# *On the signs of Lagrange*
# *Sur les signes de Lagrange*

*By Méhdi Pascal*

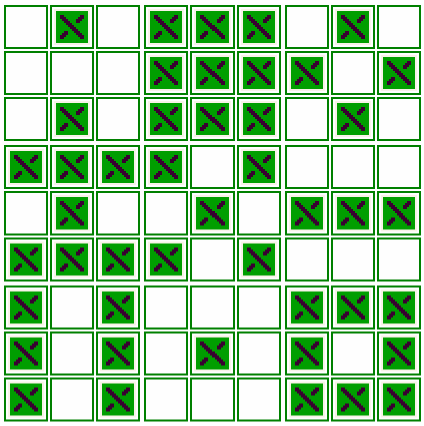
*August 30, 2021*

Abstract.

In the theory of solving equations with one unknown, Galois theory explains all, but this theory remains insufficient for equations with several unknowns, in this paper I show on the most famous example of these equations, « Fermat's equation », that the same ideas which allowed Galois his theory, also allow to justify Fermat's equation.

Résumé.

Dans la théorie de la résolution des équations à une seule inconnue, la théorie de Galois explique tous, mais cette théorie reste insuffisante pour les équations à plusieurs inconnues, dans ce papier, je montre sur l'exemple le plus célèbre de ces équations, « l'équation de Fermat », que les mêmes idées qui ont permet à Galois sa théorie, permet aussi de justifier l'équation de Fermat.



**Un grand merci à viXra**

**&**

**Thanks so much to Google for the translation**

# On the signs of Lagrange
# Sur les signes de Lagrange
## Par Méhdi Pascal
## 30 Août 2021

*À mon amie Sonia Burelle la grande poétesse de tout le Québec*

Joseph Louis Lagrange 1736 – 1813

I wrote this document in French, then I translated it into English, the translation is done by Google translate, so a big thank you to Google.

J’ai écrit ce document en français, puis je l’ai traduit en anglais, la traduction est fait par Google traduction, donc un grand merci à Google.

# Summary



# Sommaire

# Introduction

There are more than two cycles that a great mathematician left us, when I was a student I liked its mechanics very much, today I am a little old, and I am becoming a fan of numbers, and there too I'm starting to like these number theory offers.

## *Joseph Louis Lagrange*

A great mathematician you knew him better than I did, but I would still like to tell you about his magic signs.

What a positive or negative sign is for us is only one of the square roots of unity for Lagrange, it is a simple idea, even banal, but it is very fundamental, because it allowed for Abel to prove the impossibility of solving a fifth degree equations by radicals, it also allowed Galois his famous correspondence, called Galois theory.

For my part, I propose a problem, which is not easy, which can be justified by this simple notion, the notion of Lagrange signs.

***Problem:***

**Prove that the equation « $\sum_{j=1}^{n} x_j^n = \sum_{j=1}^{n-1} z_j^n$ » admits non-zero integer solutions, for all integer $n \geq 2$.**

For example we have,

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$7^3 + 8^3 + 27^3 = 17^3 + 25^3$$
$$1^4 + 4^4 + 17^4 + 20^4 = 12^4 + 13^4 + 21^4$$
$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 11^5 + 15^5 = 5^5 + 8^5 + 13^5 + 14^5$$

. . [] . .

# Chapter 1
# A resolvent for the Fermat equation

One of the old problems in mathematics is solving equations by radicals, we are interested in the following type equation:

**(1.1) :** $$x^n + a_1 x^{n-1} + ..[].. + a_n = 0$$

There are methods that allow you to solve any equation, but the one that interests us is the so-called radical resolution, the rules of which are two in number:

1. A finite number of the 4 arithmetic operations, addition, subtraction, multiplication and division.
2. A finite number of radicals, « i.e. $\sqrt[n]{a}$ ».

It is well known since the 16th century that one can solve by radicals an equation of degree $n \leq 4$, however it was necessary to wait for Abel to demonstrate that it is impossible to solve an equation of degree $n \geq 5$, but before all this are the ideas of Lagrange which allow Abel this famous result.

We take these methods of solving equations for the first examples, these methods are really very classic, but they are very important to understand and improve this notion of Lagrange signs.

According to a fundamental result of Gauss, an equation of degree $n$ and with coefficients in $\mathbb{C}$, admits $n$ solutions in $\mathbb{C}$, which are not necessarily distinguished, therefore (1.1) becomes:

**(1.2) :** $$(x - s_1)(x - s_2)..[]..(x - s_n) = 0$$

Let,

**(1.3) :**
$$\sigma_1 = s_1 + s_2 + ..[].. + s_n$$
$$\sigma_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + ..[].. + s_{n-1} s_n$$
$$..[]..$$
$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 ..[].. < i_j \leq n} s_{i_1} s_{i_2} ..[].. s_{i_j}$$
$$..[]..$$
$$\sigma_n = s_1 s_2 ..[].. s_n$$

These are the elementary symmetric polynomials in $s_1, s_2$ ..[].. $s_n$.

In general, a symmetric polynomial is a polynomial function in $n$ indeterminate which remains invariant by any permutation of its variables, in other words let $P(x_1, x_2 ..[].. x_n)$ be a polynomial with n indeterminate, and let $\gamma \in \mathfrak{S}_n$, where $\mathfrak{S}_n$ is the symmetric group of order $n$, the polynomial $P(x_1, x_2..[]..x_n)$ is symmetric iff $P(x_1, x_2..[]..x_n) = P(x_{\gamma(1)}, x_{\gamma(2)}..[]..x_{\gamma(n)})$.

The development of **(1.2)** allows us,

**(1.4) :** $$a_1 = -\sigma_1,\ \ a_2 = \sigma_2,\ \ ..[]..\ \ ,\ a_n = (-1)^n \sigma_n$$

A second fundamental result is the fundamental theorem of symmetric polynomials, also known by Newton's theorem, such that,

<u>**Theorem (1.5) :**</u>

***A polynomial is symmetric if and only if it is expressed in a unique way in terms of***

$$\sigma_1, \sigma_2\ ..[]..\ \sigma_n.$$

Example :

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(xy+yz+zx)(x+y+z) + 3xyz = \sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3$$

For the demonstration see [1]

[]

We start with the quadratic equation, such as:

**(1.6) :** $$x^2 - ax + b = 0$$

Let $s_1$ and $s_2$ denote its two solutions, then we have:

**(1.7) :** $$(x - s_1)(x - s_2) = 0$$

Therefore $a = s_1 + s_2$ & $b = s_1 s_2$ .

We swap the sign (+) of the function $a$ by the sign (-), and we again get the function $c = s_1 - s_2$, this function is not symmetrical, but its square is indeed symmetrical, we check, $c^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2$ so we can express it in $a$ and $b$, and we have:

**(1.8) :** $$c^2 = \left(s_1 + s_2\right)^2 - 4s_1 s_2 = a^2 - 4b$$

This allows us a solvable system, such as:

**(1.9) :** $$\begin{cases} s_1 + s_2 = a \\ s_1 - s_2 = \sqrt{a^2 - 4b} \end{cases}$$

So, for us, we have permuted the sign (+) in the function $a$ by its inverse the sign (-), to obtain the function $c$, but for Lagrange it is no longer a question of permutation of the signs, but it is This is a permutation of the square roots of the unit, so in the shadow of all that we can write $\sqrt{1} = \pm$.

Let's move on to the third degree equation, such as:

**(1.10) :** $$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$$

Let $U_3 = \{j, j^2, j^3 = 1\}$ be the group of cubic roots of unity, it is important to note that φ (3) = 2, so the primitive element $j$ can take the value of one of the two zeros in the equation,

$$j^2 + j + 1 = 0$$

Let $s_1$, $s_2$ and $s_3$ be the three solutions of equation **(1.10)** we have,

**(1.11)** : $$\begin{aligned} a_1 &= s_1 + s_2 + s_3 \\ a_2 &= s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3 \\ a_3 &= s_1s_2s_3 \end{aligned}$$

We do as for the second degree, we play with the signs, except that this time we have, the sign (+) is $1 = j^3$, while the sign (-) is the solution of the equation $j^2 + j + 1 = 0$, so sometimes it's $j$, sometimes it's $j^2$.
So we have,

**(1.12) :** $$\begin{aligned} y_0 &= s_1 + s_2 + s_3 = a_1 \\ y_1 &= s_1 + js_2 + j^2s_3 \\ y_2 &= s_1 + j^2s_2 + js_3 \end{aligned}$$

Or some other way,

**(1.13) :** $$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = A \cdot S$$

So,

**(1.14) :** $$S = A^{-1}Y = \frac{1}{3}\overline{A} \cdot Y$$

And we have,

**(1.15) :** $$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 2s_1 - (s_2 + s_3) \\ y_1y_2 &= (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - (s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3) \end{aligned}$$

The function $y_1y_2$ is symmetric, so we can express it in terms of $a_1$, $a_2$ and $a_3$, and we have,

**(1.16) :** $$y_1y_2 = a_1^2 - 3a_2$$

The function $y_1 + y_2$ is not symmetric, but the function $y_1^3 + y_2^3$ is indeed symmetric.

**(1.17) :** $$y_1^3 + y_2^3 = 2(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) + 21s_1s_2s_3 - 3(s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3)(s_1 + s_2 + s_3)$$

$$y_1^3+y_2^3=2a_1^3-9a_1a_2+27a_3$$

Finally we have a solvable system, such as:

**(1.18) :**
$$\begin{cases} y_0=a_1 \\ y_1^3y_2^3=\left(a_1^2-3a_2\right)^3 \\ y_1^3+y_2^3=2a_1^3-9a_1a_2+27a_3 \end{cases}$$

Because $y_1^3$ and $y_2^3$ are the two solutions of the following second degree equation:

**(1.19) :**
$$X^2-\left(a_1^2-3a_2\right)^3X+\left(2a_1^3-9a_1a_2+27a_3\right)=0$$

Here is the brilliant idea of Lagrange is to introduce the n$^{th}$ roots of the unit as a kind of signs, and to play with the permutations of these signs.

Lagrange's signs are quite simply the nth roots of unity, and if I prefer this notion of sign instead of roots it is for two reasons, the first is because Lagrange is the first to understand that the two expressions following $a+b$ and $a-b$ which describe the addition and the subtraction, are quite simply the solutions of the expression $a+\sqrt{1}b$, the second it is because of my stupidity, I will explain after.

The permutation of Lagrange signs can be applied to equations with several unknowns, the following example is really the most beautiful of all that I have done in my life, but first of all, we will need a very small notation.

**<u>Notation (1.20) :</u>**

The following notation:

$$\mathbb{S}\left\|E(x_1,x_2,..[]..,x_n)=0\right\|\mathbb{S}$$

Reads, the solubility of the equation $E(x_1,x_2,..[]..,x_n)=0$ in the set $\mathbb{S}$.

*Example :* $\mathbb{N}^*\left\|x^2+y^2=z^2\right\|\mathbb{N}^*$ *is true, when* $\mathbb{N}^*\left\|x^3+y^3=z^3\right\|\mathbb{N}^*$ *is false.*

[]

Everyone knows that the equation $x^2+y^2=z^2$ admits non-zero integer solutions, for example we have $9^2+12^2=15^2$.

Let us do a sign permutation, again the equation $x^2-y^2=z^2$ admits non-zero integer solutions, for example we have $x^2-y^2=z^2$.

The two equations form a soluble system by non-zero integers, which I call the 2$^{nd}$ order permutation system, such as:

**(1.21) :**
$$Sp_2:=\begin{cases} x_1^2+y^2=z_1^2 \\ x_2^2-y^2=z_2^2 \end{cases}$$

This system is soluble in ℕ* for example, we have:

$$\begin{cases} 9^2 + 12^2 = 15^2 \\ 13^2 - 12^2 = 5^2 \end{cases}$$

For the general case, let $U_n = \{1, j, j^2 \ \ ..[].. \ j^{n-1}\}$ be the group of $n^{\text{th}}$ roots of the unit, with $j$ being one of its primitive elements, so we have:

**(1.22) :** $$1 + j + j^2 + \ ..[].. \ +j^{n-1} = 0$$

The $n$-order permutation system is written as follows:

**(1.23) :** $$Sp_n := \begin{cases} x_1^n + y^n = z_1^n \\ x_2^n + jy^n = z_2^n \\ x_3^n + j^2 y^n = z_3^n \\ ..[].. \\ x_n^n + j^{n-1} y^n = z_n^n \end{cases}$$

What happens in this system is exactly what happens in Fermat's equation, non-zero solutions for $n \le 2$, and only for $n \le 2$, it's like a kind of a morphism between the set of solutions of $Sp_n$ and the set of solutions of Fermat's equation, this is because the elements of the group $U_n$ cannot all be rationals unless $n \le 2$.

Today Fermat's great theorem is a mathematical certainty since it was proved by Sir Andrew Wiles in 1995, so in a trivial way I can state the following equivalence:

**(1.24) :** $$\mathbb{N}^* \| Sp_n \| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \| u^n + v^n = w^n \| \mathbb{N}^*$$

The problem of this equivalence is the decidability, that means, *is there a proof to decide this equivalence?*

To find out, just go to the demonstration, my first example was $n = 3$.

Indeed,
The first meaning is obvious, because Fermat's equation is a member of $Sp_3$, it suffices to pose $x_1 = u,\ y = v\ \ \&\ \ z_1 = w$.

For the opposite direction, we suppose that the Fermat equation is obtained by non-zero integers, a simple addition allows us to write:

**(1.25) :** $$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$$

Because,

$$j^2 + j + 1 = 0$$

Let $x_1^3 + y^3 = z_1^3$ be a solution of Fermat's equation that we have assumed to exist, then we have,

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^3 + y^3 + z_2^3 + z_3^3$$

So,

**(1.26) :** $$x_2^3 + x_3^3 = y^3 + z_2^3 + z_3^3$$

What is well soluble, for example we have,

$$13^3 + 14^3 = 1^3 + 3^3 + 17^3$$

It even admits an infinity of solutions, for example we have this class of solutions:

**(1.27) :** $$(2N+1)^3 + (2N+2)^3 = \left(2N+1+\sqrt{N+1}\right)^3 + \left(2N+1-\sqrt{N+1}\right)^3 + 1^3$$

Where it suffices to choose $N$ in such a way that $N + 1$ is a square.
This proves that we have,

**(1.28) :** $$\mathbb{N}^* \left\| Sp_3 \right\| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^3 + v^3 = w^3 \right\| \mathbb{N}^*$$

$Sp_3$ can no longer be soluble in $\mathbb{N}^*$ because of the presence of the number $j = \exp(2\pi i / 3)$ which is a complex non-real number, therefore non-rational, by virtue of $\mathbb{N}^* \left\| u^3 + v^3 = w^3 \right\| \mathbb{N}^*$ is false.

*C.Q.F.D without error.*

For the general case, the same reasoning leads to the following resolvent:

**(1.29) :** $$x_2^n + x_3^n + ..[].. + x_n^n = y^n + z_2^n + z_3^n + ..[].. + z_n^n$$

For $n = 4$ we have the following solutions:

$$12^4 + 13^4 + 21^4 = 1^4 + 4^4 + 17^4 + 20^4$$
$$3^4 + 21^4 + 23^4 = 1^4 + 4^4 + 17^4 + 25^4$$
$$12^4 + 23^4 + 28^4 = 1^4 + 4^4 + 18^4 + 30^4$$
$$7^4 + 11^4 + 13^4 = 1^4 + 5^4 + 9^4 + 14^4$$
$$..[]..$$

For $n = 5$ we have :

$$5^5 + 8^5 + 13^5 + 14^5 = 1^5 + 6^5 + 7^5 + 11^5 + 15^5$$
$$12^5 + 14^5 + 22^5 + 27^5 = 1^5 + 5^5 + 21^5 + 23^5 + 25^5$$
$$10^5 + 12^5 + 22^5 + 23^5 = 1^5 + 7^5 + 15^5 + 20^5 + 24^5$$
$$3^5 + 9^5 + 22^5 + 25^5 = 1^5 + 8^5 + 9^5 + 14^5 + 27^5$$

..[]..

For $n$ = 6 we have:

$$2^6+5^6+8^6+9^6+26^6=1^6+6^6+14^6+19^6+20^6+24^6$$
$$2^6+5^6+20^6+26^6+27^6=1^6+6^6+8^6+18^6+25^6+28^6$$
$$2^6+8^6+9^6+17^6+19^6=1^6+6^6+7^6+12^6+13^6+20^6$$
$$2^6+9^6+11^6+22^6+25^6=1^6+3^6+7^6+16^6+18^6+26^6$$

..[]..

For $n$ = 7 we have:

$$3^7+6^7+16^7+18^7+22^7+28^7=1^7+2^7+7^7+11^7+21^7+24^7+27^7$$

..[]..

In all these examples that I gave there is a $1^n$, it is because these values are calculated numerically by computer, and to save time, I set one of the variables giving it this value, but the most important is that these values are no longer trivial. For $n$ = 7 I only found this solution, where it took me more than two days to find it, but it's still a very good solution, because not only do we have,

$$3^7+6^7+16^7+18^7+22^7+28^7=1^7+2^7+7^7+11^7+21^7+24^7+27^7$$

But we also have,

$$3+6+16+18+22+28=1+2+7+11+21+24+27$$

If it took me more than two days to find the first solution of $n$ = 7, then I can imagine that it takes me more than two months to find the first solution of the case $n$ = 13, because not only to because of the increase in the numbers of variables, but also because of a notion that I call Fermat's divisors. If $n$ is even for example $n$ = 100, then among two candidates there is at most one possible, for $n$ = 7 we have among 42 candidates there is at most one possible, then for $n$ = 13 we have among 2730 candidates there is at most one possible.

A Fermat divisor is the greatest common divisor of the polynomial $\left(x^n-x\right)$, for example, if $n$=13 then for any integer $x$, the number 2730 divides $\left(x^n-x\right)$. For $n\geq 2$ the formula of these divisors is given by:

**(1.30) :**
$$Z_n=\prod_{\substack{p,premier\\ p-1|n-1}} p$$

And we have,

**(1.31) :**
$$x^n\equiv x\ Modulo(Z_n)$$

We find these divisors in the famous Bernoulli numbers, with a very small index shift, such as:

**(1.32) :**
$$B_n=\frac{Num_n}{Dén_n}=\frac{Num_n}{Z_{n+1}}$$

For more details see [2].

The following theorem justifies this:

**Theorem (1.33) :**

Let, $(E) := \sum_{j=1}^{t} a_j x_j^n = 0 \quad a_j \in \mathbb{Z}$, any n and t, and let $\beta = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ .

If (E) is soluble in $\mathbb{Z}$, then. $\beta \equiv 0 \quad Modulo(Z_n)$.

Proof :

According to (2.13) we have: $\sum_{j=1}^{t} a_j x_j^n - \sum_{j=1}^{t} a_j x_j \equiv 0 \quad Modulo(Z_n)$, as $\sum_{j=1}^{t} a_j x_j^n = 0$ then $-\beta \equiv -\sum_{j=1}^{t} a_j x_j \equiv 0 \quad Modulo(Z_n)$.

C.Q.F.D

For the infinity of the solutions, I think that in this kind of equation, we can from a particular solution have an infinity of the solutions, it is not really easy to demonstrate, but at least I can give you a example. Let for example $1^3 + 5^3 + 9^3 = 7^3 + 8^3$ one of the solutions of the equation $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = z_1^3 + z_2^3$, we set:

$$x_1 = 5 \;; x_2 = 9 \;; x_3 = 1 \;; z_1 = 7 \;; z_2 = 8$$

And we have,

$$z_1 = x_1 + 2 \;\&\; z_2 = x_2 - 1$$

So,

$$z_1^3 = x_1^3 + 6x_1^2 + 12x_1 + 8$$

$$z_2^3 = x_2^3 - 3x_2^2 + 3x_2 - 1$$

Hence the starting equation becomes,

$$2x_1(x_1 + 2) - x_2(x_2 - 1) + 2 = 0$$

We set, $z_1 = 7k$ and $z_2 = 8k$ , it is clear that for $k = 1$ we get the starting solution, but when I replace $x_1$ and $x_2$ with these values as a function of $k$, I get a quadratic equation, such that,

$$17k^2 - 18k + 1 = 0$$

Whose solutions are $k_1 = 1$ and $k_2 = \frac{1}{17}$

For $k=k_2$ we have this second solution, $1^3 - \left(\frac{27}{17}\right)^3 + \left(\frac{25}{17}\right)^3 = \left(\frac{7}{17}\right)^3 + \left(\frac{8}{17}\right)^3$ or $17^3 + 25^3 = 7^3 + 8^3 + 27^3$.

If we set, $z_1 = 7k$ and $z_2 = 17k - 9$ then in the same way I get the following equation:

$$191k^2 - 261k + 70 = 0$$

Whose solutions are $k_1 = 1$ and $k_2 = \frac{70}{191}$

For $k=k_2$ we have this third solution $108^3 + 529^3 + 191^3 = 490^3 + 338^3$.

And so on.

[]

There you go, that seems correct to me, but the truth is that I am absolutely nothing at all, in front of these 3 and a half cycles, so the error is of course, but at least it lets me think that the following resolvent,

**(1.34) :** $$S_n := \left( \sum_{j=1}^{n} x_j^n = \sum_{j=1}^{n-1} z_j^n \right)$$

Admits non-zero integer solutions for all integer $n \geq 2$.
And you, what do you think about the solubility of $S_n$?

At the beginning I thought that this resolvent is always soluble, because otherwise it will be like a counter example to the equivalence **(1.24)** namely,

$$\mathbb{N}^* \left\| Sp_n \right\| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^n + v^n = w^n \right\| \mathbb{N}^*$$

But I was wrong, for example, for $n = 6$ I can reduce the permutation system as follows:

**(1.35) :** $$Sp_6^{'} = \begin{cases} x_1^6 + y^6 = z_1^6 \\ x_2^6 + jy^6 = z_2^6 \\ x_3^6 + j^2 y^6 = z_3^6 \end{cases}$$

With $j^2+j+1=0$
In the same way I can pose the following banal equivalence:

**(1.36) :** $$\mathbb{N}^* \left\| Sp_6^{'} \right\| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^6 + v^6 = w^6 \right\| \mathbb{N}^*$$

So that leads us to the following resolvent:

**(1.37) :** $$x_2^6 + x_3^6 = y^6 + z_2^6 + z_3^6$$

The problem with this solver is that it risks being soluble in ℕ*, deep down I know that **(1.37)** is not soluble, but I cannot give a correct proof, I have ideas related to Galois permutations, but nothing is certain. By virtue of the equivalence **(1.36)** is banally true, but it is undecidable, it simply means that the members of this equivalence are absolutely independent.
[]
Fermat's great theorem is really a great theorem, for me it's a big school, but its secret is very small, such as:

***Proposal A:***

***« Lagrange's signs cannot all be rationals unless n≤2. »***

But there is also another proposition that everyone is familiar with, such as:
***Proposal B:***

« The symmetric group $\mathfrak{S}_n$ can be abelian only if n≤2. »

And again in a banal way I can pose the following equivalence:

**(1.38) :** **A** ***if and only if*** **B.**

The question that arises is, is this equivalence decidable?

# Chapter 2
# On the possibility of a Galois reasoning in Fermat's great theorem.

It is not really easy to imagine a Galois reasoning in Fermat's great theorem, since Fermat's equation is soluble by radicals, or even the simplest radicals, such as, $z = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ .
However I think that it exists, because it is no longer a question of the resolution by radicals, but it is certainly an algebraic method, if we take Abel's work again, then this leads us to state his theorem in two different ways, such as,

**The first statement:**

There is no algebraic method to solve an equation of degree $n \geq 5$.

**The second statement:**

An equation of degree $n \geq 5$ cannot be solved by radicals.

It is clear that the second statement is an immediate consequence of the first statement, so from the start it is a method. For polynomial equations with one unknown, the method leads or not to solutions by radicals, for equations with several unknowns, the method leads or not to solutions by non-zero integers, therefore on the possibility of the existence of a reasoning of Galois in the great theorem of Fermat, I propose to take again the ideas of Lagrange with of course the notion of the signs instead of the roots.

We take the equation of the third degree, such as:

**(2.1) :** $$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$$

As we have seen, we pose,

**(2.2) :** $$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = A \cdot S$$

So,

**(2.3) :** $$S = A^{-1}Y = \frac{1}{3}\overline{A} \cdot Y$$

Lagrange noticed that the system in $y_1$ and $y_2$ preserves itself - up to a Lagrange sign - whatever the permutation in $s_1$, $s_2$ and $s_3$.
In our example, we know that the symmetric group $\mathfrak{S}_3$ is of order 6, so the 6 possible permutations are:

**(2.4) :** $id = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$, $\gamma^2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$, $\tau_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$, et $\tau_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$.

And we have,

**(2.5) :** $\begin{cases}\gamma(y_1)=j^2y_1\\ \gamma(y_2)=jy_2\end{cases}$, $\begin{cases}\gamma^2(y_1)=jy_1\\ \gamma^2(y_2)=j^2y_2\end{cases}$, $\begin{cases}\tau_1(y_1)=y_2\\ \tau_1(y_2)=y_1\end{cases}$, $\begin{cases}\tau_2(y_1)=j^2y_2\\ \tau_2(y_2)=jy_1\end{cases}$ et $\begin{cases}\tau_3(y_1)=jy_2\\ \tau_3(y_2)=j^2y_1\end{cases}$.

For higher degrees, we know that the order of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ is equal to $n!$ , therefore there is too much permutation to verify, to solve this problem, it suffices to choose a group of permutations which generates $\mathfrak{S}_n$, several choices are possible the simplest and the $n-1$ transpositions (12), (23), (34 ) .. [] .. $(n-1, n)$. When these permutations are verified then $y_1, y_2, y_3$ .. [] .. $y_n$ make a system in Lagrange solvers.

The 4th degree equation is so important, because it's like an inflection point of a curve, this is where things start to deviate, let,

**(2.6) :**
$$x^4-a_1x^3+a_2x^2-a_3x+a_4=0$$

By analogy to (2.2) we set,

**(2.7) :**
$$\begin{aligned} y_0&=s_1+s_2+s_3+s_4\\ y_1&=s_1+is_2-s_3-is_4\\ y_2&=s_1-s_2+s_3-s_4\\ y_3&=s_1-is_2-s_3+is_4\end{aligned}$$

We apply the transposition $\sigma=(12)$ to the three functions $y_1$, $y_2$ and $y_3$, such as:

$$\begin{aligned} \sigma(y_1)&=s_2+is_1-s_3-is_4=i(s_1-is_2+is_3-s_4)\\ \sigma(y_2)&=s_2-s_1+s_3-s_4=-(s_1-s_2-s_3+s_4)\\ \sigma(y_3)&=s_2-is_1-s_3+is_4=-i(s_1+is_2-is_3-s_4)\end{aligned}$$

We notice that the system is not preserved - except for a Lagrange sign -, by virtue, y1, y2 and y3 can no longer be resolvents. To solve this problem we play with a second permutation of the signs, « *or maybe a reduction of the signs!* », Such that i will be replaced by 1, « *or reduced to 1* », and we have again,

**(2.8) :**
$$Y=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{pmatrix}=A\cdot S$$

**(2.9) :**
$$S=\frac{1}{4}A\cdot Y$$

The changes of the variables obtained by the transpositions (12), (23) and (34) show that the system in $y_1$, $y_2$ and $y_3$ is always preserved - up to a Lagrange sign -, therefore $y_1$, $y_2$ and $y_3$ are certainly resolvents, and we have,

**(2.10) :**
$$\begin{cases} y_0 = a_1 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3a_1^2 - 8a_2 \\ y_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2 = 3a_1^4 + 16a_2^2 - 16a_1^2 a_2 + 16a_1 a_3 - 64a_4 \\ y_1^2 y_2^2 y_3^2 = \left(a_1^3 - 4a_1 a_2 + 8a_3\right)^2 \end{cases}$$

For the 5th degree equation, we set $\omega = \exp(2\pi i / 5)$ and by analogy to (2.2) we set,

**(2.11) :**
$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} = A \cdot S$$

**(2.12) :**
$$S = \frac{1}{5} \bar{A} \cdot Y$$

We permutate $s_1$ by $s_2$ we notice that the system in $y_1$, $y_2$, $y_3$ and $y_4$ is not preserved up to a Lagrange sign, and as the degree is a prime number, then a reduction of the Lagrange signs is no longer possible, this justifies a little the impossibility of the resolution by radicals the general equation of $5^{th}$ degree, and if a little, it is because the matrix $A$ is not the only choice.

So as a summary of all that, it is that the method is linked to the search for Lagrange resolvents, if they do not exist that means that the equation in question is not solvable by radicals, but s' they probably exist then the equation in question is solvable by radicals, and if probably it is because we speak of any degree $n$, and the existence of these solvents quite simply ensures the reduction of degree $n$ to $n-1$.

For higher degrees, solving by radicals is impossible, because in the best cases, the solvents lead to the 5th degree equation which is not solvable

### *The reduction of Lagrange's signs*

The reduction of the Lagrange signs is only possible if the degree $n$ is compound, the simplest example are the resolvents of the equation of the $4^{\text{th}}$ degree, see (2.8), but without error I think that this reduction cannot be possible only for signs of order 4, so only $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ is reducible to $U_2 = \{1, -1\}$

Take for example the 6th degree equation, such that,

**(2.13) :**
$$x^6 - a_1 x^5 + a_2 x^4 - a_3 x^3 + a_4 x^2 - a_5 x + a_6 = 0$$

By analogy to (2.2) we set,

**(2.14) :**

$$Y=\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j^2 & j & -1 & j^2 & -j\\ 1 & j & j^2 & 1 & j & j^2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j^2 & j & 1 & j^2 & j\\ 1 & -j & j^2 & -1 & j & -j^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5\\ s_6 \end{pmatrix}=AS$$

With $j^2+j+1=0$

**(2.15) :**

$$S=\frac{1}{6}\overline{A}\cdot Y$$

A reduction of the Lagrange signs means replacement of -1 by 1, of $-j$ by $j$ and of $-j^2$ by $j^2$, which gives,

**(2.16) :**

$$Y=\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j^2 & j & 1 & j^2 & j\\ 1 & j & j^2 & 1 & j & j^2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j^2 & j & 1 & j^2 & j\\ 1 & j & j^2 & 1 & j & j^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5\\ s_6 \end{pmatrix}=AS$$

We permutate $s_1$ by $s_2$ we notice that the system in $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ and $y_5$ does not preserve itself - up to a Lagrange sign -, therefore the $y_i$ do not make a system in Lagrange resolvents, by virtue of the equation (2.13) can never be reduced to an equation of lower degree.

For Fermat's equation, and for n = 6, when we reduce the permutation system as follows:

**(2.17) :**

$$Sp_6^{'}=\begin{cases} x_1^6+y^6=z_1^6\\ x_2^6+jy^6=z_2^6\\ x_3^6+j^2y^6=z_3^6 \end{cases}$$

With $j^2+j+1=0$
This leads us to the following banal equivalence:

**(2.18) :**

$$\mathbb{N}^*\left\|Sp_6^{'}\right\|\mathbb{N}^*\Leftrightarrow\mathbb{N}^*\left\|u^6+v^6=w^6\right\|\mathbb{N}^*$$

So that leads us to the following resolvent:

**(2.19) :**

$$x_2^6+x_3^6=y^6+z_2^6+z_3^6$$

And as I have already said that this resolvent risks being soluble in ℕ*, it is because we cannot reduce U6 to U3.

But it works well with the $4^{th}$ degree equation, let's see if it works with Fermat's equation for $n$ = 4.

For that the system $Sp_4$ becomes $Sp_4^{'}$, such as,

**(2.20) :** $$Sp_4^{'} := \begin{cases} x_1^4 + y^4 = z_1^4 \\ x_2^4 - y^4 = z_2^4 \end{cases}$$

And we have,

**(2.21) :** $$\mathbb{N}^* \left\| Sp_4^{'} \right\| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^4 + v^4 = w^4 \right\| \mathbb{N}^*$$

This equivalence is trivial, because it is of type "$A \Leftrightarrow A$", but it remains a legitimate equivalence, and therefore decidable.
[]

***The degree of Galois and the degree of Fermat***

If we consider the number 5 as the Galois degree, and the number 3 as the Fermat degree, then their difference which is equal to 2 can only be the number of second degree radicals, and we certainly have the following theorem,

**<u>Theorem (2.22) :</u>**

For any two complex numbers *a* and *b* we have, *a* and *b* are second degree radicals if and only if for any integer n, the number $a^n + b^n$ is rational.

The proof is easy.

In equation $x^n + y^n = z^n$ we set $x = z - a$ and $y = z - b$, obviously if this equation admits non-trivial rational solutions, then the two numbers *a* and *b* are non-zero rationals, and we have,

**(2.23) :** $$\begin{gathered} (z-a)^n + (z-b)^n - z^n = 0 \\ z^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (a^j + b^j) z^{n-j} = 0 \end{gathered}$$

And in terms of elementary symmetric functions, we have,

**(2.24) :** $$\begin{cases} z_1 + z_2 + ..[]..+ z_n = \binom{n}{1}(a+b) \\ z_1z_2 + z_1z_3 + ..[]..+ z_{n-1}z_n = \binom{n}{2}(a^2+b^2) \\ ..[].. \\ z_1z_2..[]..z_n = \binom{n}{n}(a^n+b^n) \end{cases}$$

In this system there are two members, the first is of degree *n*, while the second is of degree 2, it is like when we have two operators of which the first gives the $n^{th}$ root, while the second gives the square root , we combine the two, which gives $\sqrt[n+2]{\ }$ .

# References

[1] Introduction à la théorie de Galois et la géométrie algébrique, by Jan Nekovář.
[2] Sur les diviseurs de Fermat, Méhdi Pascal. https://vixra.org/abs/2011.0191

## *Couleur d'azur*

*Le bleu d'azur*
*M'emporte*
*Vers le ciel étoilé*

*Où je peux enfin respirer*
*Une pleine liberté*

*Une liberté d'être*
*Et sans borne*

*Elle est belle et pure*
*Entièrement restaurée*

*Elle est comme je suis*
*Resplendissante*

*D'être ainsi aimé*

*Sonia Burelle*

I met this woman on the Caramail, the equivalent of today's Face Book, she's a woman who has a passion for poetry, during our first meeting she asks me to demonstrate Fermat's great theorem , at first I thought she was laughing at me, but then I understood that she was curious, and that she hoped for a simple demonstration that she could understand, in any case I spread that this It is impossible for me to prove this theorem.
At that time I worked in a mine at CMT, in 2003 I left that mine, and unemployment forced me to give up Caramail.

So I thought about my friend's request, and I said to myself why not, it's true it's a great theorem, but it still has some weak points, firstly it is already demonstrated, so I know which one ways to follow, secondly it is true for some cases is false for other cases, so if I find the real reasons that make this equation true for n ≤ 2, then these same reasons will explain to me why it is impossible for n ≥ 3.

I quickly understood that the secret of this theorem is in complex numbers, there were even times when I thought I proved it, but as I discovered my mistakes, until that strange night of August 5, 2005, I remember well, it was a Thursday, that night I decided to do one last try, because the big theorem really becomes an obsession, and sometimes I forget that I need work for the bread of life, so I made a sleepless night, and all I did during that night was look at these two equations that are equal:

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$x^2 = z^2 - y^2$$

Completely blocked, I say, where is this miserable weak point hiding?

That's all I've been doing all night, and until even after sunrise the next day, at about 8 a.m. in the morning, I feel exhausted, and need to sleep, so I made this decision, it's over Fermat's great theorem, Fermat's great theorem is no longer my problem, I go home and I sleep like a baby, and I even have dreams, but a obsession remains an obsession, even in dreams, it is in this dream where I noticed that these two plus and minus signs can only be square roots of unity.

I feel such a joy, a joy that wakes me up, so I pick up my pencil again, I do some tests, and I find my first solution for $n = 3$, it is the 855 solution, such as $1^3 + 5^3 + 9^3 = 7^3 + 8^3$, and from then on, I have been working on this resolvent:

$$x_2^n + x_3^n + ..[]..+ x_n^n = y^n + z_2^n + z_3^n + ..[]..+ z_n^n$$

I did whatever it takes to prove that it is still soluble, and in 2007 I stopped, because even soluble it is no longer obvious, except for special cases.

These particular cases are also important, because all the same it is about the great theorem of Fermat, but I published nothing, it is because I had a doubt, and this doubt even occurred at this moment when I shout these words to you.

My reasoning is like "A if and only if B", so as everyone knows, we assume that A is true, and we prove that B is true, and we assume that B is true and we prove that A is true, once all this is verified, then without worry we can say that A if and only if B, but my concern was the fact that B is a member of A.

I had perfectly forgotten this problem, for all these years, until recently I noticed that in a class of polynomials, when I replace the complex number *i* by the unit in these zeros, almost any property is preserved, i knew that it is a morphism, but of what nature? And how ? I don't know that, but certainly it preserves several properties of functions and polynomials, so I thought of Galois theory, because I'm sure the answer is in this theory, the problem is that j 'm over 50 years old, and that one does not understand the theory of Galois until the age of Galois, on the net I came across the course of professor Jan Nekovář, « *Introduction à la théorie de Galois et La géométrie algébrique* », this gentleman really did a very nice job, reading only the introduction, I understood that my result of this strange night of August 5, 2005 is already known from Lagrange.

Now I know that there is a Galois reasoning in Fermat's great theorem, but I cannot prove it correctly anymore, because I understand the principle of Galois correspondence, but not the details, normally more than the number of permutations increases, the more that the symmetric group lose properties, the simplest example is the fact that only symmetric groups of order $n \leq 2$ that commute, a very important character in the resolution of equations as well as in the solubility of others.

I hope my reasoning is correct, because it is the only way for my friend Sonia to understand Fermat's theorem, she is my friend, and today I miss her so much, especially what I miss it's our blah blah.

I am mohamed el ouazzani, but please call me Méhdi Pascal and Thank you.

Méhdi Pascal
MehdiPascal38@Gmail.Com

# Introduction

Il y a plus de deux cycles qu'un grand mathématicien nous a quitté, lorsque j'étais un étudiant j'ai aimé beaucoup sa mécanique, aujourd'hui je suis un peu vieux, et je deviens un passionné des nombres, et là aussi je commence à aimer ces offres en théorie des nombres.

## *Joseph Louis Lagrange*

Un grand mathématicien que vous le connaissait mieux que moi, mais j'aimerai quand même vous parler de ses magiques signes.

Ce qu'est pour nous un signe positif ou négatif, n'est pour Lagrange que l'une des racines carré de l'unité, c'est une simple idée, voir même banale, mais elle est très fondamentale, car elle a permet à Abel de prouver l'impossibilité de résoudre par radicaux une équations de cinquième degré, elle a aussi permet à Galois sa célèbre correspondance, dite théorie de Galois.

De ma part je propose un problème, qui n'est pas aisé, qu'on peut justifier par cette simple notion, la notion des signes de Lagrange.

***Problème:***

**Prouver que l'équation « $\sum_{j=1}^{n} x_j^n = \sum_{j=1}^{n-1} z_j^n$ » admet des solutions entiers non nuls, pour tout entier n ≥ 2.**

Par exemples on a,

$$3^2+4^2=5^2$$
$$7^3+8^3+27^3=17^3+25^3$$
$$1^4+4^4+17^4+20^4=12^4+13^4+21^4$$
$$1^5+6^5+7^5+11^5+15^5=5^5+8^5+13^5+14^5$$

. . [] . .

# Chapitre 1
# Une résolvante pour l'équation de Fermat

L'un des vieux problèmes des mathématiques est la résolution des équations par radicaux, on s'intéresse à l'équation de type suivant :

**(1.1) :** $$x^n + a_1 x^{n-1} + ..[]..+ a_n = 0$$

Ils existent des méthodes qui permettent de résoudre n'apporte quelle équation, mais celle qui nous intéresse est celle qu'on appelle la résolution par radicaux, dont les règles sont en nombre deux :

3. Un nombre fini des 4 opérations arithmétiques, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.
4. Un nombre fini des radicaux, « i.e. $\sqrt[n]{a}$ ».

Il est bien connu depuis le 16ème siècle que l'on peut résoudre par radicaux une équation de degré $n \leq 4$, cependant il fallait attendre Abel pour démontrer qu'il est impossible de résoudre une équation de degré $n \geq 5$, mais avant tout ce sont les idées de Lagrange qui on permet à Abel ce célèbre résultat.

Nous reprenons ces méthodes de la résolution des équations pour les premiers exemples, ces méthodes sont vraiment très classiques, mais elles sont très important pour comprendre et améliorer cette notion des signes de Lagrange.

Selon un résultat fondamental de Gauss, une équation de degré $n$ et à cœfficients dans $\mathbb{C}$, admet $n$ solutions dans $\mathbb{C}$, qui ne sont pas forcément distingues, donc **(1.1)** devient :

**(1.2) :** $$(x - s_1)(x - s_2)..[]..(x - s_n) = 0$$

Posons,

**(1.3) :** $$\begin{gathered} \sigma_1 = s_1 + s_2 + ..[]..+ s_n \\ \sigma_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + ..[]..+ s_{n-1} s_n \\ ..[].. \\ \sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 ..[]..< i_j \leq n} s_{i_1} s_{i_2} ..[].. s_{i_j} \\ ..[].. \\ \sigma_n = s_1 s_2 ..[].. s_n \end{gathered}$$

Ce sont les polynômes symétriques élémentaires en $s_1, s_2$ ..[].. $s_n$.

En général un polynôme symétrique est une fonction polynomiale en $n$ indéterminés qui reste invariante par toute permutation de ses indéterminés, en d'autre terme soit $P(x_1, x_2 ..[]..x_n)$ un polynôme à $n$ indéterminés, et soit $\gamma \in \mathfrak{S}_n$, où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique d'ordre $n$, le polynôme $P(x_1, x_2 ..[]..x_n)$ est symétrique si-si $P(x_1, x_2 ..[]..x_n) = P(x_{\gamma(1)}, x_{\gamma(2)} ..[]..x_{\gamma(n)})$.

Le développement de **(1.2)** nous permet,

**(1.4) :** $$a_1 = -\sigma_1,\ a_2 = \sigma_2,\ ..[]..\ , a_n = (-1)^n \sigma_n$$

Un second résultat fondamental est le théorème fondamental des polynômes symétriques, connu aussi par théorème de Newton, tel que,

**<u>Théorème (1.5) :</u>**

***Un polynôme est symétrique si et seulement si il s'exprime d'une manière unique en terme de*** $\sigma_1, \sigma_2 ..[]..\sigma_n$**.**

Exemple :

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(xy+yz+zx)(x+y+z) + 3xyz = \sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3$$

Pour la démonstration voir [1].

[]

On commence par l'équation de second degré, telle que :

**(1.6) :** $$x^2 - ax + b = 0$$

Notons par $s_1$ et $s_2$ ses deux solutions, alors on a :

**(1.7) :** $$(x - s_1)(x - s_2) = 0$$

Donc $a = s_1 + s_2$ & $b = s_1 s_2$ .

Nous permutons le signe (+) de la fonction $a$ par le signe (-), et on obtient de nouveau la fonction $c = s_1 - s_2$, cette fonction n'est pas symétrique, mais son carré est bien symétrique, on vérifie, $c^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2$ donc on peut l'exprimer en $a$ et $b$, et on a :

**(1.8) :** $$c^2 = \left(s_1 + s_2\right)^2 - 4s_1 s_2 = a^2 - 4b$$

Ce qui nous permet un système résoluble, tel que :

**(1.9) :** $$\begin{cases} s_1 + s_2 = a \\ s_1 - s_2 = \sqrt{a^2 - 4b} \end{cases}$$

Voilà, pour nous, on a permuté le signe (+) dans la fonction $a$ par son inverse le signe (-), pour obtenir la fonction $c$, mais pour Lagrange il ne s'agit plus de permutation des signes, mais il s'agit de permutation des racines carrés de l'unité, donc dans l'ombre de tout ça on peut écrire $\sqrt{1} = \pm$ .

Passons nous à l'équation de troisième degré, telle que :

**(1.10) :** $$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$$

Soit, $U_3 = \{j, j^2, j^3 = 1\}$ le groupe des racines cubique de l'unité, il est important de noter que φ(3)=2, donc l'élément primitive $j$ peut prend la valeur de l'un des deux zéros de l'équation,

$$j^2 + j + 1 = 0$$

Soient $s_1$, $s_2$ et $s_3$ les trois solutions de l'équation **(1.10)** on a,

**(1.11)** : $$a_1 = s_1 + s_2 + s_3$$
$$a_2 = s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3$$
$$a_3 = s_1s_2s_3$$

On fait comme pour la seconde degré, on jouons avec les signes, sauf que cette fois on a, le signe (+) c'est $1=j^3$, alors que le signe (**-**) est solution de l'équation $j^2 + j + 1 = 0$, donc tantôt c'est $j$, tantôt c'est $j^2$.

Ainsi on a,

**(1.12) :** $$y_0 = s_1 + s_2 + s_3 = a_1$$
$$y_1 = s_1 + js_2 + j^2s_3$$
$$y_2 = s_1 + j^2s_2 + js_3$$

Ou d'une autre manière,

**(1.13) :** $$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = A \cdot S$$

Donc,

**(1.14) :** $$S = A^{-1}Y = \frac{1}{3}\overline{A} \cdot Y$$

Et on a,

**(1.15) :** $$y_1 + y_2 = 2s_1 - (s_2 + s_3)$$
$$y_1y_2 = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - (s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3)$$

La fonction $y_1y_2$ est symétrique, donc on peut l'exprimer en terme de $a_1$, $a_2$ et $a_3$, et on a,

**(1.16) :** $$y_1y_2 = a_1^2 - 3a_2$$

La fonction $y_1 + y_2$ n'est pas symétrique, mais la fonction $y_1^3 + y_2^3$ est bien symétrique.

**(1.17) :** $$y_1^3 + y_2^3 = 2(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) + 21s_1s_2s_3 - 3(s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3)(s_1 + s_2 + s_3)$$
$$y_1^3 + y_2^3 = 2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3$$

Finalement on a un système résoluble, tel que :

**(1.18) :**
$$\begin{cases} y_0 = a_1 \\ y_1^3 y_2^3 = \left(a_1^2 - 3a_2\right)^3 \\ y_1^3 + y_2^3 = 2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3 \end{cases}$$

Car $y_1^3$ et $y_2^3$ sont les deux solutions de l'équation de seconde degré suivante :

**(1.19) :**
$$X^2 - \left(a_1^2 - 3a_2\right)^3 X + \left(2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3\right) = 0$$

Voilà l'idée géniale de Lagrange est d'introduire les racines nièmes de l'unité comme une sorte des signes, et de jouer aux permutations de ces signes.

Les signes de Lagrange sont tout simplement les racines nièmes de l'unité, et si je préfère cette notion de signe au lieu des racines c'est pour deux raisons, la première c'est parce que Lagrange est le premier a compris que les deux expressions suivant $a+b$ et $a-b$ qui décrivent l'addition et la soustraction, sont tout simplement les solutions de l'expression $a+\sqrt{1}b$, la seconde c'est à cause de ma stupidité, je vais expliqué après.

La permutation des signes de Lagrange peut s'appliquer aux équations à plusieurs inconnus, l'exemple suivant est vraiment le plus beau de tous ce qui j'ai fait dans ma vie, mais avant tout, on aura besoin d'une toute petite notation.

**<u>Notation (1.20) :</u>**
La notation suivante :

$$\mathbb{S}\left\| E(x_1, x_2, ..[]..,x_n) = 0 \right\|\mathbb{S}$$

Est dite, la solubilité de l'équation $E(x_1, x_2, ..[]..,x_n) = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{S}$.

*Par exemple :* $\mathbb{N}^*\left\|x^2 + y^2 = z^2\right\|\mathbb{N}^*$ *est vraie, alors que* $\mathbb{N}^*\left\|x^3 + y^3 = z^3\right\|\mathbb{N}^*$ *est faux.*

[]

Tout le monde sait que l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ admet des solutions entières non nulles, par exemple on a : $9^2 + 12^2 = 15^2$.

Faisons une permutation de signe, là aussi l'équation $x^2 - y^2 = z^2$ admet des solutions entières non nulles, par exemple on a : $13^2 - 12^2 = 5^2$.

Les deux équations forment un système soluble par entiers non nuls, que j'appels système de permutation d'ordre 2, tel que :

**(1.21) :**
$$Sp_2 := \begin{cases} x_1^2 + y^2 = z_1^2 \\ x_2^2 - y^2 = z_2^2 \end{cases}$$

Ce système est soluble dans $\mathbb{N}^*$ par exemple, on a :

$$\begin{cases} 9^2 + 12^2 = 15^2 \\ 13^2 - 12^2 = 5^2 \end{cases}$$

Pour le cas général, soit $U_n = \left\{1, j, j^2 \quad ..[].. \quad j^{n-1}\right\}$ le groupe des racines nième de l'unité, avec $j$ est l'un de ses éléments primitifs, donc on a :

**(1.22) :** $$1 + j + j^2 + \ ..[].. \ + j^{n-1} = 0$$

Le système de permutation d'ordre $n$ s'écrie comme suivant :

**(1.23) :** $$Sp_n := \begin{cases} x_1^n + y^n = z_1^n \\ x_2^n + jy^n = z_2^n \\ x_3^n + j^2 y^n = z_3^n \\ ..[].. \\ x_n^n + j^{n-1} y^n = z_n^n \end{cases}$$

Ce qui se passe dans ce système, c'est exactement ce qui se passe dans l'équation de Fermat, des solutions non nuls pour $n \leq 2$, et seulement pour $n \leq 2$, c'est comme une sorte d'un morphisme entre l'ensemble des solutions de $Sp_n$ et l'ensemble des solutions de l'équation de Fermat, c'est parce que les éléments du groupe $U_n$ ne peuvent pas être tous des rationnels que si $n \leq 2$.

Aujourd'hui le grand théorème de Fermat est une certitude mathématique puisque il est démontré par le Sir Andrew Wiles en 1995, alors d'une manière banale je peux énoncer l'équivalence suivant :

**(1.24) :** $$\mathbb{N}^* \left\| Sp_n \right\| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^n + v^n = w^n \right\| \mathbb{N}^*$$

Le problème de cette équivalence c'est la décidabilité, cela veut dire, *existe elle une preuve pour décider cet équivalence ?*

Pour le savoir il suffit de se procéder à la démonstration, mon premier exemple c'était le cas $n=3$.

En effet, le premier sens est évident, car l'équation de Fermat est membre de $Sp_3$, il suffit de poser $x_1 = u,\ y = v\ \&\ z_1 = w$.
Pour le sens inverse, on suppose que l'équation de Fermat s'obtient par des entiers non nuls, une simple addition nous permet d'écrire:

**(1.25) :** $$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$$

Car vu, $j^2 + j + 1 = 0$

Soit $x_1^3 + y^3 = z_1^3$ une solution de l'équation de Fermat qu'on a supposé qu'elle existe, alors on a,

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^3 + y^3 + z_2^3 + z_3^3$$

Donc,

**(1.26) :** $$x_2^3 + x_3^3 = y^3 + z_2^3 + z_3^3$$

Ce qu'est bien soluble, par exemple on a,

$$13^3 + 14^3 = 1^3 + 3^3 + 17^3$$

Elle admet même une infinité des solutions, par exemple on a cette classe des solutions :

**(1.27) :** $$(2N+1)^3 + (2N+2)^3 = \left(2N+1+\sqrt{N+1}\right)^3 + \left(2N+1-\sqrt{N+1}\right)^3 + 1^3$$

Où il suffit de choisir *N* d'une telle manière que *N*+1 soit un carré.
Ce qui preuve que l'on a,

**(1.28) :** $$\mathbb{N}^* \| Sp_3 \| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^3 + v^3 = w^3 \right\| \mathbb{N}^*$$

$Sp_3$ ne peut plus être soluble dans $\mathbb{N}^*$ à cause de la présence du nombre $j = \exp(2\pi i / 3)$ qu'est un nombre complexe non réel, donc non rationnel, en vertu $\mathbb{N}^* \left\| u^3 + v^3 = w^3 \right\| \mathbb{N}^*$ est faux.

*C.Q.F.D sauf erreur.*

Pour le cas général le même raisonnement conduit à la résolvante suivante :

**(1.29) :** $$x_2^n + x_3^n + ..[]..+ x_n^n = y^n + z_2^n + z_3^n + ..[]..+ z_n^n$$

Pour $n = 4$ on a les solutions suivantes :

$$12^4 + 13^4 + 21^4 = 1^4 + 4^4 + 17^4 + 20^4$$
$$3^4 + 21^4 + 23^4 = 1^4 + 4^4 + 17^4 + 25^4$$
$$12^4 + 23^4 + 28^4 = 1^4 + 4^4 + 18^4 + 30^4$$
$$7^4 + 11^4 + 13^4 = 1^4 + 5^4 + 9^4 + 14^4$$
$$..[]..$$

Pour $n = 5$ on a aussi :

$$5^5 + 8^5 + 13^5 + 14^5 = 1^5 + 6^5 + 7^5 + 11^5 + 15^5$$
$$12^5 + 14^5 + 22^5 + 27^5 = 1^5 + 5^5 + 21^5 + 23^5 + 25^5$$
$$10^5 + 12^5 + 22^5 + 23^5 = 1^5 + 7^5 + 15^5 + 20^5 + 24^5$$
$$3^5 + 9^5 + 22^5 + 25^5 = 1^5 + 8^5 + 9^5 + 14^5 + 27^5$$
$$..[]..$$

Pour $n = 6$ on a :

$$2^6 + 5^6 + 8^6 + 9^6 + 26^6 = 1^6 + 6^6 + 14^6 + 19^6 + 20^6 + 24^6$$
$$2^6 + 5^6 + 20^6 + 26^6 + 27^6 = 1^6 + 6^6 + 8^6 + 18^6 + 25^6 + 28^6$$
$$2^6 + 8^6 + 9^6 + 17^6 + 19^6 = 1^6 + 6^6 + 7^6 + 12^6 + 13^6 + 20^6$$
$$2^6 + 9^6 + 11^6 + 22^6 + 25^6 = 1^6 + 3^6 + 7^6 + 16^6 + 18^6 + 26^6$$
$$..[]..$$

Pour $n = 7$ on a :

$$3^7 + 6^7 + 16^7 + 18^7 + 22^7 + 28^7 = 1^7 + 2^7 + 7^7 + 11^7 + 21^7 + 24^7 + 27^7$$
$$..[]..$$

Dans tous ces exemples que j'ai donné il y a un $1^n$, c'est parce que ces valeurs sont calculées numériquement par ordinateur, et pour gagner le temps, j'ai fixé l'une des variable à l'unité, mais le plus important c'est que ces valeurs ne sont plus triviaux.
Pour $n$ = 7 je n'est trouver que cette solution, où il ma fallait plus de deux jours de recherche, mais ça reste quand même une très belle solution, car non seulement on a,

$$3^7+6^7+16^7+18^7+22^7+28^7=1^7+2^7+7^7+11^7+21^7+24^7+27^7$$

Mais on a aussi,

$$3+6+16+18+22+28=1+2+7+11+21+24+27$$

S'il m'a fallais plus de deux jours pour trouver la première solution de $n$ = 7, alors je peux imaginer qu'il me faut plus de deux mois pour trouver la première solution du cas $n$ = 13, parce que non seulement à cause de l'augmentation des nombres des variables, mais aussi à cause d'une notion que j'appelle les diviseurs de Fermat.
Si $n$ est paire par exemple $n$=100, alors parmi deux candidats il y a au plus une possible, pour $n$=7 on a parmi 42 candidats il y a au plus une possible, alors pour $n$=13 on a parmi 2730 candidats il y a au plus une possible.
Un diviseur de Fermat est le plus grand commun diviseur du polynôme $\left(x^n-x\right)$, par exemple, si $n$=13 alors pour tout entier $x$, le nombre 2730 divise $\left(x^n-x\right)$.
Pour $n\geq 2$ la formule de ces diviseurs est donnée par:

**(1.30) :**

$$Z_n=\prod_{\substack{p,\,premier\\ p-1|n-1}} p$$

Et on a,

**(1.31) :**

$$x^n\equiv x\ Modulo(Z_n)$$

On trouve ces diviseurs dans les célèbres nombres de Bernoulli, avec un tout petit décalage d'indice, tel que :

**(1.32) :**

$$B_n=\frac{Num_n}{Dén_n}=\frac{Num_n}{Z_{n+1}}$$

Pour plus de détail voir [2].
Le théorème suivant justifier ça :

**Théorème (1.33) :**

Soit, $(E):=\sum_{j=1}^{t}a_jx_j^n=0\ \ a_j\in\mathbb{Z}$, $n$ et $t$ quelconques, et soit $\beta=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j$ .

Si ($E$) est soluble dans $\mathbb{Z}$, alors $\beta\equiv 0\ \ Modulo(Z_n)$.

Preuve :

En effet, d'après **(1.31)** on a : $\sum_{j=1}^{t}a_jx_j^n-\sum_{j=1}^{t}a_jx_j\equiv 0\ \ Modulo(Z_n)$, comme $\sum_{j=1}^{t}a_jx_j^n=0$ donc $-\beta\equiv-\sum_{j=1}^{t}a_jx_j\equiv 0\ \ Modulo(Z_n)$.

C.Q.F.D
[]

Pour l'infinité des solutions, je pense que dans ce genre d'équation, on peut à partir d'une solution particulière avoir une infinité des solutions, ce n'est pas vraiment facile à démontrer, mais au moins je peux vous donner un exemple.

Soit par exemple $1^3+5^3+9^3 = 7^3+8^3$ l'une des solutions de l'équation $x_1^3+x_2^3+x_3^3=z_1^3+z_2^3$, on pose :

$$x_1=5\ ; x_2=9\ ; x_3=1\ ; z_1=7\ ; z_2=8$$

Et on a,

$$z_1=x_1+2 \;\&\; z_2=x_2-1$$

Donc,

$$z_1^3=x_1^3+6x_1^2+12x_1+8$$

$$z_2^3=x_2^3-3x_2^2+3x_2-1$$

D'où l'équation de départ devient,

$$2x_1(x_1+2)-x_2(x_2-1)+2=0$$

On pose, $z_1=7k$ et $z_2=8k$, il est claire que pour $k$=1 on obtient la solution de départ, mais lorsque je remplace $x_1$ et $x_2$ par ces valeurs en fonction de $k$, j'obtiens une équation de second degré, telle que :

$$17k^2-18k+1=0$$

Dont les solutions sont $k_1=1$ et $k_2=\dfrac{1}{17}$

Pour $k$=$k_2$ on a cette seconde solution, $1^3-\left(\frac{27}{17}\right)^3+\left(\frac{25}{17}\right)^3=\left(\frac{7}{17}\right)^3+\left(\frac{8}{17}\right)^3$ ou bien $17^3+25^3=7^3+8^3+27^3$.

Et si on pose, $z_1=7k$ et $z_2=17k-9$ alors de la même manière j'obtiens l'équation suivante :

$$191k^2-261k+70=0$$

Dont les solutions sont $k_1=1$ et $k_2=\dfrac{70}{191}$

Pour $k$=$k_2$ on a cette troisième solution $108^3+529^3+191^3=490^3+338^3$.

Et ainsi de suite.

[]

Voilà, ça m'apparais correcte, mais la vérité c'est que mois je suis absolument rien du tout, devant ces 3 cycles et demi, donc l'erreur est bien entendu, mais au moins ça me laisse penser que la résolvante suivante,

**(1.34) :** $$S_n := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^n = \sum_{j=1}^{n-1} z_j^n\right)$$

Admet des solutions entières non nulles pour tout entier $n \geq 2$.

Et vous, que pensez vous sur la solubilité de $S_n$ ?

Au début j'ai pensé que cette résolvante est toujours soluble, car sinon elle sera comme un contre exemple à l'équivalence **(1.24)** à savoir,

$$\mathbb{N}^* \left\| Sp_n \right\| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^n+v^n=w^n \right\| \mathbb{N}^*$$

Mais j'avais tort, par exemple, pour $n$=6 je peux réduire le système de permutation de la manière suivante :

**(1.35) :**
$$Sp_6^{'} = \begin{cases} x_1^6 + y^6 = z_1^6 \\ x_2^6 + jy^6 = z_2^6 \\ x_3^6 + j^2 y^6 = z_3^6 \end{cases}$$

Avec $j^2+j+1=0$
De la même manière je peux poser l'équivalence banale suivant :

**(1.36) :**
$$\mathbb{N}^* \left\| Sp_6^{'} \right\| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^6 + v^6 = w^6 \right\| \mathbb{N}^*$$

Alors ça nous conduit à la résolvante suivante :

**(1.37) :**
$$x_2^6 + x_3^6 = y^6 + z_2^6 + z_3^6$$

Le problème de cette résolvante c'est qu'elle risque d'être soluble dans ℕ*, au fond de moi je sais que **(1.37)** n'est pas soluble, mais je ne peux pas donner une preuve correcte, j'ai des idées liées aux permutations de Galois, mais rien n'est sûr.
En vertu l'équivalence **(1.36)** est banalement vraie, mais il est indécidable, cela veut dire tout simplement que les membres de cette équivalence sont absolument indépendants.
[]

Le grand théorème de Fermat est vraiment un grand théorème, sur tout pour moi c'est une grande école, mais son secret est tout petit, tel que :

***Proposition A :***

***« Les signes de Lagrange ne peuvent pas êtres tous des rationnels que si n≤2. »***

Mais il y a aussi une autre proposition que tout le monde la connais, telle que :
***Proposition B :***
***« Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ne peut être abélienne que si n≤2. »***

Et là aussi d'une manière banale je peux poser l'équivalence suivant :

**(1.38) :** **A si et seulement si B.**

La question qui se pose est, est ce que cette équivalence est décidable ?

# Chapitre 2
# Sur la possibilité d'un raisonnement de Galois dans le grand théorème de Fermat.

Ce n'est pas vraiment aisé d'imaginer un raisonnement de Galois dans le grand théorème de Fermat, puisque l'équation de Fermat est résoluble par radicaux, voir même les plus simple radicaux, tels que, $z = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ .
Et pourtant je pense qu'il existe, car il ne s'agit plus de la résolution par radicaux, mais il s'agit certainement d'une méthode algébrique, si on reprend le travail d'Abel, alors cela nous conduit à énoncer son théorème de deux manières différentes, telles que,

Le premier énoncé :

***Il n'existe pas de méthode algébrique pour résoudre une équation de degré n≥5.***

Le second énoncé :

***Une équation de degré n≥5 n'est pas résoluble par radicaux.***

Il est clair que le second énoncé est une conséquence immédiate du premier énoncé, donc depuis le début il s'agit d'une méthode.
Pour les équations polynomiales à une inconnue, la méthode conduit ou non à des solutions par radicaux, pour les équations à plusieurs inconnues, la méthode conduit ou non à des solutions par entiers non nuls, donc sur la possibilité de l'existence d'un raisonnement de Galois dans le grand théorème de Fermat, je propose de reprendre les idées de Lagrange avec bien sûr la notion des signes au lieu des racines.

On reprend l'équation du troisième degré, telle que :

**(2.1) :** $$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$$

Comme on a vu, on pose,

**(2.2) :** $$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = A \cdot S$$

Donc,

**(2.3) :** $$S = A^{-1}Y = \frac{1}{3}\overline{A} \cdot Y$$

Lagrange remarqua que le système en $y_1$ et $y_2$ se préserve -à un signe de Lagrange prés- quelque soit la permutation en $s_1$, $s_2$ et $s_3$.
Dans notre exemple, on sait que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ est d'ordre 6, donc les 6 permutations possibles sont :

**(2.4) :** $id = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$, $\gamma^2 = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$, $\tau_1 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$, et $\tau_3 = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$.

Et on a,

**(2.5) :** $\begin{cases}\gamma(y_1) = j^2 y_1\\ \gamma(y_2) = jy_2\end{cases}$, $\begin{cases}\gamma^2(y_1) = jy_1\\ \gamma^2(y_2) = j^2 y_2\end{cases}$, $\begin{cases}\tau_1(y_1) = y_2\\ \tau_1(y_2) = y_1\end{cases}$, $\begin{cases}\tau_2(y_1) = j^2 y_2\\ \tau_2(y_2) = jy_1\end{cases}$ et $\begin{cases}\tau_3(y_1) = jy_2\\ \tau_3(y_2) = j^2 y_1\end{cases}$.

Pour les degrés supérieurs, on sait que l'ordre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ vaut à $n!$ , donc il y trop de permutation à vérifier, pour résoudre ce problème, il suffit de choisir un groupe des permutation qui engendre $\mathfrak{S}_n$, plusieurs choix sont possibles le plus simple et les $n-1$ transpositions (12), (23), (34) ..[].. $(n-1, n)$.
Lorsque ces permutations sont vérifiées alors $y_1, y_2, y_3$ ..[].. $y_n$ font un système en résolvantes de Lagrange.

L'équation du 4[ième] degré est tellement importante, car c'est comme un point d'inflexion d'une courbe, c'est là où les choses commencent a dévier, soit,

**(2.6) :**
$$x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_3x + a_4 = 0$$

Par analogie à **(2.2)** on pose,

**(2.7) :**
$$\begin{aligned} y_0 &= s_1 + s_2 + s_3 + s_4\\ y_1 &= s_1 + is_2 - s_3 - is_4\\ y_2 &= s_1 - s_2 + s_3 - s_4\\ y_3 &= s_1 - is_2 - s_3 + is_4\end{aligned}$$

On appliquant la transposition $\sigma = (12)$ au trois fonctions $y_1$, $y_2$ et $y_3$, tels que :
$$\sigma(y_1) = s_2 + is_1 - s_3 - is_4 = i(s_1 - is_2 + is_3 - s_4)$$
$$\sigma(y_2) = s_2 - s_1 + s_3 - s_4 = -(s_1 - s_2 - s_3 + s_4)$$
$$\sigma(y_3) = s_2 - is_1 - s_3 + is_4 = -i(s_1 + is_2 - is_3 - s_4)$$
On remarque que le système n'est pas préservé -à un signe de Lagrange près-, en vertu, $y_1$, $y_2$ et $y_3$ ne peuvent plus êtres des résolvantes.
Pour résoudre ce problème on joue à une seconde permutation des signes, « *ou peut être une réduction des signes !* », telle que $i$ sera remplacé par 1, « *ou réduit à 1* », et on a de nouveau,

**(2.8) :**
$$Y = \begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{pmatrix} = A\cdot S$$

**(2.9) :**
$$S = \frac{1}{4}A\cdot Y$$

Les changements des variables obtenus par les transpositions (12), (23) et (34) montrent que le système en $y_1, y_2$ et $y_3$ est toujours préservé - à un signe de Lagrange prés -, donc $y_1, y_2$ et $y_3$ sont certainement des résolvantes, et on a,

**(2.10) :**

$$\begin{cases} y_0 = a_1 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3a_1^2 - 8a_2 \\ y_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2 = 3a_1^4 + 16a_2^2 - 16a_1^2 a_2 + 16a_1 a_3 - 64a_4 \\ y_1^2 y_2^2 y_3^2 = \left(a_1^3 - 4a_1 a_2 + 8a_3\right)^2 \end{cases}$$

Pour l'équation de $5^{\text{ème}}$ degré, on pose $\omega = \exp(2\pi i/5)$ et par analogie à **(2.2)** on pose,

**(2.11) :**

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} = A \cdot S$$

**(2.12) :**

$$S = \frac{1}{5} \overline{A} \cdot Y$$

On permutant $s_1$ par $s_2$ on remarque que le système en $y_1, y_2, y_3$ et $y_4$ ne se préserve pas -à un signe de Lagrange prés-, et comme le degré est un nombre premier, alors une réduction des signes de Lagrange n'est plus possible, ceci justifie un peu l'impossibilité de la résolution par radicaux l'équation générale de $5^{\text{ème}}$ degré, et si un peu, c'est parce que la matrice $A$ n'est pas l'unique choix.

Donc comme résumé de tous ça, c'est que la méthode est liée à la recherche des résolvantes de Lagrange, s'elles n'existent pas cela veut dire que l'équation en question n'est pas résoluble par radicaux, mais s'elles existent alors probablement l'équation en question est résoluble par radicaux, et si probablement c'est parce que on parle de degré $n$ quelconque, et l'existence de ces résolvantes assure tout simplement la réduction de degré $n$ à $n-1$.

Pour les degrés supérieurs, la résolution par radicaux est impossible, car dans les meilleurs cas, les résolvantes conduit à l'équation de $5^{\text{ème}}$ degré qui n'est pas résoluble.

### *La réduction des signes de Lagrange*

La réductions des signes de Lagrange n'est possible que si le degré $n$ est composé, l'exemple le plus simple est les résolvantes de l'équation du $4^{\text{ième}}$ degré, voir **(2.8)**, mais sauf erreur je pense que cette réduction n'est possible que pour les signes d'ordre 4, donc seule $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ est réductible à $U_2 = \{1, -1\}$.

Prenons par exemple l'équation du $6^{\text{ième}}$ degré, telle que,

**(2.13) :**

$$x^6 - a_1 x^5 + a_2 x^4 - a_3 x^3 + a_4 x^2 - a_5 x + a_6 = 0$$

Par analogie à **(2.2)** on pose,

**(2.14) :**
$$Y=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&-j^2&j&-1&j^2&-j\\1&j&j^2&1&j&j^2\\1&-1&1&-1&1&-1\\1&j^2&j&1&j^2&j\\1&-j&j^2&-1&j&-j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\\s_5\\s_6\end{pmatrix}=AS$$

Avec $j^2+j+1=0$

**(2.15) :**
$$S=\frac{1}{6}\overline{A}\cdot Y$$

Une réduction des signes de Lagrange veut dire remplacement de $-1$ par 1, de $-j$ par $j$ et de $-j^2$ par $j^2$, ce qui donne,

**(2.16) :**
$$Y=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&j^2&j&1&j^2&j\\1&j&j^2&1&j&j^2\\1&1&1&1&1&1\\1&j^2&j&1&j^2&j\\1&j&j^2&1&j&j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\\s_5\\s_6\end{pmatrix}=AS$$

On permutant $s_1$ par $s_2$ on remarque que le système en $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ et $y_5$ ne se préserve pas - à un signe de Lagrange prés -, donc les $y_i$ ne font pas un système en résolvantes de Lagrange, en vertu l'équation **(2.13)** ne peut jamais être réduit à une équation de degré inférieure.

Pour l'équation de Fermat, et pour $n$=6, lorsque on réduit le système de permutation de la manière suivante :

**(2.17) :**
$$Sp_6^{'}=\begin{cases}x_1^6+y^6=z_1^6\\x_2^6+jy^6=z_2^6\\x_3^6+j^2y^6=z_3^6\end{cases}$$

Avec $j^2+j+1=0$

Cela nous conduit à l'équivalence banale suivant :

**(2.18) :**
$$\mathbb{N}^*\left\|Sp_6^{'}\right\|\mathbb{N}^*\Leftrightarrow\mathbb{N}^*\left\|u^6+v^6=w^6\right\|\mathbb{N}^*$$

Alors ça nous conduit à la résolvante suivante :

**(2.19) :**
$$x_2^6+x_3^6=y^6+z_2^6+z_3^6$$

Et comme j'ai déjà dit que cette résolvante risque d'être soluble dans ℕ*, c'est parce que on ne peut pas réduit $U_6$ à $U_3$.

Mais ça à bien fonctionner avec l'équation du 4ème degré, voyons si ça marche avec l'équation de Fermat pour $n = 4$.

Pour ça le système $Sp_4$ devient $Sp_4^{'}$, tel que,

**(2.20) :**
$$Sp_4^{'} := \begin{cases} x_1^4 + y^4 = z_1^4 \\ x_2^4 - y^4 = z_2^4 \end{cases}$$

Et on a,

**(2.21) :**
$$\mathbb{N}^* \left\| Sp_4^{'} \right\| \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathbb{N}^* \left\| u^4 + v^4 = w^4 \right\| \mathbb{N}^*$$

Cet équivalence est trivial, car il est de type « $A \Leftrightarrow A$ », mais ça reste un équivalence légitime, et donc décidable.
[]

***Le degré de Galois & le degré de Fermat***

Si en considère le nombre 5 comme le degré de Galois, et le nombre 3 comme le degré de Fermat, alors leur différence qui vaut à 2 ne peut être que le nombre des radicaux de second degré, et certainement on a le théorème suivant,

**Théorème (2.22) :**

Pour deux nombres complexes quelconques $a$ et $b$ on a, $a$ et $b$ sont des radicaux de seconde degré si et seulement si pour tout entier $n$, le nombre $a^n+b^n$ est rationnel.

La preuve est aisée.

Dans l'équation $x^n + y^n = z^n$ on pose $x=z-a$ et $y=z-b$, d'évidence si cette équation admet des solutions rationnels non triviales, alors les deux nombres $a$ et $b$ sont des rationnels non nuls, et on a,

**(2.23) :**
$$\begin{gathered} (z-a)^n + (z-b)^n - z^n = 0 \\ z^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (a^j + b^j) z^{n-j} = 0 \end{gathered}$$

Et en terme des fonctions symétriques élémentaires, on a,

**(2.24) :**
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + ..[].. + z_n = \binom{n}{1}(a+b) \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + ..[].. + z_{n-1} z_n = \binom{n}{2}(a^2+b^2) \\ ..[].. \\ z_1 z_2 ..[].. z_n = \binom{n}{n}(a^n + b^n) \end{cases}$$

Dans ce système il y a deux membres, le premier est de degré $n$, alors que le seconde est de degré 2, c'est comme lorsque on a deux opérateurs dont le premier donne la racine nième, alors que le second donne la racine carré, on combine les deux, ce qui donne $\sqrt[n+2]{\ }$.

# Références

[1] Introduction à la théorie de Galois et la géométrie algébrique, Jan Nekovář.
[2] Sur les diviseurs de Fermat, Méhdi Pascal. https://vixra.org/abs/2011.0191

# *Couleur d'azur*

*Le bleu d'azur*
*M'emporte*
*Vers le ciel étoilé*

*Où je peux enfin respirer*
*Une pleine liberté*

*Une liberté d'être*
*Et sans borne*

*Elle est belle et pure*
*Entièrement restaurée*

*Elle est comme je suis*
*Resplendissante*

*D'être ainsi aimé*

*Sonia Burelle*

J'ai rencontré cette femme sur le Caramail, l'équivalent de Face Book d'aujourd'hui, c'est une femme qui elle a une passion vers la poésie, pendant notre première rencontre elle me demande de démontrer le grand théorème de Fermat, au début j'ai pensé qu'elle se moque de moi, mais après j'ai compris qu'elle était curieuse, et qu'elle espère une simple démonstration qu'elle puisse comprenne, en tout cas j'ai répandu que c'est impossible pour moi de démontrer ce théorème.
A cette époque j'ai travaillé dans une mine chez CMT, mais je n'étais pas embouché, en 2003 j'ai quitté cette mine, et le chômage m'oblige d'abandonner le Caramail.

Alors j'ai pensé à la demande de mon amie, et je me suis dit pourquoi pas, c'est vrai c'est un grand théorème, mais il a quand même quelques points faibles, premièrement il est déjà démontrer, donc je sais laquelle des voies à suivre, deuxièmement il est vrai pour certains cas est faux pour les autres cas, donc si je trouve les vrais raisons qui font de cette équation vraie pour $n \leq 2$, alors ces même raisons vont m'expliquer pourquoi c'est impossible pour $n \geq 3$.

J'avais rapidement compris que le secret de ce théorème est dans les nombres complexes, il y avait même des moments où j'ai pensé que je l'ai démontré, mais au fur et à mesure je me découvre mes erreurs, jusqu'à cette étrange nuit de 5 août 2005, je me rappels bien, c'était un jeudi, cette nuit j'ai décidé de faire un dernier essai, car le grand théorème devient vraiment une obsession, et parfois j'oublie qu'il me faut travailler pour le pain de la vie, alors j'ai fais une nuit blanche, et tout ce que j'ai fais pendant cette nuit, c'est de regarder ces deux équations qui vaux une même :

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$x^2 = z^2 - y^2$$

Complètement bloqué, je dis, où se cache ce misérable point faible ?

C'est tout ce que j'ai fais pendant toute cette nuit, et jusqu'à même après le levé du soleil du jour suivant, à 8 heur du matin à peu prés, je ressens épuisé, et qu'il me faut dormir, alors j'ai pris cette décision, c'est fini le grand théorème de Fermat, le grand théorème de Fermat n'est plus mon problème, je rentre chez moi et je dort comme un bébé, et je fait même des rêves, mais une obsession reste une obsession, même dans les rêves, c'est dans ce rêve où j'ai constater que ces deux signes plus et moins, ne peuvent êtres que des racines carré de l'unité.

Je ressens une telle joie, une joie qui me réveille, je reprend donc mon crayon, je fais quelques essais, et je trouve ma première solution pour $n$=3, c'est la solution 855, telle que $1^3+5^3+9^3=7^3+8^3$, et de puis, j'ai travailler sur cette résolvante :

$$x_2^n + x_3^n + ..[]..+ x_n^n = y^n + z_2^n + z_3^n + ..[]..+ z_n^n$$

J'ai fais tout ce qu'il faut pour prouver qu'elle est toujours soluble, et en 2007 j'ai arrêté, car même soluble elle n'est plus évidente, sauf pour des cas particuliers.

Ces cas particuliers sont aussi importants, car quand même il s'agit du grand théorème de Fermat, mais j'ai rien publié, c'est parce que j'avais un doute, et ce doute me suis même à ce moment là où je vous écrie ces mots.

Mon raisonnement est type « A si et seulement si B », donc comme tout le monde sait, on suppose que A est vrai, et on démontre que B est vari, et on suppose que B est vrai et on démontre que A est vrai, une fois tout ça est bien vérifié, alors sans souci on peut dire que A si et seulement si B, mais mon souci c'était le fait que B est membre de A.

J'avais oublier parfaitement ce problème, pour tous ces années, jusqu'à dernièrement j'ai remarqué que dans une classe des polynômes, lorsque je remplace le nombre complexe $i$ par l'unité dans ces zéros, presque toute propriété est préservé, je savais qu'il s'agit d'un morphisme, mais de quel nature ? Et comment ? Ça je l'ignore, mais certainement il préserve plusieurs propriétés des fonctions et des polynômes, alors j'ai pensé à la théorie de Galois, car je suis sûr et certain que la réponse est dans cette théorie, le problème c'est que j'ai plus de

50 ans, et que on ne comprend la théorie de Galois qu'à l'age de Galois, sur le net je me suis tombé sur le cours du professeur Jan Nekovar, « *Introduction à la théorie de Galois et La géométrie algébrique* », ce monsieur a fait vraiment un très joli travail, en lisant seulement l'introduction, j'ai compris que mon résultat de cette étrange nuit du 5 août de 2005 est déjà connus depuis Lagrange.

Maintenant je sais qu'il y a un raisonnement de Galois dans le grand théorème de Fermat, mais je ne peux plus le prouver correctement, car je comprends le principe de la correspondance de Galois, mais pas les détails, normalement plus que le nombre des permutations augmente, plus que le groupe symétrique perdre des propriétés, le plus simple exemple est le fait que seuls les groupes symétriques d'ordre $n \leq 2$ qui commutes, un caractère très important dans la résolution des équations comme dans la solubilité des autres.

J'espère que mon raisonnement soit correct, car c'est l'unique moyen pour que mon amie Sonia comprenne le théorème de Fermat, c'est mon amie, et aujourd'hui elle me manque tellement, surtout ce qu'il me manque c'est notre bla bla.

Je suis mohamed elouazzani, mais s'il vous plais appelez moi Méhdi Pascal & Merci.

Cordialement
Méhdi Pascal
MehdiPascal38@Gmail.Com