

Weak metric fields in the Galilean space

Слабые метрические поля в АСО галилеева пространства

Valery Timin

Creative Commons Attribution 3.0 License

(June 28, 2021)

Russia

(Supplemented by the practical part).

In addition to the force fields defined by the scalar and vector potential fields and their strengths, it is possible to have force fields defined by rank 2 tensors, in particular, through the metric tensor $g_{ij}(r,t)$. The role of the metric tensor in the motion of a material point is that it determines the shortest trajectory between any two points of space-time along the geodesic "straight line" as a line of the shortest length. The length of the "straight line" corresponds to the length of the shortest "interval" between these points. The differential equation of this "shortest" condition is expressed in terms of the Christoffel symbols Γ^i_{jk} . In this paper, we consider the case of weak "metric" fields and velocities of motion of a material point in the Galilean metric space. The Christoffel symbols themselves and the metric field are defined as corresponding fields in the Galilean space.

In this paper, we consider the law of motion of material points in a weak metric field in the Galilean wave space.

(Дополнен практической частью).

Кроме силовых полей, задаваемых скалярным и векторным потенциальными полями и их напряжениями, возможно существование силовых полей, определяющихся тензорами ранга 2, в частности – через метрический тензор $g_{ij}(r,t)$. Роль метрического тензора в движении материальной точки заключается в том, что через него определяется кратчайшая траектория между любыми двумя точками пространства–времени по геодезической "прямой" как линии наименьшей длины. Длина "прямой" при этом соответствует длине наикратчайшего "интервала" между этими точками. Дифференциальное уравнение этого "наикратчайшего" условия выражается через символы Кристоффеля Γ^i_{jk} . В данной работе рассмотрен случай слабых "метрических" полей и скоростей движения материальной точки в галилеевом волновом пространстве. Сами символы Кристоффеля и метрическое поле определены как соответствующие поля в галилеевом пространстве.

В данной работе рассматривается закон движения материальных точек в слабом метрическом поле в галилеевом волновом пространств.

Слабые метрические поля в АСО галилеева пространства

Оглавление

1. Галилеево пространство и волновая метрика	2
1.1. Виды метрик галилеева пространства	3
"Временная" метрика	3
"Пространственная" метрика	3
"Волновое" расстояние	3
1.2. Метрика волнового галилеева пространства из движущегося ИСО	5
2. Символы Кристоффеля и геодезические в слабых метрических полях	6
2.1. Изменение скорости (ускорение) по индексу $i \neq 0$	9
2.2. Уравнение движения (ускорения) по индексу 0	10
3. Геодезическая в галилеевом пространстве	11
3.1. Понятие поля локального АСО	11
3.2. С метрическим полем при $i \neq 0$	12
Очень малые скорости: $v \ll 1$	13
3.3. С метрическим полем при $i=0$	14
Очень малые скорости: $v \ll 1$	15
4. Практические расчеты	15
4.1. Импульс звука по ветру	16
Ускорение в вертикальном направлении: $i \sim h, k \sim x$	16
Ускорение в горизонтальном направлении: $i \sim x, k \sim h$	18
4.2. Импульс звука перпендикулярно ветру	19
Ускорение в вертикальном направлении: $i \sim h, k \sim x$	19
Ускорение в горизонтальном направлении: $i \sim x, k \sim h$	19
4.3. Импульс звука в поле ускоряющегося радиального ветра	21
Импульс и ускорение в радиальном направлении: $i \sim r$	21
Импульс и ускорение в перпендикулярном к радиусу направлении: $i \sim \theta$	21
5. Выводы	22
Сокращения и другие соглашения	24
Литература	25

1. Галилеево пространство и волновая метрика

При чтении этой статьи важно понимать, что рассматривается галилеево пространство, в котором имеются не совсем интуитивно понятные моменты, относящиеся к формированию и распространению волн. Про них я писал в других своих статьях. Один из моментов – абсолютность пространства и времени и одновременно его относительность. Другой момент – это существование ИСО с возможностью движения с произвольной ничем не ограниченной (до самой бесконечности) скоростью с двумя абсолютными метриками – расстоянием и промежутками времени. И одновременное существование АСО для волновых явлений со своей метрикой, имеющей много сходства с релятивистским интервалом, но одновременно и отличающаяся от нее.

1.1. Виды метрик галилеева пространства

В галилеевом пространстве (далее – ГП) возможно применение трех видов метрик: временного, пространственного и волнового.

"Временная" метрика

соответствует промежутку времени между событиями и является вырожденной, имеет единственный ненулевой метрический элемент – G_0 или G_{00} (первый – для линейной метрики, второй – в билинейной интерпретации) – соответствующие промежутку времени в единице координатного времени:

$$\begin{aligned}d\tau &= G_0 dt, \\d\tau^2 &= G_{00} dt^2.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Ее плюсом является глобальность, т.е. она определена для любых точек. Характер метрики – линейный или билинейный.

"Пространственная" метрика

также является вырожденной, не является глобальной и имеет ненулевыми диагональные элементы G_{ij} : $i, j \in (1..3)$. При преобразованиях координат без изменения метрического тензора значение 4-мерного "расстояния" изменяется. Поэтому физически определена только на плоскости одновременности при постоянном значении координаты "время" на 3-мерной плоскости одновременности. Глобальные свойства, но с сохранением вырожденности, она имеет, если определена исключительно в АСО. Диагональность при этом теряется. Характер метрики – билинейность.

$$dl^2 = G_{ij} dr^i dr^j.\tag{1.2}$$

"Волновое" расстояние

как метрика, называемая "интервалом", представляет собой их сумму, является глобальной и не является вырожденной. Характер метрики – билинейность. Она соответствует разности фаз волнового поля эталонной частоты между двумя 4-мерными точками—"событиями" с волновым вектором, направленным в направлении от первого события ко второму. При этом она линейна и выполняется линейное соотношение между скалярной фазой φ и местом ее нахождения для линейной волны частотой ω по направлению движения c_i :

$$\Delta\varphi = 2\pi\omega c_i \Delta r^i: |c_i| = \frac{1}{c}.\tag{1.3}$$

(здесь 2π - нормирующий под количество волн в единице времени множитель, c_i – ковариантный(!) вектор скорости волны, нормирует количество волн под скорость волны). Сама волна задается уравнением:

$$A = \sin 2\pi\omega(t - c_i r^i - \varphi_0).\tag{1.4}$$

В связи с этим возникает возможность определения "волновой" метрики, обладающей определенными полезными для физики свойствами. Из этого уравнения можно найти разность координат любых двух точек по направлению распространения волны:

$$\Delta l = \frac{\Delta\varphi}{2\pi\omega} = \frac{c_i r^i}{2\pi\omega'} \quad (1.5)$$

и разность времен двух одномоментных событий

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi\omega} = \frac{ct}{2\pi\omega'} \quad (1.6)$$

И эта координата уже будет скалярным, независимым от частоты, параметром вдоль этого направления для этого направления распространения.

Для независимого от направления распространения волны определения волнового расстояния необходимо определить еще две координатные оси, перпендикулярные к x – это y и z . Они определяются с помощью этих же волн, только распространяющихся в других взаимно перпендикулярных направлениях – y и z . Их взаимная перпендикулярность определяется постоянством значений сопряженных координат на плоскости однофазности исходной координаты. После определения этих "скалярных" координат из Δx , Δy и Δz можно определить настоящий инвариантный скаляр пространственного расстояния для любых двух точек – Δl :

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (1.7)$$

Δl – это трехмерное пространственное расстояние между этими точками. Зная скорость волны c и расстояние Δl между точками, мы можем найти время Δt прохождения волной этого расстояния:

$$c\Delta t = \Delta l. \quad (1.8)$$

Следовательно, имеем следующее соотношение:

$$c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = 0. \quad (1.9)$$

О чем говорит это уравнение? Да о том, что одна и та же точка волны с одной и той же фазой при распространении вдоль направления $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ через время Δt пройдет расстояние $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. А разность фаз между этими точками будет равна нулю. Если бы кто-нибудь сидел на гребне этой волны и двигался вместе с ним, то для него "волновые часы", отсчитывающие количество "пройденных" им волн между двумя рассматриваемыми событиями, ничего бы не отсчитали, хотя "галилеевы" абсолютные часы отсчитали бы время Δt , а рулетка – расстояние Δl (см.(1.8)).

На основании последней формулы вводится понятие "интервала" Δs между произвольными точками ПВ:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \quad (1.10)$$

А это значение Δs уже обладает билинейным свойством и в точности равно изменению фазы $\Delta\varphi$ коллинеарной (касательной) движению "виртуальной" волны с частотой $\omega = 1$ (или количества волн n) на пути при движении по прямой между этими точками (точнее – событиями) ГП, или волновое расстояние между этими точками. Если у вас на руках имеются волновые часы, они покажут именно это время "s". И оно определяется исключительно через волновое АСО ГП. Это "время" в выделенном ИСО \equiv АСО ГП при

использовании волновых часов по специальной, определенной выше, процедуре. Для наблюдателя, живущего по волновым часам, это означает, что его "жизненный" цикл, или собственные внутренние часы, должны быть синхронизированы с прохождением гребней "виртуальных" эталонных волн, возбуждаемых в направлении его движения (касательных) в покоящемся АСО ГП покоящимся в ГП источником по галилеевым абсолютным часам. На деле это получается – с учетом эффекта Доплера от попутного эталонного генератора. Но это не релятивистское время СТО по Эйнштейну. Несмотря на похожесть, в СТО собственное время определяется гораздо проще и без оглядки на возможное существование АСО и от собственного генератора.

1.2. Метрика волнового галилеева пространства из движущегося ИСО

Волновое пространство может быть введено путем рассмотрения изотропного однородного ГП, заполненной упругой сплошной средой и находящейся в состоянии относительного (т.е. в среднем) покоя, в котором возможно распространение материальных волн с определенной фундаментальной "скоростью" c (она имеет единицу измерения такую же, как и у "скорости" – [ед.дл.]/[ед.вр.]). Здесь и далее, если не оговорено иное, значение фундаментальной "скорости" c примем за единицу: $c = 1$.

Волновое галилеево (далее – ВГП) пространство с метрикой g_{ij} является ортонормированным только в одной выделенной как "покоящаяся" с.о., которая соответствует АСО:

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

и не может быть ортонормированным в общем случае в силу того, что ее волновой "интервал" при галилеевых преобразованиях координат становится не ортонормированным в силу "косоугольности" галилеевых преобразований координат. И нет никакого способа исправить это положение при сохранении ее галилеевой абсолютности при галилеевых преобразованиях координат. Это видно из изменения волновой метрики в таком пространстве при галилеевых преобразованиях. Выведем это изменение.

Пусть имеется ГП. И есть однородная изотропная сплошная среда, движущаяся в ГП со скоростью V^i . В этом пространстве для распространяющихся в сплошной среде волн выполняется волновое уравнение:

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = \Delta s^2. \quad (1.12)$$

Выразим параметры со штрихом в исходной не штрихованной системе отсчета¹

$$\begin{cases} t' = t - t_{(0)} \\ r'^i = r^i - r_{(0)}^i - V^i t \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} dt' = dt \\ dr'^i = dr^i - V^i dt \end{cases} \rightarrow$$

¹ В формулах **Ошибка! Источник ссылки не найден.** намеренно не соблюдаются правила для обозначения верхних и нижних положений индексов при элементах тензоров.

$$\begin{aligned}
 \Delta s^2 &= \Delta s'^2 = c^2 dt'^2 - dr'^i{}^2 = \\
 &= c^2 dt^2 - (dr^i - V^i dt)^2 = \\
 &= c^2 dt^2 - dr^{i^2} + 2V^i dr^i dt - (V^i dt)^2 = \\
 &= (c^2 - V^i{}^2) dt^2 + 2V^i dt dr^i - dr^{i^2}.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Это выражение для волнового "интервала" в не штрихованной ИСО соответствует следующей метрике:

$$G_{ij} \sim \begin{pmatrix} c^2 - V^2 & V_{0j} \\ V_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c^2 - V^2 & V_j \\ V_i & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Здесь численно элементы V_i и V_j равны скорости V АСО. При равенстве единице фундаментального параметра c метрический тензор следующий:

$$G_{ij} \sim \begin{pmatrix} 1 - V^2 & V_j \\ V_i & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Здесь: $V_{i0} \sim V_{0j}$, V – (с соответствующими индексами из (1.15)) – контравариантная скорость сопутствующего АСО ГП. Значение $1 - V^2 = 1 + V_i V^i$ при этом не является скаляром – всего лишь элемент тензора. Знак \sim – знак численного равенства. Не диагональные члены ответственны за не ортогональность получающейся метрики. Из (1.15) также видно, что с.к. при этом остается в 4-мерном представлении равнообъемной. При этом использование ортонормированного пространства остается возможным – но это будет уже не галилеевым, а релятивистским (точнее и как минимум – дорелятивистским в пределе малых скоростей) пространством.

Физически галилеево преобразование координат волнового пространства можно интерпретировать как рассмотрение распространения волн в стационарной однородной изотропной сплошной волновой среде как АСО с т.з. движущейся относительно нее наблюдателя другого ИСО. А выше представленная метрика (1.15) просто будет учитывать различные значения скорости распространения волны в различных направлениях с т.з. наблюдателя ИСО.

Как видно из уравнения (1.14), волновое пространство произвольно движущейся сплошной среды является псевдоримановым пространством, не сводимым к плоскому ГП. Не смотря на то, что фоновое пространство, в котором существует сплошная среды – плоское ГП.

2. Символы Кристоффеля и геодезические в слабых метрических полях

При движении м.т. по наикратчайшему пути в римановом пространстве с произвольной метрикой G_{ij} и аффинной связностью (символами Кристоффеля второго рода) Γ^i_{kl} должно выполняться уравнение для траектории как для геодезической:

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{kl}^i v^k v^l &= 0 \rightarrow \\ \frac{dv^i}{dt} &= -\Gamma_{kl}^i v^k v^l. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь v^i – скорость м.т. по интервалу мировой линии м.т.: $v^i = dq^i/ds$,

dt – дифференциал интервала вдоль мировой линии пространства. Движение вдоль мировой линии по этому параметру предполагает, что время движения по геодезической (прямой риманова пространства) будет минимальным. Для произвольного пространства вместо нее необходимо принимать интервал собственного времени вдоль мировой линии.

Тензор аффинной связности Γ_{kl}^i (или символы Кристоффеля) риманова пространства с метрикой G_{ij} определяется следующей формулой:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} G^{im} \left(\frac{\partial G_{mk}}{\partial q^l} + \frac{\partial G_{ml}}{\partial q^k} - \frac{\partial G_{kl}}{\partial q^m} \right). \quad (2.2)$$

Далее будем рассматривать слабые до первых производных² метрические поля G_{im} в ГП, состоящей из двух слагаемых – единичного псевдотензора и малой добавки:

$$\begin{aligned} G_{im} &= E_{im} + g_{im}: \forall i, m: (i, k, l, m \in \{0..3\}). \\ G^{im} &= E^{im} + g^{im}: \forall i, m: (i, k, l, m \in \{0..3\}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь E_{im} – единичный псевдометрический тензор плоского ВГП:

$$E^{im} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta^{im} \end{pmatrix} = E_{im}, \quad (2.4)$$

g_{im} – малое отклонение метрического тензора от ортонормированного: $|g_{im}| \ll 1$:

$$E^i_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^{im} \end{pmatrix} = \delta^i_m, \quad (2.5)$$

Метрический тензор пространственной части волнового пространства представляет собой метрику плоского евклидова пространства:

$$\delta^{im} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \delta_{im}. \quad (2.6)$$

Знак " \sim " есть знак численного равенства. Учитывая, что частная производная от постоянного тензора E_{im} тождественно равна нулю, символы Кристоффеля и коэффициенты связности (2.2) пространства с данной метрикой будут следующими:

² Точнее, слабость определяется бесконечной малостью значений по сравнению с единицей элементов уравнения (2.1).

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} (E^{im} + g^{im}) \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m} \right). \quad (2.7)$$

Предполагая слабость метрического поля и его производных: $|g_{im}| \ll 1$, выражение для расчета коэффициентов связности можем записать в следующем более простом виде:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} E^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E^{im} g_{mk}}{\partial q^l} + \frac{\partial E^{im} g_{ml}}{\partial q^k} - \frac{E^{im} \partial g_{kl}}{\partial q^m} \right). \quad (2.8)$$

Далее производим свертку выражений $E^{im} g_{mk}$ по соответствующим индексам. Для этого в этом выражении отделим элементы со значением индекса 0 от остальных. С учетом этого, можем записать следующие равенства:

$$\begin{aligned} E^{im} g_{mk} &= g^i_k \rightarrow \\ &\begin{pmatrix} 1^{00} & 0^{0m} \\ 0^{i0} & -\delta^{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0k} \\ g_{m0} & g_{mk} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} g^0_0 & g^0_k \\ -\delta^{im} g_{m0} & -\delta^{im} g_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^0_0 & g^0_k \\ g^i_0 & g^i_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0k} \\ -g_{i0} & -g_{ik} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Упростим (2.8) еще больше, развернув ее, учитывая (2.9), и что $g_{im} \ll 1$:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^k} - E^{im} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m} \right). \quad (2.10)$$

Изменение скорости м.т. в соответствии с (2.1) и (2.10) с разделением по индексу $i = 0$ и $i \neq 0$, уравнения (2.1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dv^0}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^0_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial q^k} - E^{0m} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m} \right) v^k v^l \\ \frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^k} - E^{im} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m} \right) v^k v^l \\ i \in \{1..3\}, k, l, m \in \{0..3\}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Распишем эти уравнения более подробно с целью их упрощения:

$$\begin{cases} \frac{dv^0}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^0_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial q^k} - \left(E^{00} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^0} + E^{01} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^1} + E^{02} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^2} + E^{03} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^3} \right) \right) v^k v^l, \\ \frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^k} - \left(E^{i0} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^0} + E^{i1} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^1} + E^{i2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^2} + E^{i3} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^3} \right) \right) v^k v^l, \\ i \in \{1..3\}, k, l \in \{0..3\}. \end{cases} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} \frac{dv^0}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^0_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial q^k} - E^{(0,0)} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^0} \right) v^k v^l; E^{(0,0)} = 1, \\ \frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^k} - E^{(i,i)} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} \right) v^k v^l; E^{(ii)} = -1, \end{cases} \rightarrow \\
 &= \begin{cases} \frac{dv^0}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^0_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^0} \right) v^k v^l, \\ \frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} \right) v^k v^l, \end{cases} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Тривиально уравнения (2.12) выполняются при выполнении условия $g_{kl} = \text{const}$, что соответствует прямолинейному и равномерному движению м.т. в пространстве–времени, в соответствии с первым законом Ньютона. А также при выполнении условия $v^i = 0$, что также соответствует первому закону Ньютона – тело сохраняет состояние покоя. В любом другом случае м.т. не сможет сохранить свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

2.1. Изменение скорости (ускорение) по индексу $i \neq 0$

Рассмотрим уравнение (2.11):2 для случая значений индекса $i \neq 0$. Для индекса $i \neq 0, l, k, m \in \{0..3\}$ уравнение (2.11):2 записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^k} - E^{im} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m} \right) v^k v^l \rightarrow \\ i \neq 0; k, l, m \in \{0..3\}. \end{cases} \quad (2.11):2$$

Распишем это же уравнение для пространственных индексов с выделением из них элементов с индексом 0: $i, l, k, m \in \{1..3\}$:

$$\frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\left(\frac{\partial g^i_0}{\partial q^0} + \frac{\partial g^i_0}{\partial q^0} - E^{i0} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^0} - E^{(ii)} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^i} \right) v^0 v^0 + \left(\frac{\partial g^i_0}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^0} - E^{i0} \frac{\partial g_{0l}}{\partial q^0} - E^{(ii)} \frac{\partial g_{0l}}{\partial q^i} \right) v^0 v^l \\ &+ \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^0} + \frac{\partial g^i_0}{\partial q^k} - E^{i0} \frac{\partial g_{k0}}{\partial q^0} - E^{(ii)} \frac{\partial g_{k0}}{\partial q^i} \right) v^k v^0 + \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^k} - E^{i0} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^0} - E^{(ii)} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} \right) v^k v^l \end{aligned} \right].$$

Красным цветом выделены элементы (а также и в дальнейшем), в сумме дающие значение 0. Причина – то, что при $i \neq m$ $E^{i0} \equiv 0$. Также имея в виду, что при $i \neq 0$ $E^{(ii)} = -1$, имеем следующий результат:

$$\frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\left(\frac{\partial g^i_0}{\partial q^0} + \frac{\partial g^i_0}{\partial q^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial q^i} \right) v^0 v^0 + \left(\frac{\partial g^i_0}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial q^i} \right) v^0 v^l \\ &+ \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^0} + \frac{\partial g^i_0}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial q^i} \right) v^k v^0 + \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} \right) v^k v^l \end{aligned} \right]. \quad (2.13)$$

Цветным выделены подобные члены. При условии очень малых скоростей $v^k v^l \ll v^k (v^l) \ll 1$, последнюю строку уравнения (2.13) для скорости v^i можно проигнорировать и все уравнение переписать в виде

$$\frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^i} \right) v^0 + \left(\frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^l} + \frac{\partial g^i_l}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial \alpha^i} \right) v^l + \left(\frac{\partial g^i_k}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial \alpha^i} \right) v^k \right) v^0 \rightarrow$$

Заменив исчезающие при свертке индексы k на l , и объединив последние две скобки, имеем:

$$\frac{dv^i}{dt} = - \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^0} \right) v^0 + \left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial g^i_k}{\partial \alpha^0} \right) v^k \right] v^0. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) состоит из двух частей: скалярной – не зависящей от скорости м.т., и не скалярной – зависящей от скорости м.т.

Перегруппировав элементы уравнения (2.14), ее можно переписать в несколько в ином виде:

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} &= - \left[\left(\frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^0} v^0 + \frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^k} v^k \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^i} v^0 + \left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g^i_k}{\partial \alpha^0} \right) v^k \right] v^0 = \\ &= - \left[\frac{dg^i_0}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^i} v^0 + \left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g^i_k}{\partial \alpha^0} \right) v^k \right] v^0 \rightarrow \\ \frac{d(v^i + g^i_0)}{dt} &= \frac{dv^{*i}}{dt} = - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^i} v^0 + \left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g^i_k}{\partial \alpha^0} \right) v^k \right) v^0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Это уравнение говорит о том, что изменение скорости м.т. в локальной АСО равно этому выражению. А именно – изменение скорости м.т. в локальной АСО также состоит из двух частей – скалярной и не скалярной, но более простыми в написании.

2.2. Уравнение движения (ускорения) по индексу 0

Для индекса $i = 0$; $k, l, m \in \{0..3\}$ уравнение (2.11):1 имеет вид:

$$\frac{dv^0}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^0_k}{\partial \alpha^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial \alpha^k} - E^{0m} \frac{\partial g_{kl}}{\partial \alpha^m} \right) v^k v^l. \quad (2.11):1$$

$l, k, m \in \{0..3\}.$

Аналогично предыдущему разделу, распишем это же уравнение для пространственных индексов с выделением из них элементов с индексом 0: $l, k, m \in \{1..3\}$:

$$\frac{dv^{i=0}}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial g^0_0}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial g^0_0}{\partial \alpha^0} - E^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^0} - E^{(0m)} \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^m} \right) v^0 v^0 + \left(\frac{\partial g^0_0}{\partial \alpha^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial \alpha^0} - E^{00} \frac{\partial g_{0l}}{\partial \alpha^0} - E^{(0m)} \frac{\partial g_{0l}}{\partial \alpha^m} \right) v^0 v^l \right] + \left[\left(\frac{\partial g^0_k}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial g^0_0}{\partial \alpha^k} - E^{00} \frac{\partial g_{k0}}{\partial \alpha^0} - E^{(0m)} \frac{\partial g_{k0}}{\partial \alpha^m} \right) v^k v^0 + \left(\frac{\partial g^0_k}{\partial \alpha^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial \alpha^k} - E^{00} \frac{\partial g_{kl}}{\partial \alpha^0} - E^{(0m)} \frac{\partial g_{kl}}{\partial \alpha^m} \right) v^k v^l \right].$$

Для $i = 0$ с учетом $E_{0m} = 0$ (выделены красным цветом) имеем:

$$\frac{dv^{i=0}}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial g^0_0}{\partial t^0} + \frac{\partial g^0_0}{\partial t^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial t^0} \right) v^0 v^0 + \left(\frac{\partial g^0_0}{\partial r^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial t^0} - \frac{\partial g_{0l}}{\partial t^0} \right) v^0 v^l \\ & + \left(\frac{\partial g^0_k}{\partial t^0} + \frac{\partial g^0_0}{\partial r^k} - \frac{\partial g_{k0}}{\partial t^0} \right) v^k v^0 + \left(\frac{\partial g^0_k}{\partial r^l} + \frac{\partial g^0_l}{\partial r^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial t^0} \right) v^k v^l \end{aligned} \right]. \quad (2.16)$$

Красным цветом здесь выделены элементы, в сумме дающие нулевое значение. Эти сокращения возможны в силу численного равенства элементов изменения метрического тензора g^0_0 и g_{00} , g^0_l и g_{0l} (см. (2.9)). При условии очень малых скоростей $v^k v^l \ll v^k$ ($v^l \ll 1$), последнюю строку уравнения (2.16) для скорости v^i также можно игнорировать и уравнение переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv^{i=0}}{dt} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^0_0}{\partial t^0} v^0 + \frac{\partial g^0_0}{\partial r^l} v^l + \frac{\partial g^0_0}{\partial r^k} v^k \right) v^0. \\ &= -\left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^0_0}{\partial t^0} v^0 + \frac{\partial g^0_0}{\partial r^k} v^k \right) v^0 = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Или в более привычном для механика виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial g^0_0}{\partial t^0} v^0 + \frac{\partial g^0_0}{\partial r^k} v^k &= 0 \rightarrow \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^0_0}{\partial t^0} v^0 + \frac{\partial g^0_0}{\partial r^k} v^k \right) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g^0_0}{\partial r^k} v^k \rightarrow \\ \frac{dg^0_0}{dt} &= -\frac{\partial g^0_0}{\partial r^k} v^k. \end{aligned} \quad (2.18)$$

С т.з. классической ньютоновой механики последняя формула является выражением закона сохранения энергии или ее взаимоперехода между потенциальной и кинетической энергиями в результате работы поля над волновым телом: изменение потенциальной энергии равно работе над телом по траектории..

3. Геодезическая в галилеевом пространстве

3.1. Понятие поля локального АСО

Здесь я ввожу понятие метрического поля в плоском волновом галилеевом пространстве на примере произвольно движущейся сплошной среды, выступающей как бы в роли всем известного, но никому не доступного "эфира" или "вакуума" как модели. Поле предполагает, что сплошная среда в ГП в каждой своей точке с т.з. галилеева наблюдателя имеет свое значение скорости движения: $V = V(t, r)$. В этом смысле абсолютное глобальное АСО как бы отходит на второй план, переходя в локальное свойство, и любые ИСО становятся равноправными и не выделенными. В этом плане можно будет рассмотреть движение волновой материальной точки³ по законам геометрии пространства-времени в метрическом поле $V(t, r)$, от которого зависит локальная метрика (1.15) в каждой точке пространства с т.з. галилеева наблюдателя. А саму локальную метрику каждой точки ПВ можем назвать гравитационным полем, т.к. движение этой точки будет происходить по

³ Волновая материальная точка – материальная точка, как бы состоящая из локализованных каким либо

геодезической прямой в этой получающейся "геометрии". Объединяем как бы невозможные вещи: плоское ГП и риманово волновое поле модельной с.с. в ней. Т.к. принято, что ньютонову механику, определенную в ГП, имеет смысл применять только при достаточно малых скоростях, то и это "гравитационное поле" необходимо применять при этих же малых скоростях и применять к нему термин "слабое гравитационное поле". Гравитационное и метрическое в этом случае будут синонимами в том смысле, что и то и другое "действуют" на м.т. независимо от ее массы и других ее параметров. Просто действуют на м.т. как на "объект действия".

В качестве модельного волнового пространства со слабым метрическим полем и малыми скоростями возьмем плоское ГП, в каждой точке которого определено некоторое локальное волновое АСО с относительной скоростью V от базового и с фундаментальной скоростью, равной 1 (единице). Это ГВП определяется локальной метрикой (1.15), зависящей от координаты.

При галилеевых преобразованиях координат волновая метрика изменяется в соответствии с уравнениями (1.15), (2.9). Поэтому имеем:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V^2 & V_{0j} \\ V_{i0} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -V^2 & V_j \\ V_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15)^*$$

$$g^i_j = \begin{pmatrix} g^0_0 & g^0_j \\ g^i_0 & g^i_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V^2 & V^0_j \\ V^i_0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -V^2 & V_j \\ V^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)^*$$

Здесь надо иметь ввиду, что численно $V_{0i} = V_{i0} \sim -V^i_0$. А в уравнениях (2.12) должны быть удалены элементы g_{kl} : $k, l \neq 0$, равные нулю в соответствии с (1.15).

3.2. С метрическим полем при $i \neq 0$

Для ГП из $(v^0 = 1) \rightarrow (w^0 = 0)$, и $g_{il} = 0$ для $i, l \neq 0$. В этом случае уравнение (2.14) для индекса $i \neq 0$:

$$\frac{dv^i}{dt} = - \left[\left(\frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^0} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^i} \right) v^0 + \left(\frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial g^i_k}{\partial \alpha^0} + \frac{\partial g_{0k}}{\partial \alpha^i} \right) v^k \right] v^0 \quad (2.14)$$

переписывается в следующем виде:

$$\frac{dv^i}{dt} = - \left[\left(\frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^0} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha^i} \right) v^0 + \left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g^i_0}{\partial \alpha^k} \right) v^k \right] v^0 = 0. \quad (3.1)$$

При галилеевых преобразованиях координат волновая метрика пространства изменяется в соответствии с (2.9) и (1.15). Подставляя эти элементы в уравнение (3.1), имеем:

$$\frac{dv^i}{dt} = - \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{V}^2}{\partial \alpha^i} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_k}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial \alpha^k} \right) v^k \right]. \quad (3.2)$$

Т.к. численно $V^i \sim -V_i$, то (3.2) можно переписать в антисимметричном виде:

$$\frac{dv^i}{dt} = - \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{V}^2}{\partial \alpha^i} \right) + \left(-\frac{\partial \mathcal{V}^k}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial \alpha^k} \right) v^k \right]. \quad (3.3)$$

В уравнении (3.2) имеются два члена, влияющих на движение м.т.

Первый член не зависит от скорости м.т. и сам состоит из двух элементов. Первый элемент соответствует половине квадрата скорости v_{0l} местной сопутствующей АСО в некоторой заранее выбранной в качестве "исходной", "первоначальной", "покоящейся" "глобальной" АСО. По аналогии с потенциальным полем φ в ньютоновой механике, этот член, равный половине от v_{0j}^2 , можно считать "скалярным" потенциальным силовым полем, соответствующее скорости v_{0j} местной сопутствующей АСО. Второй элемент, равный v_{0j} , соответствует некоторому "векторному" потенциальному полю.

Второй член уже зависит от скорости м.т. и задает изменение скорости от "вихревого" ("магнитного") потенциала V_{i0} и скорости v^i тела

Обозначив элемент $V^2/2$ как потенциал φ , (3.3) переписывается в виде:

$$\frac{dv^i}{dt} = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^i} - \frac{\partial v^i}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v^k}{\partial r^i} - \frac{\partial v^i}{\partial r^k} \right) v^k \right] : \varphi = \frac{V^2}{2}. \quad (3.4)$$

Из этой формулы видно, что ускорение измеряется в м/с^2 , как и должно быть.

Ускорение м.т. за счет пространственной части метрики g_{kl} будет нулевым в силу тождественного ее равенства нулю.

Уравнение (3.4), перегруппировав элементы (подобно (2.15)), можно переписать в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} &= \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^i} - \frac{\partial v^i}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v^k}{\partial r^i} - \frac{\partial v^i}{\partial r^k} \right) v^k \right] \rightarrow \\ \frac{dv^i}{dt} &= \left[- \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial r^k} v^k \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^i} + \frac{\partial v^k}{\partial r^i} \right) v^k \right] = \\ &= \left[- \frac{dV^i}{dt} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^i} + \frac{\partial v^k}{\partial r^i} \right) v^k \right] \rightarrow \\ \frac{d(v^i + V^i)}{dt} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^i} + \frac{\partial v^k}{\partial r^i} v^k \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Это уравнение говорит о том, что изменение скорости м.т. в локальном АСО соответствует этому уравнению.

Очень малые скорости: $v \ll 1$

При условии игнорирования скоростью при расчетах ускорения, что осуществляется в классической механике при изучении законов всемирного гравитационного притяжения, уравнение (3.4) для ускорения упрощается:

$$\frac{dv^i}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^i} - \frac{\partial v^i}{\partial t} \right). \quad (3.6)$$

Здесь, кроме ускорения, определяемого скалярным полем $\varphi = V^2/2$, имеется еще одно, векторное поле, которое компенсирует появляющиеся при преобразованиях координат (перехода в ИСО) фиктивные силы "векторного" потенциального поля V^i . В стационарном метрическом поле градиент векторного поля отсутствует, поэтому остается только "скалярная" часть метрического поля ускорения:

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial r^i} \quad (3.7)$$

А т.к. при рассмотрении консервативной системы взаимодействующих м.т. в обобщенных координатах поле взаимодействия стационарно, то осуществляется именно это уравнение, несмотря на то, что потенциально имеется и векторная часть силового поля. Поле $\varphi = v^2/2$ в этом случае можно считать скалярным потенциальным полем. В качестве примера такого поля можно отослать на гравитационное поле Всемирного тяготения Ньютона.

При взаимодействии в не стационарном поле необходимо учитывать наличие и векторной части поля взаимодействия.

3.3. С метрическим полем при $i = 0$

Для ГП при $i = 0, l, k \neq 0$ должно выполняться уравнение (2.17):

$$\frac{dv^{i=0}}{dt} = - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^0_0}{\partial t^0} v^0 + \frac{\partial g^0_0}{\partial r^k} v^k \right) v^0 = 0. \quad (2.17)$$

Подставляя значения элементов метрического тензора из (1.15), с учетом (2.9), получим:

$$\frac{dv^{i=0}}{dt} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{V}^2}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{\partial r^k} v^k \right) = 0. \quad (3.8)$$

Выполним некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{V}^2}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{\partial r^k} v^k &= 0 \rightarrow \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{V}^2}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{\partial r^k} v^k \right) &= - \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial r^k} v^k \rightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{dV^2}{dt} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial r^k} v^k. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Это уравнение говорит о законе перехода "энергии" потенциального поля ускорения в "работу" "силы" ускорения на участке траектории по изменению ее "кинетической" "энергии" классической механики, но без учета массы м.т. При этом эта "работа" производится исключительно "энергией" ускоряющего поля, а не вихревой ее части. Изменение "потенциальной" энергии $-d(V^2/2)$ равно "работе" "силы" dA на участке траектории:

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} \frac{V^2}{2} dt &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{V}^2}{\partial r^k} v^k dt \rightarrow \\ d\varphi &= F_k v^k dt = F_k dr^k = dA. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Сила, действующая на м.т. единичной массы и производящая работу, определяется из (3.10):

$$F_k = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x^k}. \quad (3.11)$$

В этом виде закон изменения скорости по нулевой координате представляет собой закон перехода "потенциальной" "энергии" в "кинетическую".

Очень малые скорости: $v \ll 1$

В этом случае скоростями v^i можно пренебречь, и (3.8) еще более упростится:

$$\frac{dv^{i=0}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial t} = 0. \quad (3.12)$$

Это уравнение говорит только о том, что при очень малых скоростях м.о. потенциальное поле g^0 не должно явно зависеть от времени, что достигается очень малыми изменениями поля во времени. Т.е. поле является практически стационарным или приводится к нему. В этом случае мы не можем иметь формулу действующей на м.т. силы подобно (3.11).

4. Практические расчеты

Запишем формулу (3.4) в эталонных единицах измерения – метрах и секундах. Для этого заменим φ на φ'/c^2 , V и v на V'/c и v'/c , где c - скорость распространения волны. t останется без изменений:

$$\frac{dv^i}{dt} = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{\partial V^i}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^i} - \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \right) v^k \right] : \varphi = \frac{V^2}{2} \rightarrow \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} &= \left[\left(\frac{\partial \frac{\varphi'}{c^2}}{\partial \frac{x^i}{c}} - \frac{\partial \frac{V'^i}{c}}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \frac{V'^k}{c}}{\partial \frac{x^i}{c}} - \frac{\partial \frac{V'^i}{c}}{\partial \frac{x^k}{c}} \right) \frac{v^k}{c} \right] = \\ &= \left[\left(\frac{\partial \frac{\varphi'}{c^2}}{\partial \frac{x^i}{c}} - \frac{1}{c} \frac{\partial V'^i}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial V'^k}{\partial x^i} - \frac{\partial V'^i}{\partial x^k} \right) v'^k \right] = \\ &= \frac{1}{c} \left[\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x^i} - \frac{\partial V'^i}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial V'^k}{\partial x^i} - \frac{\partial V'^i}{\partial x^k} \right) v'^k \right]. \end{aligned}$$

Здесь $c = c/l = 1/(3 \cdot 10^8)$ численно равен скорости распространения волны, но не имеет единицы измерения. Поэтому из этой формулы видно, что ускорение измеряется в m/c^2 , как и должно быть, и по сравнению с нормированными эталонами вычисленное эталонное ускорение в реальных единицах измерения необходимо умножить на эталонную фундаментальную скорость распространения волны:

$$\frac{dv'^i}{dt'} = c \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{\partial V^i}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^i} - \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \right) v^k \right]. \quad (4.1)$$

Рассмотрим пример с переменным по высоте горизонтальным ветром.

Имеется статическая воздушная среда, скорость звука 300 м/с. Пространство –

двухмерное: горизонталь и вертикаль. Направление x – по горизонтали. Направление h – снизу вверх (см. рисунок ниже) – по вертикали. Скорость ветра изменяется с высотой или по горизонтали от нуля ($\varphi = 0$) до +10 м/с на высоте/расстоянии +1000 м. "Материальной точкой" является импульс звука, направленный в определенном направлении относительно поверхности – по вертикали или горизонтали. Ускорение также рассчитывается по горизонтали и вертикали. Гравитация по Ньютону, естественно, игнорируется.

Перепишем уравнение (4.1) с расшифровкой для двух произвольных ортогональных, но конкретных, вполне определенных для каждого случая, направлений – i и k . i – индекс, по которому вычисляется ускорение. k – свободный индекс от 1 до 3, пробегающий все возможные пространственные направления.

$$\begin{aligned} \frac{dv'^i}{dt'} &= c \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^i} - \frac{\partial v^i}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial v^i}{\partial r^k} - \frac{\partial v^k}{\partial r^i} \right) v^k \right] = \\ &= c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^i} + \left(\frac{\partial v^k}{\partial r^i} - \frac{\partial v^i}{\partial r^k} \right) v^k \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Красным выделены элементы, имеющие нулевое значение для нашего конкретного случая. Эти элементы равны нулю в силу статичности ситуации

4.1. Импульс звука по ветру

Для нашей ситуации – импульс звука посылается туда же, куда и ветер. А ветер движется без ускорения по горизонтали, но с переменной скоростью по высоте. Ускорение будем искать отдельно в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Ускорение в вертикальном направлении: $i \sim h$, $k \sim x$

"Материальной точкой" является импульс звука, направленный в определенном направлении относительно поверхности по направлению $k \sim x$ – вдоль ветра, по горизонтали со скоростью $v^x \sim c$. Подставим эти значения для индексов в формулу (4.2) для $h = 0$ м и вычислим:

$$\begin{aligned} \frac{dv'^h}{dt'} &= c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^h} + \left(\frac{\partial v^x}{\partial r^h} - \frac{\partial v^h}{\partial r^x} \right) v^x \right) = \\ &= c \left[\frac{\partial}{\partial r^h} \frac{(V^h)^2 + (V^x)^2}{2} + \frac{\partial (V^{0h}h)}{\partial r^h} v^x \right] = c \left[\left(\frac{\partial}{\partial r^h} \frac{(V^{0h}h)^2}{2} \right) + \frac{\partial (V^{0h}h)}{\partial r^h} v^x \right] = \\ &= c [(V^{0h})^2 h + V^{0h} v^x] = c V^{0h} (V^{0h} h + v^x) = c V^{0h} v^x = \\ &= 300 \frac{10}{1000} 1 = -3 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Первые два выделения красным равны нулю в силу отсутствия вертикальной скорости ветра, остальные два – высота движения луча h – равны нулю. В результате имеем, что звуковой импульс при движении по горизонтали отклоняется вниз с ускорением⁴ 3 м/с. Если бы не элемент $(V^{0h})^2 h$, то волна так и продолжала бы двигаться с рассчитанным

⁴ Замечание по области применения данного расчета (и следующих) относится к малости по сравнению с единицей как скорости среды V , так и скорости м.о. v , а точнее – ко всем слагаемым в скобках уравнения (3.15). Это означает, что на большой высоте и при больших градиентах скорости данный расчет уже не может считаться адекватным (см. также сноску к главе "Символы Кристоффеля и геодезические в слабых метрических полях").

постоянным ускорением, но этот элемент меняет картину движения при больших отклонениях направления движения импульса со временем, т.к. скорость импульса должна делиться между горизонтальным и вертикальным направлениями движения, с тем, чтобы

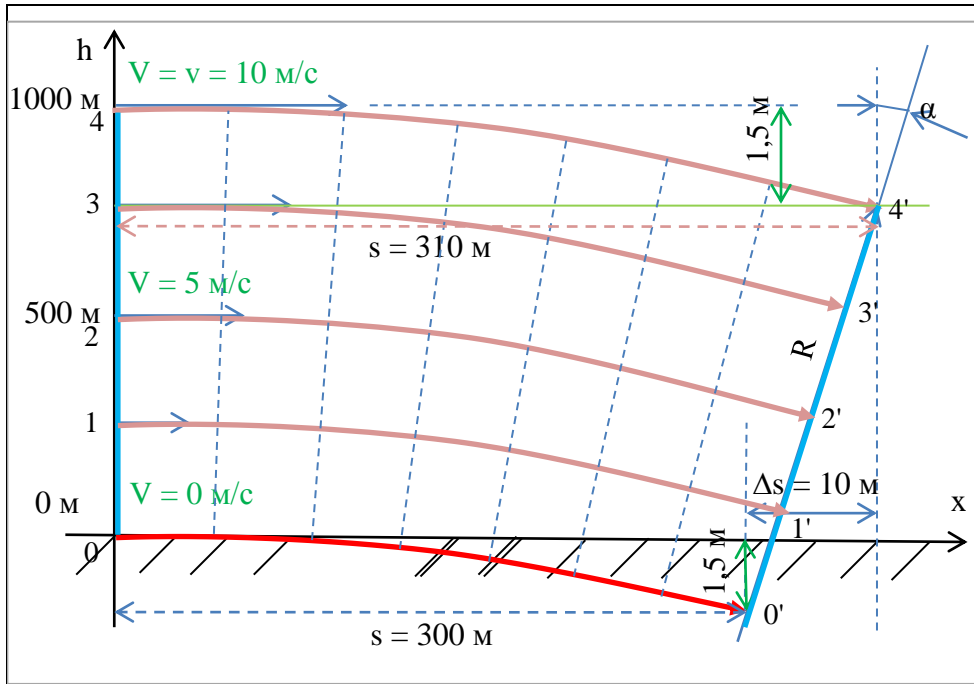


Рисунок 4.1

К геометрическому расчету движения горизонтального луча в поле ветра с изменяющейся с высотой скоростью.

абсолютная скорость импульса оставалась равной фундаментальной скорости звука $c = 300$ м/с что ведет к уменьшению вертикального ускорения⁵.

Для независимой проверки результата сделаем геометрическую интерпретацию результата. На рисунке ниже показана схема для независимого расчета падения звукового луча в неоднородном поле ветра на поверх-

ности Земли при нулевой вертикальной скорости импульса звуковой волны. Рисунок схематический, без учета масштабов. Красными дугами показаны траектории звуковых лучей. Т.к. верхний луч по ветру на высоте 1 км движется быстрее, то она за 1с пройдет 310 м. Нижний луч, соответственно, пройдет расстояние 300 м. В соответствии с законом распространения волн Гюйгенса фронт широкой волны на всю рассматриваемую высоту (выделен голубым цветом) должен менять свое направление распространения. Это видно по изменению положения фронта волны от начала до конца секундной траектории: угол его наклона к вертикали в конце траектории составляет α .

Для геометрических расчетов отклонения луча дуги считаем как дуги окружностей. Из геометрии рассматриваемого рисунка можно сделать расчетное соотношение:

$$\frac{R}{s} = \frac{h}{\Delta s}. \quad (4.4)$$

Из этого соотношения найдем радиус получающейся дуги:

$$R = \frac{h \cdot s}{\Delta s} = \frac{1000 \cdot 300}{10} = 30000 \text{ м}. \quad (4.5)$$

Зная радиус кривизны и скорость луча, из известного закона для ускорения движущегося по окружности тела можем рассчитать вертикальное ускорение луча:

⁵ Это замечание с таким элементом относится и к дальнейшим примерам.

$$w = \frac{V^2}{R} = \frac{300^2}{30000} \sim 3,0 \text{ м/с}^2. \quad (4.6)$$

Результат налицо – полученное независимое значение ускорения совпадает с полученным из метрических соображений (4.2).

Внимательный читатель может заметить, что с увеличением высоты отправки звукового луча радиус кривизны увеличивается (с м.). Следовательно, возможно изменение ускорения падения луча. Учтем этот эффект. Для проверки наличия этого эффекта этого воспользуемся этой же формулой. Для высоты 1000 м имеем:

$$\begin{aligned} w &= \frac{(V + V^{0h}h)^2}{(R + h)} = \frac{(300 + 0,01 \cdot 1000)^2}{(30000 + 1000)} = \\ &= \frac{(310)^2}{31000} = 3,1 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Действительно, этот эффект имеется в геометрическом исполнении. И этот эффект вполне подтверждается "теоретическим" уравнением (4.3):

$$\begin{aligned} \frac{dv'^h}{dt'} &= cV^{0h}(V^{0h}h + v^x) = \\ &= 300 \frac{10}{1000} \left(0,01 \cdot \frac{1000}{300} + \frac{310}{300} \right) = \\ &= \frac{10}{1000} (10 + 310) = 3,2 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Сравнивая (4.7) и (4.8), видим, что теория дает вдвое большее отклонение для звукового луча. Ситуация практически та же, что с отклонением света Солнцем теоретический результат по ОТО А.Эйнштейна (и практический) вдвое больше расчетного отклонения по законам Ньютона. Если бы вместо луча использовали другой объект со скоростью движения значительно меньше c , то результат был бы вдвое меньше – в полном соответствии с Ньютоном – за счет малой горизонтальной скорости v^x .

Ускорение в горизонтальном направлении: $i \sim x, k \sim h$

Имеется та же статическая воздушная среда, скорость звука 300 м/с, скорость ветра изменяется с высотой от нуля на поверхности до +10 м/с на высоте +1000 м. "Материальной точкой" является импульс звука, направленный вдоль поверхности по направлению k – вдоль ветра по горизонтали со скоростью $v^x \sim c$. Направление $i \sim x$ – горизонтально (см. рисунок ниже). Гравитация игнорируется. Подставим эти значения в (4.2) и вычислим:

$$\begin{aligned} \frac{dv'^x}{dt'} &= c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial V^h}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial h} \right) v^h \right) = \\ &= -c \frac{\partial V^x}{\partial h} v^h = -c \frac{\partial V^{0h}h}{\partial h} v^h = -cV^{0h}v^h = \\ &= 300 \frac{10}{1000} \cdot 0 = 0 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В результате имеем, что звуковой импульс при движении по ветру не получает никакого

ускорения "по ветру" и движется с ускорением 0 м/с.

4.2. Импульс звука перпендикулярно ветру

Для нашей ситуации – импульс звука посылается вертикально вверх.

Имеется статическая воздушная среда, скорость звука 300 м/с, скорость ветра изменяется с высотой от нуля ($\varphi = 0$) на поверхности до +10 м/с на высоте +1000 м. Направление h – снизу вверх (см. рисунок ниже). Направление x – по горизонтали. Гравитация по Ньютону, естественно, игнорируется. "Материальной точкой" здесь, как и ранее, является импульс звука, направленный перпендикулярно поверхности с точки начала координат по направлению $i \sim h$ – перпендикулярно ветру со скоростью $v^h \sim c$.

Ускорение будем искать отдельно в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Ускорение в вертикальном направлении: $i \sim h, k \sim x$

Здесь ищем ускорение в вертикальном направлении. Подставим соответствующие значения в (4.2) для $h = 0$ м и вычислим результат:

$$\begin{aligned} \frac{dv'^h}{dt'} &= c \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r^h} + \left(\frac{\partial v^x}{\partial r^h} - \frac{\partial v^h}{\partial r^x} \right) v^x \right] = \\ &= c \frac{\partial (V^h)^2 + (V^x)^2}{2 \partial r^h} = \\ &= c (V^{0h})^2 h = \\ &= 300 \left(\frac{10}{1000} \right)^2 0 = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь красным выделены элементы, по условиям примера имеющие нулевое значение. А также, как и ранее, V_{0h} – скорость изменения скорости ветра с высотой. В результате имеем, что звуковой импульс при движении по вертикали имеет нулевое ускорение в вертикальном направлении.

Здесь также хочу отметить одну особенность движения волны вверх. Оно заключается в том, что с какой бы точки оси x не отправили звуковой импульс (на рисунке ниже это точки 0, 1, 2 и 3), при условии их синхронного генерирования, или даже вместо импульса широкую волну, генерируемую на оси x , фронт объединенной волны всегда будет параллелен оси x . Даже если генератор имеет скорость движения в горизонтальном направлении. Этот факт на следующем рисунке обозначен горизонтальными штрихпунктирными линиями синего цвета. Это особенность галилеева пространства с абсолютным пространством–временем.

Ускорение в горизонтальном направлении: $i \sim x, k \sim h$

Ситуация та же, но ищем ускорение в горизонтальном направлении. Подставим соответствующие значения в (4.2) для $h = 0$ м и вычислим результат:

$$\begin{aligned} \frac{dv'^x}{dt'} &= c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^x} + \left(\frac{\partial v^h}{\partial r^x} - \frac{\partial v^x}{\partial r^h} \right) v^h \right) = \\ &= -c \frac{\partial v^x}{\partial r^h} v^h = -c \frac{\partial V^{0h} h}{\partial r^h} v^h = -c V^{0h} v^h = \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$= 300 \frac{10}{1000} \cdot 300 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Здесь красным выделены элементы, по условиям примера имеющие нулевое значение. А также, как и ранее, V_{0h} – скорость изменения скорости ветра с высотой. В результате имеем, что звуковой импульс при движении по вертикали имеет нулевое ускорение в вертикальном направлении.

Для независимой проверки результата сделаем расчет из алгебраических соображений. При движении вверх импульс звука полностью подхватывается (или увлекается) ветром, и на высоте 1000м будет иметь горизонтальную скорость 10 м/с – как у ветра на этой высоте. При равноускоренном движении импульс звука за время Δt изменит свою скорость на Δv^x , равное

$$\Delta v^x = w^x \Delta t = v^{h=1000} - v^0 = 10 - 0 = 10 \text{ м/с}. \quad (4.12)$$

А время движения определяется по скорости движения импульса звука и пройденному расстоянию:

$$\Delta t = \frac{\Delta L^x}{c} = \frac{1000}{300} = 3 \frac{1}{3} \text{ с}. \quad (4.13)$$

Из этих двух уравнений мы можем найти и ускорение w^x :

$$w^x = \frac{\Delta v^x}{\Delta t} = \frac{10}{3 \frac{1}{3}} = 3 \text{ м/с}^2. \quad (4.14)$$

Сравнивая (4.14) и (4.6), мы можем сделать вывод (пока обоснованный только двумя

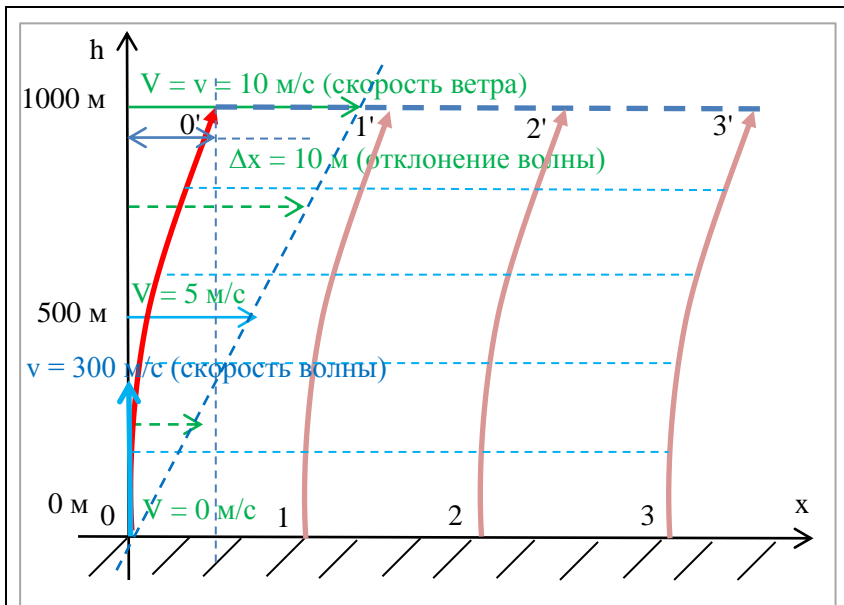


Рисунок 4.2

К геометрическому расчету движения вертикального луча в поле ветра с изменяющейся с высотой скоростью.

нашими частными расчетами), что, куда бы ни направился импульс звука из начала координат(!), он получит ускорение в перпендикулярном направлению движения направлении. На рисунке ниже показана схема движения вертикального звукового импульса в неоднородном поле ветра на поверхности Земли.

Рисунок схематический, без учета масштабов. Красными дугами показаны траектории звуковых лучей. В соответствии с законом распространения волн

Гюйгенса фронт широкой волны на всю рассматриваемую высоту (выделен голубым цветом со штрих-пунктиром) не должен менять свое положение. Но, не смотря на это, импульс звука получает горизонтальную скорость в соответствии с уравнением (4.11), и

его траектория принимает параболическую форму. Это является особенностью распространения волн в галилеевом пространстве.

4.3. Импульс звука в поле ускоряющегося радиального ветра

Имеется статическая воздушная среда, скорость звука 300 м/с, квадрат скорости ветра изменяется по координате x по закону $\varphi = -1/x$. Этот закон выбран специально, т.к. она напоминает изменение потенциальной энергии в гравитационном поле, а для воздуха – в вихре, который втягивает воздух строго по радиусу в условиях постоянной плотности. Куда девается этот воздух в центре вихря – не интересует. Координатные оси обозначены через r – радиусное ("горизонтальное") направление, θ – перпендикулярное к радиусу направление ("высота"). Ускорение по всем координатным осям будем рассчитывать одновременно в одной системе уравнений.

Импульс и ускорение в радиальном направлении: $i \sim r$

Для нашей ситуации – импульс звука посылается туда же, куда и ускоряющийся ветер. Ветер движется с ускорением в радиальном (горизонтальном) направлении. "Материальной точкой" здесь, как и ранее, является импульс звука, направленный по ветру с точки начала координат по направлению $i \sim r$ со скоростью $v^r \sim c$. Вертикальных и других координат нет (или существуют только виртуально).

Уравнение (4.2) для нашего случая будет следующим:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{dv'^x}{dt'} = c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^r} + \left(\frac{\partial v^\theta}{\partial r^r} - \frac{\partial v^r}{\partial r^\theta} \right) v^\theta \right) \\ \frac{dv'^h}{dt'} = c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^\theta} + \left(\frac{\partial v^r}{\partial r^\theta} - \frac{\partial \theta}{\partial r^r} \right) v^r \right) \end{cases} = \\ & = \begin{cases} \frac{dv'^r}{dt'} = -c \frac{\partial V^{0r}/r}{\partial r^r} = -c \frac{V^{0r}}{r^2} \rightarrow \\ \frac{dv'^h}{dt'} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь красным выделены элементы, по условиям примера имеющий нулевое значение. V_{0r} – коэффициент изменения скорости ветра по радиусу. Подставим соответствующие значения в уравнение (4.2) для $r = 0$ м и вычислим результат. На расстоянии 300 м ускорение по радиусу будет равно

$$\frac{dv'^r}{dt'} \rightarrow -300 \left(\frac{V^{0r}}{300^2} \right) = -\frac{V^{0r}}{300} \text{ м/с}^2. \quad (4.16)$$

В результате имеем, что звуковой импульс при движении по радиусу (горизонтали) имеет переменное ускорение в радиальном (по ветру) направлении. Этого и следовало ожидать – при полном увлечении волны движущейся средой. Скорость в начале координат будет неопределенной.

Импульс и ускорение в перпендикулярном к радиусу направлении: $i \sim \theta$

Для нашей ситуации – импульс звука посылается перпендикулярно ускоряющемуся ветру. Остальные условия прежние. "Материальной точкой" здесь, как и ранее, является импульс звука, направленный с точки начала координат по направлению $i \sim h$ со скоростью

$v^\theta \sim c$.

Уравнение (4.2) для нашего случая будет следующим:

$$\begin{cases} \frac{dv'^r}{dt'} = c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^r} + \left(\frac{\partial v^\theta}{\partial r^r} - \frac{\partial v^r}{\partial r^\theta} \right) v^\theta \right), \\ \frac{dv'^h}{dt'} = c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^\theta} + \left(\frac{\partial v^r}{\partial r^\theta} - \frac{\partial v^\theta}{\partial r^r} \right) v^r \right). \end{cases} \quad (4.17)$$

Как видно, эти уравнения почти ничем не отличаются от (4.15), и решение будет точно таким же. Таким образом, ускорение в системе с ускоряющимся ветром не зависит от направления распространения импульса звука.

5. Выводы.

В уравнении (3.3)

$$\frac{dv^i}{dt} = - \left[\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial r^i} \right) + \left(\frac{\partial v^i}{\partial r^k} - \frac{\partial v^k}{\partial r^i} \right) v^k \right]. \quad (3.3)$$

имеется четыре члена, влияющих на движение м.т.

- Первый член соответствует половине квадрата скорости V^i местной сопутствующей АСО в некоторой заранее выбранной в качестве "исходной", "первоначальной", "покоящейся" АСО. По аналогии с потенциальным полем φ в ньютоновой механике, этот член, равный половине от V^2 , можно считать "скалярным" потенциальным силовым полем.

Этот член уравнения говорит о том, что слабое гравитационное поле φ , открытое Ньютоном, может интерпретироваться в ГВП чисто геометрически как элемент g_{00} 4-мерного метрического поля пространства–времени.

- Второй член, равный частной производной V^i по времени (элементы g_{0j} и g_{i0} метрического поля), соответствует напряженности некоторого "векторного" потенциального поля, соответствующее скорости V^i местной сопутствующей АСО. Выступает как аналог "векторного" потенциала от метрического поля.

Эти члены могут интерпретироваться в ГП как векторное потенциальное поле G_i 1+3-мерного пространства. Ускорение м.т. за счет этой составляющей метрического поля имеет первый порядок малости. Она геометрически интерпретируется как скорость локального сопутствующего АСО, зависящее от координаты привязки этого локального АСО к пространству–времени.

- Третий и четвертый члены уже вводят зависимость от скорости м.т. и задают изменение скорости от "вихревого" составляющего поля при той же скорости V^i местной сопутствующей АСО. Является аналогом "вихревого" потенциала метрического поля, напоминает вихревую составляющую у электромагнитного поля.
- Зависимость ускорения м.т. за счет пространственной метрики g_{kl} будет нулевым в силу равенства ее нулю.
- Ускорение по нулевому (временному) индексу в ГП задает закон сохранения энергии (или ее взаимоперехода между потенциальной и кинетической

"энергиями") м.т. в метрическом поле ускорения.

Несмотря на наличие "скалярного", "векторного" и "вихревого" потенциалов, метрическое поле не является электрическим полем. Тем более, что векторное электромагнитное поле – это векторное поле, а элементы "векторного" метрического (гравитационного) поля являются элементами тензора ранга 2.

Хочу предостеречь читателей от именно этой однозначной интерпретации векторного потенциального поля A^i со скоростью $V_{(0)}^i$ сопутствующей АСО и метрическим полем g_{ij} : это всего лишь модельная интерпретация. Такой вывод можно делать, только если элементы поля A^i_0 , $V_{(0)}^i$ и g^i_0 отождествлены. Думаю, возможны другие "векторно–тензорно–полевые" интерпретации. А представленная здесь – одна из них. Также хочу предостеречь читателей от мысли о том, что рассматриваемое выше ГП является реальным физическим пространством. В данной работе это просто модельное пространство. Реальное физическое пространство должно соответствовать реальным физическим эталонам, а они могут не соответствовать галилеевым. Возможными кандидатами могут быть также релятивистские пространства (СТО, ОТО), которым полностью соответствуют электромагнитные эталоны. В области малых скоростей и полей вполне возможно использование ГП, при больших скоростях – СТО, а при сильных полях – ОТО. В области малых времен и расстояний – квантованные пространства и поля.

Сокращения и другие соглашения

<p>(*)</p> <p>(!) – (обратить особое внимание)</p> <p>А – абсолютное,</p> <p>В – время, волновое,</p> <p>Г – галилеево,</p> <p>И – инерциальное,</p> <p>К – координаты, квантовая, классическая,</p> <p>М – механика, метрическое, материя,</p> <p>Н – ньютоново, неинерциальная,</p> <p>О – отсчета, относительности, общая,</p> <p>П – пространство,</p> <p>Р – релятивистская,</p> <p>С – система, специальная,</p> <p>Т – теория, тензоры,</p> <p>У – условный,</p> <p>Ф – физика,</p> <p>Ч – частная,</p> <p>~ – (индекс) обозначает численное равенство,</p> <p> – (индекс) параллельный, продольный,</p> <p>⊥ – (индекс) перпендикулярный, поперечный,</p> <p>(0) – индекс параметра смещения начала координат.</p>	<p>АПВ – ПВ с абсолютным временем и пространством.</p> <p>АСО (АИСО) – абсолютная (инерциальная) система отсчета,</p> <p>ВП – волновое пространство,</p> <p>ГП – галилеево пространство,</p> <p>ГПТК – линейные преобразования тензоров и координат,</p> <p>ВП, ГВП – волновое галилеево пространство,</p> <p>ИСО – инерциальная система отсчета – координатная с.о., полученная из исходного ортонормированным ЛПТК,</p> <p>КМН – классическая механика ньютонова,</p> <p>ЛПТК – линейные преобразования тензоров и координат,</p> <p>МП – метрическое галилеево пространство,</p> <p>МП – метрическое пространство,</p> <p>ПВ – пространство–время,</p> <p>ПВМ – пространство–время–материя,</p> <p>ГПВ – галилеево пространство–время,</p> <p>ПТК – преобразования тензоров и координат.</p> <p>СК, с.к. – система координат,</p> <p>см. – смотри,</p> <p>СО, с.о. – система отсчета,</p> <p>СТО – специальная теория относительности,</p> <p>(и)т.д. – (и) так далее,</p> <p>(и) т.п. – (и) тому прочие,</p> <p>в т.ч. – в том числе,</p> <p>т.з. – точка зрения,</p> <p>т. [Идентиф.точки] – точка.[Идентиф.точки],</p> <p>м.о. – материальный объект,</p> <p>с.с. – сплошная среда,</p> <p>См. – смотри [далее],</p> <p>УАИСО – Условная Абсолютная ИСО,</p>
--	--

- 1) *При использовании более чем одной буквы/символа.
- 2) Выделение красным цветом в формуле может обозначать равный нулю элемент формулы или выражения.
- 3) По одинаковым верхнему и нижнему индексам производится свертка (суммирование) соответствующих элементов (по правилу Эйнштейну).
- 4) По индексу в скобке типа " $_{(k)}$ " или " $^{(k)}$ " свертка не выполняется, но она привязана к соответствующему тензорному или другому индексу "функционально". Она семантически может быть не связана с обычными индексами.
- 5) Формат ссылок на формулы: (N). При необходимости указания на конкретную строку формулы применяется формат (N):n, где n – номер строки формулы, начиная с 1 (единицы), причем эта нумерация продолжается и на дальнейшие не нумерованные формулы.

Литература

1. Акивис, М А, Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : Наука, 1972. – 351 с.
2. Детлаф, А А Курс общей физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. Высшая школа, 2017. – 245 с.
3. Димитриенко Ю И Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М. :Высш. шк., 2001. – 575 с. 74
4. Иродов, И Е Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Бином, 2017. – 146 с.
5. Ландау, Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики: В 10 т. : – М.: Физматлит, 2002. – 224 с.
6. Малыкин, Г Б Паралоренцевские преобразования, УФН, 179:3 (2009), 285–288; Phys. Usp., 52:3 (2009), 263–266 // Полный текст URL: [PDF файл](#) (899 kB) (дата обращения: 05.07.2019).
7. Эйнштейн, А Собрание научных трудов. Т. 1. М. :Наука, 1965. [Einstein A Ann. Physik 322 891 (1905)]
8. Чепик, А М Сходство и различие СЭТ и СТО. [Электронный ресурс] :URL: http://redshift0.narod.ru/Rus/Stationary/Absolute/Absolute_Principles_4.htm(дата обращения: 16.07.2019), // Нижний Новгород, e-mail: redshift0@narod.ru.
9. Tangherlini, F R "The velocity of ligh in uniformly moving frame", Ph D Thesis (Stanford: Stanford Univ., 1958)]
10. Тимин, В А Метрики галилеева пространства. //Metrics Galileia Space. URL: <http://vixra.org/abs/1907.0545>.
11. Тимин, В А Преобразования галилеевых тензоров. //Galilean Transformations of Tenzors, URL:<http://vixra.org/abs/1910.0602> .
12. Тимин, В А Уравнения распространения волн в различных пространствах. URL: <http://vixra.org/abs/1908.0091>.
13. Тимин, В А Эксперимент Майкельсона–Морли.URL:<http://vixra.org/abs/1908.0574>.

Все мои работы в VIXRA.ORG:

14. Тимин, В А Все работы.URL: http://vixra.org/author/valery_timin.

E-Mail: timinva@yandex.ru.