

La cohomologie d'un endomorphisme

Antoine Balan

June 7, 2021

Abstract

We define a cohomology for an endomorphism of a module.

1 La cohomologie d'une différentielle

La cohomologie [J] d'un complexe gradué montant C de modules sur un anneau A muni d'une différentielle d , $d^2 = 0$, est le quotient suivant :

$$H^*(C) = \text{Ker}(d)/\text{Im}(d)$$

Le quotient du noyau de d sur l'image de d . L'homologie est la notion duale quand les flèches descendent le degré.

2 La cohomologie d'un endomorphisme

On considère un complexe C dont les flèches sont des endomorphismes e . On forme alors le complexe $C' = C/\text{Im}(e^2)$, en quotientant par l'image de e^2 ; l'endomorphisme e passe au quotient et définit une différentielle d_e , $d_e^2 = 0$, sur C' car $e(\text{Im}(e^2)) = \text{Im}(e^3) \hookrightarrow \text{Im}(e^2)$. La cohomologie est celle de la différentielle d_e :

$$H^*(C, e) = \text{Ker}(d_e)/\text{Im}(d_e)$$

Si $e^2 = 0$, c'est la cohomologie usuelle.

References

[J] N.Jacobson, "BASIC ALGEBRA" I & II, Dover, USA, 2009.