# UN THÉORÈME FONDAMENTAL CONCERNANT LES ENSEMBLES INFINIS DÉNOMBRABLES

*par*

Nhat-Anh Phan

*One fundamental theorem concerning infinite countable sets*

RÉSUMÉ :

Pour $A$ un ensemble infini dénombrable contenant une infinité d'entiers naturels distincts et $B$ un ensemble infini dénombrable contenant une infinité d'entiers naturels distincts, tels que $\forall n \in A, n \in B$ et $\forall m \in B, m \in A$, nous démontrons qu'il est possible que $A \neq B$ en exposant une infinité de contre-exemples dans lesquels, pour chaque contre-exemple, $A$ et $B$ sont respectivement deux univers de deux espaces de probabilité disposant de probabilités différentes pour des événements similaires. Nous démontrons ainsi que l'axiome d'extensionnalité est faux pour les ensembles infinis dénombrables.

ABSTRACT :

For $A$ an infinite countable set containing infinitely many distinct natural integers and $B$ an infinite countable set containing infinitely many distinct natural integers such that $\forall n \in A, n \in B$ and $\forall m \in B, m \in A$, we demonstrate that it is possible that $A \neq B$ by exposing infinitely many counter-examples in which, for each counter-exemple, $A$ and $B$ are respectively two sample spaces of two probability spaces having different probabilities for similar events. We thus prove that the axiom of extensionality is false for infinite countable sets.

MSC2020 : 03E30, 03E65, 05A05, 60C05 — Mots clés : axiome d'extensionnalité, ensemble infini dénombrable, bijection, permutation, espace de probabilité, univers.

MSC2020 : 03E30, 03E65, 05A05, 60C05 — Key words : axiom of extensionality, infinite countable set, bijection, permutation, probability space, sample space.

Dans la théorie élémentaire des ensembles, il est classiquement admis – et systématiquement enseigné – que si $A$, un ensemble infini dénombrable donné, et $B$, un ensemble infini dénombrable donné, tels que $\forall n \in A, n \in B$ et $\forall m \in B, m \in A$ alors nécessairement $A = B$ en ce que $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \cap (B \subseteq A) \Leftrightarrow (\forall n \in A, n \in B) \cap (\forall n \in B, n \in A)$ (soit l'axiome d'extensionnalité).

Dans cette article nous démontrons que cela n'est pas nécessairement le cas en exposant une infinité de contre-exemples dans lesquels, pour chaque contre-exemple, $A$ est un ensemble définit comme suit $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{n_i\}$, tel que $\forall i \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}$ et $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, $i \neq i'$, $n_i \neq n_{i'}$ et $B$ est un ensemble définit comme suit $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{m_i\}$, tel que $\forall i \in \mathbb{N}, m_i \in \mathbb{N}$ et $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, $i \neq i'$, $m_i \neq m_{i'}$. En effet, en incorporant pour chaque contre-exemple exposé $A$ et $B$ dans deux espaces de probabilité ayant respectivement $A$ et $B$ comme univers, nous montrons que les probabilités d'événements similaires diffèrent d'un espace de probabilité à l'autre et conséquemment que $A \neq B$ bien que $\forall n \in A, n \in B$ et $\forall m \in B, m \in A$.

***Lemme 1.*** — *Si nous considérons une infinitité d'espaces de probabilité définis par :* $\forall i \in \mathbb{N}$, $\langle \Omega_i = \omega_i \cup \overline{\omega_i}, \mathcal{F}_i = \{\emptyset, \omega_i, \overline{\omega_i}, \Omega_i\}, P_i : \mathcal{F}_i \to [0,1]\rangle$, *avec* $P_i(\omega_i) = a, a \in [0,1]$, $P_i(\overline{\omega_i}) = 1 - a$, $\omega_i$ *et* $\overline{\omega_i}$ *étant deux ensembles non vides dénombrables tandis que l'un ou les deux pouvant être possiblement infini, est l'espace de probabilité uniquement indexé par* $i \in \mathbb{N}$.

*Si* $\Omega_U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ *et* $\forall i, i' \in \mathbb{N}, i \neq i', \Omega_i \cap \Omega_{i'} = \emptyset$ *et* $\forall i \in \mathbb{N}$, $P_i(\omega_i) = a$, *alors sur l'espace de probabilité* $\langle \Omega_U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}, \mathcal{F}_U = \{\emptyset, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}, \Omega_U\}, P_U : \mathcal{F}_U \to [0,1]\rangle$ *nous avons :*

$$P_U(\textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i) = P_i(\omega_i) = a$$

***Preuve***

Soit $t \in \Omega_U$ un résultat quelconque de $\Omega_U$ alors par définition : $t \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i \Leftrightarrow \exists$ un unique $i' \in \mathbb{N}$ tel que $t \in \omega_{i'}$.

C'est pour dire que pour un résultat donné $t \in \Omega_U$, l'événement $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i \in \mathcal{F}_U$ n'a eu lieu que *ssi* pour ce même résultat $t \in \Omega_U$, $\exists$ un unique $i' \in \mathbb{N}$ tel que l'événement $\omega_{i'} \in \mathcal{F}_{i'}$ a eu lieu. Etant donné que $\forall i \in \mathbb{N}, P_i(\omega_i) = a$, il vient que $P_U(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i) = P_{i'}(\omega_{i'}) = a$.

Par suite en considérant l'événement complémentaire de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i \in \mathcal{F}_U$ nous avons : $P_U(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}) = P_{i'}(\overline{\omega_{i'}}) = 1 - a$ et $P_U(\Omega_U) = P_U(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \omega_i) + P_U(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\omega_i}) = 1$.

***Lemme 2.*** — *Pour un entier naturel quelconque* $n$ *tiré au hasard dans* $\mathbb{N}$, *il est équiprobable que soit* $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ *ou soit* $n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. *C'est pour dire qu'en considérant l'espace de probabilité* $\langle \Omega_N = \mathbb{N}, \mathcal{F}_N = \{\emptyset, \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}, \{2k : k \in \mathbb{N}\}, \Omega_N\}, P_N : \mathcal{F}_N \to [0,1]\rangle$, *alors :*

$$P_N(\{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}) = P_N(\{2k : k \in \mathbb{N}\}) = \tfrac{1}{2}.$$

***Preuve***

Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans $\mathbb{N}$ pour noter comme résultat si $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ou $n \in$

$\{2k : k \in \mathbb{N}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est : $\langle \Omega_N = \mathbb{N}, \mathcal{F}_N = \{\emptyset, \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}, \{2k : k \in \mathbb{N}\}, \Omega_N\}, P_N : \mathcal{F}_N \to [0,1]\rangle$.

$\forall m \in \mathbb{N}$ considérons désormais l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans l'ensemble $\{2m, 2m+1\}$ pour noter comme résultat si $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ou $n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est : $\langle \Omega_m = \{2m, 2m+1\}, \mathcal{F}_m = \{\emptyset, \{2m\}, \{2m+1\}, \Omega_m\}, P_m : \mathcal{F}_m \to [0,1]\rangle$. Etant donné que ***l'ensemble {2m,2m+1} ne possède que 2 éléments qui ont la même possibilité d'être tirés***, il est dès lors évident que tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans l'ensemble $\{2m, 2m+1\}$ alors : $P_m(\{2m\}) = P_m(\{2m+1\}) = \frac{1}{2}$ et $P_m(\Omega_m) = P_m(\{2m\} \cup \{2m+1\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

En notant que $\mathbb{N} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m$ et que $\forall m, m' \in \mathbb{N}, m \neq m', \Omega_m \cap \Omega_{m'} = \emptyset$ et que $\forall m \in \mathbb{N}$, $P_m(\{2m+1\}) = \frac{1}{2}$, en appliquant le **Lemme 1** nous avons : $P_N(\{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}) = P_m(\{2m+1\}) = \frac{1}{2}$, $P_N(\{2k : k \in \mathbb{N}\}) = P_m(\{2m\}) = \frac{1}{2}$ et $P_N(\Omega_N) = P_N(\{2k+1 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

***Lemme 3.*** — *Soit $A$ un ensemble infini dénombrable donné contenant une infinité d'entiers naturels distincts. Dit autrement : $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{n_i\}$, tel que $\forall i \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}$ et $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, $i \neq i'$, $n_i \neq n_{i'}$.*

*De même soit $B$ un ensemble infini dénombrable donné contenant une infinité d'entiers naturels distincts. Dit autrement : $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{m_i\}$, tel que $\forall i \in \mathbb{N}, m_i \in \mathbb{N}$ et $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, $i \neq i'$, $m_i \neq m_{i'}$.*

*En considérant l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ et l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, et en supposant de plus que $\exists a \in [0,1]$, $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = a$ et que $\exists b \in [0,1]$, $P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = b$, il vient que :*

$$\text{Si } P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \text{ alors } A \neq B.$$

*Dit autrement :*

$$P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \Rightarrow A \neq B.$$

***Preuve***

Par définition nous avons :

$$\begin{aligned} & A = B \\ \Rightarrow & \langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \\ & \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle = \langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \\ & \{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle \\ \Rightarrow & P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \ \textbf{(I)} \end{aligned}$$

Dit autrement : si $A = B$ alors par définition l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ est égale à l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, ce qui implique dès lors que $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$.

Effectivement : si $A = B$ alors en substituant symboliquement c-à-d en remplaçant la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" nous obtenons immédiatement $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$.

En prenant la contraposée de **(I)** :

$$\begin{aligned}
&\neg(P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}))\\
\Rightarrow\ &\neg(\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\},\\
&\Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle = \langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\},\\
&\{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle)\\
\Rightarrow\ &\neg(A = B)
\end{aligned}$$

Dit autrement : si $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ n'est pas égale à $P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ alors par définition l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ n'est pas égale à l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, ce qui implique dès lors que $A \neq B$. Conséquemment le **Lemme 3** est établit.

Effectivement : sachant que $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ si $A = B$ alors en substituant symboliquement c-à-d en remplaçant la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" nous obtenons immédiatement $P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$. Ce qui est une contradiction. Dans la mesure où substituer symboliquement c-à-d remplacer la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" implique une contradiction, il vient que nécessairement $A \neq B$.

***Théorème 1.*** — *Soient $A$ et $B$ deux ensembles infinis dénombrables donnés tels que $(\forall x \in A, x \in B) \cap (\forall x \in B, x \in A)$. Il vient que :*

*Il est possible que $A \neq B$*

*Dit autrement :*

$$(\forall x \in A, x \in B) \cap (\forall x \in B, x \in A) \not\Rightarrow A = B$$

***Preuve***

Soit $A$ un ensemble infini dénombrable donné tel que $A = \mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$, $\mathbb{N}$ étant l'ensemble des entiers naturels.

Remarquons que $A = \mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$ est bien *l'ensemble des entiers naturels tel que pour chaque entier pair* $2k, k \in \mathbb{N}$, *correspond un unique entier impair* $2k+1$ en ce que par définition originelle $A = \mathbb{N} = \{0, 0+1, 0+1+1, 0+1+1+1, 0+1+1+1+1, 0+1+1+1+1+1, \ldots\}$ à l'infini $= \{2k, 2k+1 : k = 0\} \cup \{2k, 2k+1 : k = 1\} \cup \{2k, 2k+1 : k = 2\} \cup \ldots$ à l'infini.

Notons que la sequence de la définition originelle de $\mathbb{N}$ donnée par l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}$ en considérant $n \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant est effectivement égale à la sequence donnée par l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$ en considérant $k \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant. Ce qui nous garantit que l'ensemble $A = \mathbb{N}$ est bien égal à l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$.

D'après le **Lemme 2** il vient que l'espace de probabilité associé à l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans $A$ pour noter comme résultat si $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ou si $n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ est $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_A\}, P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2}\rangle$.

Soit $B$ un ensemble infini dénombrable donné tel que $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{4i, 4i+2, 2i+1\}$.

Comme par définition $\forall k \in \mathbb{N}$, $2k+1 \in A$, il suffit de considérer le cas où $i = k$ pour pouvoir déduire que $2i+1 = 2k+1 \in B$. Conséquemment $\forall n \in A$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$, alors $n \in B$.

De plus par définition de la division euclidienne $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists$ qu'un unique quotient $q' \in \mathbb{N}$ et qu'un unique reste $r' \in \{0, 1\}$ donnés tels que $k = 2q' + r'$ et tels que $2k = 2(2q' + r') = 4q' + 2r'$.

Dès lors, comme par définition $\forall k \in \mathbb{N}$, $2k \in A$, soit $r' = 0$, $2k = 2(2q' + r') = 4q' + 2r' = 4q'$ et il suffit de considérer le cas où $i = q'$ pour pouvoir déduire que $4i = 4q' \in B$, soit $r' = 1$, $2k = 2(2q'+r') = 4q'+2r' = 4q'+2$ et il suffit de considérer le cas où $i = q'$ pour pouvoir déduire que $4i+2 = 4q'+2 \in B$. Conséquemment $\forall n \in A$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$, alors $n \in B$.

Il vient donc que $\forall n \in A$, $n \in B$.

Vice-versa, comme par définition $\forall i \in \mathbb{N}$, $4i \in B$, il suffit de considérer le cas où $k = 2i$ pour pouvoir déduire que $4i = 2k \in A$. Conséquemment $\forall n \in B$ tel que $\exists i \in \mathbb{N}, n = 4i$, alors $n \in A$.

De même, comme par définition $\forall i \in \mathbb{N}$, $4i+2 \in B$, il suffit de considérer le cas où $k = 2i+1$ pour pouvoir déduire que $4i+2 = 2k \in A$. Conséquemment $\forall n \in B$ tel que $\exists i \in \mathbb{N}, n = 4i+2$, alors $n \in A$.

De même, comme par définition $\forall i \in \mathbb{N}$, $2i+1 \in B$, il suffit de considérer le cas où $k = i$ pour pouvoir déduire que $2i+1 = 2k+1 \in A$. Conséquemment $\forall n \in B$ tel que $\exists i \in \mathbb{N}, n = 2i+1$, alors $n \in A$.

Il vient donc que $\forall n \in B$, $n \in A$.

Ainsi nous avons bien : $(\forall n \in A, n \in B) \cap (\forall n \in B, n \in A)$.

Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans $B$ pour noter comme résultat si $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ou si $n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0, 1]\rangle$.

* * *

$\forall i \in \mathbb{N}$ notons par $b_i$ l'ensemble tel que $b_i = \{4i, 4i+2, 2i+1\}$. Ainsi $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{4i, 4i+2, 2i+1\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} b_i$.

$\forall i \in \mathbb{N}$ considérons désormais l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans l'ensemble $b_i$ pour noter comme résultat si $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ou si $n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est $\langle \Omega_i = b_i, \mathcal{F}_i = \{\emptyset, \{2i+1\}, \{4i, 4i+2\}, \Omega_i\}, P_i : \mathcal{F}_i \to [0,1] \rangle = \langle \Omega_i = b_i, \mathcal{F}_i = \{\emptyset, \{n \in b_i : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in b_i : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_i\}, P_i : \mathcal{F}_i \to [0,1] \rangle$. Etant donné que ***l'ensemble $b_i$ ne possède que 3 éléments qui ont la même possibilité d'être tirés***, il est dès lors évident que tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans l'ensemble $b_i$ alors : $P_i(\{2i+1\}) = P_i(\{n \in b_i : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$ , $P_i(\{4i, 4i+2\}) = P_i(\{n \in b_i : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{2}{3}$ et $P_i(\Omega_i) = P_i(\{2i+1\} \cup \{4i, 4i+2\}) = P_i(\{n \in b_i : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\} \cup \{n \in b_i : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

* * *

Par ailleurs $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, donnés tels que $i > i'$ nous avons :

si $n \in \{4i, 4i+2\}$ alors $n \notin \{4i', 4i'+2\}$ dans la mesure où $4i'+2 < 4i$ ;

si $n \in \{4i, 4i+2\}$ alors $n \notin \{2i'+1\}$ par définition ;

si $n \in \{2i+1\}$ alors $n \notin \{4i', 4i'+2\}$ par définition ;

si $n \in \{2i+1\}$ alors $n \notin \{2i'+1\}$ dans la mesure où $2i+1 > 2i'+1$.

De même $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, donnés tels que $i < i'$ nous avons :

si $n \in \{4i, 4i+2\}$ alors $n \notin \{4i', 4i'+2\}$ dans la mesure où $4i+2 < 4i'$ ;

si $n \in \{4i, 4i+2\}$ alors $n \notin \{2i'+1\}$ par définition ;

si $n \in \{2i+1\}$ alors $n \notin \{4i', 4i'+2\}$ par définition ;

si $n \in \{2i+1\}$ alors $n \notin \{2i'+1\}$ dans la mesure où $2i+1 < 2i'+1$.

Il vient donc que $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, $i \neq i'$, $b_i \cap b_{i'} = \emptyset$.

* * *

En notant que $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} b_i$ et que $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, $i \neq i'$, $b_i \cap b_{i'} = \emptyset$ et que $\forall i \in \mathbb{N}$, $P_i(\{2i+1\}) = P_i(\{n \in b_i : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$ , et en appliquant le **Lemme 1** il vient que $P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_i(\{n \in b_i : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$, $P_B(\{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_i(\{n \in b_i : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{2}{3}$ et $P_B(\Omega_B) = P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\} \cup \{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Comme $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2} \neq P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$, en appliquant le **Lemme 3**, il vient que $A = \mathbb{N} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{2i, 2i+1\} \neq B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{4i, 4i+2, 2i+1\}$. Conséquemment le **Théoreme 1** est établi.

* * *

Il est communément compris que "l'axiome d'extensionnalité" est la proposition selon laquelle (entre autres : E. Zermelo, 1907, [1] et P. Halmos, 1960, [2]), indistinctement du fait que $A$ et $B$ soient des ensembles dénombrables infinis ou finis :

$$(\forall x \in A, x \in B) \cap (\forall x \in B, x \in A) \Rightarrow A = B$$

ou de manière équivalente :

$$(A \subseteq B) \cap (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$$

Si à l'évidence nous avons :

$$A = B \Rightarrow (\forall x \in A, x \in B) \cap (\forall x \in B, x \in A)$$

En ce que : si $A = B$ alors en substituant symboliquement c-à-d remplacer la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" alors nous obtenons immédiatement $(\forall x \in A, x \in B) \cap (\forall x \in B, x \in A)$.

Quant au **Théoreme 1**, il énonce que lorsque $A$ et $B$ sont deux ensembles infinis dénombrables alors :

$$(\forall x \in A, x \in B) \cap (\forall x \in B, x \in A) \not\Rightarrow A = B$$

Dit autrement le **Théoreme 1** stipule catégoriquement que l'axiome d'extensionnalité est faux lorsque $A$ et $B$ sont deux ensembles infinis dénombrables en ce qu'il énonce qu'il est possible que $A \neq B$ bien que $(\forall x \in A, x \in B) \cap (\forall x \in B, x \in A)$ lorsque $A$ et $B$ sont deux ensembles infinis dénombrables.

Le cas de $A = \mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$ et $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{4i, 4i+2, 2i+1\}$ constitue un contre-exemple constatable audit axiome d'extensionnalité.

* * *

Il est très intéressant de noter que l'opération usuelle de partition d'un ensemble infini dénombrable nous permet de considérer que :

$$"A = \mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{2k\} \cup \{2k+1\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}"$$

et de même que :

$$"B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{4k, 4k+2\} \cup \{2k+1\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}"$$

Notons que la séquence donnée par l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2\}$ en considérant $k \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant est effectivement égale à la sequence donnée par l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}$ en considérant $k \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant. Ce qui nous garantit que l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2\}$ est bien egal à l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}$.

Le fait que "$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" et que "$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" peut paraitre contradictoire étant donné que $A \neq B$ en ce que $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2} \neq P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$.

Ceci s'explique par le fait que l'expression "$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1\}$" **n'est que partiellement correcte et en soi incomplète**.

En effet le formalisme de l'expression "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}$" **ne précise pas et passe sous silence**, les probabilités $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2}$ et $P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$ qui caractérisent respectivement les ensembles $A$ et $B$.

Pour pallier à cette **incomplétude inhérente** du formalisme de l'expression "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}$", il serait nécessaire d'introduire une nouvelle notation pour **signifier les probabilités qui caractérisent l'union d'ensembles infinis dénombrables**. Par exemple, nous pourrions écrire :

$$"A = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{\frac{1}{2}} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\frac{1}{2}}"$$

et :

$$"B = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{\frac{2}{3}} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\frac{1}{3}}"$$

auquel cas le fait que $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{\frac{1}{2}} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\frac{1}{2}}$ $\neq B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{\frac{2}{3}} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\frac{1}{3}}$ **est signifié** en toute évidence. Lequel fait est omis par **l'incomplétude inhérente** de l'expression "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}$".

De même nous pourrions écrire dans le cas où les probabilités concernées ne sont pas explicitées ou ne sont pas déterminées :

$$"A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{?} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{?}"$$

et :

$$"B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{?} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{?}"$$

Dans le cas où les probabilités concernées ne sont pas explicitées ou ne sont pas déterminées, l'appartenance d'un élément $n$ aux ensembles $A$ et $B$ peut être établie, mais l'égalité entre les ensembles $A$ et $B$ ne peut pas être établie.

Dit autrement l'expression "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}$" doit être interprétée et comprise par **l'expression complète** "$\left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{?} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{?}$".

Remarquons qu'en l'absence du **Théorème 1**, l'application de l'axiome d'extensionnalité à l'ensemble "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}$" aurait induit à considérer que $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{\frac{1}{2}} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\frac{1}{2}} = B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{4k, 4k+2, 2k+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{\frac{2}{3}} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\frac{1}{3}}$.

***Corollaire 1.*** — *Soit $A$ un ensemble infini dénombrable et $f : A \to f(A)$, $f(A)$ étant l'image de $A$ par $f$, une bijection de $A$ vers $f(A)$ telle que $(\forall n \in A, n \in f(A)) \cap (\forall n \in f(A), n \in A)$. Il vient que :*

*Il est possible que $A \neq f(A)$.*

*Dit autrement :*

$$f : A \to f(A), \text{ une bijection de } A \text{ vers } f(A) \text{ telle que}$$
$$(\forall n \in A, n \in f(A)) \cap (\forall n \in f(A), n \in A) \not\Rightarrow A = f(A)$$

***Preuve***

Soit $A$ un ensemble infini dénombrable donné tel que $A = \mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$, $\mathbb{N}$ étant l'ensemble des entiers naturels.

Soit $f : A \to f(A)$, une bijection de $A$ vers $f(A)$, définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} n+k, \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k \\ n+(k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+1 \\ n-(k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+2 \end{cases}$$

Ainsi nous avons : $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 6$, $f(5) = 3$, $f(6) = 8$, $f(7) = 10$, $f(8) = 5$, etc.

* * *

Par définition de la division euclidienne $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ qu'un unique quotient $q \in \mathbb{N}$ et qu'un unique reste $r \in \{0, 1, 2\}$ donnés tels que $n = 3q + r$. Conséquemment $\forall n \in \mathbb{N}$, $n$ possède bien une image par $f$ telle que $f(n) \in f(A)$ dans la mesure où :

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3q$ alors $f(n) = (n+q)$ est bien défini et $(n+q) \in \mathbb{N}$ ;

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3q+1$ alors $f(n) = [n+(q+1)]$ est bien défini et $[n+(q+1)] \in \mathbb{N}$ ;

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3q+2$ alors $f(n) = [n-(q+1)]$ est bien défini et $[n-(q+1)] \in \mathbb{N}$.

* * *

Par ailleurs notons que :

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+q = 3q'+q'$ étant donné que $3q+q = 3q'+q' \Leftrightarrow q = q'$ et que $q = q'$ est une contradiction ; **(a)**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+q = 3q'+1+(q'+1)$ étant donné que $3q+q = 3q'+1+(q'+1) \Leftrightarrow 2(q-q') = 1$ et que $2(q-q') = 1$ est une contradiction ; **(b)**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+q = 3q'+2-(q'+1)$ étant donné que $3q+q = 3q'+2-(q'+1) \Leftrightarrow 4q-2q' = 1$ et que $4q-2q' = 1$ est une contradiction ; **(c)**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+1+(q+1) = 3q'+1+(q'+1)$ étant donné que $3q+1+(q+1) = 3q'+1+(q'+1) \Leftrightarrow q = q'$ et que $q = q'$ est une contradiction ; **(d)**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+1+(q+1) = 3q'+2-(q'+1)$ étant donné que $3q+1+(q+1) = 3q'+2-(q'+1) \Leftrightarrow 4q-2q' = -1$ et que $4q-2q' = -1$ est une contradiction ; **(e)**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+2-(q+1) = 3q'+2-(q'+1)$ étant donné que $3q+2-(q+1) = 3q'+2-(q'+1) \Leftrightarrow q = q'$ et que $q = q'$ est une contradiction. **(f)**

De plus notons que :

$\nexists q \in \mathbb{N}$ tel que $3q+q = 3q+1+(q+1)$ étant donné que $3q+q = 3q+1+(q+1) \Leftrightarrow 2(q-q) = 1$ et que $2(q-q) = 1$ est une contradiction ; **(g)**

$\nexists q \in \mathbb{N}$ tel que $3q+q = 3q+2-(q+1)$ étant donné que $3q+q = 3q+2-(q+1) \Leftrightarrow 2q = 1$ et que $2q = 1$ est une contradiction ; **(h)**

$\nexists q \in \mathbb{N}$ tel que $3q+1+(q+1) = 3q+2-(q+1)$ étant donné que $3q+1+(q+1) = 3q+2-(q+1) \Leftrightarrow 2q = -1$ et que $2q = -1$ est une contradiction. **(i)**

Les propositions **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)**, **(e)** et **(f)** signifient que $\forall q, q' \in \mathbb{N}$, $q \neq q'$, $\{3q+q, 3q+1+(q+1), 3q+2-(q+1)\} \cap \{3q'+q', 3q'+1+(q'+1), 3q'+2-(q'+1)\} = \emptyset$.

Et les propositions **(g)**, **(h)** et **(i)** signifient que $\forall q \in \mathbb{N}$, $3q+q \neq 3q+1+(q+1) \neq 3q+2-(q+1)$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, il n'existe qu'un unique quotient $q \in \mathbb{N}$ et qu'un unique reste $r \in \{0,1,2\}$ tels que $n = 3q+r$, il vient donc que $\forall n, m \in A$, $n \neq m$, $f(n) \neq f(m)$ et $f(n), f(m) \in f(A)$. Conséquemment $f$ est bien une bijection de $A$ vers $f(A)$.

* * *

Ensuite notons que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, 3q+q = 4q,$$
$$\forall q \in \mathbb{N}, 3q+1+(q+1) = 4q+2,$$
$$\forall q \in \mathbb{N}, 3q+2-(q+1) = 2q+1.$$

* * *

Par ailleurs : $A = \mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\} = \bigcup_{l=3k,k\in\mathbb{N}}(\{2l, 2l+1\}\cup\{2(l+1), 2(l+1)+1\} \cup \{2(l+2), 2(l+2)+1\}) = \bigcup_{l=3k,k\in\mathbb{N}}\{2l, 2l+1, 2l+2, 2l+3, 2l+4, 2l+5\} = \bigcup_{i=2k,k\in\mathbb{N}}\{3i, 3i+1, 3i+2, 3i+3, 3i+4, 3i+5\} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{3q, 3q+1, 3q+2\}$.

Notons que la sequence de la définition originelle de $\mathbb{N}$ donnée par l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$ en considérant $k \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant est effectivement égale à la sequence donnée par l'ensemble $\bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{3q, 3q+1, 3q+2\}$ en considérant $q \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant. Ce qui nous garantit que $A = \mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$ est bien égal à l'ensemble $\bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{3q, 3q+1, 3q+2\}$.

Il vient que $f(A) = \bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{f(3q), f(3q+1), f(3q+2)\} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{4q, 4q+2, 2q+1\}$.

En reprenant le contre-exemple exposé précédemment où $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{4i, 4i+2, 2i+1\} = f(A)$ nous pouvons déduire que $(\forall n \in A, n \in f(A)) \cap (\forall n \in f(A), n \in A)$. Conséquemment $f$ est bien une bijection de $A$ vers $f(A)$ telle que $(\forall n \in A, n \in f(A)) \cap (\forall n \in f(A), n \in A)$.

* * *

$f : A \to f(A)$ est une bijection de $A$ vers $f(A)$ telle que $(\forall n \in A, n \in f(A)) \cap (\forall n \in f(A), n \in A)$, dont la bijection réciproque $f^{-1} : f(A) \to A$ est définie comme suit :

$$\forall m \in f(A), f^{-1}(m) = \begin{cases} m-k, \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, m = f(3k) = 3k+k \\ m-(k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, m = f(3k+1) = 3k+1+(k+1) \\ m+(k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, m = f(3k+2) = 3k+2-(k+1) \end{cases}$$

En effet :

$$\forall n \in A, f^{-1}(f(n)) = \begin{cases} n = (3k+k)-k, \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k \\ n = [3k+1+(k+1)]-(k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+1 \\ n = [3k+2-(k+1)]+(k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+2 \end{cases}$$

Ainsi nous avons : $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(2) = 1$, $f^{-1}(1) = 2$, $f^{-1}(4) = 3$, $f^{-1}(6) = 4$, $f^{-1}(3) = 5$, $f^{-1}(8) = 6$, $f^{-1}(10) = 7$, $f^{-1}(5) = 8$, etc.

* * *

En reprenant le contre-exemple exposé précédemment où $A = \mathbb{N}$ et $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{4i, 4i+2, 2i+1\} = f(A)$, nous pouvons dès lors déduire que $A \neq f(A)$. Conséquemment le **Corollaire 1** est établi.

Le cas de $f : A \to f(A)$ constitue un contre-exemple constatable au fait que $f : A \to f(A)$, une bijection de $A$ vers $f(A)$ telle que $(\forall n \in A, n \in f(A)) \cap (\forall n \in f(A), n \in A)$, n'implique pas nécessairement que $A = f(A)$.

* * *

Remarquons qu'en l'absence du **Théorème 1**, l'application de l'axiome d'extensionnalité aux ensembles $A$ et $f(A)$ aurait induit à considérer la bijection $f$ comme étant une bijection de $A$ vers $A$ et d'employer l'expression "$f : A \to A$" dans la mesure où $f : A \to f(A)$ est une bijection de $A$ vers $f(A)$ et $(\forall n \in A, n \in f(A)) \cap (\forall n \in f(A), n \in A)$.

***Corollaire 2.*** — *Il existe une infinité de couples d'ensembles infinis dénombrables $A$ et $B$ tels que $(\forall x \in A, x \in B) \cap (\forall x \in B, x \in A)$ pour lesquels :*

$$A \neq B$$

***Preuve***

Soit $A$ un ensemble infini dénombrable donné tel que $A = \mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\}$, $\mathbb{N}$ étant l'ensemble des entiers naturels.

D'après le **Lemme 2** il vient que l'espace de probabilité associé à l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans $A$ pour noter comme résultat si $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ou si $n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ est $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_A\}, P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2}\rangle$.

Soit $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, un entier naturel non nul donné.

Soit $B_l$ un ensemble infini dénombrable donné tel que $B_l = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\}$, $j \in \mathbb{N}$, $j \in [0, l-1]$.

Comme par définition $\forall k \in \mathbb{N}$, $2k+1 \in A$, il suffit de considérer le cas où $i = k$ pour pouvoir déduire que $2i+1 = 2k+1 \in B_l$. Conséquemment $\forall n \in A$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$, alors $n \in B_l$.

De plus par définition de la division euclidienne $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists$ qu'un unique quotient $q' \in \mathbb{N}$ et qu'un unique reste $r' \in \mathbb{N}$, $r' \in [0, l-1]$ donnés tels que $k = lq' + r'$ et tels que $2k = 2(lq' + r') = 2lq' + 2r'$.

Dès lors, comme par définition $\forall k \in \mathbb{N}$, $2k \in A$, quelle que soit la valeur du reste unique donné $r' \in [0, l-1]$, il suffit de considerer le cas où $li + j = k$ pour pouvoir déduire que $2k = 2(lq' + r') = 2li + 2j \in B_l$. Conséquemment $\forall n \in A$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$, alors $n \in B_l$.

Il vient donc que $\forall n \in A$, $n \in B_l$.

Vice-versa, comme par définition $\forall i \in \mathbb{N}$ et $\forall j \in \mathbb{N}, j \in [0, l-1]$, $2li + 2j \in B_l$, il suffit de considérer le cas où $k = li + j$ pour pouvoir déduire que $2li + 2j = 2k \in A$. Conséquemment $\forall n \in B_l$ tel que $\exists i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, j \in [0, l-1]$, $n = 2li + 2j$, alors $n \in A$.

De même, comme par définition $\forall i \in \mathbb{N}$, $2i+1 \in B_l$, il suffit de considérer le cas où $k = i$ pour pouvoir déduire que $2i+1 = 2k+1 \in A$. Consequemment $\forall n \in B_l$ tel que $\exists i \in \mathbb{N}$, $n = 2i+1$, alors $n \in A$.

Il vient donc que $\forall n \in B_l$, $n \in A$.

Ainsi nous avons bien : $(\forall n \in A, n \in B_l) \cap (\forall n \in B_l, n \in A)$.

Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans $B_l$ pour noter comme résultat si $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ou si $n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est $\langle \Omega_{B_l} = B_l, \mathcal{F}_{B_l} = \{\emptyset, \{n \in B_l : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in B_l : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_{B_l}\}, P_{B_l} : \mathcal{F}_{B_l} \to [0,1]\rangle$.

* * *

$\forall i \in \mathbb{N}$ notons par $b_{l_i}$ l'ensemble tel que $b_{l_i} = \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\}$. Ainsi $B_l = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} b_{l_i}$.

$\forall i \in \mathbb{N}$ considérons désormais l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans l'ensemble $b_{l_i}$ pour noter comme résultat si $n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ou si $n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est $\langle \Omega_i = b_{l_i}, \mathcal{F}_i = \{\emptyset, \{2i+1\}, \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\}, \Omega_i\}, P_i : \mathcal{F}_i \to [0,1]\rangle = \langle \Omega_i = b_{l_i}, \mathcal{F}_i = \{\emptyset, \{n \in b_{l_i} : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in b_{l_i} : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_i\}, P_i : \mathcal{F}_i \to [0,1]\rangle$. Etant donné que ***l'ensemble $\boldsymbol{b_{l_i}}$ ne possède que $\boldsymbol{l+1}$ éléments qui ont la même possibilité d'être tirés***, il est dès lors évident que tirer au hasard un entier naturel quelconque $n$ dans l'ensemble $b_{l_i}$ alors : $P_i(\{2i+1\}) = P_i(\{n \in b_{l_i} : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{l+1}$ , $P_i(\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\}) = P_i(\{n \in b_{l_i} : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\})$ $= \frac{l}{l+1}$ et $P_i(\Omega_i) = P_i(\{2i+1\} \cup \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\}) = P_i(\{n \in b_{l_i} : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\} \cup \{n \in b_{l_i} : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{l+1} + \frac{l}{l+1} = 1$.

* * *

Par ailleurs $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, donnés tels que $i > i'$ nous avons :

si $n \in \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\}$ alors $n \notin \{2li', 2li'+2, \ldots, 2li'+2j, \ldots, 2li'+2(l-1)\}$ dans la mesure où $2li'+2(l-1) < 2li$ ;

si $n \in \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\}$ alors $n \notin \{2li'+1\}$ par définition ;

si $n \in \{2li+1\}$ alors $n \notin \{2li', 2li'+2, \ldots, 2li'+2j, \ldots, 2li'+2(l-1)\}$ par définition ;

si $n \in \{2li+1\}$ alors $n \notin \{2li'+1\}$ dans la mesure où $2li+1 > 2li'+1$.

De même $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, donnés tels que $i < i'$ nous avons :

si $n \in \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\}$ alors $n \notin \{2li', 2li'+2, \ldots, 2li'+2j, \ldots, 2li'+2(l-1)\}$ dans la mesure où $2li+2(l-1) < 2li'$ ;

si $n \in \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1)\}$ alors $n \notin \{2li'+1\}$ par définition ;

si $n \in \{2li+1\}$ alors $n \notin \{2li', 2li'+2, \ldots, 2li'+2j, \ldots, 2li'+2(l-1)\}$ par définition ;

si $n \in \{2li+1\}$ alors $n \notin \{2li'+1\}$ dans la mesure où $2li+1 < 2li'+1$.

Il vient donc que $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, $i \neq i'$, $b_{l_i} \cap b_{l_{i'}} = \emptyset$.

* * *

En notant que $B_l = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} b_{l_i}$ et que $\forall i, i' \in \mathbb{N}$, $i \neq i'$, $b_{l_i} \cap b_{l_{i'}} = \emptyset$ et que $\forall i \in \mathbb{N}$, $P_i(\{2i+1\}) = P_i(\{n \in b_{l_i} : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{l+1}$ , et en appliquant le **Lemme 1** il vient que $P_{B_l}(\{n \in B_l : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_i(\{n \in b_{l_i} : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{l+1}$, $P_{B_l}(\{n \in B_l : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_i(\{n \in b_{l_i} : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\})$ $= \frac{l}{l+1}$ et $P_{B_l}(\Omega_{B_l}) = P_{B_l}(\{n \in B_l : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\} \cup \{n \in B_l : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{l+1} + \frac{l}{l+1} = 1$.

Comme $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2} \neq P_{B_l}(\{n \in B_l : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{l+1}$, $l \geq 2$, en appliquant le **Lemme 3**, il vient que $A = \mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{2k, 2k+1\}$ $\neq B_l = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\}$.

* * *

Comme nous avons démontré que $\forall l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2} \neq P_{B_l}(\{n \in B_l : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{l+1}$, nous pouvons déduire qu'il existe une infinité de couples d'ensembles infinis dénombrables $A = \mathbb{N}$ et $B_l = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\}$, $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, tels que $(\forall n \in A, n \in B_l) \cap (\forall n \in B_l, n \in A)$ pour lesquels $A \neq B_l$. Conséquemment le **Corollaire 2** est établi.

* * *

Notons que le contre-exemple exposé pour la preuve du **Théorème 1** n'est qu'un cas particulier des exemples exposés ci-dessus pour lequel $l = 2$.

Remarquons qu'en l'absence du **Théorème 1**, l'application de l'axiome d'extensionnalité à l'ensemble "$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\cup\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}$" aurait induit à considérer $\forall l \in \mathbb{N}, l \geq 2$ que $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k, 2k+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{\frac{1}{2}} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\frac{1}{2}} = B_l = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2li, 2li+2, \ldots, 2li+2j, \ldots, 2li+2(l-1), 2i+1\} = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}\right]_{\frac{l}{l+1}} \cup \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{2i+1\}\right]_{\frac{1}{l+1}}$.

***Lemme 4.*** — *Soit $A$ un ensemble infini dénombrable donné contenant une infinité de nombres rationnels positifs distincts, défini comme suit $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\{(n_i)^{-2}\}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}^*, n_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i, i' \in \mathbb{N}^*$, $i \neq i'$, $n_i \neq n_{i'}$ et $(n_i)^{-2} \neq (n_{i'})^{-2}$.*

*De même soit $B$ un ensemble infini dénombrable donné contenant une infinité de nombres rationnels positifs distincts, défini comme suit $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\{(m_i)^{-2}\}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}^*, m_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i, i' \in \mathbb{N}^*$, $i \neq i'$, $m_i \neq m_{i'}$ et $(m_i)^{-2} \neq (m_{i'})^{-2}$.*

*En considérant l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ et l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, et en supposant de plus que $\exists a \in [0,1]$, $P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = a$ et que $\exists b \in [0,1]$, $P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = b$, il vient que :*

$$\text{Si } P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \text{ alors } A \neq B.$$

*Dit autrement :*

$$P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \Rightarrow A \neq B.$$

***Preuve***

Par définition nous avons :

$$\begin{aligned} & A = B \\ \Rightarrow & \langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle = \langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle \\ \Rightarrow & P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \quad \textbf{(II)} \end{aligned}$$

Dit autrement : si $A = B$ alors par définition l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ est égale à l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, ce qui implique dès lors que $P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$.

Effectivement : si $A = B$ alors en substituant symboliquement c-à-d en remplaçant la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" nous obtenons immédiatement $P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$.

En prenant la contraposée de **(II)** :

$$\begin{aligned}
&\neg(P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})) \\
\Rightarrow\ &\neg(\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle = \langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle) \\
\Rightarrow\ &\neg(A = B)
\end{aligned}$$

Dit autrement : si $P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ n'est pas égale à $P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ alors par définition l'espace de probabilité $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$ n'est pas égale à l'espace de probabilité $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n^{-2} \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$, ce qui implique dès lors que $A \neq B$. Conséquemment le **Lemme 4** est établit.

Effectivement : sachant que $P_A(\{n^{-2} \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$ si $A = B$ alors en substituant symboliquement c-à-d en remplaçant la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" nous obtenons immédiatement $P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) \neq P_B(\{n^{-2} \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\})$. Ce qui est une contradiction. Dans la mesure où substituer symboliquement c-à-d remplacer la lettre majuscule "$A$" par la lettre majuscule "$B$" implique une contradiction, il vient que nécessairement $A \neq B$.

***Corollaire 3.*** — *Soit $A$ un ensemble infini dénombrable donné contenant une infinité de nombres rationnels positifs distincts tel que $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*}\{\alpha_i\}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i = i^{-2}$. Donc $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*}\{\alpha_i\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}\{n^{-2}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}\{(2k+1)^{-2}, (2k+2)^{-2}\}$.*

*Soit $g : \mathbb{N}^* \to g(\mathbb{N}^*)$, $g(\mathbb{N}^*)$ étant l'image de $\mathbb{N}^*$ par $g$, une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $g(\mathbb{N}^*)$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in g(\mathbb{N}^*)) \cap (\forall n \in g(\mathbb{N}^*), n \in \mathbb{N}^*)$.*

*Soit $B$ un ensemble infini dénombrable donné contenant une infinité de nombres rationnels positifs distincts tel que $B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*}\{\beta_j\}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\beta_j = \alpha_{g(j)}$.*

*Il vient qu'il est possible que :*

$$A \neq B$$

***Preuve***

Soit $A$ un ensemble infini dénombrable donné contenant une infinité de nombres rationnels positifs distincts tel que $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*}\{\alpha_i\}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i = i^{-2}$. Donc $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*}\{\alpha_i\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}\{n^{-2}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}\{(2k+1)^{-2}, (2k+2)^{-2}\}$.

Notons que la sequence d'une infinité de nombres rationnels positifs distincts donnée par l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{n^{-2}\}$ en considérant $n \in \mathbb{N}^*$ par ordre strictement croissant est effectivement égale à la sequence donnée par l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{(2k+1)^{-2},(2k+2)^{-2}\}$ en considérant $k \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant. Ce qui nous garantit que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{n^{-2}\}$ est bien égal à l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{(2k+1)^{-2},(2k+2)^{-2}\}$.

***

Soit $g : \mathbb{N}^* \to g(\mathbb{N}^*)$, une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $g(\mathbb{N}^*)$, définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = \begin{cases} n-(k+1), & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 3k \\ n+(k+1), & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+1 \\ n+(k+2), & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+2 \end{cases}$$

Ainsi nous avons : $g(1) = 2$, $g(2) = 4$, $g(3) = 1$, $g(4) = 6$, $g(5) = 8$, $g(6) = 3$, $g(7) = 10$, $g(8) = 12$, $g(9) = 5$, etc.

***

Par définition de la division euclidienne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists$ qu'un unique quotient $q \in \mathbb{N}$ et qu'un unique reste $r \in \{0,1,2\}$ donnés par la division euclidienne de $n$ par 3 tels que $n = 3q + r$. Conséquemment $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n$ possède bien une image par $g$ telle que $g(n) \in g(\mathbb{N}^*)$ dans la mesure où :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 3q$ alors $g(n) = [n-(q+1)]$ est bien défini et $[n-(q+1)] \in \mathbb{N}^*$ ;

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3q+1$ alors $g(n) = [n+(q+1)]$ est bien défini et $[n+(q+1)] \in \mathbb{N}^*$ ;

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3q+2$ alors $g(n) = [n+(q+2)]$ est bien défini et $[n+(q+2)] \in \mathbb{N}^*$.

***

Par ailleurs notons que :

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q-(q+1) = 3q'-(q'+1)$ étant donné que $3q-(q+1) = 3q'-(q'+1) \Leftrightarrow q = q'$ et que $q = q'$ est une contradiction ; **(a')**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q-(q+1) = 3q'+1+(q'+1)$ étant donné que $3q-(q+1) = 3q'+1+(q'+1) \Leftrightarrow 2q-4q' = 3$ et que $2q-4q' = 3$ est une contradiction ; **(b')**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q-(q+1) = 3q'+2+(q'+2)$ étant donné que $3q-(q+1) = 3q'+2+(q'+2) \Leftrightarrow 2q-4q' = 5$ et que $2q-4q' = 5$ est une contradiction ; **(c')**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+1+(q+1) = 3q'+1+(q'+1)$ étant donné que $3q+1+(q+1) = 3q'+1+(q'+1) \Leftrightarrow q = q'$ et que $q = q'$ est une contradiction ; **(d')**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+1+(q+1) = 3q'+2+(q'+2)$ étant donné que $3q+1+(q+1) = 3q'+2+(q'+2) \Leftrightarrow 2(q-q') = 1$ et que $2(q-q') = 1$ est une contradiction ; **(e')**

$\nexists q, q' \in \mathbb{N}, q \neq q'$ tels que $3q+2+(q+2) = 3q'+2+(q'+2)$ étant donné que $3q+2+(q+2) = 3q'+2+(q'+2) \Leftrightarrow q = q'$ et que $q = q'$ est une contradiction. **(f')**

De plus notons que :

$\nexists q \in \mathbb{N}$ tel que $3q-(q+1) = 3q+1+(q+1)$ étant donné que $3q-(q+1) = 3q+1+(q+1) \Leftrightarrow 2q-4q = 3$ et que $2q-4q=3$ est une contradiction ; **(g')**

$\nexists q \in \mathbb{N}$ tel que $3q-(q+1) = 3q+2+(q+2)$ étant donné que $3q-(q+1) = 3q+2+(q+2) \Leftrightarrow 2q-4q = 5$ et que $2q-4q=5$ est une contradiction ; **(h')**

$\nexists q \in \mathbb{N}$ tel que $3q+1+(q+1) = 3q+2+(q+2)$ étant donné que $3q+1+(q+1) = 3q+2+(q+2) \Leftrightarrow 2(q-q) = 1$ et que $2(q-q)=1$ est une contradiction. **(i')**

Les propositions **(a')**, **(b')**, **(c')**, **(d')**, **(e')** et **(f')** signifient que $\forall q, q' \in \mathbb{N}$, $q \neq q'$, $\{3q-(q+1), 3q+1+(q+1), 3q+2+(q+2)\} \cap \{3q'-(q'+1), 3q'+1+(q'+1), 3q'+2+(q'+2)\} = \emptyset$.

Et les propositions **(g')**, **(h')** et **(i')** signifient que $\forall q \in \mathbb{N}$, $3q-(q+1) \neq 3q+1+(q+1) \neq 3q+2+(q+2)$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il n'existe qu'un unique quotient $q \in \mathbb{N}$ et qu'un unique reste $r \in \{0,1,2\}$ tels que $n = 3q+r$, il vient donc que $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, $n \neq m$, $g(n) \neq g(m)$ et $g(n), g(m) \in g(\mathbb{N}^*)$. Conséquemment $g$ est bien une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $g(\mathbb{N}^*)$.

* * *

Ensuite notons que :

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \mathbb{N}^*, 3q-(q+1) = 2q-1,\\
&\forall q \in \mathbb{N}, 3q+1+(q+1) = 4q+2,\\
&\forall q \in \mathbb{N}, 3q+2+(q+2) = 4q+4.
\end{aligned}$$

* * *

Par ailleurs : $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1, 2k+2\} = \bigcup_{l=3k,k\in\mathbb{N}}(\{2l+1, 2l+2\} \cup \{2(l+1)+1, 2(l+1)+2\} \cup \{2(l+2)+1, 2(l+2)+2\}) = \bigcup_{l=3k,k\in\mathbb{N}}\{2l+1, 2l+2, 2l+3, 2l+4, 2l+5, 2l+6\} = \bigcup_{i=2k,k\in\mathbb{N}}\{3i+1, 3i+2, 3i+3, 3i+4, 3i+5, 3i+6\} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{3q+1, 3q+2, 3q+3\}$.

Notons que la sequence de la définition originelle de $\mathbb{N}^*$ donnée par l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1, 2k+2\}$ en considérant $k \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant est effectivement égale à la sequence donnée par l'ensemble $\bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{3q+1, 3q+2, 3q+3\}$ en considérant $q \in \mathbb{N}$ par ordre strictement croissant. Ce qui nous garantit que $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k+1, 2k+2\}$ est bien égal à l'ensemble $\bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{3q+1, 3q+2, 3q+3\}$.

Il vient que $g(\mathbb{N}^*) = \bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{g(3q+1), g(3q+2), g(3q+3)\} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{4q+2, 4q+4, 2(q+1)-1\}$.

Par définition $\forall k \in \mathbb{N}$, $2k+1 \in \mathbb{N}^*$, il suffit de considérer les cas où $q = k$ pour pouvoir déduire que $2q+1 = 2k+1 \in g(\mathbb{N}^*)$. Conséquemment $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k+1$, alors $n \in g(\mathbb{N}^*)$.

De plus par définition de la division euclidienne $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists$ qu'un unique quotient $q' \in \mathbb{N}$ et qu'un unique reste $r' \in \{0,1\}$ donnés tels que $k = 2q'+r'$ et tels que $2k = 2(2q'+r') = 4q'+2r'$.

Dès lors, comme par définition $\forall k \in \mathbb{N}$, $2k \in \mathbb{N}^*$, soit $r' = 0$, $2k = 2(2q'+r') = 4q'+2r' = 4q'$ et il suffit de considérer le cas où $q+1 = q'$ pour pouvoir déduire que $4q+4 = 4q' \in g(\mathbb{N}^*)$, soit $r' = 1$,$2k = 2(2q'+r') = 4q'+2r' = 4q'+2$ et il suffit de considérer le cas où $q = q'$ pour pouvoir déduire que $4q + 2 = 4q' + 2 \in g(\mathbb{N}^*)$. Conséquemment $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$, alors $n \in g(\mathbb{N}^*)$.

Il vient donc que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \in g(\mathbb{N}^*)$.

Vice-versa, comme par définition $\forall q \in \mathbb{N}$, $4q + 4 \in g(\mathbb{N}^*)$, il suffit de considérer le cas où $k = 2q + 2$ pour pouvoir déduire que $4q + 4 = 2k \in \mathbb{N}^*$. Conséquemment $\forall n \in g(\mathbb{N}^*)$ tel que $\exists q \in \mathbb{N}, n = 4q + 4$, alors $n \in \mathbb{N}^*$.

De même, comme par définition $\forall q \in \mathbb{N}$, $4q + 2 \in g(\mathbb{N}^*)$, il suffit de considérer le cas où $k = 2q + 1$ pour pouvoir déduire que $4q + 2 = 2k \in \mathbb{N}^*$. Conséquemment $\forall n \in g(\mathbb{N}^*)$ tel que $\exists q \in \mathbb{N}, n = 4q + 2$, alors $n \in \mathbb{N}^*$.

De même, comme par définition $\forall q \in \mathbb{N}$, $2q+1 \in g(\mathbb{N}^*)$, il suffit de considérer le cas où $k = q$ pour pouvoir déduire que $2q+1 = 2k+1 \in \mathbb{N}^*$. Conséquemment $\forall n \in g(\mathbb{N}^*)$ tel que $\exists q \in \mathbb{N}, n = 2q + 1$, alors $n \in \mathbb{N}^*$.

Il vient donc que $\forall n \in g(\mathbb{N}^*)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi nous avons bien : $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in g(\mathbb{N}^*)) \cap (\forall n \in g(\mathbb{N}^*), n \in \mathbb{N}^*)$.

Conséquemment $g$ est bien une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $g(\mathbb{N}^*)$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in g(\mathbb{N}^*)) \cap (\forall n \in g(\mathbb{N}^*), n \in \mathbb{N}^*)$.

* * *

$g : \mathbb{N}^* \to g(\mathbb{N}^*)$ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $g(\mathbb{N}^*)$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in g(\mathbb{N}^*)) \cap (\forall n \in g(\mathbb{N}^*), n \in \mathbb{N}^*)$, dont la bijection réciproque $g^{-1} : g(\mathbb{N}^*) \to \mathbb{N}^*$ est définie comme suit :

$$\forall m \in g(\mathbb{N}^*), g^{-1}(m) = \begin{cases} m + (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}^*, m = g(3k) = 3k - (k+1) \\ m - (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, m = g(3k+1) = 3k + 1 + (k+1) \\ m - (k+2), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, m = g(3k+2) = 3k + 2 + (\text{k+2}) \end{cases}$$

En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g^{-1}(g(n)) = \begin{cases} n = [3k - (k+1)] + (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 3k \\ n = [3k + 1 + (k+1)] - (k+1), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+1 \\ n = [3k + 2 + (k+2)] - (k+2), \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k+2 \end{cases}$$

Ainsi nous avons : $g^{-1}(2) = 1$, $g^{-1}(4) = 2$, $g^{-1}(1) = 3$, $g^{-1}(6) = 4$, $g^{-1}(8) = 5$, $g^{-1}(3) = 6$, $g^{-1}(10) = 7$, $g^{-1}(12) = 8$, $g^{-1}(5) = 9$, etc.

* * *

Soit $B$ un ensemble infini dénombrable donné contenant une infinité de nombres rationnels positifs distincts défini comme suit : $B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \{\beta_j\}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\beta_j = \alpha_{g(j)}$ c-à-d que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\beta_j = [g(j)]^{-2}$.

Ainsi nous avons : $\beta_1 = (2)^{-2} = \alpha_2$, $\beta_2 = (4)^{-2} = \alpha_4$, $\beta_3 = (1)^{-2} = \alpha_1$, $\beta_4 = (6)^{-2} = \alpha_6$, $\beta_5 = (8)^{-2} = \alpha_8$, $\beta_6 = (3)^{-2} = \alpha_3$, $\beta_7 = (10)^{-2} = \alpha_{10}$, $\beta_8 = (12)^{-2} = \alpha_{12}$, $\beta_9 = (5)^{-2} = \alpha_5$, etc.

De plus remarquons que $B = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \{\beta_{3q+1}, \beta_{3q+2}, \beta_{3q+3}\} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \{\alpha_{g(3q+1)}, \alpha_{g(3q+2)}, \alpha_{g(3q+3)}\} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \{(4q+2)^{-2}, (4q+4)^{-2}, [2(q+1) - 1]^{-2}\} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \{\alpha_{(4q+2)}, \alpha_{(4q+4)}, \alpha_{[2(q+1)-1]}\}$.

* * *

Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un nombre rationnel positif quelconque $t$ dans $A$ pour noter comme résultat si $t \in \{\alpha_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}$ ou $t \in \{\alpha_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est : $\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{\alpha_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{\alpha_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_A\}, P_A : \mathcal{F}_A \to [0,1]\rangle$.

$\forall v \in \mathbb{N}$ considérons désormais l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un nombre rationnel positif quelconque $t$ dans l'ensemble $\{\alpha_{2v+1}, \alpha_{2v+2}\}$ pour noter comme résultat si $t \in \{\alpha_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}$ ou $t \in \{\alpha_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est : $\langle \Omega_v = \{\alpha_{2v+1}, \alpha_{2v+2}\}, \mathcal{F}_v = \{\emptyset, \{\alpha_{2v+1}\}, \{\alpha_{2v+2}\}, \Omega_v\}, P_v : \mathcal{F}_v \to [0,1]\rangle$. Etant donné que ***l'ensemble $\boldsymbol{\{\alpha_{2v+1}, \alpha_{2v+2}\}}$ ne possède que 2 éléments qui ont la même possibilité d'être tirés***, il est dès lors évident que tirer au hasard un nombre rationnel positif quelconque $t$ dans l'ensemble $\{\alpha_{2v+1}, \alpha_{2v+2}\}$ alors : $P_v(\{\alpha_{2v+1}\}) = P_v(\{\alpha_{2v+2}\}) = \frac{1}{2}$ et $P_v(\Omega_v) = P_v(\{\alpha_{2v+1}\} \cup \{\alpha_{2v+2}\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

En notant que $A = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} \Omega_v$ et que $\forall v, v' \in \mathbb{N}, v \neq v', \Omega_v \cap \Omega_{v'} = \emptyset$ et que $\forall v \in \mathbb{N}$, $P_v(\{\alpha_{2v+1}\}) = \frac{1}{2}$, en appliquant le **Lemme 1** nous avons : $P_A(\{\alpha_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_v(\{\alpha_{2v+1}\}) = \frac{1}{2}$, $P_A(\{\alpha_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}) = P_v(\{\alpha_{2v+2}\}) = \frac{1}{2}$ et $P_A(\Omega_A) = P_A(\{\alpha_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\} \cup \{\alpha_i \in A : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

* * *

Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un nombre rationnel positif quelconque $t$ dans $B$ pour noter comme résultat si $t \in \{\alpha_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}$ ou si $t \in \{\alpha_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est $\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{\alpha_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{\alpha_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_B\}, P_B : \mathcal{F}_B \to [0,1]\rangle$.

* * *

$\forall w \in \mathbb{N}$ notons par $b_w$ l'ensemble tel que $b_w = \{\alpha_{(4w+2)}, \alpha_{(4w+4)}, \alpha_{[2(w+1)-1]}\}$. Ainsi $B = \bigcup_{w \in \mathbb{N}} \{\alpha_{(4w+2)}, \alpha_{(4w+4)}, \alpha_{[2(w+1)-1]}\} = \bigcup_{w \in \mathbb{N}} b_w$.

$\forall w \in \mathbb{N}$ considérons désormais l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un nombre rationnel positif quelconque $t$ dans l'ensemble $b_w$ pour noter comme résultat si $t \in \{\alpha_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}$ ou si $t \in \{\alpha_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}$. L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est $\langle \Omega_w = b_w, \mathcal{F}_w = \{\emptyset, \{\alpha_{2(w+1)-1}\}, \{\alpha_{4w+2}, \alpha_{4w+4}\}, \Omega_w\}, P_w : \mathcal{F}_w \to [0,1]\rangle = \langle \Omega_w = b_w, \mathcal{F}_w = \{\emptyset, \{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}, \Omega_w\}, P_w : \mathcal{F}_w \to [0,1]\rangle$. Etant donné que ***l'ensemble $\boldsymbol{b_w}$ ne possède que 3 éléments qui ont la même possibilité d'être tirés***, il est dès lors évident que tirer au hasard un nombre rationnel positif quelconque $t$ dans l'ensemble $b_w$ alors : $P_w(\{\alpha_{2(w+1)-1}\}) = P_w(\{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$ , $P_w(\{\alpha_{4w+2}, \alpha_{4w+4}\}) = P_w(\{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}) = \frac{2}{3}$ et $P_w(\Omega_w) = P_w(\{\alpha_{2(w+1)-1}\} \cup \{\alpha_{4w+2}, \alpha_{4w+4}\}) = P_w(\{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\} \cup \{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

* * *

Par ailleurs $\forall w, w' \in \mathbb{N}$, donnés tels que $w > w'$ nous avons :

si $t \in \{(4w+2)^{-2}, (4w+4)^{-2}\}$ alors $t \notin \{(4w'+2)^{-2}, (4w'+4)^{-2}\}$ dans la mesure où $(4w+4)^{-2} < (4w+2)^{-2} < (4w'+4)^{-2} < (4w'+2)^{-2}$ ;

si $t \in \{(4w+2)^{-2}, (4w+4)^{-2}\}$ alors $t \notin \{[(2(w'+1)-1]^{-2}\}$ par définition ;

si $t \in \{[2(w+1)-1]^{-2}\}$ alors $t \notin \{(4w'+2)^{-2}, (4w'+4)^{-2}\}$ par définition ;

si $t \in \{[2(w+1)-1]^{-2}\}$ alors $t \notin \{[2(w'+1)-1]^{-2}\}$ dans la mesure où $[2(w+1)-1]^{-2} < [2(w'+1)-1]^{-2}$.

De même $\forall w, w' \in \mathbb{N}$, donnés tels que $w < w'$ nous avons :

si $t \in \{(4w+2)^{-2}, (4w+4)^{-2}\}$ alors $t \notin \{(4w'+2)^{-2}, (4w'+4)^{-2}\}$ dans la mesure où $(4w+2)^{-2} > (4w+4)^{-2} > (4w'+2)^{-2} > (4w'+4)^{-2}$ ;

si $t \in \{(4w+2)^{-2}, (4w+4)^{-2}\}$ alors $t \notin \{[2(w'+1)-1]^{-2}\}$ par définition ;

si $t \in \{[2(w+1)-1]^{-2}\}$ alors $t \notin \{(4w'+2)^{-2}, (4w'+4)^{-2}\}$ par définition ;

si $t \in \{[2(w+1)-1]^{-2}\}$ alors $t \notin \{[2(w'+1)-1]^{-2}\}$ dans la mesure où $[2(w+1)-1]^{-2} > [2(w'+1)-1]^{-2}$.

Il vient donc que $\forall w, w' \in \mathbb{N}$, $w \neq w'$, $b_w \cap b_{w'} = \emptyset$.

* * *

En notant que $B = \bigcup_{w \in \mathbb{N}} b_w$ et que $\forall w, w' \in \mathbb{N}$, $w \neq w'$, $b_w \cap b_{w'} = \emptyset$ et que $\forall w \in \mathbb{N}$, $P_w(\{\alpha_{2(w+1)-1}\}) = P_w(\{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$ , et en appliquant le **Lemme 1** il vient que $P_B(\{\alpha_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = P_w(\{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$, $P_B(\{\alpha_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}) = P_w(\{\alpha_i \in b_w : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}) = \frac{2}{3}$ et $P_B(\Omega_B) = P_B(\{\alpha_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\} \cup \{\alpha_i \in B : i \in \{2k : k \in \mathbb{N}^*\}\}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

En appliquant le **Lemme 4** il vient que $A \neq B$ dans la mesure où $P_A(\{\alpha_i \in A : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2} \neq P_B(\{\alpha_i \in B : i \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$. Conséquemment le **Corollaire 3** est établi.

* * *

Remarquons qu'en l'absence du **Théorème 1**, l'application de l'axiome d'extensionnalité aux ensembles $\mathbb{N}^*$ et $g(\mathbb{N}^*)$ aurait induit à considérer la bijection $g$ comme étant une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$ et d'employer l'expression "$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$" dans la mesure où $g : \mathbb{N}^* \to g(\mathbb{N}^*)$ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $g(\mathbb{N}^*)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in g(\mathbb{N}^*)) \cap (\forall n \in g(\mathbb{N}^*), n \in \mathbb{N}^*)$.

De sorte que l'ensemble $B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \{\beta_j\}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\beta_j = \alpha_{g(j)}$ aurait été considéré comme étant une permutation de l'ensemble $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \{\alpha_i\}$ dans la mesure où $(\forall \alpha_i \in A, \alpha_i \in B) \cap (\forall \beta_j \in B, \beta_j \in A)$.

* * *

Remarquons de plus que $\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = \zeta(2)$ où $\zeta$ est la fonction zêta de Riemann (B. Riemann, 1859, [3]). Comme $\zeta(s)$, $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$, est absolument convergent et non nul, il vient que $\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = \zeta(2)$.

Il est alors intéressant de noter que bien qu'effectivement $\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j$ du fait de la convergence absolue de la série de terme général $\alpha_i$, nous avons néanmoins $A \neq B$.

* * * * *

En conclusion, nous pouvons faire remarquer aux lecteurs attentifs que dans la mesure où dans ce présent article, nous énonçons et prouvons que l'axiome d'extensionnalité est faux pour les ensembles infinis dénombrables, soit le **Théorème 1**, **nous avons pris bien soin à ce qu'à aucun moment** il n'a été fait usage dudit axiome d'extensionnalité.

* * * * *

Par ailleurs, nous pouvons considérer une illustration du **Théorème 1**.

Soit une corne d'abondance $A = \mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{2k, 2k+1\}$ qui contient une infinité de pommes dénotées chacune par un entier naturel impair unique et d'oranges dénotées chacune par un entier naturel pair unique. Ainsi la corne d'abondance $A$ est une corne d'abondance telle qu'à l'infini pour chaque pomme il y a une orange. Par ailleurs nous savons que si nous devons tirer au hasard un fruit de cette corne d'abondance $A$, la probabilié d'obtenir une pomme est de $\frac{1}{2}$ et la probabilité d'obtenir une orange est de $\frac{1}{2}$.

L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est donc :

$\langle \Omega_A = A, \mathcal{F}_A = \{\emptyset, \{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in A : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_A\}, P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2} \rangle$.

Soit une corne d'abondance $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{4k, 4k+2, 2k+1\}$ qui contient une infinité de pommes dénotées chacune par un entier naturel impair unique et d'oranges dénotées chacune par un entier naturel pair unique. Ainsi la corne d'abondance $B$ est une corne d'abondance telle qu'à l'infini pour chaque pomme il y a deux oranges. Par ailleurs nous savons que si nous devons tirer au hasard un fruit de cette corne d'abondance $B$, la probabilié d'obtenir une pomme est de $\frac{1}{3}$ et la probabilité d'obtenir une orange est de $\frac{2}{3}$.

L'espace de probabilité associé à cette dernière expérience aléatoire est donc :

$\langle \Omega_B = B, \mathcal{F}_B = \{\emptyset, \{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}, \{n \in B : n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}\}, \Omega_B\}, P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3} \rangle$.

Il est clair que $\forall q \in \mathbb{N}, 2q+1 \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ il existe une pomme dénotée par "$2q+1$" dans la corne d'abondance $A$ tout comme il existe une pomme dénotée par "$2q+1$" dans la corne d'abondance $B$.

De même il est clair que $\forall q \in \mathbb{N}, 2q \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ il existe une orange dénotée par "$2q$" dans la corne d'abondance $A$ tout comme il existe une orange dénotée par "$2q$" dans la corne d'abondance $B$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe un fruit dénoté par "$n$" dans la corne d'abondance $A$ tout comme il existe un fruit dénoté par "$n$" dans la corne d'abondance $B$.

Sachant que $P_A(\{n \in A : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{2} \neq P_B(\{n \in B : n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}) = \frac{1}{3}$, en appliquant le **Lemme 3** il vient que $A \neq B$.

Remarquons qu'il y a pour ainsi dire "*une évidence physique*" au fait que la corne d'abondance $A$ ne peut pas être égale à la corne d'abondance $B$ bien que chacune contient une infinité de pommes dénotées chacune par un nombre impair unique et une infinité d'oranges dénotées chacune par un nombre pair unique, dans la mesure où la probabilité de tirer au hasard une pomme dans la corne d'abondance $A$ est de $\frac{1}{2}$ alors que la probabilité de tirer au hasard une pomme dans la corne d'abondance $B$ n'est que de $\frac{1}{3}$.

## Références

[1] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Mathematische Annalen, Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, (1907), Axiom I, page 263. *https://gdz.sub.uni-goettingen.de/*

[2] P. Halmos, *Naive set theory*, Van Nostrand Reinhold Company, (1960), Section 1, page 3.

[3] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, (1859), translation by David R. Wilkins, December 1998. *https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf*

---

Nhat-Anh Phan • *E-mail :* `nhat_anh_phan_math@yahoo.com`