Числофизика: Бесконечность
(Number physics: Infinity)

Александр Васильевич Исаев
(Alexander Vasilievich Isaev)

Abstract

В рамках числофизики (виртуальной космологии) нельзя не коснуться проблем бесконечности. Впервые это понятие глубоко и содержательно раскрыл Георг Кантор (1845–1918) – знаменитый немецкий математик. Он известен, прежде всего, как создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике. В предлагаемой монографии (от 06.01.2014) приведены лишь самые азы теории множеств и некоторые любопытные «сюжеты» из мира чисел, связанные с загадочной бесконечностью. Ещё в данной работе существенно уточняются некоторые понятия из мира чисел, о которых говорилось в предыдущих работах автора.

Within the framework of number physics (virtual cosmology), one cannot but touch upon the problems of infinity. For the first time this concept was deeply and meaningfully revealed by Georg Cantor (1845–1918), the famous German mathematician. He is best known as the creator of set theory, which has become a cornerstone in mathematics. The proposed monograph (dated 01/06/2014) contains only the very basics of set theory and some curious "plots" from the world of numbers associated with the mysterious infinity. Even in this work, some concepts from the world of numbers, which were mentioned in the previous works of the author, are significantly clarified.

О Г Л А В Л Е Н И Е

1. Вступление

В рамках *виртуальной космологии* нельзя не коснуться проблем *бесконечности*. Впервые это понятие глубоко и содержательно раскрыл ***Георг Кантор*** (1845, Санкт-Петербург – 1918, Галле) – знаменитый немецкий математик (его портрет помещен на обложке данной книги). Кантор известен, прежде всего, как создатель *теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике*. В книге приведены лишь самые азы теории множеств и некоторые любопытные «сюжеты» из мира чисел, связанные с загадочной бесконечностью. Ещё в данной книге существенно уточняются некоторые понятия из мира чисел, о которых говорилось в предыдущих работах автора (соответствующие ссылки содержатся в тексте данной книги).

2. Понятие о делителях числа *N*

В рамках виртуальной космологии автор ввёл немало новых понятий и терминов, которых, надо полагать, нет в общеизвестной *теории чисел*. Таковыми являются термины «пирамида», «богатство», «тип», «типомакс», «кан*о*н» и проч., о которых пойдет речь ниже. Главная цель подобных терминов – упростить изложение и понимание относительно сложного текста (для неподготовленного читателя). В данной главе речь пойдет только о *натуральных* числах *N* (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …).

Делители (*D*) числа *N* – это целые числа, которые делят данное число *N* нацело (без остатка). Например, число *N* = 48 имеет 10 делителей: *D* = **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 8, 12, 16, 24, 48. Жирным шрифтом выделены ***малые*** делители, а *большие* делители – это всегда результат деления числа *N* на его малые делители. У всякого числа *N* (кроме единицы) есть малые делители, и они не превосходят ***N*^0,5** (корень квадратный из числа *N*) – эту важную особенность подметили ещё древние математики (кстати, для *N* = 48 получаем *N*^0,5 = 48^0,5 ≈ 6,9). Малые делители – это как бы «паспорт» числа *N*, содержащий важную «внутреннюю» информацию о числе *N*.

Если число *N* > 100000 (условно) и имеет много делителей (*D*), то логарифм этих делителей (ln*D*) есть некая функция (f) от порядковых номеров (*x* = 1, 2, 3,…) этих делителей: ln*D* = f(*x*). Такая функция на графике имеет вид тильды (~), поэтому автор назвал её *тильда-функция* (тильда-распределение) делителей числа *N*. При этом логарифмически средний (***логсредний***) *делитель* (*D*лс) числа *N* равен корню квадратному из числа *N*:

$$\boldsymbol{D}\textbf{лс} \equiv \boldsymbol{N}\textbf{\^{}0,5}. \qquad (2.1)$$

Логарифм указанного делителя равен половине логарифма числа *N*, то есть ln(*D*лс) = 0,5*ln*N* – отсюда и такое название – логарифмически средний (логсредний) делитель.

Логсредний делитель (*D*лс) существенно меньше ***среднего*** *делителя* (*D*с) числа *N*, который мы получаем разделив сумму (*Б*) всех делителей числа *N* на количество (*Т*) всех его делителей (то есть *D*с ≡ *Б*/*Т*). На графике (см. рис. 2.1) приведены 85-ть первых

особых чисел $N \geq 2$ (*типомаксов*, см. гл. 7), у которых наибольшее количество делителей ($T \equiv T$max) среди всех предшествующих чисел N, и, как следствие этого, самые большие суммы делителей (*Б*). Максимальный делитель – это само число N, а минимальный делитель – это единица. Средний делитель – это Dс ≡ *Б*/Tmax. Логсредний делитель – это Dлс ≡ N^0,5. На графике видно, что уже, скажем, у 40-го типомакса (N = 2.162.160) логсредний делитель (Dлс ≈ 1.470) в 21 раз меньше среднего делителя (Dс = 31.248). Для более ясного понимания можно полагать, что речь идет о… зарплатах по всей стране:
– максимальная зарплата ~ 2.162.160 руб. (вполне реально);
– средняя зарплата ~ 31.248 руб. (это больше, чем нам говорят);
– логсредняя зарплата ~ 1.470 руб., однако этот показатель поймет («прочувствует»), увы, далеко не каждый читатель, хотя именно подобный показатель (*в принципе*, сами цифры могут быть другими) с точки зрения здравого смысла гораздо более обоснован, чем пресловутая «средняя зарплата». Ведь согласно *логнормальному* распределению зарплат (делителей) и *правилу трёх сигм* около 68,2% всех работников получают зарплату близкую именно к 1.478 руб., но никак не к 31.248 руб. (поскольку около 68,2% всех делителей числа N численно близки именно к логсреднему делителю Dлс).

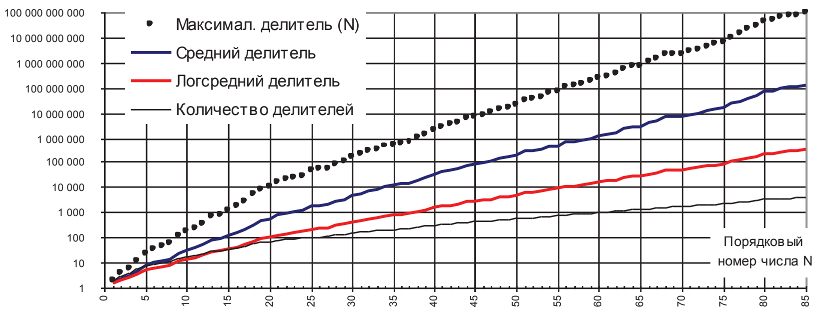

Рис. 2.1. Разные (по виду) делители «внутри» каждого *типомакса N*.

Почему делители из мира чисел могут «отражать»… зарплаты (наши «богатства»)? А дело в том, что большинство природных богатств (в самом широком смысле этого слова) подчиняются именно тильда-распределениям, а, по сути дела, *логнормальным распределениям* (и об этом автор много писал в своих книгах). Более того, именно так, *логнормально*, распределяются богатства (в том числе финансовые) внутри человеческого общества. Причем (что удручает) именно *деньги* всё ещё остаются «Святым Граалем» нашей якобы «разумной» цивилизации. А поскольку наш «Святой Грааль» подчиняется тильда-распределениям, ***«указанным» … миром чисел***(!) и присущим почти всякой *неодушевленной* (видимой) материи, то нашу цивилизацию всё ещё трудно назвать разумной (по большому счёту). Наличие явных тильда-распределений – это лакмусовая бумажка «неразумности» материи (грубо говоря).

3. Пирамида делителей

Как известно, все натуральные числа строятся (в *каноническом* виде) из *простых* чисел (2, 3, 5, 7, 11, 13,…). При этом распределение самих простых чисел (в ряде натуральных чисел), то есть закон появления простых чисел носит *псевдослучайный* (только похожий на случайный) характер, поскольку практически невозможно предсказать (в виде некой формулы), когда появится следующее простое число в натуральном ряде. Но почему я говорю «*псевдо*…»? Да только потому, что на самом деле появление («рождение») простых чисел происходит в силу абсолютно «железного» закона, в силу абсолютно жёсткого ***алгоритма Пирамиды***: *каждое N-ое натуральное число делится (нацело) на N*. В самом деле: каждое число – делится на 1; каждое второе число – делится на 2, каждое третье число – делится на 3; каждое четвертое число – делится на 4; и так далее ***до бесконеч-***

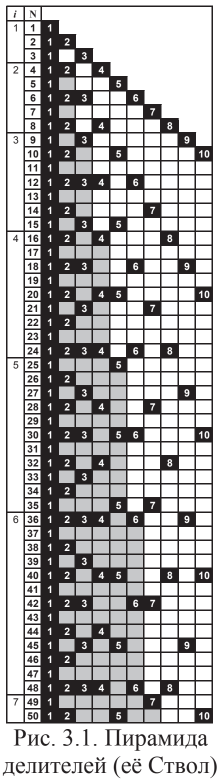

Рис. 3.1. Пирамида делителей (её Ствол)

ности. Этот алгоритм наглядно поясняет Пирамида делителей, фрагмент которой изображен на рис. 3.1, где правая часть Пирамиды, уходящая вниз под 45 градусов, обрезана (по 10-му столбцу). Чёрные клетки (***камни***), лежащие на горизонтали с номером *N*, – это и есть все целые делители числа *N*. Причем у каждого чёрного камня есть свой ***вес*** – это (белое) число, которое записано внутри чёрной клетки, то есть вес – это числовое значение конкретного делителя *D*.

В Пирамиде наглядно виден, описанный выше словами, *алгоритм Пирамиды*: в первом столбце – каждый камень чёрный, во втором столбце – каждый 2-й камень чёрный, в третьем столбце – каждый 3-й камень чёрный, и т.д. до бесконечности. Серый фон Пирамиды – это её ***Ствол***, в котором находятся все ***малые*** *делители* всех чисел *N*, то есть делители, не превосходящие *N*^0,5 (корень квадратный из числа *N*).

Например, у числа $N = 48$ мы видим пять чёрных камней в Стволе – пять *малых* делителей $d = 1, 2, 3, 4, 6$ и пять *больших* делителей, которые (как у любого числа *N*) являются всего лишь результатом деления числа *N* на соответствующий малый делитель: *N*/6, *N*/4, *N*/3, *N*/2, *N*/1, то есть 8, 12, 16, 24, 48. Таким образом, важнейшую информацию о любом числе *N* содержат его *малые* делители (которые все в Стволе, поэтому, фактически, именно Ствол и показан на рис. 3.1). Придуманная мной Пирамида (Ствол) – это главное «наглядное пособие» *виртуальной космологии*, которое помогает ответить на многие вопросы об «устройстве» мира чисел (см. все мои книги).

На фоне всего выше сказанного кажется невероятным, что *простые* числа, имеющие один *малый* делитель (единицу) будут встречаться ***бесконечно*** долго. *Простые* числа в Стволе (см. рис. 3.1) имеют лишь один чёрный камень (в самом первом столбце) и трудно поверить, что *псевдослучайный* (чёрный и немалый) «камнепад» Пирамиды будет бесконечно долго выдавать («время от времени») лишь… один чёрный камень («весом» равным 1). Правда, это архиважное событие для мира чисел (***и… физики***, если верить виртуальной космологии) будет происходить, вообще говоря, всё реже и реже, но *простые числа никогда не перестанут появляться* в натуральном ряде.

Поскольку существует («работает») *алгоритм Пирамиды* – это значит, что в мире чисел нет никакого места «настоящей» («чистой») *случайности* (которой посвящен обширный раздел в высшей математике – ***теория вероятностей***) И можно говорить лишь о *псевдослучайности*, имитирующей «чистую» случайность. Кстати говоря, возможно, что и в реальном (физическом) мире нет места «настоящей» («чистой») случайности, и только *неполнота наших знаний* не позволяет нам согласиться со столь странным утверждением (и далеко не новым). [Здесь и далее синий текст – это общеизвестные сведения из теоретической физики, космологии, космомикрофизике и других наук.]

4. Средний тип на отрезке

Тип *натурального числа N – это количество всех его целых делителей*. Например, тип числа $N = 20$ равен 6, так как у него имеется шесть делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Будем обозначать тип числа буквой T. Очевидно, что у любого простого числа $T = 2$, так как все они делятся только на единицу и самих себя. Число $N = 1$ является единственным, особым числом, у которого $T = 1$. Зная *каноническое разложение* числа $\boldsymbol{N = P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \ldots \cdot P_n^m}$, всегда можно определить его тип T по красивой, лаконичной формуле *теории чисел*:

$$\boldsymbol{T = (a + 1)(b + 1)(c + 1)\ldots (m + 1)}. \qquad (4.1)$$

Так, для числа $N = 261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2$ находим $T = (4+1)(3+1)(1+1)(2+1) = 120$. Однако, поиск показателей степени *a, b, c, ..., m*, с которыми простые числа входят в каноническое разложение натурального числа N – это сама по себе далеко непростая задача. В серьезной компьютерной программе *Mathcad 2000*, ориентированной на решение математических задач, существует даже специальная команда (*Factor*) для автоматического поиска показателей *a, b, c, ..., m*, т. е. для факторизации числа N (содержащего десятки цифр).

При перемещении по ряду натуральных чисел появление различных типов носит *псевдослучайный* характер, то есть нам кажется, что абсолютно невозможно предсказать какой тип будет у следующего числа N. И нам очевидно только одно: чем дальше мы уходим от единицы (вправо), тем б**о**льшие типы могут появиться, причем наряду с ними неизбежно будут появляться числа и с самыми малыми типами $T = 2, 3, 4, ...$

Для любого числа N помимо его собственного типа T (количества всех *его* делителей) можно вычислить некий ***средний тип*** (Ts), равный среднему арифметическому всех предшествующих типов (то есть у всех чисел от 1 до N включительно), иначе говоря, средний тип на отрезке [1; N]:

$$\boldsymbol{Ts = (T_1 + T_2 + T_3 + ... + T)/N} \ . \qquad (4.2)$$

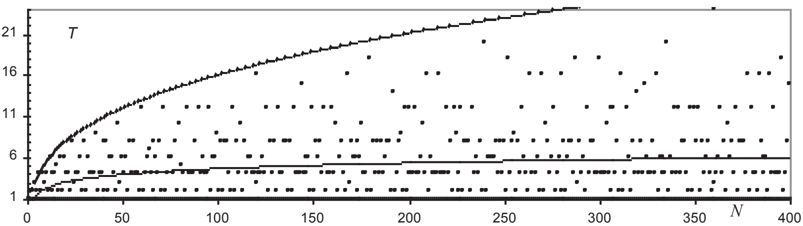

Рис. 4.1. Типы (точки) первых 400 чисел N, а также $Tmax$ и Ts (линии)

Несмотря на беспорядочные колебания типов T (см. рис. 4.1), средний тип Ts ведет себя поразительно спокойно. Немецкий математик П. Г. Л. Дирихле (1805–1859) доказал, что средний тип описывает такое выражение (***формула Дирихле***):

$$\boldsymbol{Ts = \ln N + (2 \cdot C - 1) + \varepsilon} \, , \qquad (4.3)$$

где с ростом N слагаемое $\varepsilon \to 0$, а C – постоянная Эйлера, который в 1740 г. вывел формулу, позволяющую вычислить C с любой точностью; например, с 15 верными знаками: C = 0,577 215 664 901 532... . Однако арифметическая природа постоянной Эйлера не изучена до сих пор, и неизвестно является ли она рациональным числом или нет. Эйлер получил асимптотическое выражение для суммы ($Г$) первых N членов так называемого *гармонического ряда* (это 1 плюс *тёмные экзочисла* $Э \leq 1/2$):

$$\boldsymbol{Г \equiv 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/N \ = \ln N + C + \varepsilon^*}, \qquad (4.4)$$

где $\varepsilon^* \to 0$ при $N \to \infty$. Гармоническим ряд назван потому, что каждый его член, начиная со второго, является *гармоническим средним* двух соседних членов, то есть для $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ выполняется равенство: $1/n = 2/[(n - 1) + (n + 1)]$. Средний тип первых N натуральных чисел *почти* равен сумме первых N членов гармонического ряда: $Ts = Г - 1 + C \approx Г - 0{,}423$. Поэтому, образно говоря (см. рис. 4.1), *от хаоса случайных типов до идеальной гармонии всего один шаг* (примерно равный 0,423).

А вот если говорить по существу (глубоко и серьезно), то средний тип (Ts) на отрезке $[1; N]$ устремляется к выражению:

$$\boldsymbol{Ts \approx (1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \ldots + 1/N) + C}. \qquad (4.5)$$

То есть по мере *бесконечного* роста N средний тип (Ts) на отрезке $[1; N]$ устремляется к сумме ***тёмных*** *экзочисел Э* (обратным числам данного отрезка: $Э = 1/N$), причем указанную сумму (экзочисел) ещё надо увеличить на константу $C \approx 0{,}577$.

Замечание. Поясню (напомню) ***очень важный момент***, который будет ещё не раз встречаться в данной книге: *тёмные* (по определению) экзочисла $0 < Э <$ **0,756945106457584** не имеют *равномощных* обычных чисел $N \geq e \equiv 2{,}718$, то есть не существует таких N, что отношения (некие «энергии») $N/\ln N$ и $Э/\ln Э$ будут равны между собой. Согласно моей виртуальной космологии ***тёмные экзочисла «отражают» тёмную энергию*** (обоснование этой *гипотезы* – в книге «Тёмная энергия…»).

5. Линейные делители

Число $N = 48$ (с малыми делителями 1, 2, 3, 4, …) является примером того, как некоторые (псевдослучайные) числа N своими малыми делителями *копируют* (без единого пропуска) начало натурального ряда на длину $K = 4$ (количество *линейных* делителей). А вот *первым* числом N, копирующим натуральный ряд на длину $K = 4$, является число $N = 12$ – это наглядно видно в Пирамиде делителей (см. рис. 3.1). В дальнейшем подобных чисел N (у которых $K = 4$ линейных делителя) можно встретить бесконечно много в натуральном ряде ($N = 12, 24, 36, 48, \ldots$). Читателю, вероятно, будет ещё нетрудно убедиться и в том, что $N =$

5.342.931.457.063.200 (имеющее всего 36864 делителя) *впервые* имеет $K = 40$ линейных делителей, то есть копирует 40 первых натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, …, 39, 40 (а потом чисел N с параметром $K = 40$ также будет бесконечно много).

Если задать такой вопрос (в общем виде): *у какого числа N впервые появляется К линейных делителей*? То мой ответ такой:

$$\boldsymbol{K \sim \ln N}, \text{ поэтому } \boldsymbol{N \sim e\hat{}K \equiv \exp(K)}, \qquad (5.1)$$

где знак тильда (~) говорит о равенстве *порядков* параметров K и $\ln N$ (то есть о весьма грубом их равенстве), либо о том, что параметр K *асимптотически* (при бесконечным росте аргумента N) устремляется к величине $\ln N$. Знак «равно по определению» (≡) также весьма полезен при чтении формул.

Таким образом, мы приходим к важному выводу. На отрезке $[1; N]$ максимальное количество (K) *линейных* делителей (у некого числа, близкого к N) и *среднее* количество делителей (средний тип Ts на отрезке) численно близки между собой (и даже «сливаются» на бесконечности?). При этом оба параметра (K и Ts) очень близки к соответствующей конечной сумме ***тёмных*** *экзочисел* (см. материал в конце главы 4).

Из формулы (5.1) следует, например, что в окрестности (умопомрачительного) числа $N \approx$ 10^(10^59) есть натуральное число X, имеющее параметр K, равный: $K \sim$ ln[10^(10^59)] = (10^59)*ln10 то есть $K \sim$ 10^59 линейных делителей (это копия начала натурального ряда). Таким образом, вся моя *прежняя* виртуальная космология (см. мои предыдущие книги и статьи) изучала… *линейные делители* (умопомрачительного) числа $N \approx$ e^(e^137) ≈ 10^(10^59), которое символизирует *новую* версию виртуальной космологии (см. книгу «Время-2»). Кстати, алгоритм поиска указанного числа X (и ему подобных) – см. в моей книге «Зеркало» Вселенной», гл. 10.

Итак, любое *начало натурального ряда* (сколь угодно большой длины) – это всего лишь... *линейные делители* вполне определенного натурального числа X. При этом *все* целые делители числа X (их гораздо больше, чем K) – это «дефектный» натуральный ряд (со своей *теорией чисел*?), ведь львиная доля натуральных чисел в нем отсутствует (скажем, в «провалах»). Однако по характеру «провалов» (по их «математике») в принципе должно быть возможным установить само число X, поскольку нам известна наипростейшая и… «железобетонная» ***Пирамида, исключающая в принципе всякую случайность***.

Заканчивая главу, свяжу её содержание с заявленной темой данной книги – с *бесконечностью* (∞). Поскольку $\ln(\infty) = \infty$, то формула (5.1), по сути дела, «доказывает», что ***бесконечность имеет бесконечно много линейных делителей*** (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …, ∞), то есть бесконечность делится на… *все* натуральные числа. Это утверждение не совсем корректно (с точки зрения математики) и явно *парадоксально*, то есть описанная ситуация может существовать в реальности, но не имеет логического объяснения (разум отказывается понимать такую ситуацию).

6. Богатство Пирамиды (отрезка)

Богатство (*б*) числа N – это сумма всех его делителей. Например, богатство числа $N = 48$ равно $б \equiv \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4} + \mathbf{6} + 8 + 12 + 16 + 24 + 48 = 124$. С точки зрения здравого смысла, богатство любого числа N никогда не превзойдет *суммы первых* N *натуральных чисел* (сумма арифметической прогрессии):

$$\boldsymbol{S}\mathrm{n} \equiv \mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \boldsymbol{N} = (1 + \boldsymbol{N})*\boldsymbol{N}/2 \approx \boldsymbol{N}\hat{}2/2}. \qquad (6.1)$$

Однако в математике доказано (и ниже мы в этом «убедимся» сами), что ***бесконечность* (∞) *делится на все натуральные числа***, то есть богатство бесконечности *условно* можно записать таким образом: $б = S\mathrm{n} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \infty$. Такая запись не корректна, ведь ∞ – это не обычное число, а символ, за которым стоит сложное понятие (см. гл. 12). Тем не менее, интуитивно нам уже «ясно», что ***богатство бесконечности – это бесконечность***. Любопытно, что ***богатство нуля – это также… бесконечность***, ведь нуль делится на все (кроме 0) натуральные числа (в том числе $0/\infty = \infty$), то есть нуль имеет бесконечно много делителей. Даже из сказанного здесь уже понятно, что бесконечность – это таинственное и во многом парадоксальное понятие. Собственно, именно поэтому автор и решил посвятить отдельную книгу именно бесконечности.

Как и следовало ожидать (от нашей пресловутой «интуиции»), *суммарное богатство* (*Б*) всех первых *N* чисел превосходит сумму *S*n, однако это превосходство оказывается на удивление незначительным (и уже в это наша интуиция верит «с трудом»). Поясню сказанное. Если найти все делители у всех чисел на отрезке [1; *N*], то можно вычислить и сумму этих богатств, то есть найти ***богатство*** (*Б*) ***отрезка*** [1; *N*] или, «проще говоря», ***богатство Пирамиды высотой N***. Ещё в начале 2002 года автор обнаружил (чисто эмпирически, с помощью ПК), что с ростом числа *N* (длины указанного отрезка) отношение *Б*/*S*n устремляется к значению… π^2/6 ≈ 1,6449, что на удивление мало (а само число является очередной «тенью» пресловутого «*золотого сечения*» в мире чисел). Отсюда автор получил асимптотическую (и чисто эмпирическую) формулу:

$$\boldsymbol{Б \approx (\pi\text{^}2/6)*N\text{^}2/2 \approx 1{,}6449*N\text{^}2/2}, \qquad (6.2)$$

то есть *суммарное богатство* (*Б*) всех первых *N* чисел (богатство Пирамиды высотой *N*) растет почти как квадрат числа *N*. Кстати говоря, в физике и в технике довольно много подобных законов (с похожей формулой). В конце 2013 года, вновь рассматривая богатство отрезка (Пирамиды), автору удалось получить формулу (6.2) путем неких «аналитических» (весьма условно) рассуждений (см. большую гл. 15), которые позволяют нам поговорить о некой «внутренней» структуре богатства *Б*.

Во-первых, теперь можно более смело утверждать, что за константой π^2/6 ≈ 1,6449 скрывается *бесконечная сумма* ***тёмных*** *экзочисел* (см. очень важное замечание в конце гл. 4):

$$\mathbf{1 + 1/2\text{^}2 + 1/3\text{^}2 + 1/4\text{^}2 + 1/5\text{^}2 + \ldots = \pi\text{^}2/6}. \qquad (6.3)$$

Эта формула давно доказана и широко известна (в части *тёмных* экзочисел есть некие проблемы с первым слагаемым равным 1).

Во-вторых, *N*^2/2 – это то, к чему стремится сумма (*S*n) первых *N* натуральных чисел при *N* → ∞, см. формулу (6.1). При этом с тем же правом можно утверждать, что *S*n ≡ 1 + 2 + 3 + 4 +…+ *N* = (1 + *N*)**N*/2 ≈ *N*^2/2 – это *количество (К*к*) всех камней* в Пирамиде (белых, серых, чёрных камней, см. рис. 3.1). То есть сумма всех камней по *строкам* Пирамиды (начиная с самой её вершины) – это и есть в точности указанная выше сумма *S*n.

В-третьих, отношение *Б*п ≡ *Б*/*К*к – это ***среднее богатство*** всей Пирамиды. Ещё только придумав свою Пирамиду, автор сразу предложил условно полагать, что каждый чёрный камень (каждый делитель) имеет свой «***вес***» – это числовое значение данного делителя (именно он и проставлен в каждой чёрной клетке Пирамиды). Значит, ***среднее богатство*** (*Б*п) – ***это средний вес камня*** в Пирамиде, причем без различия цветов всех камней. Напомню, что всего камни имеют три цвета (см. рис. 3.1): белые камни (их подавляющее большинство), серые камни (они есть только в Стволе Пирамиды), чёрные камни (их меньше всего) и это – *делители* (и только они имеют вес).

А теперь немного пофантазируем. При росте числа *N* происходит… *расширение* Пирамиды (ведь вполне можно и так сказать), и при этом расширении среднее богатство (*Б*п) Пирамиды устремляется *к константе* (π^2/6 ≈ 1,6449). А сама эта константа является *бесконечной суммой* ***тёмных*** *экзочисел* (см. очень важное замечание в конце гл. 4). Здесь можно напомнить важнейший факт из теоретической физики: ***энергия вакуума – это константа Вселенной***. Энергия вакуума (ей соответствует космологическая постоянная – лямбда-член) *не изменяется* при расширении Вселенной.

В мире чисел наименьшее богатство (*Б* = 1) очевидно имеет Пирамида из одного камня (числа *N* = 1), который находится на самой вершине Пирамиды. А теперь такой простой вопрос: когда (при какой высоте *N*) богатство Пирамиды станет равным, скажем, *Б* = 5,332*10^121? По формуле (6.2) мы легко находим ответ: при *N* ≈ 8,05165*10^60. Причем, если полагать, что найденное *N* – это количество *планковских времен* или, иначе говоря, *элементарных временных интервалов* (***эви***), то тогда найденное число *N* эквивалентно 13.764.246.654 лет – это, фактически, *возраст Вселенной*. При это можно сказать, что у найденной Пирамиды (высотой *N*) богатство *Б* превосходит наименьшее богатство (*Б* = 1) в 5,332*10^121 раз. ***Энергия Вселенной*** равна произведению её массы на скорость света в квадрате. И эта энергия Вселенной превосходит «*нулевую энергию*» (связанную с наименьшей массой во Вселенной) также в 5,332*10^121 раз – это так называемое *энергетическое* (и безразмерное) большое число Дирака, предложенное J. Casado (см. в Википедии статью «Большие числа Дирака»).

Подобные (удивительно красивые) смысловые и числовые «пересечения» теоретической физики с миром чисел могут оставить равнодушными только совсем невежественных людей или людей со скудным воображением, лишенных фантазии.

7. Типомаксы – самые богатые числа

Напомню (см. гл. 4), что ***тип*** (T) натурального числа N – это количество его целых делителей, включая 1 и само число N. При этом у всех *простых* чисел $T = 2$ (тип равен 2) и это – *минимальный* тип в мире чисел, за исключением совершенно особого случая – у числа $N = 1$ имеем $T = 1$. *Максимально* возможный тип – это ***бесконечность*** (∞), причем $T = \infty$ (бесконечно большой тип) мы обнаруживаем лишь в двух случаях. Во-первых, у числа $N = 0$, ведь ноль делится на любое число и даже на ноль, хотя делить на ноль все прочие числа в математике запрещено. Правда, результат, то есть частное от такого деления (0/0) не определено. Во-вторых, у числа $N = \infty$ мы имеем $T = \infty$, что выглядит парадоксально (см. гл. 8).

Нетрудно убедится (см. рис. 4.1), что ***тип (Т) совершает всё возрастающие псевдослучайные колебания (флуктуации)***. Иначе говоря, с ростом числа N – тип (T) этого числа, вообще говоря, увеличивается. При этом очередное псевдослучайное значение T будет находиться в диапазоне от $T = T\min = 2$ (у простых чисел) до некого максимального значения $T\max$.

В ряде натуральных чисел есть такие числа N, у которых тип ($T \equiv Tmax$) превосходит все, ранее появившиеся типы T. Эти, самые богатые (имеющие наибольшую сумму делителей), числа N я назвал *типомаксами*, и ряд этих чисел бесконечен: $N = 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120,\ldots$ (чем дальше, тем реже типомаксы встречаются в ряде всех чисел). На сайте *энциклопедии числовых последовательностей* (http://oeis.org/) под номером A002182 приведены первые 41 типомакс (правда, там они начинаются с единицы). Ранее автор удалось найти все (?) 750 первых типомаксов, старший из которых (750-й?) имеет такой *канонический* вид (согласно *основной теореме арифметики*):

N = (2^10)*(3^5)*(5^4)*(7^2)*(11^2)*(13^2)*(17^2)*
*19*23*29*31*37*41*…*113*127*131 ≈ 4,64*10^61, (7.1)

то есть данный типомакс N – это произведение первых 32-х *простых чисел* (без пропусков), причем у 25-ти простых чисел (19, 23, 29, …, 127, 131) показатель степени равен единице.

Согласно красивой формуле из *теории чисел* (см. гл. 4) тип (количество делителей) нашего типомакса будет следующим:
Tmax = (10+1)(5+1)(4+1)(2+1)^4*(1+1)^25 = 896.909.967.360 ≈
≈ 9*10^11 (см. мои статьи про ***и-триллион***).

8. Максимально возможный тип

Начну с того, что сошлюсь на замечательную книгу «Двенадцать лекций о Рамануджане» (М.: ИКИ, 2002 год) известного английского математика Г. Г. Харди (1877 – 1947). Так вот, Харди пишет (на стр. 85, но я буду излагать в своих терминах), что Вигерт впервые доказал формулу, позволяющую оценить тип (*Tmax*) достаточно большого типомакса N:

Tmax* ~ 2^*V , (8.1)

V* ≡ ln*N*/lnln*N* ≡ e^*t*/*t, (8.2)

Tmax ~ 10^(*V**ln2/ln10) ~ 10^(0,3**V*), (8.3)

Напомню, что ***t* ≡ lnln*N*** – это *время* в неких единицах виртуального времени (*вв*), а V – это весьма интересный параметр (см. книгу «Время-2»). Символ «≡» означает «равно по определению». Таким образом, у самых богатых чисел (*типомаксов*) их тип (*Tmax* – максимально возможный тип в мире чисел) зависит только от параметра V.

Насколько автор понял Харди, реальные *T*max могут оказаться на несколько порядков меньше или больше значений, которые выдает *формула Вигерта* (8.1). Так, первые 380 типомаксов (до N ≈ 10^36) проще и точнее всего описывает такая формула (быть может, это и есть «потолок» для формулы Вигерта?):

$$Tmax \approx e\hat{}V \equiv \exp(V). \qquad (8.4)$$

Очевидно, что значения *T*max по формуле (8.4) всегда будут больше в (e/2)^*V* раз, чем значения по формуле Вигерта (8.1).

На *рабочем отрезке* от *N* ≈ 10^36 до *N* ≈ 4,639*10^61 (это 750-й типомакс?) лучше всего работает *эмпирическая* формула:

$$\mathbf{Tmax \approx \exp[0{,}7404*\exp(0{,}7296*t)]}, \qquad (8.5)$$

что напоминает формулу Вигерта, ведь и её можно переписать в аналогичном виде: *T*max ~ exp[0,693*exp(*t*)/*t*]. И если в начале натурального ряда относительная погрешность (ОП) формулы (8.5) достигает 80%, то уже на указанном рабочем отрезке имеем модуль ОП < 10%. Напомню: у 750-го типомакса количество целых делителей достигает значения *T*max = 896.909.967.360.

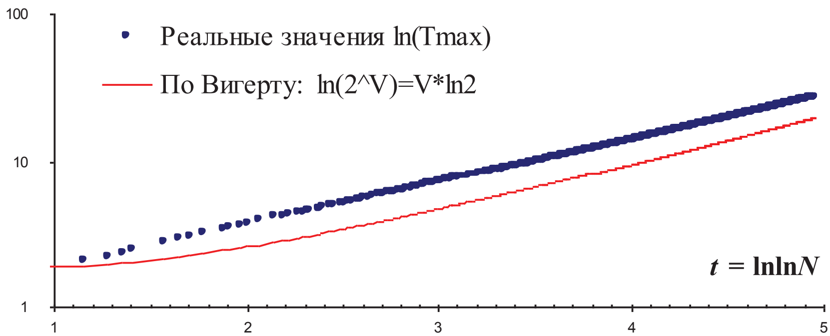

Рис. 8.1. График роста логарифма *Tmax* у первых типомаксов (*N*)

В точке *t* = 7,87668 [когда *N* ≈ 10^(10^1144), и это уже за пределами графика на рис. 8.1] формула Вигерта наконец-то «дорастает» до «точной» формулы (8.5) – обе формулы выдают одинаковый *T*max ≈ 5,10848*10^100. После чего значения по формуле (8.5) всё больше и больше отстают от формулы Вигерта. И в точке *t* = 1/ПТС ≈ 137 [это ПТС-я модель Вселенной, в которой *N* ≈ 10^(10^59)] формула (8.5) выдает «всего лишь» *T*max ≈ 10^(10^43). А вот по формуле Вигерта мы получаем *T*max ≈ 10^(10^57). При этом довольно любопытный параметр ln(*T*max)/ln*N* ≈ 0,0051, а по формуле (8.4) мы получим ln(*T*max)/ln*N* = 1/*t* = ПТС (0,0072…).

9. Канон типомакса

Канон (K) числа N – это *количество* разных *простых* чисел в *канонической* записи числа N без учета показателей степени (условно считаем, что все степени равны 1). Повторю здесь запись 750-го (?) типомакса (N) в *каноническом* виде:

N = (2^10)*(3^5)*(5^4)*(7^2)*(11^2)*(13^2)*(17^2)*
*19*23*29*31*37*41*…*113*127*131 ≈ 4,64*10^61,

то есть данный типомакс N – это произведение первых **32**-х *простых чисел* (идущих подряд, без пропусков): 2, 3, 5, 7,…, 127, 131. Значит, у данного типомакса N такой канон: K = 32.

На *рабочем отрезке* от N = 4 до N ≈ 4,639*10^61 (это 750-й типомакс?) лучше всего работает эмпирическая формула:

$$\boldsymbol{K \approx 0{,}5944*\exp(0{,}8045*t)}, \qquad (9.1)$$

что напоминает формулу: $V \equiv \ln N/\ln\ln N \equiv \exp(t)/t$, где $N \equiv$ e^(e^t). На рабочем отрезке модуль (abs) относительной погрешности (ОП) формулы (9.1) относительно параметра V быстро убывает до 0,3% по такому закону: abs(ОП) < 4/exp(t). При этом параметр V, вообще говоря, меньше реального канона K (см. графики на рис. 9.1). Тем не менее, для *канона* (K) *типомаксов* (N) можно смело полагать следующее:

$$\boldsymbol{K \approx V \equiv \ln N/\ln\ln N \equiv \exp(t)/t}. \qquad (9.2)$$

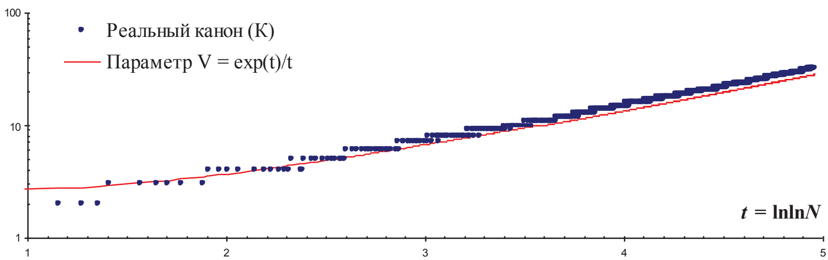

Рис. 9.1. График роста канонов ($K \approx V$) у первых 750-ти типомаксов (N)

В точке t = 7,931949 параметр V наконец-то «дорастает» до «точной» формулы (9.1) – обе формулы выдают одинаковый канон K ≈ 351,09. После чего значения по формуле (9.1) всё больше и больше отстают от параметра $K \approx V$. И в точке t = 1/ПТС ≈ 137 [это ПТС-я модель Вселенной, в которой $N \approx 10$^(10^59)] формула (9.1) выдает «всего лишь» $K \approx 10$^47, а вот реальный канон становится таким: $K \approx V \approx 2{,}38$*10^57. То есть при t = 1/ПТС ≈ 137 старший (наибольший) типомакс в каноническом виде «строят» $K \approx V \approx 2{,}38$*10^57 первых простых чисел (показатели степени которых мне не известны). При этом старшее *простое* число будет таким: $P \approx K$*ln$K$ ≈ 3,15*10^59. Любопытно отметить, что количество планковских времен (*эви*) в возрасте Вселенной (8,07*10^60 *эви* ≈ 13,798 млрд. лет) превосходит найденное число P всего лишь в 25,636 раза.

10. Парадоксы бесконечности

Очевидно, что мы вправе записать Tmax ≡ e^(e^w), где w – *внутреннее время* параметра Tmax – так мы говорим, имея в виду аналогию с «обычным» временем: N ≡ e^(e^t). Значит, имеем w ≡ lnln(Tmax) и, с учетом формулы (8.2), получаем:

$$\boldsymbol{w \approx t - \ln t + \ln\ln 2}, \tag{10.1}$$

$$\boldsymbol{t/w \approx 1/(1 - \ln t/t + \ln\ln 2/t)}. \tag{10.2}$$

Из формулы (10.2) видно, что с ростом времени t параметр t/w устремляется к единице, то есть на *бесконечности* (при $t \to \infty$) происходит «*слияние» времён* (t и w), а, значит, происходит и «слияние» самих величин N и Tmax. И мы, действительно, наблюдаем указанный процесс: у первых типомаксов N = 4, 6, 12 мы имеем соответственно: $t/w \approx 3{,}473$ (это максимальное значение); 1,785; 1,561, а затем параметр t/w (совершая «затухающие колебания»), вообще говоря, убывает до значения $t/w \approx 1{,}495$ при $N \approx$ 10^61. А вот при $t \approx 137$, согласно формуле (10.2), мы получаем $t/w \approx 1{,}04$; при $t \approx$ 10^15 мы получаем t/w ≈ 1,000.000.000.000.03 и т.д.

Напомню, что $V \equiv \ln N/\ln\ln N$, а Tmax ~ 2^V – это максимально возможное *количество целых делителей* у натурального числа N, то есть его реальный (*псевдослучайный*) тип (T) может быть любым целым числом из диапазона от T = 2 до T = Tmax. И, по сути дела, в данной главе было доказано(?), что ***бесконечность* (∞) *делится на все натуральные числа*** (как и нуль) и это

– известный в математике факт, но его строгое доказательство автор не смотрел, так как данный факт ему был давно «очевиден».

Ведь автор сам ранее доказал (см. выше гл. 5 и книгу «Зеркало» Вселенной», гл. 10), что существуют такие числа N, у которых первые (*линейные*) делители копируют (без пропусков) начало натурального ряда (1, 2, 3, 4,…), и данное копирование достигает делителя порядка $\ln N$ (который, кстати, всегда меньше логсреднего делителя Dлс ≡ N^0,5). А, поскольку $\ln(\infty) = \infty$, значит, рассуждал автор, бесконечность (∞) делится на все натуральные числа. Правда, при этом смущает тот факт, что ($N - \ln N$), то есть разность («пропасть») между наибольшим делителем числа N и его старшим линейным делителем ($\ln N$) также устремляется к бесконечности (с ростом числа N). И в указанной «пропасти» находится бесконечно много целых чисел, которые не являются делителями числа N, поэтому «слияние» самих величин N и Tmax воспринимается как некий *парадокс* бесконечности (∞).

11. Максимальный тип – это… булеан

Посмотрим на параметр V с совсем иной («неожиданной») стороны. А именно: $V \equiv \ln N/\ln(\ln N) \equiv X/\ln X$, поэтому V – это (приблизительное) ***количество*** *простых* чисел, находящихся на числовой оси между единицей и числом $X \equiv \ln N$. И чем больше число N, тем справедливее (точнее) данное утверждение. Причем параметр $X \equiv \ln N$ символизирует собой следующие важнейшие параметры мира чисел ($\ln N$ близок или равен им):

м-фактор (M) – среднее расстояние между *простыми* числами на отрезке [1; N] (в рамках виртуальной космологии м-фактор «отражает» масштабный фактор Вселенной);

средний тип (Ts) – среднее количество делителей на отрезке [1; N], то есть средний тип на этом отрезке (см. гл. 4);

количество линейных делителей (K), которые копируют (без пропусков) начало натурального ряда (см. гл. 5);

экспоненту времени $t \equiv \ln\ln N$, поскольку $X \equiv \ln N \equiv \exp(t)$.

А теперь в н и м а н и е! С точки зрения *теории множеств* (см. гл. 13), запись ***Tmax ~ 2^V* – это… *булеан V***, и, разумеется, это требует пояснений. Пусть *V* – это некое множество (в нашем случае – это количество *простых* чисел, см. начало главы). Множество *всех* подмножеств множества *V* называется *булеаном V* (также ещё называется: степенью множества, показательным множеством или множеством частей) и обозначается 2^*V*, так как оно соответствует множеству отображений из *V* в 2 = {0,1}. Ещё в качестве пояснения можно добавить, что если исходное множество конечно, то у него существует конечное количество подмножеств. Поэтому у *V*-элементного множества существует 2^*V* подмножеств (включая пустое). Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что каждый элемент может либо входить, либо не входить в подмножество, а значит, общее количество подмножеств будет *V*-кратным произведением двоек.

Исходя из содержания предыдущей главы, вероятно, можно утверждать, что когда натуральное число *N* устремляется к бесконечности, то ***N стремится стать булеаном V***.

12. Понятие о бесконечности

Бесконечность (∞) – категория человеческого мышления, используемая для характеристики безграничных, беспредельных, неисчерпаемых предметов и явлений, для которых невозможно указание границ или количественной меры. Используется в противоположность конечному, исчисляемому, имеющему предел. Систематически исследуется в *математике* (это в первую очередь!), логике и философии, также изучаются вопросы о восприятии, статусе и природе бесконечности психологии, теологии, физике соответственно.

Исторически первые проблемы бесконечности – вопросы конечности пространства и времени, количества вещей в мире, более сложные проблемы – возможность бесконечного деления континуума, возможность оперирования с бесконечными объектами (проблема актуальной бесконечности), природа и поведение бесконечно малых величин – инфинитезималей, наличие различных типов бесконечности и соотношение между ними. *Наиболее глубокое исследование бесконечности предпринято в математической* ***теории множеств***, в которой построено несколько систем измерений различных видов бесконечных объектов, однако без дополнительных искусственных ограничений такие построения вызывают многочисленные *парадоксы*. Парадокс – это ситуация (вывод, суждение), которая может существовать в реальности, но не имеет логического объяснения. Пути преодоления этих парадоксов, статус теоретико-множественных построений, их обобщений и альтернатив являются основным направлением исследований бесконечности у философов современности.

Теория чисел. Одним из основных источников ранних представлений о бесконечности были *натуральные числа* и потенциальная бесконечность натурального ряда. Одним из первых нетривиальных результатов о бесконечности в теории чисел считается доказательство от противного бесконечности множества *простых* чисел в «Началах» Евклида: предполагая конечность множества простых чисел, прибавляя к их произведению единицу вновь получается простое число. Теоретико-числовое суждение о бесконечности представляет *парадокс Галилея*: каждому числу (натуральному N) может быть сопоставлен его квадрат (N^2), то есть, квадратов не меньше, чем всех чисел N, но при этом не из каждого числа можно извлечь точный корень, то есть, квадраты – только часть множества всех чисел. В XIX веке, Георг Кантор, используя свою *теорию множеств* показал, что можно ввести «количество элементов» для бесконечных множеств – так называемая *мощность* множества. При этом *мощности* множества натуральных чисел и множества точных квадратов совпали.

В теории чисел не требуется применение какой-либо абстракции актуальной бесконечности, тем не менее, многие её задачи связаны с формулировкой условий бесконечности, например, по состоянию на 2013 год являются открытыми проблемами вопросы о бесконечности множества простых чисел, по модулю которых заданное целое число является первообразным корнем (гипотеза Артина), бесконечности множества простых чиселблизнецов, бесконечности для всякого чётного числа множества пар соседних простых чисел, разность между которыми равна ему (гипотеза Полиньяка), бесконечности множества совершенных чисел.

13. Теория множеств

Основной вклад в представление о бесконечности в математике внесён ***теорией множеств***, *ставшей краеугольным камнем в математике*. Основным создателем теории множеств в *наивном* её варианте является известный немецкий математик ***Георг Кантор*** (1845 – 1918). Кантор ввёл понятие взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств, дал определения бесконечного и вполне-упорядоченного множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных. Теорема Кантора, фактически, утверждает существование «бесконечности бесконечностей». Он определил понятия кардинальных и порядковых чисел и их арифметику. Его работа представляет большой философский интерес, о чём и сам Кантор прекрасно знал. [Разумеется, мне, инженеру-механику, далеко до Кантора, но неоднократно говорил и опять повторяю, что и моя *виртуальная космология* также «*представляет большой философский интерес*».]

Теория Кантора о *трансфинитных* числах первоначально была воспринята настолько нелогичной, парадоксальной и даже шокирующей, что натолкнулась на резкую критику со стороны математиков-современников, в частности, Леопольда Кронекера и Анри Пуанкаре (они считаются *гениями*). Критика его трудов была порой очень агрессивна: так, Пуанкаре называл его идеи «тяжёлой болезнью», поражающей математическую науку; а в публичных заявлениях и личных выпадах Кронекера в адрес Кантора мелькали иногда такие эпитеты, как «научный шарлатан», «отступник» и «развратитель молодёжи». Десятилетия спустя после смерти Кантора, Витгенштейн с горечью отмечал, что математика «истоптана вдоль и поперёк разрушительными идиомами теории множеств», которое он отклоняет как «шутовство», «смехотворное» и «ошибочное». [Комментарии в мой адрес были и такими, что их даже повторять не прилично в данной книге.]

Резкой критике Кантора противостояли всемирная известность и одобрение. В 1904 году Лондонское королевское общество наградило Кантора Медалью Сильвестра, высшей наградой, которую оно могло пожаловать. Сам Кантор верил в то, что теория трансфинитных чисел была *сообщена ему свыше*. [Да, я не Кантор, но неоднократно говорил и опять повторяю, что моя *виртуальная космология* также *сообщена мне свыше*. То есть, я не могу объяснить, как рождаются *такие* идеи в моей голове. И часто с большой скоростью – едва успеваю проверять идеи и фиксировать в виде текста. Мне трудно поверить, что *такое* смог придумать именно я. Поэтому, в некотором смысле, я давно начал верить в существование… Высшего разума.]

В своё время, защищая её от критики, Давид Гильберт смело заявил: «***Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор***». Для справки: Давид Гильберт (1862 – 1943) – немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики. В 1910–1920-е годы (после смерти Анри Пуанкаре) научной общественностью был признанным *мировым лидером математиков*.

В рамках данной книги, разумеется, просто немыслимо излагать теорию множеств (даже в *наивном* её варианте), тем более, что мне это просто не по зубам. Поэтому автор приведет лишь некие мизерные фрагменты теории множеств, но даже это – уже заметно «добавит красок» к его виртуальной космологии.

В теории множеств идея актуальной бесконечности и разных сортов бесконечности занимают её существенную часть. Для измерения разных видов бесконечности в теории множеств вводится понятие ***мощности*** (*кардинального числа*), совпадающее с количеством элементом для конечных множеств, а для бесконечных множеств задействующее принцип ***биекции***: если между множествами возможно установить взаимно-однозначное соответствие (биекцию), то они *равномощны*. С точки зрения теории множеств, *равномощные множества* ***неразличимы***. Так, оказывается, что:

1). Множество всех *натуральных* (1, 2, 3, 4, 5, …) чисел равномощно двум множествам *целых* чисел (всем натуральным числам, как со знаком «плюс», так и со знаком «минус»)

2). Множество всех натуральных чисел равномощно множеству всех *чётных* натуральных чисел (2, 4, 6, 8, 10, …).

3). Множество всех натуральных чисел равномощно множеству всех *рациональных* чисел, то есть представляемых обыкновенной дробью m/n, где числитель m – целое число (в том числе 0, а также целое число со знаком «минус»), а знаменатель n – натуральное число.

4). Отрезок числовой прямой [0; 1] оказывается в *биективном* соответствии со всей числовой *вещественной* прямой (сюда входят и отрицательные вещественные числа).

5). Отрезок [0; 1] оказывается в *биективном* соответствии с n-мерным *евклидовым* пространством. В изначальном смысле, это пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В этом случае предполагается, что пространство имеет размерность $n = 3$.

[В рамках *виртуальной космологии* автор ввёл (ещё даже не заглядывая в теорию Кантора, не вникая в неё) понятие о *равномощности* чисел между собой. Например, автор говорит, что проточисло ($1 < \Pi <$ e) *равномощно* обычному числу ($N \geq$ e $\equiv 2{,}718$), если выполняется такое условие: $\Pi/\ln\Pi = N/\ln N$. Быть может, с понятием о «равномощности» здесь произошла вредная «накладка» (или… полезная?!), но, в любом случае, эту накладку сейчас трудно устранить – *сейчас* мне думать уже… некогда.)))]

Мощность (или кардинальное число) множества всех натуральных чисел и равномощных ему (счётных множеств) обозначается «***алеф-нуль***» (см. на обложке данной книги) – это первая буква древнееврейского алфавита с нижним индексом «о», однако в данной статье мы её запишем как **N0**. *Счётное множество* – это бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами, причем установлено, что счётное множество – это наименьшее по мощности из всех бесконечных множеств.

Мощность множества вещественных чисел называется ***континуум*** (от лат. continuum – непрерывное) и обозначается строчной латинской буквой «с» во *фрактурном* начертании (поздняя разновидность готического письма, возникшая в XVII—XVIII вв.), однако в данной статье мы её запишем как **G**. Множество, имеющее мощность континуум (**G**), называется *континуальным* множеством, таковым является, например, множество, состоящее из всех точек отрезка [0; 1]. Также термин «континуум» может обозначать само множество вещественных чисел, или даже любое континуальное множество. Очевидно, что все ***экзочисла*** (из моей *виртуальной космологии*) входят в континуальное множество [0; 1]. Возможно, что числа 0 и 1 также следует назвать экзочислами (Э), хотя в этих точках возникают некие проблемы с главной функцией $E \equiv Э/\ln Э$.

Установлено, что мощность континуума (**G**) – это наименьшая, превосходящая мощность счетного множества, и «промежуточных» мощностей между счетным множеством и континуумом нет.

Установлено, что между множеством всех подмножеств натуральных чисел и континуумом есть взаимно-однозначное соответствие, таким образом, **G** = 2^**N0**. Согласно *континуум-гипотезе*, между **N0** и **G** нет промежуточных мощностей, притом, как показал Коэн в 1962 году, ни она, ни её отрицание недоказуемы в основных аксиоматиках теории множеств.

14. Бесконечные ряды

Рассмотрим сумму *бесконечного* ряда

$$\boldsymbol{S \equiv 1/2\hat{}B + 1/3\hat{}B + 1/4\hat{}B + 1/5\hat{}B + \ldots} \qquad (14.1)$$

Общий член этого ряда имеет вид 1/*N*^*B*, где *N* – пробегает *все* натуральные числа, начиная с числа 2, а показатель степени *B* – любое вещественное число, начиная с числа 1. Поскольку (при указанных *B*) общий член ряда стремится к нулю, то сумма (*S*) такого ряда может *сходиться*, то есть может существовать *предел* (вещественное число), к которому стремятся суммы первых N слагаемых ряда, когда N неограниченно растёт. На компьютере видно, что при $1 < B \leq 1{,}471894$ указанная сумма S сходится (?) к некому соответствующему проточислу $1 < П \leq 2{,}718280432$. Просто заманчиво сказать, что *всякое проточисло П – это сумма* ***тёмных*** *экзочисел* («отражающих» тёмную энергию, см. чуть ниже). Однако у автора нет оснований так говорить. Ведь выше был сформулирован только *необходимый* признак сходимости ряда, но не достаточный. Например, при $B = 1$ указанный ряд расходится, то есть сумма S будет неограниченно возрастать по закону: $S \approx \ln N + C - 1$, где $C = 0{,}577215\ldots$ (см. про *гармонический ряд* в гл. 4).

А вот при $B = 2$ указанный ряд *сходится* (это строго доказано в математике) и его сумма равна такому (предельному) числу: S = пи^2/6 – 1 ≈ 1,644934 – 1 ≈ 0,644934. Например, при N = 65525 частичная сумма уже дорастает до 0,644919, что «всего лишь» на 0,0024% меньше (предельной) суммы $S \approx 0{,}644934$.

При $B = 2$ указанный ряд – это *бесконечная* сумма убывающих (к нулю) ***тёмных*** *экзочисел*: $S = 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + 1/49 + \ldots = 0{,}250 + 0{,}111 + 0{,}062 + 0{,}040 + 0{,}027 + 0{,}020 + \ldots$ (показано только три цифры после запятой). Напомню, что (по определению) ***тёмное*** экзочисло ($Э$ < 0,756.945.106.457.584…) не имеет *равномощного* обычного числа N, то есть $Э/\ln Э$ никогда не равно $N/\ln N$ (ни при каких $N \geq$ e, где e ≡ 2,718). И, как следствие этого, тёмное экзочисло не имеет равномощного *проточисла П*, то есть $Э/\ln Э$ никогда не равно $П/\ln П$ (ни при каких вещественных $П$ из интервала: $1 < П <$ e). В рамках виртуальной космологии ***тёмные экзочисла «отражают» тёмную энергию*** (эту гипотезу автор обосновывает в книге «Тёмная энергия…»).

Математиком известны многие ***бесконечные*** ряды, все члены которых – это ***экзочисла*** $Э$ (в том числе включая единицу), а суммы указанных рядов – это некое ***проточисло*** $П$ (от 1 до числа $e \equiv 2{,}718$) или ***обычное число*** $N \geq e$. Приведу лишь наиболее известные примеры указанных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{4}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Приведенные здесь *бесконечные* ряды и другие подобные ряды свидетельствуют: ***между тремя бесконечными мирами (экзочисла, проточисла, обычные числа) есть глубокая связь***. Разумеется, эта связь проявляется не только в бесконечных рядах. Наверное, не ошибусь, если скажу, что указанная связь обнаруживается буквально во всех разделах математики (а не только в теории чисел). Например, очень красивый пример такой связи приводит гениальный Леонард Эйлер в своём удивительном мемуаре (см. мою книгу «Леонард Эйлер и космология чисел», гл. 2.8).

15. «Структура» богатства Пирамиды

В данной главе речь пять пойдет о *целых* делителях *натуральных* чисел N. Глядя на Пирамиду делителей (см. рис. 15.1) мы ясно понимаем *главный закон* мира чисел:
– каждое число имеют делитель $d = 1$ (1-й столбец Пирамиды);
– каждое 2-ое число имеет делитель $d = 2$ (см. 2-й столбец);
– каждое 3-е число имеет делитель $d = 3$ (см. 3-й столбец);
– каждое 4-ое число имеет делитель 4 и т.д. до *бесконечности*.
Значит, на отрезке [1; N] (от 1 до N включительно или в Пирамиде высотой N) количество чисел, имеющих делитель d будет следующим А(N/d), где А – это функция ***антье*** (фр. entier), иначе говоря, *целая часть* вещественного числа (в нашем случае отношения N/d) – округление этого числа (отношения N/d) до ближайшего целого в меньшую сторону. Например, 50/6 = 8,333…, поэтому А(N/d) = А(50/6) = 8 и на рис. 15.1 вы легко убедитесь, что на отрезке [1; 50] (в Пирамиде высотой $N = 50$) будет именно 8 делителей $d = 6$ (см. в 6-ом столбце Пирамиды). Таким образом, в Пирамиде высотой N (см. рис. 15.1):
в 1-ом столбце – А($N/1$) = N делителей $d = 1$;
во 2-ом столбце – А($N/2$) делителей $d = 2$;
во 3-ом столбце – А($N/3$) делителей $d = 3$;
во 4-ом столбце – А($N/4$) делителей $d = 4$;
во 5-ом столбце – А($N/5$) делителей $d = 5$;
……………………………………………..
в N-ом столбце – А(N/N) = 1 делителей $d = N$.

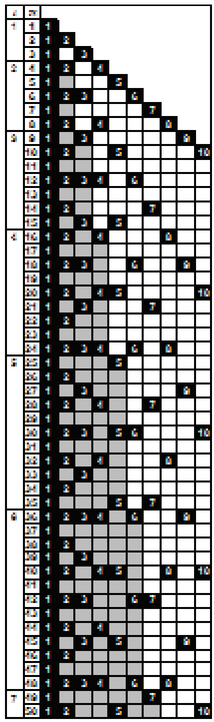

Рис. 15.1. Пирамида

Поэтому, ***сумма всех делителей*** на отрезке [1; N] или, иначе говоря (для краткости),

богатство (*Б*) Пирамиды высотой *N* (богатство указанного отрезка) будет равна:

$$\boldsymbol{Б} = \mathbf{A}(\boldsymbol{N}/\mathbf{1})*\mathbf{1} + \mathbf{A}(\boldsymbol{N}/\mathbf{2})*\mathbf{2} + \mathbf{A}(\boldsymbol{N}/\mathbf{3})*\mathbf{3} + \ldots + \mathbf{A}(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{N})*\boldsymbol{N}. \qquad (15.1)$$

Эта формула позволяет легко вычислить *точное* богатство Пирамиды даже в (примитивной) программе «Excel» на *рабочем отрезке*, скажем, от $N = 1$ до $N = 10$^6 – это Пирамида высотой в миллион строк, для которой мы получим $S = 822.468.118.437$. Однако нас, как всегда, интересует формула для *практически осуществимого* подсчета богатства *Б* для *сколь угодно большого* числового отрезка [1; *N*] (сколь угодно высокой Пирамиды). О том, как прийти к подобной формуле и рассказано ниже.

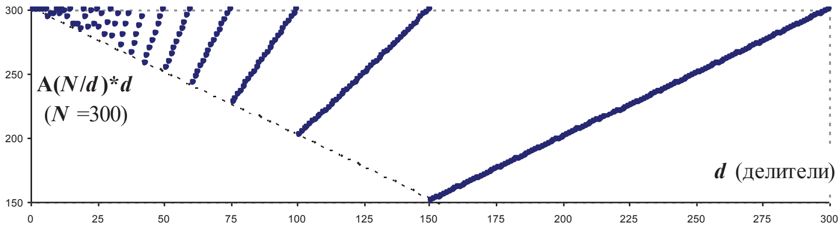

Рис. 15.2. Структура богатства (*Б*) у Пирамиды высотой $N = 300$

Нетрудно убедиться, что львиная доля всех слагаемых A(N/d)*d из формулы (15.1) объединяются в группы с одинаковой *антье*, и эти группы на графике (см. рис. 15.2, где $N = 300$) предстают в виде наклонных, скажем так, «балок» из точек-значений (у каждой балки – своя *антье*). Так, для любого числа *N* у самой длинной балки (крайней справа на графике) – антье равна 1 (для всех делителей *d* под данной балкой). А в начале натурального ряда (для малых значений *d*), как всегда, царит ***хаос*** – там ещё не сформировались чёткие балки на графике. Для достаточно большого отрезка [1; *N*] левые концы всех балок находятся на (пунктирной) прямой, соединяющей две точки: при $d = 1$ имеем A(N/1)*1 = N и при $d = N$ имеем A(N/N)*N = 1. Поэтому уравнение пунктирной прямой будет таким (и это верно для Пирамиды любой высоты N):

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{d})^*\boldsymbol{d} \approx (\mathbf{1} - \boldsymbol{N})/(\mathbf{2}/\boldsymbol{N} - \mathbf{1}) + \mathbf{1}/(\mathbf{2}/\boldsymbol{N} - \mathbf{1})^*\boldsymbol{d}, \qquad (15.2)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{d})^*\boldsymbol{d} \approx \boldsymbol{N} - \boldsymbol{d} \;\; (\text{при } N \to \infty). \qquad (15.3)$$

Ещё раз подчерку, что всё сказанное (и ниже по тексту) тем справедливее (точнее выполняется), чем больше N, то есть чем больше рассматриваемый отрезок [1; N] (чем выше Пирамиды).

Пусть K = 1, 2, 3, 4, … – это порядковый номер балки, причем отсчет начинаем с самой длинной балки (у неё $K \equiv 1$). В нашей Пирамиде (высотой всего лишь $N = 300$) 1-я балка начинается при $d = 151$ (это почти $N/2$) и заканчивается при $d = 300$ (это всегда $N/1$). При этом 1-ю балку формируют (выстраивают) такие слагаемые $A(N/d)*d = 151*1 + 152*1 + 153*1 + … + 300*1$ (целые числа от 151 до 300 идут подряд, без пропусков). Аналогичным образом 2-я балка ($K \equiv 2$) начинается при $d = 101$ (это почти $N/3$) и заканчивается при $d = 150$ (это $N/2$). При этом 2-ю балку формируют такие слагаемые $A(N/d)*d = 101*2 + 102*2 + 103*2 + … + 150*2$ (целые числа от 101 до 150 идут подряд, без пропусков). Сказанного достаточно, чтобы написать общую формулу, *почти* верную для любой балки:

$$S\text{к} = \{[N/(K+1) + N/K]*[N/K - N/(K+1) + 1]/2\}*K, \qquad (15.4)$$

Sк – это частичная сумма, которую нам дает K-я балка. Причем, в фигурных скобках {…} попросту записана сумма всех членов *арифметической прогрессии* (K-й балки): от первого члена $N/(K+1)$ до последнего члена N/K, а количество таких членов равно $[N/K - N/(K+1) + 1]$. Именно суммирование частичных сумм Sк (при K = 1, 2, 3, 4, …) даст нам (с некой погрешностью) искомое богатство (*Б*) отрезка [1; N]. Разумеется, если читатель сам «повозится» на компьютере (ПК) с нашей Пирамидой (высотой $N = 300$), то вопросы в части всех, приводимых здесь, формул и утверждений исчезнут «как утренний туман».

А теперь в формуле (15.4) мы вынесем за скобки число N:

$$S\text{к} = [1/K + 1/(K+1)]*[1/K - 1/(K+1) + 1/N]*K*N\text{^}2/2, \qquad (15.5)$$

Для достаточно больших N разность $[1/K - 1/(K+1)]$ убывает от своего максимума (всегда равного 0,5) до величины $1/N$, достигая

$1/N$ при $K = (1/4 + N)$^0,5 – 1/2, что является просто корнем квадратного уравнения K^2 + $K – N$ = 0, вытекающего из рассмотрения второй квадратной скобки формулы (15.5). Таким образом, при K = 1, 2, 3, 4, …, N^0,5 второй сомножитель [порождаемый второй квадратной скобкой] будет уменьшаться весьма *существенно*, а вот при $K > N$^0,5 (это корень квадратный из числа N) второй сомножитель практически будет оставаться именно на уровне значения $1/N$, поскольку разность [$1/K$ – 1/(K+1)] станет практически невидимой (почти нулевой) на фоне члена $1/N$. Иначе говоря, мы вправе отбросить член $1/N$ (полагать его равным нулю, ведь N достаточно велико), но тогда мы сможем работать с формулой (15.5) только при ***K* = 1, 2, 3, 4, …, *N*^0,5** (не далее этого значения, округляя его до целого числа). Вот так мы и определились с количеством (K) рассматриваемых нами частичных сумм Sк.

Итак, богатство (*Б*) отрезка [1; N] можно вычислять путем суммирования частичных сумм Sк, найденных по формуле (15.5) при K = 1, 2, 3, 4, …, N^0,5, где корень (N^0,5) округляем до ближайшего целого числа. Такой подход на *рабочем отрезке* (вплоть до N = 10^6) позволяет нам находить богатство отрезка с относительной погрешностью ОП < $2/N$. Например, указанным способом ещё относительно несложно работать, скажем, на отрезке от 1 до N = 65510^2 = 4.291.560.100 при этом мы получим такое богатство отрезка: *Б* ≈ 1,644934*N^2/2 ≈ 1,5147776777*10^19 (однако какова ОП этого результата?).

А теперь мы рассмотрим ещё один способ вычисления богатства (*Б*) отрезка [1; N]. Для этого в формуле (15.5) мы всё-таки ***отбросим член* 1/*N*** (полагая его равным нулю, ведь N достаточно велико). При этом мы получим следующее:

$$S\text{к} = [1/K + 1/(K+1)]*[1/K - 1/(K+1)]*K*N\text{^}2/2 =$$
$$= [1/K\text{^}2 - 1/(K+1)\text{^}2]*K*N\text{^}2/2 =$$
$$= [1/K - K/(K+1)\text{^}2]*N\text{^}2/2. \qquad (15.6)$$

Докажем, что при больших значениях K можно полагать, что отношение K/(K + 1)^2 ≈ (K – 1)/K^2. Пусть это верно, тогда перепишем это выражение: K^3 ≈ (K + 1)^2*(K – 1) или K^3 ≈ K^3 + K^2 – K – 1, что действительно *верно* при больших K, ведь тремя последними слагаемыми (K^2 – K – 1) можно смело пренебречь на фоне наибольшего первого слагаемого K^3.

А теперь заметим, что 1/K – (K – 1)/K^2 = 1/K^2, поэтому последнее выражение (15.6) можно переписать в таком виде:

$$S\text{к} \approx (1/K\text{^}2)*N\text{^}2/2, \qquad (15.7)$$

а искомое нами богатство (*Б*) отрезка [1; N] будет равна сумме… *бесконечных* частичных сумм Sк:

$$Б \approx (1/1\text{^}2 + 1/2\text{^}2 + 1/3\text{^}2 + 1/4\text{^}2 + \ldots)*N\text{^}2/2. \qquad (15.8)$$

Именно *бесконечных* частичных сумм, а не до слагаемого вида 1/N^2 (при $K = N$), как это было бы «логично» ожидать. Почему наше, казалось бы, «безобидное» допущение (1/N = 0) в формуле (15.5) приводит к необходимости (это видно при исследованиях на ПК) именно *бесконечного* суммирования в скобках формулы (15.8). Почему это именно так – автор пока объяснить (доказать) не может. Но только очередной (уже который!) раз напомню читателю, что ***мир чисел – это удивительный мир, построенный на едва уловимых нюансах***.

При этом в математике строго доказано (и это общеизвестно), что указанная *бесконечная* сумма имеет предел (при $N \to \infty$):

$$1/1\text{^}2 + 1/2\text{^}2 + 1/3\text{^}2 + 1/4\text{^}2 + \ldots + 1/N\text{^}2 + \ldots = \pi\text{^}2/6 \qquad (15.9)$$

Поэтому в конечном итоге мы получаем, что богатство (*Б*) отрезка [1; N] (богатство Пирамиды) будет равно:

$$\boldsymbol{Б \approx (\pi\text{^}2/6)*N\text{^}2/2 \approx 1{,}6449*N\text{^}2/2}. \qquad (15.10)$$

Наша главная (и самая красивая по теме богатства Пирамиды) формула (15.10) на *рабочем отрезке* (вплоть до N = 10^6) позволяет находить богатство *Б* с относительной погрешностью ОП < 2/N, то есть с той же точностью, как и формула (15.5), в правильности которой мы не сомневаемся (там всё обосновано без особых проблем?). И эти (увы, довольно сомнительные рассуждения) в настоящее время являются главным аргументом в части доказательства окончательной формулы (15.10).

В *теории чисел* есть так называемая *формула Дирихле* (см. гл. 4), из которой следует, что на достаточно большом отрезке [1; N] *общее количество* (*К*) всех делителей оценивается так:

$$\boldsymbol{K \approx N*\ln N}. \qquad (15.11)$$

То есть здесь угадывается довольно «красивое» утверждение (коих много в мире чисел): с ростом *N* (правой границы отрезка) параметр *K* численно устремляется к *простому* числу *P* с порядковым номером (в ряду всех простых чисел) близким к *N*.

Зная формулы (15.10) и (15.11), мы можем вычислить некий ***средний делитель*** (*D*s) на отрезке [1; *N*]:

Ds ≡ $Б/K$ ≈ (π^2/12)*N/ln$N$ ≈ 0,8225*N/ln$N$, (15.12)

то есть мы приходим к очередному «красивому» утверждению: с ростом *N* (правой границы отрезка) средний делитель (*D*s) численно устремляется к количеству *простых* чисел на отрезке [1; *N*] (которое устремляется к выражению *N*/ln*N*).

Однако, если верить Википедии (см. статью «Делимость»), то из работ А. Карацубы и М. Королёва следует:

Dsw ≈ 0,7138067*N/(ln$N$)^0,5, (15.13)

При этом у среднего делителя из Википедии (*D*sw) модуль относительной погрешности (ОП)… *растет* на моём рабочем отрезке [10; 10^6]; более того, также бесконечно растет и отношение *D*sw/*D*s ≈ 0,868*(ln*N*)^0,5. И это при том, что мой средний делитель (*D*s), вычисляемый по формуле (15.12), имеет быстро убывающую относительную погрешность ОП < 2/*N*.

Возможно, автор сам ошибся со своей формулой (15.12) или не так понял Википедию в части «среднего делителя». Хотя сразу подумалось, что в Википедию ведь может написать каждый и что угодно – лишь бы это пропустил *модератор* (их там много?), а потом при чтении не заметили грамотные эксперты (в данном случае по *теории чисел*). [А ещё автор вспомнил, что осенью 2009 года (когда начал публиковаться в Интернете), то, разумеется, первым делом попытался поместить в Википедию новую статью под названием «Виртуальная космология» (новый взгляд на мир чисел). Однако уже самое начало моей статьи мгновенно выкинул из Википедии модератор под ником… Кантор (Cantor). Этому Кантору, подобно Богу, сразу буквально всё стало ясно про мир чисел, про все его тайны, ну и про меня, разумеется…))]

Проблемы со средним делителем (*D*s), описанные выше, опять наглядно показывает, как ***легко прийти к ошибочному выводу (неверным формулам) в мире чисел, «сотканному» из множества тончайших взаимосвязей, едва уловимых нюансов и ещё чего-то, понятному только самому… Творцу***.

Добавлю, что согласно формуле (15.12), средний делитель (Ds) отрезка [1; N] всегда существенно больше логсреднего делителя Dлс $\equiv N$^0,5 (старшего *малого делителя* на указанном отрезке, см. гл. 2). При этом с ростом числа N (правой границы отрезка) отношение Ds/$N \approx$ 0,8225/ln$N$ устремляется к нулю. То есть средний делитель (Ds) отрезка [1; N] становится ничтожно малым по сравнению с максимально большим делителем (равным самому N) данного отрезка. Например, при $t \equiv$ lnln$N \equiv$ 1/ПТС $\approx$ 137, мы получим ln$N \approx$ e^137, поэтому Ds/$N \approx$ 1/10^60. Очевидно, что подобное «исчезновение» Ds на фоне самых больших делителей (порядка числа N) происходит лишь потому, что самые большие делители в Пирамиде (скажем, как и самые гениальные люди) – это крайне редкие феномены.

6 января