \frac{c}{a} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \tag{5.17}$$

$$tgB = \frac{b}{c} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \tag{5.18}$$

Cas classiques de résolution

Cas $n°$	Données	Formules à utiliser
1	$A = \frac{\pi}{2}$, B et a	$C = \pi/2 - B$ $b = asinB$, $c = acosB$ $S = \frac{a^2 sin2B}{4} = \frac{bc}{2}$
2	$A = \frac{\pi}{2}$, B et b	$C = \pi/2 - B$ $a = \frac{b}{sinB}$, $c = bcotgB$ $S = \frac{b^2 cotgB}{2}$
3	$A = \frac{\pi}{2}$, a, b	$sinB = cosC = \frac{b}{a} \Rightarrow B$ et C $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $S = \frac{bc}{2}$
4	$A = \frac{\pi}{2}$ b, c	$tgB = cotgC = \frac{b}{c} \Rightarrow B$ et C $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ ou $a = \frac{b}{sinB}$ $S = \frac{bc}{2}$

TABLE 5.2 – Cas des triangles rectangles

Chapitre 6

Les Fonctions

6.1 Définitions

6.1.1 Fonction

Deux variables x et y sont fonctions l'une de l'autre, si à toute valeur de l'une on peut correspondre une valeur ou un ensemble de valeurs de l'autre. On note la fonction y de la variable x par :

$$y = f(x) \tag{6.1}$$

Exemple :

$$y = 2x + 1 \tag{6.2}$$

6.1.2 Domaine de définition :

c'est l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels tel que quelque soit x appartient à ce domaine, la fonction $y = f(x)$ est définie. On note :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} /\ \ y = f(x)\ \text{ est définie}\} \tag{6.3}$$

Pour la fonction précédente, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

6.1.3 La dérivée d'une fonction

Définition 6.1. *La dérivée d'une fonction f en un point M de la courbe $y = f(x)$ est la limite de rapport de l'accroissement Δy de la fonction à l'accroissement Δx de la variable quand ce dernier tend vers 0.*

$$y'(x_0) = \underbrace{lim}_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{lim}_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} \tag{6.4}$$

La dérivée d'une fonction en un point est la pente de la tangente au graphe de la fonction en ce point :

$$y' = tg\alpha = \frac{dy}{dx} \tag{6.5}$$

6.2 Dérivées usuelles

Fonctions	Dérivées
$y = a$	$y' = 0$
$y = ax$	$y' = a$
$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$
$y = Logx$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = sinx$	$y' = cosx$
$y = cosx$	$y' = -sinx$
$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2x$

TABLE 6.1 – Dérivées des fonctions usuelles

Chapitre 7

Introduction Au Calcul Matriciel

7.1 Les Applications Linéaires

Définition : Soient U, V deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Une application linéaire f de $U \Longrightarrow V$ est dite linéaire si et seulement si :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U,\ f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \tag{7.1}$$
$$\forall \mu \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in U\ f(\mu.\mathbf{x}) = \mu.f(\mathbf{x}) \tag{7.2}$$

si $U = V$, f est un endomorphisme de U.

L'application f est dite :
- surjective si $\forall \mathbf{y} \in V$, $\exists \mathbf{x} \in U$ et $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$,
- injective si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ alors $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$,
- bijective si f est surjective et injective ou encore que $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ a une solution.

$Kerf = \{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} =\}$ = le noyau de f.
$Imf = \{\mathbf{y} \in V / \exists \mathbf{x} \in U,\ et\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$.

Si $V = U$ et f bijective, alors f est un automorphisme de U.

On considère U et V deux espaces vectoriels de dimension finie c'est-à-dire que les bases de U et de V sont finies.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, f est définie par la donnée de $f(\mathbf{e}_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $(\mathbf{e}'_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ la base de $\mathbb{R}^m$, alors :

$$f(\mathbf{e}_i) = a_{1i}.\mathbf{e}'_1 + a_{2i}.\mathbf{e}'_2 + \ldots + a_{mi}.\mathbf{e}'_m \tag{7.3}$$

On a donc le tableau suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots & a_{1i}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21}\ldots\ldots & a_{2i}\ldots. & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}\ldots\ldots & a_{mi}\ldots. & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Le tableau $A = (a_{ij})$ s'appelle matrice à m lignes et n colonnes.

Si $m = n$, A est dite matrice carrée d'ordre n. Dans la suite, on considère les matrices carrées d'ordre n.

7.2 Opérations sur les Matrices

- soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et $C = A + B$. L'élément c_{ij} de C est tel que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

- soit $C = \mu A$ où μ est un réel, alors $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \mu.a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

- soit $C = A.B$ le produit de 2 matrices carrées, alors $C = (c_{ij})$ telque :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj} \tag{7.5}$$

on a $A.B \neq B.A$ en général.

- la matrice $O = (0)$ matrice dont tous les éléments sont nuls est la matrice neutre pour l'addition :

$$A + O = O + A = A$$

- la matrice unité $I = (\delta_{ij})$ avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ c-à-d que les éléments diagonaux de I sont égaux à 1 et les autres sont égaux à 0.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0....0 & 0 \\ 0 & 1.... & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots 0 & 0 \\ 0\ldots\ldots & 0....1 & 0 \\ 0\ldots\ldots & 0....0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

alors :

$$A.I = I.A = A \tag{7.7}$$

Donc I est l'élément neutre pour la multiplication des matrices.

7.3 Propriétés des Matrices

* Matrice transposée : soit la matrice $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

B est la matrice transposée de $A \Leftrightarrow b_{ji} = a_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$ et on note B^T.

* Matrice symétrique, soit $A = (a_{ij})$, A est symétrique $\Leftrightarrow A = A^T$ soit $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

* Matrice antisymétrique : A est antisymétrique $A^T = -A$ soit $a_{ii} = 0$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

* $A = (a_{ij})$ une matrice définie positive est une matrice carrée telle que :

$$\forall x \neq o \Rightarrow x^T.A.x > 0. \tag{7.8}$$

* Une matrice orthogonale est une matrice A où toutes les lignes ou colonnes c_i vérifient :

$c_i^t.c_j = 0$ si $i \neq j$ et $c_i^T.c_j = 1$ si $i = j$. Alors :

$$A^{-1} = A^T \tag{7.9}$$

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

Alors le déterminant de A est égal à

$$\text{dét}(A) = a.d - b.c \tag{7.11}$$

Et on note :

$$\text{Dét(A)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{7.12}$$

Théorème 7.1. *Si $det(A)$ est non nul, alors la matrice A est inversible.*

Soit la matrice d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

Alors le déterminant de A est donné par :

$$\text{Dét(A)} = a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \tag{7.14}$$

Exercice 7.1. *Calculer le déterminant de la matrice A :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Table des figures

Liste des tableaux