Dinamica de fluidos, procedimiento para simplificar y transformar linealmente las ecuaciones de Euler y de Navier Stokes.

(Fluid dynamics, procedure to simplify and linearly transform the equations of Euler and Navier Stokes)

Guillermo Ayala-Martínez

ICAI Universidad de Comillas, Madrid

. ayalamartinez1943@gmail.com

Abstract

By changing the variable each equation, from a velocity component, becomes a linear equation in which only that component appears. The convective acceleration terms are transformed into an only term. The new variable will be an independent variable and can be any suitable function.

Introducción.

Mediante un cambio de variable cada ecuacion, de cada componente de velocidad, se convierte en una ecuación lineal en la que solo figura esa componente. Los términos de aceleración convectiva se transforman en una expresión monomia, la nueva variable será una variable independiente y puede ser cualquier función que sea adecuada.

1-Las ecuaciones de Navier Stokes.

Las componentes sobre X, Y, Z son:

$$u_t + \mathrm{u}u_x + \mathrm{v}u_y + \mathrm{w}u_z = -\mathrm{p_x} + \nu(\mathrm{u_{xx}} + \mathrm{u_{yy}} + \mathrm{u_{zz}}) \quad (1)$$

$$\mathrm{v_t} + \mathrm{uv_x} + \mathrm{vv_x} + \mathrm{wv_z} = -\mathrm{p_y} + \nu(\mathrm{v_{xx}} + \mathrm{v_{yy}} + \mathrm{v_{zz}}) \quad (2)$$

$$\mathrm{w_t} + \mathrm{uw_x} + \mathrm{vw_y} + \mathrm{ww_z} = -\mathrm{p}_z + \nu(\mathrm{w_{xx}} + \mathrm{w_{yy}} + \mathrm{w_{zz}}) \quad (3)$$

2-Reducción a una sola ecuación.

Siendo a, b, c constantes se multiplican (1), (2) y (3) p or a, b, c respectivamente y sumando tresulta:

$$\mathrm{U_t} + \mathrm{uU_x} + \mathrm{vU_y} + \mathrm{wU_z} = -(\mathrm{ap_x} + \mathrm{bp_y} + \mathrm{cp_z}) + \nu(\mathrm{U_{xx}} + \mathrm{U_{yy}} + \mathrm{U_{zz}}) \quad (4)$$

La nueva variable U es:

$$\mathrm{U=au+bv+cw} \quad (5)$$

Una variable φ, función de x, y, z, hace posible expresar las derivadas de U como sigue:

$$\mathrm{U_x} = \mathrm{U_\varphi}\, \varphi_\mathrm{x} \qquad \mathrm{U_y} = \mathrm{U_\varphi}\, \varphi_\mathrm{y} \qquad \mathrm{U_z} = \mathrm{U_\varphi}\, \varphi_\mathrm{z} \quad (6)$$

Estas derivadas se sustituyen en (4) y resulta:

$$U_t + \mathrm{Q}\, U_\varphi = -p_\varphi(a\, \varphi_x + \mathrm{b}\varphi_y + \mathrm{c}\varphi_z) + \nu(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)\, U_{\varphi\,\varphi} \quad (7)$$

Siendo Q:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{u}\varphi_x + \mathrm{v}\varphi_y + \mathrm{w}\varphi_z \quad (8)$$

3-Ecuacion de continuidad.

$$u_x + v_y + w_z = u_\varphi \varphi_x + v_\varphi \varphi_y + w_\varphi \varphi_z = 0 \tag{9}$$

$$Q_\varphi = (u_\varphi \varphi_x + v_\varphi \varphi_y + w_\varphi \varphi_z) + (\mathrm{u}\varphi_{x\,\varphi} + \mathrm{v}\, \varphi_{y\,\varphi} + w\varphi_{z\,\varphi}) = 0 \tag{10}$$

Q es constante respecto a φ y la ecuación reducida (7) es lineal.

4-solución de la ecuación reducida (7)

Elegimos una función F(φ)

$$U_t + \mathrm{Q}\, U_\varphi = \mathrm{F}(\varphi) \tag{11}$$

$$\mathrm{F}(\varphi) = -(\mathrm{a}\varphi_x + \mathrm{b}\varphi_y + \mathrm{c}\varphi_z) p_\varphi + v(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)\, U_{\varphi\,\varphi} \tag{12}$$

Resuelta la primera ecuación la segunda se resuelve despejando p_φ y después se integra.

$$\mathrm{P} = \int p_\varphi \, d\varphi = \int p_\varphi \, \varphi_x \, dx + \int p_\varphi \, \varphi_y \, \mathrm{dy} + \int p_\varphi \, \varphi_z \, \mathrm{dz} \tag{13}$$

5-Determinar las variables u, v, w en tres dimensiones.

Con las ecuaciones que definen U y Q hay un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, habrá infinidad de soluciones dependientes de un parámetro. Se plantea el siguiente sistema en el que se incluye una tercera ecuación con λ como parámetro.

$$\mathrm{a\ u} + \mathrm{b\,v} + \mathrm{c\ w} = \mathrm{U} \tag{14}$$

$$\varphi_x\, \mathrm{u} + \varphi_y\, \mathrm{v} + \varphi_z\, \mathrm{w} = \mathrm{Q} \tag{15}$$

. $$\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{w} = \lambda \tag{16}$$

La solución del sistema es:

. $$\mathrm{u} = (\mathrm{U}(\varphi_y - \varphi_z) + \mathrm{Q}(\mathrm{c} - \mathrm{b}) + \lambda(\mathrm{b}\, \varphi_z - \mathrm{c}\, \varphi_y))/\mathrm{D} \tag{17}$$

. $$\mathrm{v} = (\mathrm{U}(\varphi_z - \varphi_x) + \mathrm{Q}(\mathrm{a\text{-}c}) + \lambda(\mathrm{c}\varphi_x - \mathrm{a}\varphi_z))/\mathrm{D} \tag{18}$$

. $$\mathrm{w} = (\mathrm{U}(\varphi_x - \varphi_y) + \mathrm{Q}(\mathrm{b} - \mathrm{a}) + \lambda(\mathrm{a}\varphi_y - \mathrm{b}\varphi_x))/\mathrm{D} \tag{19}$$

$$\mathrm{D} = \mathrm{a}(\varphi_y - \varphi_z) + \mathrm{b}(\varphi_z - \varphi_x) + c(\varphi_x - \varphi_y) \tag{20}$$

6-Observacion importante.

Se supone que u, v, w son funciones de φ pero no exclusivamente, así:

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathrm{t},\ \varphi,\ \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \tag{21}$$

Referencias.

1-William F. Hugues, Ph. D. and Jhon Brighton. Ph. D. Fluid Dinamics. Mc Graw Hill. 1967

2-Puig Adam Ecuaciones Diferenciales. Edit R. Puig 1980

3- Hunter Rouse. Hidraulica. Edit. Dossat 1960.

4-Guillermo AyalaMartínez Procedure to Solve Navier Stokes Equations. viXra2102.0075v1