# Cohomologie des variétés

Antoine Balan

April 27, 2021

**Abstract**

We define a cohomology for exterior forms over a manifold.

## 1 La cohomologie de De Rham

Les formes extérieures sur une variété admettent une différentielle $d$ qui vérifie :

$$d \circ d = 0$$

De ce fait, on peut définir la cohomologie de De Rham :

$$H^*(M, \mathbf{R}) = Ker(d)/Im(d)$$

## 2 Généralisation de la cohomologie

Soient des formes extérieures $\beta, \gamma$ qui vérifient $rg(\gamma) = rg(\beta)+1$, $deg(\gamma) = 1$, et :

$$d\beta \wedge \beta = 0$$

$$d\gamma = 0$$

On définit :

$$\delta(\alpha) = d\alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \alpha$$

C'est une différentielle, car :

$$\delta \circ \delta = 0$$

On peut donc définir la cohomologie :

$$H^*_{\beta,\gamma} = Ker(\delta)/Im(\delta)$$

## 3 Propriétés

Si on a $d\theta = 0$, alors :

$$\delta(\alpha \wedge \theta) = \delta(\alpha) \wedge \theta$$

Cela montre que $H^*_{\beta,\gamma}(M, \mathbf{R})$ est un module sur $H^*(M, \mathbf{R})$.

# References

[GHL] S.Gallot, D.Hullin, J.Lafontaine, "Riemannian Geometry", Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[G] C.Godbillon, "Elements de topologie algégrique", Hermann, Paris, 1998.

[J] N.Jacobson, "Basic Algebra", I & II, Dover, New-York, 2017.

[S] R.Switzer, "Algebraic Topology-homotopy and homology", Springer-Verlag, Berlin, 2002.