

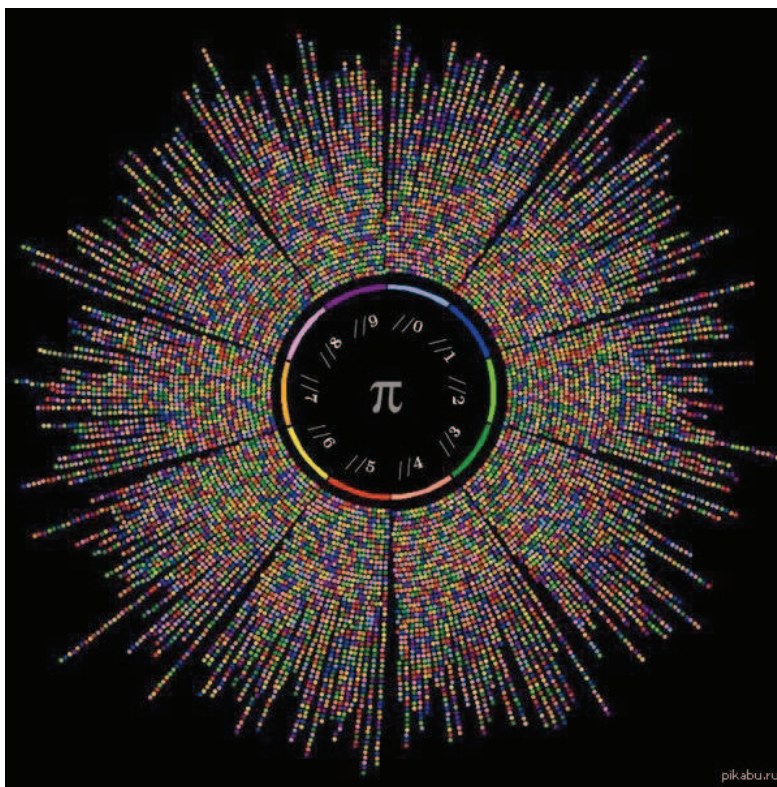
Параллельные миры II или структура пространства-времени (worlds II or the structure of space-time)

Александр Васильевич Исаев
(Alexander Vasilievich Isaev)

Abstract

Книга, в которой автор предлагает рассматривать законы мира натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... – их законы изучает теория чисел) в качестве математической "модели" наипростейшей "ткани" дискретного пространства-времени (проще этого уже ничего не придумать).

In this book the author proposes to consider the laws of the world of natural numbers (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... - their laws are studied by number theory) as a mathematical "model" of the simplest "fabric" of discrete space-time (it's not easier to think of anything).



Визуализация числа Пи.

http://cs6.pikabu.ru/post_img/2015/02/22/8/1424613536_2058931528.jpg

ББК 22.1

И 85

Исаев А.В.

И85 Параллельные миры II или структура пространства-времени. СПб., «ЛИСС», 2002. – 240 с.

ISBN 5-87050-199-7

Как ни парадоксально, но бесконечный ряд натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... – один из сложнейших и интереснейших объектов математики. Книга рассказывает об этом удивительном факте, причем весьма простым, доступным языком. В первой главе книги содержатся *уникальные данные* по структуре натуральных чисел, которые невозможно нигде найти и сложно получить даже с помощью компьютера (требуется довольно много машинного времени).

Внутренняя красота и гармония мира чисел феноменальны сами по себе, но ещё больше поражает некая *таинственная связь* структуры чисел со структурой реального пространства-времени. Возможно, никакой связи и не существует, а для поразительных фактов «пересечения» виртуальных числовых миров и реальных физических миров – искушенный читатель сможет найти свои объяснения.

© А. В. Исаев, 2002

© Издательство «ЛИСС», 2002

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	6
Обозначения и некоторые определения.....	7
<i>Глава 1. СТРУКТУРА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ (ГТНЧ)</i>	
1.1. Простые числа – базис натуральных чисел.....	11
1.2. Пять классов натуральных чисел.....	14
1.3. Тип числа, тип по Дирихле, миры чисел.....	16
1.4. Законы Пирамиды.....	20
1.5. Спираль миров (спираль Улама).....	28
1.6. Количество простых чисел.....	30
1.7. Определение простого числа по его номеру.....	33
1.8. Единица близка к бесконечности?.....	34
1.9. Проблемы Гольдбаха больше не существует?.....	36
1.10. Орбиты простых чисел (мира №2).....	39
1.11. Количество различных орбит в мире №2.....	41
1.12. Спектр орбит простых чисел.....	44
1.13. Приоритет орбиты $H=6$ у простых чисел.....	46
1.14. Прирост и мнимый прирост числа.....	48
1.15. Бесконечная сложность структуры чисел.....	50
1.16. Закономерности формирования миров.....	52
1.17. Приоритет мира №8 (магия числа 7).....	54
1.18. Спектры частых и редких миров.....	58
1.19. Простые и удвоенные миры.....	60
1.20. Скопления четных миров.....	62
1.21. Скопления лидеров миров.....	65
1.22. Матрица кандидатов в лидеры редких миров.....	67
1.23. Матрица лидеров редких миров.....	70
1.24. Матрица главных лидеров редких миров.....	71
1.25. Флуктуация редких миров.....	72
1.26. Богатство и кратность чисел из редких миров.....	74
1.27. Матрица кандидатов в лидеры частых миров.....	76
1.28. Матрица лидеров частых миров.....	78
1.29. Матрица главных лидеров частых миров.....	78
1.30. Флуктуации частых миров.....	79
1.31. Кратность чисел из частых миров.....	81
1.32. Распределение типов по пяти классам.....	82
1.33. Паузы, зоны, створы редких миров.....	83
1.34. Количество редких миров.....	87
1.35. Паузы, зоны, створы частых миров.....	87
1.36. Количество частых миров (всех миров).....	89
1.37. Законы распределения делителей числа.....	90
41.38. Пифтроечки и их закономерности.....	95

Глава 2. ТАКИЕ РАЗНЫЕ ЧИСЛА

2.1. Число Эйлера (e) и вездесущая экспонента.....	99
2.2. Число π определяет Пирамиду?.....	102
2.3. Структура чисел Фибоначчи.....	104
2.4. Структура чисел Каталана.....	108
2.5. Числа Ферма (Гауссовы простые числа).....	112
2.6. Числа 1, 2, 3 – особые числа.....	114
2.7. В поисках числа Фейгенбаума.....	115
2.8. Совершенные числа и числа Мерсенна.....	119
2.9. Дружественные и обительные числа.....	121
2.10. Почти целые числа.....	122
2.11. Самопорожденные числа Капрекара.....	123
2.12. Фигурные числа (кватре-числа).....	126
2.13. Всякие прочие числа.....	128

Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕСЬ

3.1. Закон Бенфорда (о первой значащей цифре).....	129
3.2. Коэффициент заполнения пространства.....	132
3.3. Теория блужданий А. Эйнштейна.....	136
3.4. Как доказали Великую теорему Ферма.....	137
3.5. Первые признаки упадка в математике?.....	141
3.6. Фракталы (множество Мандельброта).....	143
3.7. Пирамида делителей – фрактальный объект?.....	146
3.8. Сценарий перехода порядка в хаос.....	147
3.9. Магические квадраты и ошибка гения.....	149
3.10. Мозаики и ... структура пространства-времени.....	152
3.11. Философия без математики бессильна!.....	154
3.12. Кабалистика – «наука» о числах.....	155
3.13. Пифагорейцы: «Всё есть число».....	158
3.14. Характерные величины из мира чисел.....	160

Глава 4. СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

4.1. Общая картина Вселенной.....	163
4.2. Расширение пространства-времени.....	175
4.3. Сингулярность – граница наших знаний.....	179
4.4. Элементарные частицы (микромир).....	181
4.5. Силы в природе и их объединение.....	185
4.6. Семь стадий эволюции Вселенной.....	191
4.7. Структура атомов и их ядер.....	196
4.8. Квантование пространства-времени.....	200
4.9. «Тонкая подстройка» мироздания.....	204
4.10. Антропный принцип в космологии.....	211

4.11. Основные структурные единицы Вселенной.....	213
4.12. От нуля до бесконечности – один шаг.....	217
4.13. Суперпозиция миров (виртуальные миры).....	222
4.14. Время – непостижимая загадка физики.....	225
4.15. Ветвящиеся структуры во Вселенной.....	228

Раздел 5. КОРОТКО О МНОГОМ (ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ ГТНЧ)

5.1. Человек – высшая форма материи на Земле.....	231
5.2. Чудо-вычислители (люди и устройства).....	242
5.3. Критический год для человечества (2030 г.).....	246
5.4. Искусство – как способ познания.....	251
5.5. Распределение доходов населения.....	257
5.6. Распределение величин в природе.....	262
5.7. Закон распределения богатства.....	266
5.8. Зарплата, курс доллара и МД-функция.....	268
5.9. Магия числа $7+2$	270
5.10. Кристаллография и ГТНЧ.....	272
2 Заключение.....	277
Литература.....	278



“Бог – это число”. “Самое мудрое – число”. “Числу же все подобно”. “Первообразы и первоначала не поддаются ясному изложению на словах, потому что их трудно уразуметь и трудно высказать, – оттого и приходится для ясности обучения прибегать к числам”. “Все происходит не из числа, но сообразно с числом, ибо в числе – первичная упорядоченность...”

ПИФАГОР Самосский (ок. 570–500 до н. э.)

“Из всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными предложений, чем проблемы, касающиеся природы чисел и их делителей ... В этом отношении нынешние математики сильно отличаются от древних, придававших гораздо большее значение исследованиям такого рода. ... Математика, вероятно, никогда не достигла бы такой степени совершенства, если бы

древние не посвятили столько сил развитию вопросов, которыми сегодня большинство пренебрегает из-за их мнимой бесплодности”.

ЭЙЛЕР Леонард (1707–1783)

“Математика – королева наук, а теория чисел – королева математики”.

ГАУСС Карл Фридрих (1777–1855)

“... Единственной целью науки является возвеличить человеческий ум, и при таком подходе вопрос о числах столь же значителен, как вопрос о системе мира”.

ЯКОБИ Карл Густав Якоб (1804–1851)

“Целые числа сотворил господь бог, а все прочее – дело людских рук”.

КРОНЕКЕР Леопольд (1823 – 1891)

“Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества”.

БЭКОН Роджер (ок. 1214–1292)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Что может быть проще бесконечного ряда натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Если вы тоже так думаете, то эта книга, наверное, удивит вас. А материал первой главы сулит неожиданности даже математикам, поскольку он впервые получен автором и аналогов не имеет. Даже там, где речь идет об известных вещах (из физики или из жизни нашего общества), вы найдете нетрадиционные аргументы – пишу для новых собственных размышлений.

Несмотря на обилие формул, книгу отличает доступность самому широкому кругу читателей, в том числе едва знакомому с математикой. Во всяком случае, приобщиться к красоте и гармонии мира чисел (его элементарных формул) сможет каждый здраво мыслящий человек. Любители точных наук легко используют простые идеи и фактические данные для своих многообещающих исследований. В общеизвестной *теории чисел* и без того немало «белых пятен», а предлагаемый автором взгляд на числа открывает практически безграничное поле деятельности для работы и фантазии.

Графическая теория натуральных чисел (ГТНЧ) – это новый раздел в теории чисел, который разрабатывается автором с 1997 года [15, 16]. Слово «графическая» подчеркивает, что основной метод исследования чисел в ГТНЧ базируется на построении и анализе различных графиков с помощью

компьютера. Строго говоря, ГТНЧ не является математической теорией, а это пока лишь некий набор данных (зачастую весьма спорных). Простота натуральных чисел весьма обманчива, на самом деле их структура чрезвычайно сложна и интересна, ведь недаром теория чисел привлекала внимание сильнейших математиков во все времена. К сожалению, в рамках ГТНЧ, как правило, удастся сформулировать некие закономерности, справедливые для отрезков чисел только ограниченной длины. То есть многие формулы в ГТНЧ – “*ad hoc*” (это латинское выражение, означающее «только для данного случая»). Тем не менее, автор надеется, что ГТНЧ также имеет право на существование, а её *наглядность* и *доступность* послужат популяризации самых фундаментальных математических понятий, выводов и гипотез.

Не исключено, что ГТНЧ, подобно Розеттскому камню, дававшему ключ к расшифровке египетских иероглифов, поможет понять *таинственную связь структуры натуральных чисел со структурой реального (физического) пространства-времени*. По крайней мере, целый ряд приведенных аналогий заслуживает самого серьезного осмысления и дальнейших исследований. Именно поэтому в книге приводится предельно простое описание реальной картины мироздания (Вселенной, пространства-времени). Человек, его разум – это всего лишь одна из форм существования материи, которая также подчиняется числу и мере, вот почему в последней главе предложен несколько необычный взгляд на человека и общество (через призму ГТНЧ).

ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

$+$, $-$, \cdot , $/$, $^$ – знаки арифметических операций: “сложение”, “вычитание”, “умножение” (точка), “деление” (дробь), “возведение в степень” (крышка).
 $2\cdot E+8$ – вариант обозначения числа $2\cdot 10^8$ (в книге встречается на графиках).
 $N\rightarrow\infty$ – запись, означающая “величина N стремится к бесконечности”.
 Σ , Π , $\sqrt{\quad}$, \int – знаки: суммы, произведения, корня квадратного, интеграла.
 $<$, $>$, \leq , \geq – “меньше (больше)”, “меньше (больше) или равно”.
 \equiv – символ, означающий “по определению”, например $n!\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\cdot n$.
 $n!$ – факториал, то есть $n!\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\cdot n$ (формула из комбинаторики).
 \approx – символ приближенного равенства. Применяется к величинам, равным с точностью до множителя два или около этого, например $\pi^2\approx 3,14^2\approx 10$.
 \sim (*тильда*) символ, означающий, равенство порядков у величин, например, $7\cdot 10^8\sim 5\cdot 10^9$. Стоящий перед одиночным символом знак \sim означает «по порядку величины». Например, $N\sim 10^3$ может означать как $N=630$, так и $N=2050$, то есть это весьма неточное указание величины N .
 $\pi=3,141593\dots$ – фундаментальная математическая константа (ФМК).

$e=2,718282\dots$ – ФМК, основание натуральных логарифмов.
 $C = 0,577215\dots$ – постоянная Эйлера (Эйлера – Маскерони), ФМК.
 $4,669201\dots$ – число Фейгенбаума (ФМК, была открыта в 1977 г.).
 $1,618034\dots$ – число Фидия (характеризует собой “золотое сечение”).
 $\kappa=6174$ – постоянная Капрекара (о происхождении рассказано в тексте).
const – числовая константа (когда её значение для нас не существенно).
 $N=f(X)$ – величина N является некой функцией (f) величины X .
ln, **Ig** – логарифм натуральный, логарифм десятичный (две функции).
exp(x) или иначе e^x – показательная функция, то есть $\exp(x)\equiv e^x$.
A(x) – функция “антье”, выделяет целую часть числа, например, $A(7,4)=7$.
abs(N) – абсолютная величина (модуль величины) N , т. е. число N без знака.
max, **min** – максимум, минимум (некой величины, например, T_{max} , T_{min}).

Текст, набранный мелким шрифтом (подобно данному абзацу), читатель может пропускать, поскольку он отражает самые спорные мысли автора. Однако, ещё великий датский физик Нильс Бор (1885–1962) призывал создавать теории «как можно более безумные», поэтому не судите строго, и не воспринимайте всё сказанное автором слишком серьезно. Читая указанный текст, не пытайтесь выстроить некую картину взаимосвязи мира чисел и физического мира. Целостной картины не существует, есть только ряд фактов, аналогий (порой противоречащих друг другу), но они столь любопытны, что невозможно удержаться от соблазна пофантазировать.

“*Вообще говоря*” – это выражение на строгом языке математики означает, что “*бывают случаи, когда это не так*”. Это выражение весьма удобно для краткой формулировки любых нетривиальных утверждений. Например, можно предположить, что ГТНЧ, вообще говоря, правильно отражает структуру начала натурального ряда (точные границы оговорены в тексте).

Пространство-время – это основные формы существования материи, которые имеют решающее значение для построения физической картины мира, нашей Вселенной. *Математические описания* пространства и времени оказались очень похожими и в действительности это две стороны одной единственной структуры, именуемой “пространство-время”. В современной квантовой теории пространству и времени отводится центральная роль, существуют даже теории, где вещество рассматривается не более как возмущение этой основной структуры (в классической физике пространство и время строится из материи, и только это доступно нам в ощущениях).

ЭВИ (*элементарный временной интервал*) – понятие из квантовой физики, $1 \text{ эви} \approx 5,4 \cdot 10^{-44}$ секунды. Это минимальный временной интервал, который требуется для протекания любого физического события. Причем, некоторые теории утверждают, что на этом уровне время уже квантуется, носит

дискретный характер, хотя в обыденной жизни время представляется нам чем-то непрерывным (“река времени”). В физике любой промежуток времени всегда можно перевести в отрезок длины, который проходят фотоны света за данное время (со скоростью, равной $3 \cdot 10^8$ м/с, т. е. со скоростью света в вакууме). Так, один *эви* эквивалентен $1,6 \cdot 10^{-35}$ м (*элементарной длине*), т. к. именно такой путь проходит свет за время, равное 1 *эви*.

Возраст Вселенной точно не известен и может находиться в диапазоне $10 \div 20$ млрд. лет. Мы впредь будем считать, что он равен 17,2 млрд. лет ($5,4 \cdot 10^{17}$ с или 10^{61} *эви*). Тогда *характерный размер* Вселенной будет равен $1,6 \cdot 10^{26}$ м, а радиус это или диаметр Вселенной – для нас несущественно.

Ядерное время. Для ядерной физики элементарной частицей первостепенной важности является *протон*, например он входит в состав ядра любого атома. Если принять размер протона равным $3 \cdot 10^{-15}$ м (на самом деле это довольно тонкое понятие), то можно ввести удобную для микромира характеристику – *ядерное время*, которое равно 10^{-23} секунды или 10^{20} *эви* – за это время свет пересечет протон. Физически это наименьший интервал времени, который требуется, чтобы протон наблюдался как единое целое.

Отрезок натурального ряда, например, от 1 до числа N – это все натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... и т. д. до числа N *включительно*; обозначение такого отрезка – $[1; N]$. Разумеется, отрезок может начинаться с любого числа, просто в ГТНЧ начало исследуемых отрезков чаще всего совпадает именно с единицей. Мы также будем пользоваться термином “*рабочий отрезок*”, и он, вообще говоря, для каждой главы (темы исследования) – свой, т. е. имеет свою *правую границу* N (свою длину).

Большой отрезок (БО) натурального ряда это числа $N=1, 2, 3, \dots, 10^{61}$. Этот отрезок настолько колоссален, что если каждое натуральное число воспринимать как один *эви*, то мы получим возраст Вселенной (10^{61} *эви* $\approx 17,2$ млрд. лет). Таким образом, БО можно мысленно отождествлять с возрастом (размером) Вселенной – для большей наглядности (в рамках ГТНЧ).

ЭВИ-конвертация. Очевидно, что подобно БО любой отрезок натурального ряда (любой длины) с помощью *эви* можно перевести в промежуток времени (в секунды, минуты, часы, и т. д.) или, используя понятие «элементарная длина», в отрезки длины (сантиметры, метры и т. д.) – этот перевод и есть *эви-конвертация*. В первой главе (собственно ГТНЧ) мы будем касаться только математики и там *эви-конвертацию*, можно воспринимать как литературный приём для увлекательного «погружения» в мир натуральных чисел (популяризации этого мира). Однако, с точки зрения других глав книги, именно *эви-конвертация* поможет установить некую адекватность структуры натуральных чисел и структуры реального пространства-времени.

Максимально возможная протяженность последнего равна 10^{61} эви, поэтому ГТНЧ ограничена именно таким отрезком (БО).

Малый отрезок (МО) натурального ряда – это числа $N=1, 2, 3, \dots, 10^{20}$. Если каждое натуральное число воспринимать как один эви, то данный отрезок окажется чрезвычайно малым, его длина будет эквивалентна $5,4 \cdot 10^{-44} \cdot 10^{20} \approx 10^{-23}$ секунды, т. е. МО можно отождествлять в своем воображении с ядерным временем (или с характерным размером протона).

Центральный отрезок (ЦО) натурального ряда это числа $N=1, 2, 3, \dots, 10^{35}$. Если каждое натуральное число воспринимать как один эви, то ЦО эквивалентен 1,616 м, что практически соответствует среднему росту человека и может являться характерным размером мира «человеческих» масштабов. Отрезок условно назван «центральным», т. к. в логарифмической шкале число 10^{35} находится почти в центре БО. Нетрудно убедиться, что отрезку в 1,616 м соответствует характерное время, равное $th=5,4 \cdot 10^{-9}$ секунды (буква h будет напоминать нам про *Homo sapiens* – человека разумного). Интересно, что время th для человека является чем-то вроде секунды для Вселенной, так, если принять продолжительность жизни человека за 92 года, то этот промежуток вмещает около $5,4 \cdot 10^{17} th$, т. е. столько же, сколько секунд содержится в возрасте Вселенной (см. выше). Чтобы представить себе время th скажем, что: время реакции человека на независимые дискретные раздражители – не менее 0,15 с; время одного разряда при ритмических сериях в нервных клетках доходит до 10^{-4} с. Для сравнения: время химических превращений при взрыве $\sim 10^{-5}$ с; средняя продолжительность жизни квазичастиц в твердом теле и в жидком гелии $\sim 10^{-2} \div 10^{-8}$ с.

Предельный отрезок (ПО) или **предел ПК** – так будем называть отрезок, правая граница которого равна числу 10^{308} , что после эви-конвертации можно трактовать как 10^{257} лет, т. е. для нас это практически *вечность*. Числа, больше указанного, выходят за диапазон допустимых значений, с которыми работает персональный компьютер (ПК). Это число является «бесконечностью» для «умной» машины, дойдя до него, ПК прекращает счет и выдает специальное сообщение, например «#ЧИСЛО!».

Относительная погрешность (ОП) приближения N^* – так называется отношение $ОП \equiv (N - N^*)/N^*$, где N^* – найденное нами приближенное значение величины, точное значение которой равно N . Величину ОП будем часто выражать в процентах (%). Как правило, величина N является неизвестной нам функцией от X (возможно очень сложной f функцией), т. е. $N=f(X)$, а нам удастся найти другую (относительно простую) функцию $N^*=\psi(X)$, после чего мы оцениваем ее относительную погрешность и принимаем решение о пригодности найденной функции для нашей задачи.

1. СТРУКТУРА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ (ГТНЧ)

1.1. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА – БАЗИС НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Понятие о *натуральных числах* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... возникло еще в доисторические времена, и было вызвано потребностью счета предметов. Очевидно, натуральные числа, а также арифметические действия над ними являются одними из первых математических абстракций постигнутых человеком. В самом процессе развития арифметики проявлялась потребность в изучении свойств чисел как таковых, в уяснении всё более сложных закономерностей в их взаимосвязях, обусловленных наличием арифметических действий. В *теории чисел* изучаются свойства различных классов чисел: целых, рациональных, алгебраических, трансцендентных, но до сих пор натуральные числа являются важнейшим объектом исследований. Чтобы оценить всю глубину, красоту и значение весьма непростой теории чисел необходимо университетское математическое образование. В этом отношении ГТНЧ весьма доступна, но вместе с тем позволяет в полной мере почувствовать внутреннюю гармонию и совершенство удивительного мира чисел. Итак, перейдем непосредственно к числам.

Все натуральные числа, большие 1, математики разделяют на две группы: к 1-й группе относятся числа, имеющие ровно два натуральных делителя, а именно 1 и самого себя, – эти числа называют *простыми*; ко 2-й группе относятся все остальные числа, которые называют *составными*. Вот начало ряда простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Свойства простых чисел и их связь со всеми натуральными числами изучалась еще древнегреческим математиком Евклидом (конец IV–III века до н. э.). *Множество простых чисел бесконечно* – доказательство этого утверждения содержалось в IX книге «Начал» Евклида (это первый из дошедших до нас теоретических трактатов по математике).

Приведем это доказательство (методом «от противного»). Предположим, что P – последнее (наибольшее) простое число. Тогда, перемножим все простые числа, и увеличим полученное произведение на единицу: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot P + 1 = M$. Если число M составное, то оно должно иметь, по крайней мере, один простой делитель (это легко доказать). Но этим делителем не может быть ни одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., P , поскольку при делении M на каждое из них получаем в остатке 1. Следовательно, число M либо само простое, либо делится на простое число, большее P . Значит, предположение, что существует наибольшее простое число P , неверно и множество простых чисел бесконечно.

Основная теорема арифметики утверждает, что *всякое натуральное число N , кроме единицы, единственным образом разлагается в произведение простых чисел* (порядок сомножителей при этом не принимается во внимание), иначе говоря, с помощью умножения только простых чисел $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$ можно получить любое натуральное число N :

$$N = P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m \quad (1)$$

Представление числа N в виде (1) называется его **каноническим разложением** (факторизацией). Например, $261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2$ и всякий другой набор простых чисел никогда не даст в произведении числа 261360. Таким образом, простые числа образуют своеобразный **базис натуральных чисел**. Легко объяснить, почему единицу математики не считают простым числом, ведь, сколько не умножай на единицу, ничего в формуле (1) не изменится. Единственность факторизации была обнаружена в IV в. до н. э. Евклидом и доказана им в книге IX своих “Начал” для всех натуральных чисел.

В 1737 г. основная теорема арифметики была представлена Л. Эйлером (1707–1783) в следующей форме: $\sum n^{-s} = \prod (1 - p^{-s})^{-1}$ или в развернутом виде:

$$1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} \dots = (1 - 2^{-s})^{-1} \cdot (1 - 3^{-s})^{-1} \cdot (1 - 5^{-s})^{-1} \cdot (1 - 7^{-s})^{-1} \cdot \dots, \quad (2)$$

где $s > 1$ и суммирование (Σ) проводится по всем натуральным числам, а произведение (Π) берётся по всем простым числам. Сумму $\zeta(s) \equiv \sum n^{-s}$ Эйлер назвал **дзета-функцией**, он также установил, что простых чисел «много», ибо их количество на отрезке $[1; N]$ было больше, чем $\ln N - 1$, и в то же время почти все натуральные числа являются составными при $N \rightarrow \infty$. Красивое тождество (2) гениального Эйлера и его обобщения играют фундаментальную роль в теории распределения простых чисел в натуральном ряду. Как функцию комплексного переменного дзета-функцию первым стал рассматривать Б. Риман (1826–1866), обнаруживший глубокую связь её аналитических свойств с вопросами распределения простых чисел [8].

Дзета-функция $\zeta(s)$ при $s=2$ устремляется на бесконечности (при $n \rightarrow \infty$) к числу $\pi^2/6 = 1,6449\dots$, а с ростом показателя степени s ($s=3, 4, 5, \dots$) дзета-функция стремится к некому пределу, который все ближе и ближе к единице, так, при $s=7$ дзета-функция устремляется к значению $1,0083\dots$. При $s=1$ дзета-функция превращается в **гармонический ряд** (п. 1.3), сумма которого стремится к половине произведения n простых чисел (точнее, к половине величины $\omega(s) \equiv \prod (1 - p^{-s})^{-1}$ из тождества Эйлера, при $n \rightarrow \infty$). При $s=2, 3, 4, \dots$ с ростом n (порядкового номера простого числа) дзета-функция быстро сближается с величиной $\omega(s)$, а именно: $\omega(s)/\zeta(s) \approx 1 + \text{const} \cdot n^{1-s}$.

Для нахождения всех простых чисел на отрезке от 2 до N служит метод, называемый **решето Эратосфена**, известный с 3 века до н. э. Суть этого алгоритма в следующем: выписываем ряд натуральных чисел 2, 3, 4, ..., N .

Число 2 является простым, поэтому его оставляем и зачеркиваем после него все числа, кратные 2 (то есть числа 4, 6, 8, ...). Первое следующее за 2 не зачеркнутое число есть 3, оно простое, оставляем его и зачеркиваем все числа, кратные 3. Первое следующее за 3 не зачеркнутое число есть 5, оно простое, оставляем его и зачеркиваем все числа, кратные 5. Продолжая этот процесс, находим все простые числа: только они останутся не зачеркнутыми на отрезке $[2, N]$, т. е. от числа 2 до числа N (включительно). Разумеется, решето Эратосфена уже давно не применяют для поиска простых чисел, а пользуются специальными таблицами или компьютером.

Математиками были сделаны многочисленные попытки найти формулы, которые давали бы только простые числа, хотя бы без требования, чтобы они давали *все* простые числа. Так, все простые числа можно представить в виде $4n+1$ или в виде $4n-1$, где n – некое натуральное число. Пьер Ферма (1601–1665) высказал предположение, что числа вида $N \equiv 2^n + 1$ простые, если n – степень двойки (т. е. если $n=2^m$, где $m=0, 1, 2, 3, 4, \dots$), но что из этого получилось, вы сможете узнать в п. 2.5. Самой удачной оказалась принадлежащая Эйлеру квадратичная форма $x^2 - x + 41$, которая при $x=1, 2, 3, \dots, 40$ есть простое число (начиная с 13-го простого числа $P=41$ и до 252-го простого числа $P=1601$). Порядковые номера этих простых чисел соответственно равны $n \approx 0,123x^2 + 1,1729x + 9,3644$, причем мы ошибаемся в них не более чем на два порядковых номера (кроме $x=38$). Х. Старк доказал, что не существует формы $x^2 + x + A$ с $A > 41$, все значения которой были бы простыми для $A-1$ последовательных значений x . Таким образом, поиски формул, дающих только простые числа, оказались тщетными.

Конечно, рассматривая произвольное число N , желательно уметь сразу сказать, простое оно или составное, не проверяя каждое простое число, меньшее $N^{1/2}$, как его возможный делитель. Любопытно, что некоторым людям-уникумам от природы дано *ощущать* простое число или нет (п. 5.2).

В 1770 г. Дж. Вильсон открыл, а в 1773 г. Ж. Лагранж (1736–1813) доказал, что число N простое тогда и только тогда, когда $(N-1)! + 1$ делится на N . Так, $(7-1)! + 1 = 721$ делится на 7, значит число 7 – простое; однако, например, $(171-1)! + 1 \approx 7 \cdot 10^{306}$ и с проверкой числа 171 возникают проблемы. Поэтому *теорема Вильсона* – это скорее красивый теоретический критерий простоты числа. Современные критерии простоты числа основаны на *теореме Люка*: если $A^x - 1$ делится на N , когда $x=N-1$, но не делится, когда x – собственный делитель $N-1$, то N – простое число. Некоторые модификации, как условия, так и заключения этой теоремы приводят к эффективным критериям, которые используются при составлении таблиц простых чисел.

Чтобы быстрее установить (в т. ч. на компьютере) является ли произвольное число $N > 2$ простым или составным можно пользоваться следующим способом. Последовательно вычисляют значения Z_i по схеме:

$$Z_{i+1} = 2 \cdot Z_i, \text{ если } 2 \cdot Z_i < N, \text{ иначе } Z_{i+1} = 2 \cdot Z_i - N, \text{ где } Z_0 = 1; i = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

Число N точно составное, если $Z_{N-1} \neq 1$; и N может оказаться простым, если $Z_{N-1} = 1$ (проверить, что его делители только 1 и N).

Еще в 1668 г. английский математик Д. Пелль (1620–1685) составил таблицу простых чисел до 100 000. С тех пор она много раз расширялась. В 1914 г. Д. Н. Лемер опубликовал таблицу простых чисел до 10 000 000. Примерно в 1930 г. его сын Д. Х. Лемер изобрел фотоэлектрическое числовое решето, с помощью которого большие числа можно разлагать на множители с поразительной быстротой. В течение последующих 40 лет он вместе со своими помощниками постоянно совершенствовал это изобретение, превратив его, в конце концов, в электронное решето с быстродействием миллион значений в секунду. На современных компьютерах не составляет проблемы найти все простые числа, например, до 10^{12} , однако выписать все эти числа в таблицу сложно, так как их количество – 37 607 912 018 – очень велико. В то же время, с помощью специальных алгоритмов, найдены отдельные чудовищно большие простые числа, например, $2^{19937} - 1$ и $2^{44497} - 1$ (даже и не пытайтесь представить себе эти числа!).

1.2. ПЯТЬ КЛАССОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Помимо деления всех натуральных чисел на простые и составные, их еще можно разделить на **пять классов**, каждый из которых обозначим двумя цифрами: **14, 26, 34, 46, 66**. Первая цифра ($N_1 = 1, 2, 3, 4, 6$) соответствует первому числу в данном классе, а вторая цифра ($B = 4, 6, 4, 6, 6$) равна шагу арифметической прогрессии, т. е. бесконечный ряд натуральных чисел образуется членами пяти арифметических прогрессий, имеющих вид:

$$N_n = N_1 + B \cdot (n-1), \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Например, к классу **14** относятся числа: 1, 5, 9, 13, 17 ...; к классу **26** – числа: 2, 8, 14, 20, 26, ...; к классу **34** – 3, 7, 11, 15, 19, Напомним, что сумма всех членов (от 1-го до n -го) арифметической прогрессии будет равна

$$S_n = (N_1 + N_n) \cdot n / 2 = B \cdot n^2 / 2 + (N_1 - B/2) \cdot n \quad (4)$$

На отрезке от единицы до любого четного числа N сумма всех четных чисел всегда будет превосходить сумму всех нечетных чисел в $(1+2/N)$ раз.

Классы чисел в натуральном ряду чередуются определенным образом – начиная с единицы, бесконечное количество раз повторяется набор из следующих двенадцати классов (их можно назвать *дюжиной классов*):

Класс	14	26	34	46	14	66	34	26	14	46	34	66
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0

Таким образом, чтобы определить, к какому классу принадлежит произвольное натуральное число N достаточно разделить это число на 12 и посмотреть чему равен остаток m . Например, у числа $N=1234567890$ остаток от деления на 12 равен $m=6$, т. е. это число из класса **66** ($n=205761315$). Все числа из класса 66 делятся на число 6 без остатка. Очевидно, что на любом достаточно большом отрезке натурального ряда вероятность встречи с числами из классов 14 или 34 составляет по 25% (по 3/4), а с числами из классов 26, 46, 66 – примерно по 16,7% (ровно по 1/6).

В 1837 г. Г. П. Л. Дирихле (1805–1859) доказал, что в любой арифметической прогрессии $N_n = N_1 + B \cdot (n-1)$ с *взаимно простыми* N_1 и B содержится бесконечно много простых чисел. Поэтому они только в классах 14 и 34, причем, если на некотором отрезке общее количество простых чисел равно K , а количество простых чисел в классе 14 равно k , то имеем:

$$k/K \geq (2 + F^*/K^a)^{-1}, \quad (5)$$

где $F^* \geq 4$ (возможно, F^* равно числу Фейгенбаума); $a = (1/e)^{0.5} \approx 0,6065$. Отношение k/K растет по указанному закону от значения 1/3 до значения 1/2 (при $K \rightarrow \infty$). Например, при $K=352000$ в классе 14 будет не менее 49,96% всех простых чисел. Таким образом, простые числа чаще встречаются в классе 34, нежели в классе 14, и этот «сдвиг» особенно заметен в начале натурального ряда, а на бесконечности «сдвиг» исчезает.

Пять натуральных чисел $N_{14}, N_{26}, N_{34}, N_{46}, N_{66}$ (по одному из каждого класса) будем называть n -ым *слоем*. Например, при $n=1$ имеем 1-й слой чисел: 1, 2, 3, 4, 6; при $n=2$ имеем 2-й слой: 5, 8, 7, 10, 12 и т. д. Тогда можно утверждать, что для любого n -го слоя справедливы соотношения:

$$N_{34} - N_{14} = 2; \quad N_{46} - N_{26} = 2; \quad N_{66} - N_{26} = 4; \quad N_{26}/N_{14} \approx 3/2 + 0,125/n \quad (6)$$

т. е. все числа одного слоя жестко связаны между собой соотношениями.

Каждый слой (т. е. при $n=1, 2, 3, \dots$) можно характеризовать средним значением. Так, *среднее арифметическое* каждого слоя будет равно

$$Na \equiv (N_{14} + N_{26} + N_{34} + N_{46} + N_{66})/5 = 5,2 \cdot n, \quad (7)$$

где $5,2 = (4+6+4+6+6)/5$ – это среднее арифметическое набора из пяти шагов B (шагов арифметической прогрессии из каждого класса чисел, см. выше).

Среднее геометрическое каждого слоя будет равно

$$Ng \equiv (N_{14} \cdot N_{26} \cdot N_{34} \cdot N_{46} \cdot N_{66})^{1/5} = 5,1017 \cdot n, \quad (8)$$

где 5,1017 – это среднее геометрическое набора из пяти шагов B .

Среднее гармоническое каждого слоя будет равно

$$Nh \equiv 5/(1/N_{14} + 1/N_{26} + 1/N_{34} + 1/N_{46} + 1/N_{66}) = 5 \cdot n, \quad (9)$$

где 5 – это среднее гармоническое набора из пяти шагов B (здесь получаем целое число, равное количеству классов натуральных чисел – разве это не гармония!). Среднее гармоническое – это число, обратное которому есть арифметическое среднее чисел, обратных данным числам. Приведем пример среднего гармонического из геометрии: в любой трапеции отрезок, параллельный основаниям (его концы лежат на боковых сторонах трапеции) и проходящий через точку пересечения диагоналей равен среднему гармоническому оснований трапеции.

Квадратичное среднее каждого слоя будет равно

$$Ns \equiv [(N_{14}^2 + N_{26}^2 + N_{34}^2 + N_{46}^2 + N_{66}^2) / 5]^{1/2} = 5,2915 \cdot n \quad , \quad (10)$$

где 5,2915 – это квадратичное среднее набора из пяти шагов B .

Степенное среднее каждого слоя будет равно

$$Np \equiv [(N_{14}^p + N_{26}^p + N_{34}^p + N_{46}^p + N_{66}^p) / 5]^{1/p} = Q \cdot n \quad , \quad (11)$$

где Q – это степенное среднее набора из пяти шагов B ; $p \neq 0$ – любое число, причем как частные случаи получаем: при $p=1$ – среднее арифметическое; при $p=2$ – квадратичное среднее; при $p \rightarrow 0$ степенное среднее стремится к среднему геометрическому. Чем больше показатель степени p , тем ближе степенное среднее Np к числу N_{66} (в каждом слое). Чем меньше показатель степени p , тем ближе степенное среднее Np к числу N_{14} , а при $p=-1$ получаем среднее гармоническое, которое расположено посередине между числами N_{66} и N_{14} (действительно, самое гармоничное расположение). Для всех средних погрешность можно оценить формулой вида: $\text{abs}(OII) \approx Z \cdot n^{-z}$, например, для среднего гармонического имеем $Z = \lg e \approx 0,4343$; $z=1$, т. е. в каждом новом слое модуль относительной погрешности быстро убывает.

Гармоническое, арифметическое и геометрическое средние значения были известны еще античным математикам. Эти средние связаны с теорией пропорций, которая лежала в основе древнегреческого учения о музыке, геометрической теории чисел, теории площадей и конических сечений.

В дальнейшем мы практически не будем касаться вопроса о пяти классах натуральных чисел, но «что-то в этом есть»: внутренняя красота темы, близость к «магическому числу» 7 (мы очень часто будем иметь дело с числами 7 ± 2) и т. д. Автор и впредь зачастую будет только «обозначать» отдельные темы в надежде побудить читателя к самостоятельным поискам.

1.3. ТИП ЧИСЛА, ТИП ПО ДИРИХЛЕ, МИРЫ ЧИСЕЛ

Для изложения ГТНЧ нам часто придется вводить новые понятия (термины, названия). Они взяты буквально «с потолка», но предпочтение отдавалось кратким и простым словам. Понятие о *типе* числа – одно из ключевых, именно оно формирует удивительное многообразие в мире чисел.

Тип натурального числа – это количество всех его делителей. Например, тип числа $N=20$ равен 6, т. к. у него имеется шесть делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Будем обозначать тип числа буквой T . Очевидно, что у любого простого числа $T=2$, т. к. все они делятся только на единицу и самих себя. Число $N=1$ является единственным, особым числом, у которого $T=1$. Чаще всего большие типы (т. е. много делителей) у натуральных чисел из класса 66, а малые типы – у чисел из классов 14 и 34.

Зная каноническое разложение числа $N=P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m$, всегда можно определить его тип T по красивой, лаконичной формуле:

$$T = (a + 1)(b + 1)(c + 1) \dots (m + 1). \quad (12)$$

Так, для числа $N=261360=2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2$ находим $T=(4+1)(3+1)(1+1)(2+1)=120$. Однако, поиск показателей a, b, c, \dots, m , с которыми простые числа входят в каноническое разложение натурального числа N – это сама по себе далеко непростая задача. В серьезной компьютерной программе *Mathcad 2000*, ориентированной на решение математических задач, существует даже специальная команда (*Factor*) для автоматического поиска показателей a, b, c, \dots, m , т. е. для факторизации числа N (содержащего десятки цифр).

Если все делители любого числа N расположить по возрастанию, то, перебрав первую их половину (**малые делители**), мы обнаружим, что остальные (**большие делители**) равны отношению числа N и соответствующего малого делителя. Так, у числа $N=20$ все его делители (1, 2, 4, 5, 10, 20) можно представить как: 1, 2, 4, 20/4, 20/2, 20/1. Таким образом, определение типа числа N сводится к поиску только его малых делителей. Еще знаменитый итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1180–1240) логично заметил, что если число N равно хотя бы произведению двух натуральных чисел, то, по крайней мере, одно из них не будет больше, чем $N^{0.5}$. Стало быть, малые делители любого числа N заключены в диапазоне от 1 до $N^{0.5}$ (до корня квадратного из числа N), и этот диапазон содержит исчерпывающую информацию (своего рода паспорт) числа N . Любопытно отметить, что в *электронной таблице Excel-97* (популярной компьютерной программе) максимальное количество строк равно $N=65536$, а количество столбцов равно $N^{0.5}=256$, т. е. *Excel-97* словно специально создана для отыскания малых делителей натуральных чисел $N \leq 65536$. Но, не обольщайтесь, что с помощью компьютера легко “разобраться” с типами чисел. Например, с помощью *Mathcad 2000* (но без команды *Factor*) будет непросто определить тип *одного* числа порядка $N \approx 10^{15}$ быстрее, чем за 8 минут, поскольку время расчета будет составлять: $t \approx 2,5 \cdot 10^{-7} \cdot N^{0,5024}$ (минут).

При перемещении по ряду натуральных чисел от единицы в бесконечность появление различных типов носит случайный характер, т. е. абсо-

лютно невозможно предсказать какой тип будет у следующего числа N . Очевидно только одно, чем дальше мы уходим от единицы, тем большие типы могут появиться, причем наряду с ними неизбежно будут появляться числа и с самыми малыми типами $T=2, 3, 4, \dots$. Для любого числа N помимо его собственного типа T (количества всех его делителей) можно вычислить некий **средний тип** (Tsr), равный среднему арифметическому всех предшествующих типов (т. е. у всех чисел от 1 до N включительно):

$$Tsr = (T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T)/N . \quad (13)$$

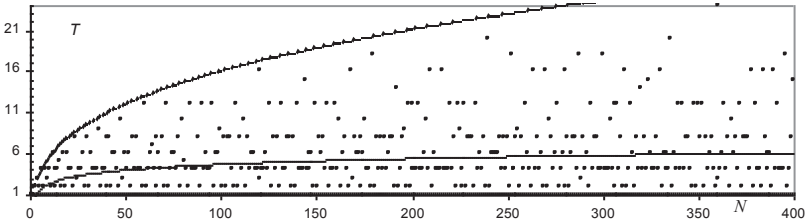


Рис. 1. Типы (T) первых 400 натуральных чисел N , а также T_{max} и T_s

Несмотря на беспорядочные колебания типов T (рис. 1), средний тип Tsr ведет себя поразительно спокойно. Более того, немецкий математик П. Г. Л. Дирихле (1805–1859) доказал, что средний тип с хорошей точностью можно приблизить выражением (**формула Дирихле** – очень важная формула!):

$$T_s = \ln N + (2 \cdot C - 1) + \varepsilon , \quad (14)$$

где с ростом N слагаемое $\varepsilon \rightarrow 0$, а C – постоянная, определяемая как сумма сходящегося ряда $C = \lim\{\sum k^{-1} - \ln(n+1)\}$, где $k=1, 2, 3, \dots, n$; при $n \rightarrow \infty$. Постоянная C носит имя гениального Эйлера, который в 1740 г. вывел формулу, позволяющую вычислить C с любой точностью; например, с 15 верными знаками: $C=0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\dots$. Однако арифметическая природа постоянной Эйлера не изучена до сих пор, и неизвестно является ли она рациональным числом или нет. Эйлер получил асимптотическое выражение для суммы (S) первых N членов так называемого *гармонического ряда*:

$$S \equiv \sum k^{-1} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/N + \dots = \ln N + C + \varepsilon , \quad (15)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Гармоническим ряд назван потому, что каждый его член, начиная со второго, является *гармоническим средним* двух соседних членов, т. е. для $n=2, 3, 4, 5, \dots$ выполняется равенство: $1/n = 2/[(n-1)+(n+1)]$ (см. п. 1.2.). Средний тип первых N натуральных чисел *почти* равен сумме первых N членов гармонического ряда: $T_s = S - (1 - C) \approx S - 0,423$. Поэтому можно сказать, что от хаоса случайных типов (рис.1) до идеальной гармонии всего один шаг, равный единице без постоянной Эйлера: $1 - C \approx 0,423$.

Относительная погрешность формулы Дирихле ($OP \equiv Tsr/Ts - 1$) даже при $\varepsilon = 0$ быстро убывает: сначала реальный средний тип Tsr превосходит Ts , но, начиная с $N=47$ некоторые реальные значения среднего типа могут быть и меньше Ts , т. е. начинаются хаотичные колебания реального среднего типа “вокруг” значений Ts . Модуль OP формулы Дирихле, вероятно, можно оценить неким выражением, например: $abs(OP) < N^{-w}$, где $w = \pi^2/12 \approx 0,8225$.

На рис.1 точками показаны типы первых 400 натуральных чисел, которые, словно воробьи на проводах, “сидят” на разных уровнях, т. е. принадлежат к разным типам. Но если воробей может легко перелететь на другой провод (уровень), то числа каждого типа образуют некий *замкнутый мир* со своими неповторимыми законами (в чем мы убедимся в дальнейшем). Поэтому в ГТНЧ часто удобнее говорить о *мирах*, которые объединяют числа с одинаковым типом. Так, все простые числа ($T=2$) образуют мир №2, мир №3 образуют числа с относительно редким типом $T=3$, а миры №4 и №8, наоборот, весьма “густонаселенные” (чисел с $T=4$ и $T=8$ довольно много) и т. д. Миры возникают далеко не по возрастанию их номеров, вот только самые первые миры (типы первых 17-ти натуральных чисел): №1, 2, 3, 4, 6, 5, 8, 9, 10, 12, 7, 16, 15, 18, 14, 20, 24. Мы видим, что миры №11, 13, 17, 19, 21, 22, 23 – не появились отрезке [1;17], но позже и они появятся.

Если вспомнить про *эви-конвертацию*, то первые 10^{43} натуральных чисел можно воспринимать (скажем, для наглядности) как временной интервал в 1 секунду. Т. е. за столь короткое время успевает «промелькнуть» колоссальное количество миров – 10^{43} (около 10^5 *разных* миров, см. п. 1.36).

В масштабе нашего (человеческого) времени в любое мгновение существуют как бы одновременно *параллельные миры*. Это те несколько миров (сколько – не ясно), которые повторяются чаще всего, а высокая частота «мельканий» делает их «доступными» для нас. Впрочем, суть ключевой «безумной» идеи уже, наверное, понятна читателю. Похоже, здесь есть место для полета, как разумной фантазии, так и мистических «наворотов».

С ростом числа N его тип может увеличиваться, однако, вероятно, существует некое ограничение на максимально возможный тип T_{max} , например:

$$T_{max} < \exp[(\ln N)^{\lg F}] \quad , \quad (16)$$

где $\lg F \approx 0,6692$ – десятичный логарифм числа Фейгенбаума. На рис. 1 верхняя граница типов (T_{max}) изображена пунктирной линией, а в конце Большого отрезка она “дорастает” до $\sim 7,7 \cdot 10^{11}$. На рис.1 также видно медленный рост среднего типа по Дирихле (тонкая линия среди точек), который в конце БО равен $Ts \approx 141$, причем $T_{max}/Ts \sim 10^9$ (это важное число в космологии).

1.4. ЗАКОНЫ ПИРАМИДЫ

Построим своеобразную *Пирамиду* (рис. 2), на вершине которой поместим число $N=1$, под ним число $N=2$, потом $N=3$ и т. д., т. е. здесь ряд натуральных чисел – это вертикальный столбец, уходящий вниз до бесконечности. Напротив каждого числа N по горизонтали (справа от числа N), будем изображать *камни* – белые, серые или черные квадратные клетки. Причем каждому камню припишем некую условную характеристику, скажем, *массу*, равную порядковому номеру вертикального столбца ($1, 2, 3, \dots, N$). Если очередной камень в горизонтальном ряду совпадает с делителем числа N , то будем окрашивать камень в черный цвет и внутри него указывать массу камня («черная» масса – это делитель числа N). Например, у числа $N=16$ всего 16 камней, из них пять – черных камней с массами 1, 2, 4, 8, 16 (это делители числа 16). Массы белых и серых камней не указаны (но они есть).

Замечательное свойство построенной Пирамиды состоит в том, что можно не гадать (не вычислять), где расположены черные камни-делители, поскольку в каждом вертикальном столбце они чередуются с шагом равным самому делителю (начиная с крайних черных камней, идущих под углом 45° и образующих внешний контур Пирамиды). Так, в первом столбце черные камни идут подряд; во втором столбце – каждый 2-й камень чёрный; в третьем столбце – каждый 3-й камень чёрный (это всё делители) и т. д.

Внутри Пирамиды находится *Ствол* (для наглядности все его белые камни закрасены в серый цвет), причем каждая i -я *ступень* Ствола ($i=1, 2, 3, \dots$) начинается напротив числа $N=i^2$. Ступени Ствола имеют высоту в 3, 5, 7, 9, 11, ... камней, т. е. их высота непрерывно растет. Легко убедиться, что *все малые делители любого числа N находятся исключительно внутри Ствола*. Таким образом, именно Ствол содержит исчерпывающую характеристику натуральных чисел, а остальная часть Пирамиды (область больших делителей) несет информацию производную от Ствола.

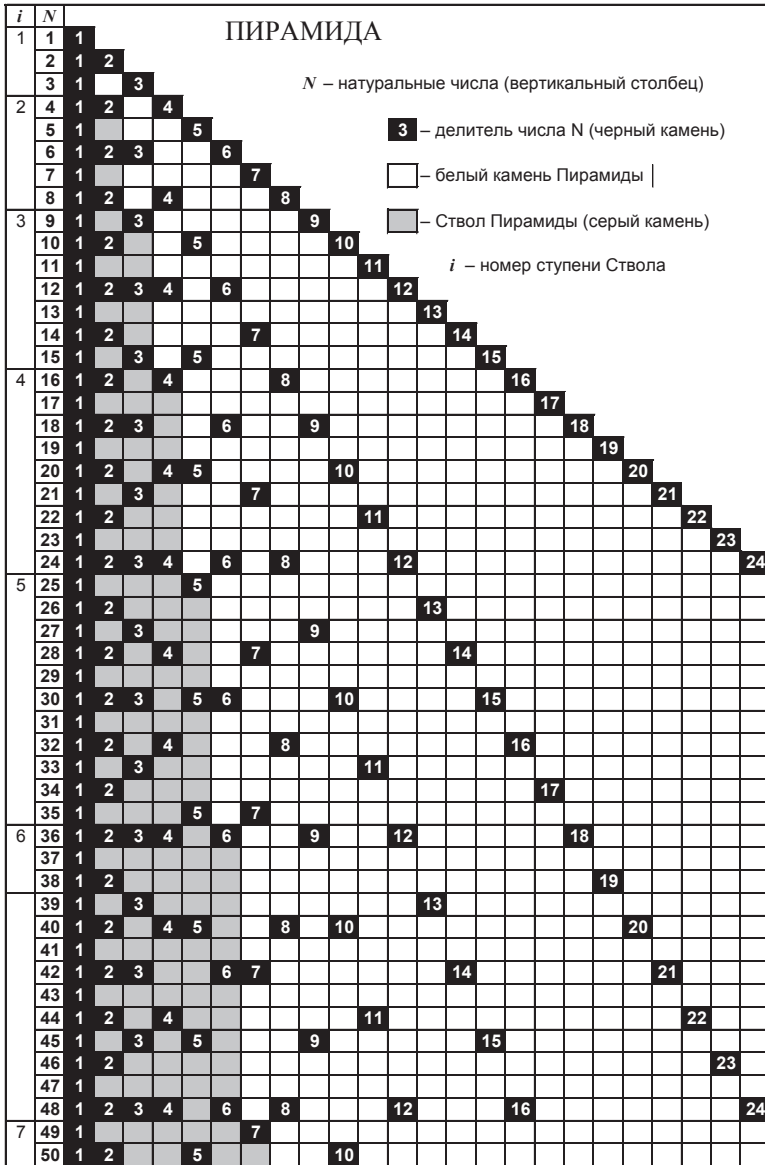


Рис. 2. Пирамида (её вершина). Все делители чисел от $N=1$ до $N=50$

Архитектура Пирамиды (ее Ствола) – предельно проста, но позволяет легко осознать и сформулировать весьма интересные выводы, которые будем называть **законами Пирамиды**. Ниже приводятся основные из них.

Закон 1. *Количество малых делителей у числа N не превосходит номера ступени Ствола (i), на которой число N находится, причем $i=A(N^{1/2})$.*

Это вытекает из построения Пирамиды. Таким образом, для всякого числа N можно указать номер ступени Ствола, который равен целой части (“*антье*”) от корня квадратного из числа N . Поэтому все малые делители числа N надо искать только среди целых чисел $1, 2, 3, \dots, i$ (область полной информации для числа N). Зная номер (i) ступени Ствола, всегда можно указать *параметры ступени* (табл.1).

Таблица 1. Параметры ступени

Начало ступени	$N1 = i^2$
Середина ступени	$N2 = i^2 + i$
Конец ступени	$N3 = i^2 + 2i$
Высота ступени	$H = 2i+1$

Закон 2. *Тип числа N , вообще говоря, равен удвоенному количеству малых делителей.* Это непосредственно вытекает из алгоритма построения Пирамиды. Если количество малых делителей числа N обозначить через t , то более корректно данный закон звучит следующим образом: у натуральных чисел вида $N \neq i^2$ (таких чисел подавляющее большинство) тип равен $T=2 \cdot t$ – это *четные* или *частые* типы (миры), а у чисел вида $N=i^2$ тип равен $T=2 \cdot t-1$ – это *нечетные* или *редкие* типы (миры). Очевидно, что числа с нечетными типами встречаются все реже и реже (поэтому мы и назвали их *редкими* типами), т. к. высота ступеней Ствола неизменно увеличивается.

Закон 3. *Вероятность встречи с частым (четным) типом в $N^{1/2}$ раза больше, чем с редким (нечетным) типом.* На отрезке от 1 до N количество чисел с редкими (нечетными) типами равно количеству ступеней $i=A(N^{1/2})$, а вероятность встречи с ними равна $P_1=i/N$. Тогда все оставшиеся $(N-i)$ чисел будут с четным типом, и вероятность встречи с ними, очевидно, равна $P_2=(N-i)/N$. Таким образом, получаем, что $P_2/P_1=N/i-1 \approx N^{1/2}$.

Закон 4. *У всякого числа N вероятность встречи с малым делителем в $N^{1/2}$ раз больше, чем с его антиподом (т. е. с большим делителем).*

Вероятность встречи с малым делителем – это вероятность того, что всякое число, меньшее номера ступени $i=A(N^{1/2})$, окажется делителем числа N . Вероятность встречи с большим делителем – это вероятность того, что всякое число, большее номера i , окажется делителем числа N . Половина всех делителей (малые делители) числа N , имеющего частый тип T , находится

среди чисел, количество которых равно $i=A(N^{1/2})$, а вероятность встречи с ними равна $P_1=T/2i$. Вероятность встречи с большими делителями равна $P_2=T/2(N-i)$. Таким образом, получаем, что $P_2/P_1=N/i-1\approx N^{1/2}$.

Закон 5. *Формирование типа у любого числа N – это псевдослучайный процесс*, т. е. только похожий на случайный процесс, но, по сути, он строго определен архитектурой Ствола, «расширением» натурального ряда.

Вероятность появления, скажем, числа $D=4$ в качестве делителя у любого числа N равна $1/D=1/4$, т. к. делитель 4 будет появляться в каждом четвертом натуральном числе. Вероятность появления для числа $D=5$ равна $1/5$; для числа $D=6$ – равна $1/6$ и т. д. (см. рис. 2). Так, возникает иллюзия, что формирование набора делителей у конкретного числа N – это вероятностный, случайный процесс, где каждый делитель (черный камень) появляется с вероятностью, обратно пропорциональной его массе (D). Но это мнимая случайность, поскольку набор конкретных делителей у числа N однозначно *предопределен* порядковым местом числа N в общем ряду. Тип числа определяется только правилом укладки черных камней в Пирамиде, и это правило исключает всякую случайность. Каждое натуральное число больше предыдущего ровно на единицу, т. е. натуральный ряд непрерывно *расширяется*. Только этим объясняется бесконечное разнообразие, сложность и строгая гармония мира чисел, в чем мы ещё убедимся много раз.

Закон 6. *Произведение всех делителей числа N равно $N^{T/2}$.*

Это утверждение становится очевидным, если в общем виде выписать по порядку все делители числа N (их количество равно T – типу числа): сначала малые, а потом их антиподы – большие делители (у редких типов малый делитель, не имеющий антипода, всегда равен номеру ступени i). В Действительно, $P=a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot (N/a) \cdot (N/b) \cdot (N/c) \cdot \dots = N^{T/2}$.

Закон 7. *Количество всех камней в Пирамиде равно $K=(1+N) \cdot N/2$.*

В Пирамиде (говоря так, мы всегда будем подразумевать, что её высота равна N) просуммируем количество камней в каждом горизонтальном ряду, тогда: $K=1+2+3+\dots+N=(1+N) \cdot N/2$. Т. е. K равно сумме арифметической прогрессии $1, 2, 3, \dots, N$. При $N \rightarrow \infty$ членом $N/2$ по сравнению с членом $N^2/2$ можно пренебречь, поэтому также можно говорить, что количество всех камней в Пирамиде стремится к $K \approx (1/2) \cdot N^2$. Относительная погрешность последнего выражения будет равна $OP \approx N^{-1}$. Итак, количество всех камней в Пирамиде равно сумме всех натуральных чисел от 1 до N и численно стремится к площади Пирамиды ($1/2$ площади квадрата со стороной N).

Закон 8. Количество всех камней в Стволе равно $k \approx (2/3) \cdot N^{3/2}$ (параметры Ствола договоримся впредь обозначать строчными буквами в отличие от прописных букв для параметров Пирамиды).

В Стволе (говоря так, мы всегда будем подразумевать, что его высота равна N) просуммируем количество всех камней в каждом вертикальном столбце Ствола, начиная с левого столбца:

$$k = [N-(1^2-1)] + [N-(2^2-1)] + [N-(3^2-1)] + \dots + [N-(i^2-1)] = \\ = (N+1)i - (1^2+2^2+3^2+\dots+i^2) = (N+1)i - i(i+1)(2i+1)/6.$$

Откуда, принимая $i \approx N^{1/2}$, при $N \rightarrow \infty$ получаем $k \approx (2/3) \cdot N^{3/2}$. Относительная погрешность этого выражения будет равна $ОП \approx (3/2) \cdot N^{-1}$. Количество всех камней в Стволе численно стремится к площади Ствола.

Таким образом, чтобы определить тип числа N графически (не производя никаких арифметических действий, а только механически раскрашивая соответствующие камни в черный цвет), следует нарисовать около $(2/3) \cdot N^{3/2}$ камней. Это, своего рода, величина минимальной “расплаты” за отсутствие знаний об объекте из N составляющих его элементов (за неумение найти малые делители числа N). А максимальная “расплата” за незнание, равна количеству всех камней в Пирамиде, что больше в $K/k \approx (3/4) \cdot N^{0.5}$ раз. В конце Большого отрезка это соотношение равно $\sim 10^{30}$ (это пропасть)!

Закон 9. В Стволе общая масса черных камней (m^*) равна количеству всех его камней (символ * указывает на то, что речь идет о черных камнях).

Общая масса черных камней в Стволе – это сумма малых делителей. Рассматривая каждый из вертикальных столбцов Ствола, получаем:

$$m^* = [A(N/1) - 1 + 1] \cdot 1 + [A(N/2) - 2 + 1] \cdot 2 + [A(N/3) - 3 + 1] \cdot 3 + \dots + [A(N/i) - i + 1] \cdot i.$$

Отказываясь от *антье* (A) и принимая $i \approx N^{1/2}$, приходим к выражению:

$$m^* \approx N \cdot i + (1+2+3+\dots+i) - (1^2+2^2+3^2+\dots+i^2) \approx \\ \approx N \cdot i + (1+i)i/2 - i(i+1)(2i+1)/6.$$

Откуда, при $N \rightarrow \infty$ получаем примерное выражение $m^* \approx (2/3) \cdot N^{3/2}$.

Относительная погрешность этого выражения равна: $\text{abs}(ОП) \leq (3/4) \cdot N^{-1/2}$.

Закон 10. В Пирамиде отношение количества всех камней (K) к общей массе черных камней (M^*) стремится к числу $6/\pi^2 = 0,6079\dots$

Общая масса черных камней – это сумма всех делителей у всех чисел в Пирамиде. Рассматривая каждый из вертикальных столбцов, получаем:

$$M^* = A(N/1) \cdot 1 + A(N/2) \cdot 2 + A(N/3) \cdot 3 + \dots + A(N/N) \cdot N$$

Отказываясь от функции *антье* (A), приходим к оценке: $M^* \approx N \cdot N \approx N^2$. Однако, исследования на отрезке от 1 до $N = 5 \cdot 10^7$ дают основания предполагать,

что существует связь между количеством всех камней в Пирамиде и массой её черных камней: $M^* \approx (\pi^2/6) \cdot (N^2/2)$, поэтому $K/M^* \rightarrow 6/\pi^2$ при $N \rightarrow \infty$. Иначе говоря, на отрезке $[1; N]$ отношение суммы всех натуральных чисел (K) к сумме всех делителей у этих чисел (M^*) стремится к числу $6/\pi^2$, при этом относительная погрешность величины K/M^* убывает по закону:

$$\text{abs}(ОП) \equiv \text{abs}(6/\pi^2 - K/M^*) / (K/M^*) \approx 0,5/N. \quad (20)$$

Таким образом, Пирамида довольно быстро “генерирует” число π и определение этой фундаментальной математической константы в терминах ГТНЧ, вероятно, можно считать самым глубоким из всех известных (см. п. 2.2). Рассматриваемый закон Пирамиды, очевидно, равносильен результату, полученному в работах Ж. Бюффона (1707–1788) и П. Л. Чебышева (1821–1894): если наугад (случайным образом) выписать два натуральных числа, то вероятность их *взаимной простоты* будет равна $6/\pi^2$ (числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, кроме единицы, например, числа 10 и 21, 42 и 258, 60 и 210 и 360 – взаимно простые).

Закон 11. *Масса всех камней в Пирамиде (M) стремится к числу $N^3/6$.*

Массу всех камней в Пирамиде находим путем суммирования массы камней в каждом из N вертикальных столбцов Пирамиды:

$$\begin{aligned} M &= N \cdot 1 + (N-1) \cdot 2 + (N-2) \cdot 3 + (N-3) \cdot 4 + \dots + (N - (N-1)) \cdot N = \\ &= N \cdot (1+2+3+4+\dots+N) - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + (N-1) \cdot N) \approx \\ &\approx N \cdot (1+N) \cdot N/2 - N^3/3 = N^2/2 + N^3/2 - N^3/3, \text{ откуда } M \approx N^3/6. \end{aligned}$$

Относительная погрешность этого выражения будет равна $ОП \approx 3 \cdot N^{-1}$. Нетрудно убедиться, что масса всех камней в Пирамиде численно стремится к массе шара, диаметр которого равен N , а плотность которого равна $1/\pi$.

Закон 12. *Масса всех камней в Стволе (m) стремится к значению $N^2/4$.*

Суммируем массы камней в каждом из N столбцов Ствола:

$$\begin{aligned} m &= (N-1^2+1) \cdot 1 + (N-2^2+1) \cdot 2 + (N-3^2+1) \cdot 3 + \dots + (N-i^2+1) \cdot i = \\ &= (N+1)(1+2+3+\dots+i) - (1^3+2^3+3^3+\dots+i^3) = (N+1)(i+1)/2 - i^2(i+1)^2/4. \end{aligned}$$

Откуда, принимая $i \approx N^{0,5}$, при $N \rightarrow \infty$ получаем $m \approx N^2/4$.

Относительная погрешность этого выражения будет равна $ОП \approx 2 \cdot N^{-0,5}$. Нетрудно убедиться, что масса всех камней в Стволе стремится к массе 3-х мерного Ствола, плотность которого равна $1/2\pi$ (3-х мерный Ствол получаем при вращении Ствола относительно первого столбца с единицами).

Закон 13. *Количество черных камней (K^*) в Пирамиде стремится к произведению числа N на его средний тип (по Дирихле): $K^* \approx N \cdot T_s$.*

Это вполне логичное утверждение, если вспомнить, что все черные камни – это все делители на отрезке от 1 до N , а также, если вспомнить само определение понятия “средний тип числа N ” (см. параграф 1.3.).

Закон 14. *Количество черных камней (k^*) в Стволе равно половине количества черных камней в Пирамиде ($K^*/2$), увеличенной на $0,5 \cdot N^{0,5}$.*

Начало каждой i -ой ступени Ствола содержит один черный камень, для которого в Пирамиде нет черного камня-антипода. Поэтому $k^* = (K^* - i)/2 + i = K^*/2 + i/2 \approx K^*/2 + 0,5 \cdot N^{0,5} \approx N \cdot T_s / 2 + 0,5 \cdot N^{0,5}$

Закон 15. «Черную» плотность Ствола можно описать формулами:

$$\rho^* \equiv m^*/k^* \approx (2/3) \cdot N^{3/2} / (N \cdot T_s / 2 + 0,5 \cdot N^{0,5}) \approx N^a \cdot (\ln N)^{-b}, \quad (21)$$

где $a = \lg \pi \approx 0,4971$; $b = \lg e^2 \approx 0,8686$. Причем, если для первой («точной») формулы (через T_s) имеем $\text{abs ОП} \leq 0,6 \cdot N^{-0,5}$, то для второй («грубой»), почти угаданной, придуманной) формулы на Большом отрезке имеем $\text{ОП} \pm 10\%$.

Ситуация с “черной” плотностью (см. рис. 3) весьма характерна для ГТНЧ, когда “точная” формула оказывается либо сложной, либо ее вообще не удастся вывести аналитически, а “грубая” формула совсем не работает в начале натурального ряда, и потом, как правило, дает существенную по-

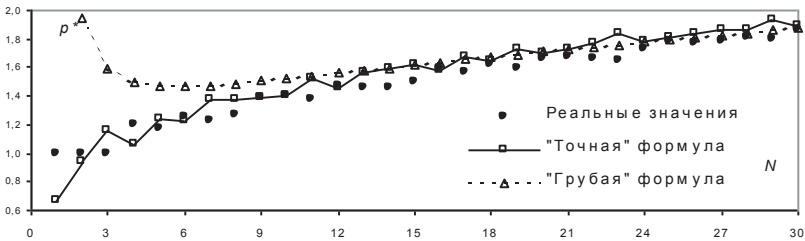


Рис. 3. «Черная» плотность Ствола в начале натурального ряда

грешность на Большом отрезке (вне отрезка также перестает работать).

Закон 16. *Чернота Пирамиды обратно пропорциональна количеству простых чисел* (разумеется, что речь идет об отрезке $[1; N]$).

Чернота Пирамиды (B , от англ. *Black* – черный) – это отношение количества черных камней в Пирамиде к количеству всех камней Пирамиды или, иначе говоря, это вероятность встречи с черным камнем в Пирамиде. Из законов Пирамиды 7 и 13 следует закон убывания её черноты:

$$B \equiv K^*/K = N(\ln N + 2 \cdot C - 1) / [0,5 \cdot (1 + N)N] \approx 2 \cdot (\ln N / N) \approx 2/n, \quad (22)$$

где $n \approx N / \ln N$ – количество простых чисел на отрезке $[1; N]$, что следует из формулы Чебышева, о которой мы будем говорить ниже. Причем формула

$B \approx 2 \cdot (\ln N / N)$ работает тем точнее, чем больше правая граница отрезка – N . Очевидно, что реальная чернота Пирамиды при $N=1$ и $N=2$ будет $B=1$, после чего чернота, вообще говоря, убывает, стремясь на бесконечности к нулю.

Закон 17. *В начале натурального ряда существует сингулярность.*

Напомним, что в физике сингулярность – это место, где заканчивается действие известных науке законов. Это соответствует моменту, когда пространство-время и вся материя впервые возникают (п. 4.3). Так вот, в ГТНЧ почти все законы Пирамиды (формулы, их выражающие) дают большую относительную погрешность или даже вовсе не работают в начале натурального ряда (рис. 3), хотя при больших N относительная погрешность этих формул, вообще говоря, быстро убывает. Подобная ситуация будет иметь место и в дальнейшем почти для всех формул ГТНЧ (и общепризнанной теории чисел). И чтобы каждый раз не обращать внимания на столь удивительное обстоятельство – мы сформулировали данное утверждение в виде очередного закона Пирамиды. Таким образом, начало ряда натуральных чисел – это некий аналог сингулярности из физики. Согласно ГТНЧ в сингулярности происходит своего рода “зарождение” структуры натурального ряда, причем совершенно элементарным образом ($1+1+1+\dots$). Здесь также уместно говорить о плане, алгоритме (его символизирует Пирамида), т. к. всё происходящее носит *псевдослучайный* характер, имеет объяснимое «прошлое» и строго предопределенное «будущее».

Таблица 2. Основные законы Пирамиды и их соотношения

Параметр	Пирамида	Ствол	Ствол/Пирамида
Кол-во всех камней	$K \approx 0,5 \cdot N^2$	$k \approx (2/3) \cdot N^{3/2}$	$k/K \approx 1,333 \cdot N^{-0,5}$
Масса черных камней	$M^* \approx (\pi^2 / 12) \cdot N^2$	$m^* \approx (2/3) \cdot N^{3/2}$	$m^*/M^* \approx 0,811 \cdot N^{-0,5}$
Масса всех камней	$M \approx N^3 / 6$	$m \approx N^2 / 4$	$m/M \approx 1,5 \cdot N^{-1}$
Кол-во черных камней	$K^* \approx N \cdot Ts$	$k^* \approx (K^* + N^{0,5}) / 2$	$k^*/K^* \rightarrow 2$
Плотность (общая)	$P \equiv M/K \approx N/3$	$m/k \approx (3/8) \cdot N^{0,5}$	$p/P \approx 1,125 \cdot N^{-0,5}$
“Черная” плотность (* – это “черный” параметр)	$P^* \equiv M^*/K^* \approx (\pi^2 / 12) \cdot N / Ts$	$p^* \equiv m^*/k^* \approx N^a \cdot (\ln N)^{-b}$	$p^*/P^* \approx 1,621 \cdot N^{-0,5}$ (золотое сечение=1,618)

На важном замечании о сингулярности мы закончим формулирование законов Пирамиды, хотя их количество явно можно увеличить за счет утверждений, подобных закону №15 (о «черной» плотности Ствола). Табл. 2, 3 призваны облегчить изучение и работу с законами Пирамиды.

Отношения характеристик Ствола и Пирамиды (m^*/M ; p/P ; k/K ; p^*/P^*) выражаются общей формулой $d \sim A/N^{0,5}$, где величина A изменяется в пределах от $8/\pi^2 \approx 0,811$ до $16/\pi^2 \approx 1,621$.

Таблица 3. Параметры в конце Большого отрезка

Параметр	Пирамида	Ствол	Ствол/Пирам
Кол-во всех камней	$5,00 \cdot 10^{121}$	$2,11 \cdot 10^{91}$	$4,22 \cdot 10^{-31}$
Масса чер. камней	$8,22 \cdot 10^{121}$	$2,11 \cdot 10^{91}$	$2,56 \cdot 10^{-31}$
Масса всех камней	$1,67 \cdot 10^{182}$	$2,50 \cdot 10^{121}$	$1,50 \cdot 10^{-61}$
Кол-во чер. камней	$1,41 \cdot 10^{63}$	$7,03 \cdot 10^{62}$	1/2
Плотность (общая)	$3,33 \cdot 10^{60}$	$1,19 \cdot 10^{30}$	$3,56 \cdot 10^{-31}$
“Черная” плотность	$5,85 \cdot 10^{58}$	$3,00 \cdot 10^{28}$	$5,13 \cdot 10^{-31}$

Вид получаемых формул напоминает относительную флуктуацию внутренней энергии газа из N молекул, которая равна $0,816/N^{0,5}$. Поскольку в одном см^3 газа количество молекул огромно (около 10^{19}), то флуктуации температуры, давления, энтропии газа очень малы и ими пренебрегают, рассматривая средние значения макровеличин в качестве истинных. Возможно, относительные параметры d (Ствол/Пирамида) можно расценивать как параметры относительной флуктуации некой “внутренней энергии” (её аналога) для ряда натуральных чисел.

1.5. СПИРАЛЬ МИРОВ (СПИРАЛЬ УЛАМА)

Рассмотренная выше Пирамида – это некий графический объект, который наглядно представляет структуру натуральных чисел. Но, очевидно, мы можем построить и другие информативные графические объекты, например – *спираль миров*. Возьмем листок в клетку и в центре него поставим номер мира для числа $N=1$, т. е. поставим 1. Затем, двигаясь по спирали против часовой стрелки (см. рис. 4), будем проставлять *номера миров* для натуральных чисел $N=2, 3, 4, 5, \dots, 11, \dots$ и т. д. (вплоть до бесконечности!), т. е. будем проставлять в клетках по спирали числа $2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots$. В итоге все

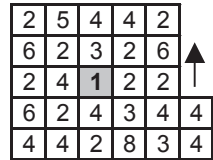


Рис. 4

клетки будут заполнены номерами миров – так мы получаем спираль миров. В спирали миров одинаковые номера можно закрасить одним цветом, причем можно закрасить вообще только один какой-нибудь мир (его номер во всех клетках), а остальные клетки оставить белыми. После такой «проявки» мира №2 мы получим *спираль Улама*, которая названа в честь математика Станислава У. Улама (это он впервые построил спираль для простых чисел, скучая во время одного длинного и неинтересного доклада). На рис. 5 показана спираль миров для первых 289-ти натуральных чисел (номера миров не показаны), причем черным цветом выделены только три мира: №2 (простые числа, их 21% от 289 чисел), №4, №8. Кстати, спираль миров можно начинать строить с любого

Начало спирали миров (алгоритм построения)

натурального числа, а не обязательно с $N=1$ (о спирали Улама, начатой с $N=41$, сказано чуть ниже).

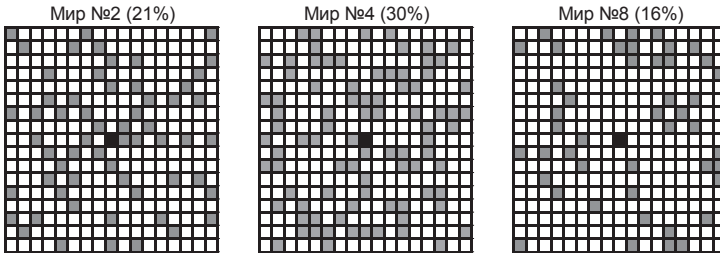


Рис. 5. Спирали трех миров (спираль для мира №2 – это спираль Улама)

С. У. Улам исследовал свою спираль для первых 65000 натуральных чисел, при этом выявились любопытные закономерности (на рис. 5 они едва заметны, но если взять 10000 чисел, то они уже хорошо видны [9]). Прежде всего, бросаются в глаза *диагональные скопления* простых чисел (черные клетки выстраиваются под углом 45° по всей плоскости рисунка), но вполне ощутимы и *вертикальные*, и *горизонтальные скопления* (черные клетки выстраиваются в вертикальные и горизонтальные линии по всей плоскости).

Если спираль Улама начать строить с числа $N=41$, то диагональное скопление размером 40×40 клеток – это суть простые числа, порожденные *трехчленом Эйлера* $x^2 - x + 41$ (при $x=1, 2, 3, \dots$, см. п. 1.1). Давно известно, что из 2398 первых значений этого трехчлена ровно половина – простые числа, а на отрезке $[1; 10^7]$ доля простых чисел, порожденных трехчленом Эйлера, убывает до 47,5%. Причем все эти простые числа – члены одного диагонального сверхскопления. Следует заметить, что любое диагональное скопление в спирали Улама (с любым началом) можно описать неким *квадратичным выражением* (по типу трехчлена Эйлера).

Спираль Улама с 65000 чисел выглядит как плоскость, заполненная точками (простыми числами), причем их распределение в большом масштабе *однородно* (одинаково во всех областях) и *изотропно* (одинаково во всех направлениях). При этом множество линейных скоплений (диагональных, вертикальных, горизонтальных) делят всю плоскость на некие ячейки.

Автору неизвестно, как выглядит спираль Улама, в ещё большем масштабе, т. е. для более чем 65000 чисел. И практически ничего не известно о

виде спиралей для других отдельно взятых миров (с аналогичными закономерностями?). Возможно, построение этих спиралей – далеко не пустое занятие, сулящее немало удивительных открытий и глубоких аналогий.

1.6. КОЛИЧЕСТВО ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Если выписать простые числа подряд, то можно заметить, что относительная плотность их убывает: на первый десяток чисел натурального ряда их приходится 40% (то есть 4 числа из 10), на первую сотню – 25%, на тысячу ~ 17%, на миллион ~ 8%, и т. д., однако все равно, как мы уже знаем, *простых чисел бесконечно много*. Еще в 1845 г. Жозеф Бертран (1822–1900) обнаружил, что между числами N и $2N-2$, где $N>3$, содержится, по крайней мере, одно простое число (*постулат Бертрана*). Таким образом, даже среди очень больших чисел простые числа не так уж редки.

С другой стороны, существуют *сколь угодно длинные* отрезки ряда натуральных чисел (например, миллиарды чисел!), среди которых нет ни одного простого числа (нерегулярность распределения простых чисел). В самом деле, задавшись произвольным натуральным числом n , построим ряд чисел $n!+2, n!+3, \dots, n!+n$. Каждое из этих чисел составное, т. к. число $n!+m$ (где $m=2, 3, \dots, n$) делится на m , поскольку $n!$ делится на m и само m делится на m . Например, при $n=48$ ряд чисел $N+2, N+3, \dots, N+48$ (всего 47 чисел, где $N=48! \approx 10^{61}$) – не будет содержать ни одного простого числа; при $n=170$ ряд чисел $N+2, N+3, \dots, N+170$ (всего 169 чисел, где $N=170! \approx 10^{307}$) – не будет содержать ни одного простого числа. При этом не стоит забывать, что число n может быть сколь угодно большим ($n \rightarrow \infty$). С другой стороны, например, существуют миллионы простых чисел, имеющих ровно 100 цифр, но пока ни одно такое число не обнаружено.

Говоря о количестве простых чисел, мы впредь будем подразумевать их количество на отрезке от 1 до N , т. е. нас будет интересовать поведение некой функции $\pi(N)$ – количество простых чисел, не превосходящих число N (это обозначение принято в *теории чисел*, и число $\pi=3,14\dots$ – здесь ни при чём). Проблемы, связанные с распределением простых чисел (их количеством) в натуральном ряде, обычно являются очень трудными. И, несмотря на то, что многие выдающиеся математики проявляли к простым числам большой интерес, все попытки после Евклида установить какие-либо новые утверждения о распределении простых чисел долгое время не приводили к успеху. Ситуация стала существенно меняться только в начале XIX века.

Французский математик А. М. Лежандр (1752–1833), пользуясь таблицами простых чисел, указал формулу, которая приближенно выражала функцию $\pi(N)$ с некоторой точностью в пределах существовавших таблиц. Эту эмпирическую формулу будем называть **формулой Лежандра**:

$$\pi(N) \approx N/(\ln N - 1) . \quad (25)$$

Строго говоря, в формуле у Лежандра вместо единицы было число 1,08366, но в 1848 г. П. Л. Чебышев показал, что лучшим значением в формуле Лежандра должна быть именно единица.

Точнее, чем формулой Лежандра, величина $\pi(N)$ приближается формулой, предложенной великим немцем Карлом Гауссом (1777–1855):

$$\pi(N) \approx \int_2^N \frac{dt}{\ln t} = \ln(\ln N) + \ln N + \frac{(\ln N)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln N)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(\ln N)^4}{4 \cdot 4!} + \dots, \quad (26)$$

где слагаемые, начиная с третьего (т. е. слагаемые в виде дроби), берутся до тех пор, пока они не станут меньше единицы. Формула Гаусса дает слегка завышенную оценку количества простых чисел, поэтому даже родилась гипотеза о завышенной оценке распределения простых чисел, однако, в 1914 г. Дж. И. Литлвуд (1885–1977) из Кембриджа доказал, что для *очень больших чисел* оценка станет заниженной. В 1955 г. С. Скъюс показал, что эта метаморфоза может произойти прежде, чем будет достигнуто число $N_c = 10^4$, где $A = 10^B$ и $B = 10^{34}$. По словам известного английского математика Дж. Х. Харди (1877–1947) *число Скъюса* (N_c) – «самое большое, которое когда-либо служило какой-нибудь цели в математике». Харди подсчитал, что если принять число частиц во Вселенной 10^{87} , то количество всех комбинаторных перестановок для них примерно равно числу Скъюса.

И формула Лежандра, и формула Гаусса при $N \rightarrow \infty$ эквивалентна выражению $N/\ln N$ и это не случайно. Дело в том, что существенный прогресс в исследовании проблемы распределения простых чисел был достигнут только в середине XIX века русским ученым Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821–1894). Изучая поведение функции $\pi(N)$, он, в частности, оценил порядок роста этой функции, а в 1848 г. доказал, что если существует предел отношения $\pi(N)/(N/\ln N)$ при $N \rightarrow \infty$, то этот предел должен быть равен 1. Правда, доказать существование самого предела Чебышев так и не смог. Только в конце XIX века Ж. Адамар (1865–1963) и Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен (1866–1963) одновременно (в 1896 г.) и независимо друг от друга с помощью аналитических методов доказали *асимптотический закон* распределения простых чисел:

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N} \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad (27)$$

Поскольку именно Чебышев предсказал эту формулу, то в дальнейшем мы будем называть ее *формулой Чебышева*, хотя это не совсем справедливо, т. к. она открылась еще молодому Карлу Гауссу, но найти веские аргументы для ее обоснования ему было не суждено. Закон называется асимптотическим потому, что отношение $\pi(N)/(N/\ln N)$ неограниченно приближается к единице, но так никогда и не принимает значение, равное единице (“асимптота” в переводе с греческого языка – несовпадающий, не касающийся). Вот так усилиями многих гениев в хаосе распределения простых чисел была обнаружена *скрытая гармония* (формула Чебышева поражает своей лаконичностью и красотой, это математический шедевр!).

Итак, количество простых чисел на отрезке от 1 до N мы можем оценить тремя способами: по формуле Лежандра, по формуле Гаусса, по формуле Чебышева (эти формулы далеко не исчерпывают возможности теории чисел, но мы ограничимся только ими). Во всех этих формулах в качестве N можно брать, разумеется, и *простые числа*. Именно так мы поступим для того, чтобы произвести сравнительную оценку относительных погрешностей указанных формул. Уточним, что под относительной погрешностью в данном случае будем понимать величину $ОП = (\kappa - K^*)/K^*$, где K – это реальное количество простых чисел на отрезке от 1 до N , а K^* – приближенное значение, равное $\pi(N)$. Тогда для самой точной формулы – формулы Гаусса можно записать: $\text{abs}(ОП) < 2 \cdot N^{-0,5}$, т. е. модуль $ОП$ очень быстро убывает, например, при $N=10^6$ имеем $\text{abs}(ОП) \approx 0,0016$. Самая грубая формула – формула Чебышева достигнет такой же погрешности только при $N=10^{308}$, поскольку для неё имеем: $ОП \approx \ln(\pi)/\ln N \approx 1,1447/\ln N$ (после $N=5$ формула Чебышева всегда дает результат меньше реального количества простых чисел). Кстати, приведенный пример позволяет “прочувствовать” что такое *бесконечность* (∞), т. к. при $N=10^{308}$ (предел возможностей персонального компьютера) до неё ещё очень и очень далеко, как далека погрешность формулы Чебышева (0,16%) от нуля. В конце Большого отрезка формула Чебышева дает $ОП \approx 0,8\%$. У формулы Чебышева $ОП$ всегда примерно в $\ln N$ раз больше, чем у формулы Лежандра, для которой, вероятно, справедливо выражение: $\text{abs}(ОП) \leq e^{0,5} \cdot (\ln N)^{-2} \approx 1,6487 \cdot (\ln N)^{-2}$.

Таким образом, математикам пока не удалось получить единой простой формулы, которая позволяла бы изучать поведение простых чисел (находила бы их точное количество на произвольном отрезке). И чем точнее эта гипотетическая формула будет описывать начало натурального ряда, тем сложнее будет ее «архитектура», никак не проще формулы Гаусса. Вместе с тем, в загадочной бесконечности формула становится весьма простой ($\sim N/\ln N$). При всём при этом, рассматривая Пирамиду (см. рис. 2), мы не обнаружим ничего сверхсложного, алгоритм укладки камней совершенно элементарен,

а простое число появляется в случае, когда в горизонтальной строке Ствола оказывается только один черный камень.

1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТОГО ЧИСЛА ПО ЕГО НОМЕРУ

Выше мы убедились, что невозможно указать *точное* количество простых чисел на отрезке от 1 до N . Можно только примерно оценить порядковый номер n простого числа P в ряду всех простых чисел, например, используя формулу Лежандра: $n \approx P/(\ln P - 1)$. При этом закономерно встает прямо противоположный вопрос: а можно ли найти простое число P , если известен его порядковый номер n в бесконечном ряду простых чисел? Оказывается, это возможно. Так, из формулы Чебышева $n = P/\ln P$ мы получаем, что $\ln n = \ln P - \ln \ln P$, а, умножив обе части этого выражения на n , приходим к выражению $n \cdot \ln n = P \cdot (1 - \ln \ln P / \ln P)$, которое при $n \rightarrow \infty$ стремится к виду:

$$P_n \approx n \cdot \ln n . \quad (28)$$

Относительную погрешность этой формулы можно оценить примерно как $\text{abs}(ОП) \approx 0,1592/n^{0,022}$. На Большом отрезке гораздо точнее формула

$$P_n \approx [1 - (\ln n)^{-1/2} / 2]^{-1} \cdot n \cdot \ln n . \quad (29)$$

Но самый точный результат при $n=6, 7, 8, \dots, 10^7$ дает формула

$$P_n \approx (\ln \pi) \cdot n \cdot \ln n \approx 1,1447 \cdot n \cdot \ln n . \quad (30)$$

При $n \approx 10^7$ получаем $P_n \approx 1,8 \cdot 10^8$, а модуль ОП формулы (30) достигает 2%, но далее он начинает превышать модуль ОП формулы (29). При $n \approx 10^{18}$ модуль ОП увеличивается до 6÷7%, что уже равно ОП формулы (28), т. е. далее выражение (30) теряет всякий смысл. При $n=10^{18}$ формула (30) дает значение $P_n \approx 4,74 \cdot 10^{19}$, которое близко к правой границе Малого отрезка. Поэтому можно считать, что на Малом отрезке (до размеров протона, см. «Введение») лучше всего работает симпатичная формула $P_n \approx \ln(\pi) \cdot n \cdot \ln n$.

Из формулы Чебышева следует, что на Большом отрезке содержится около $7,1776 \cdot 10^{58}$ простых чисел, т. е. в среднем каждое 140-ое натуральное число – простое. Отношение количества всех натуральных чисел N к количеству простых чисел стремится к значению, равному $\ln N$, т. е. почти к среднему типу по Дирихле (уменьшенному на величину $2 \cdot C - 1 \approx 0,1544$).

У любого простого числа P , очевидно, можно найти его средний тип по формуле Дирихле: $Ts \approx \ln P + (2 \cdot C - 1)$. Поскольку $P \approx n \cdot \ln n$, то можно утверждать, что $Ts/(P/n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, а в конце Большого отрезка это отношение убывает примерно до 1,037. Таким образом, средний тип всех натуральных чисел от единицы до простого числа P включительно стремится к отношению этого простого числа на его порядковый номер n . Создается впечатле-

ние, что в каждом простом числе “зашита” некая информация обо всех предшествующих ему натуральных числах. В дальнейшем мы еще не раз убедимся в уникальности и загадочности простых чисел.

Забегая несколько вперед, можно отметить, что простые числа (образующие мир №2) составляют только небольшую часть всех натуральных чисел (прочих миров). И в остальных мирах, вероятно, также можно установить взаимосвязь натурального числа N_n с его порядковым номером n в «своем» мире, и, скорее всего, при $n \rightarrow \infty$ будем иметь выражение следующего вида: $N_n \sim B \cdot n \cdot \ln n$, где B – некое число (в каждом мире свое).

Итак, подведем некоторые итоги. В нашем распоряжении есть наиболее точная (правда, “трехэтажная”) формула Гаусса, которая позволяет указать только *примерный* порядковый номер последнего простого числа на отрезке от 1 до N . С другой стороны, зная порядковый номер простого числа, мы всегда можем указать, чему *примерно* равно само простое число. Но невозможно *связать точной формулой* простое число с его порядковым номером. Это напоминает *принцип неопределённости* из физики, о котором более подробно сказано в параграфе 1.9.

1.8. ЕДИНИЦА БЛИЗКА К БЕСКОНЕЧНОСТИ?¹

Это, наверняка, безумное предположение, но, тем не менее, об этом стоит сказать! Посмотрите на Пирамиду (рис. 2), а точнее на белое поле рисунка (где помещен поясняющий текст) – ведь это ни что иное, как основание (бесконечность) другой точно такой же, но перевернутой “вверх ногами” пирамиды. Т. е. единице нашей Пирамиды “предшествует” бесконечность *обратной пирамиды* (перевернутой, но точно такой же), а между ними “горловина” в единицу (1 *эви*, за это время свет пройдет $\sim 10^{-35}$ м).

Можно провести даже любопытные *псевдоматематические* рассуждения. Обратимся к формуле Чебышева $n \sim N/\ln N$. Очевидно, что при удалении правой границы отрезка $[1; N]$ в бесконечность (при $N \rightarrow \infty$) порядковый номер последнего (наибольшего) простого числа на этом отрезке также будет устремляться к бесконечности: $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, число $N=1$ в принципе можно считать первым простым числом (а не $N=2$, как принято, см. п.1.1). Но для $N=1$ «получаем»: $n=1/\ln 1=1/0=\infty$, то есть, порядковый номер первого простого числа также «равен» бесконечности! Таким образом, получается, что единица неким образом «замыкается» на бесконечность.

¹ Считайте, что этот параграф целиком набран мелким шрифтом (см. «Обозначения ...»).

На самом деле, деление на нуль в математике запрещено (не имеет смысла). Если бы мы допустили деление на 0, то, например, из верного равенства $0 \times 1 = 0 \times 2$ вывели бы неверное следствие $1 = 2$. Поэтому выражение $1/0$ целесообразнее всего обозначить именно символом «бесконечность», однако с условием, чтобы не делалось даже попытки оперировать этим символом так, как, будто, он подчиняется обычным законам арифметики. Бесконечное в математике связывается с неким процессом, не имеющим конца, и никогда не связывается с актуальной величиной. Нельзя включить символ ∞ в числовую систему действительных чисел, не нарушив при этом основных законов арифметики. И, тем не менее, идея бесконечности пронизывает всю математику, т. к. математические объекты изучаются обыкновенно не как индивидуумы – каждый в отдельности, а как члены совокупностей, содержащих бесчисленное множество элементов одного и того же типа (совокупности натуральных чисел, действительных чисел и т. д.). Понятие «бесконечность» в математике – весьма интересное, глубокое понятие, таящее в себе много логических парадоксов (например, парадоксы Бертрانا Расселя). Свойства бесконечности необычны, например: $\infty + 1 = \infty$; $2 \cdot \infty = \infty$; $\infty > \infty^*$ (одни бесконечности больше других). Математикам пришлось создать целую систему обозначений и названий с бесконечной шкалой бесконечностей, и манипулирование с этими понятиями – одна из наиболее острых проблем нашего времени.

Несмотря на вышесказанное, попытаемся оперировать символом ∞ , как будто это актуальная величина. Обратимся теперь к формуле Лежандра $n \sim N / (\ln N - 1)$, которая при $N=1$ “выдает”: $n = 1 / (0 - 1) = -1$. Получается, что порядковый номер первого простого числа одновременно “равен” бесконечности и -1 . Поэтому допустим здесь вторую “нелепость”: $\infty = -1$, то есть на числовой оси “слева” от единицы находится 0, а потом сразу идет бесконечность! При этом мнимая единица (i), равная корню квадратному из отрицательного числа -1 , есть ни что иное, как бесконечность: $i = (-1)^{1/2} = \infty^{1/2} = \infty$ (но тогда что скрывается за комплексными числами?). Можно сказать, что мнимая единица – это номер ступени Ствола (см. рис. 2), на которой “располагается” бесконечность. Это также позволяет наделять неким содержанием загадочную формулу Эйлера $e^{i\pi} + 1 = 0$. Например, она «подтверждает», что $\infty = -1$, поскольку $e^{i\pi} + 1 = e^{\infty\pi} + 1 = \infty + 1 = 0$ (происходит «аннигиляция» – исчезновение пары ∞ и 1, т. е. эти две величины отличаются всего на всего неким «знаком»). Кстати, из формулы Эйлера также «следует», что $i = \pi^{-1} \cdot \ln(-1) = -\infty$, поскольку при $x \rightarrow 0$ имеем $\ln(x) \rightarrow -\infty$ (в математике логарифма нуля не существует), то $\ln(-1)$ и подавно «равен» бесконечности со знаком «минус» (!). Впрочем, мы на этом и остановимся. Бесспорно одно,

что замечательная по красоте формула Эйлера, связывающая пять основных математических величин: i ($\infty?$), 0 , 1 , e , π , скрывает совершенно фундаментальную истину, пока ещё *не понятую* современной наукой.

1.9. ПРОБЛЕМЫ ГОЛЬДБАХА БОЛЬШЕ НЕ СУЩЕСТВУЕТ?

Юрист и математик Христиан Гольдбах (1690–1764), немец по национальности, не оставил никакого следа непосредственно в математике, хотя он опубликовал не менее десятка своих научных работ, стал академиком (1725), почетным членом Петербургской Академии Наук (1742). Но Гольдбах вел регулярную переписку с Л. Эйлером и в одном из писем (1742) Гольдбах высказал гипотезу, которая и обесмертило его имя. Он спрашивал у Эйлера, может ли тот доказать, что *всякое целое число, большее или равное 6, можно представить в виде суммы трех простых чисел* (например, $6=2+2+2$; $7=2+2+3$; $8=2+3+3$; $9=3+3+3$ и т. д.). В ответ Эйлер заметил, что для решения *проблемы Гольдбаха* достаточно доказать более сильную гипотезу о том, что всякое четное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел (например, $4=2+2$; $6=3+3$; $8=5+3$ и т. д.). С тех давних пор все попытки (в т. ч. и на компьютерах) выявить хотя бы одно четное число, которое не представимо в виде суммы двух простых чисел, так и не дали никакого результата. Более того, в 1938 г. Эстерман обнаружил, что в некотором смысле *почти все* четные числа являются суммой двух простых, но, увы, все это не может служить *математическим* доказательством (см. п. 3.4) гипотезы Гольдбаха.

В течение долгого времени не удавалось найти никаких путей исследования проблемы Гольдбаха. Источник всех затруднений здесь кроется в том, что понятие *простого числа* определяется в терминах *умножения*, тогда как сама проблема касается *сложения*. Первый крупный успех (и совершенно неожиданный для специалистов по данному вопросу) был достигнут в 1930 г. неизвестным в то время молодым советским математиком Л. Г. Шнирельманом (1905–1938), который доказал, что *всякое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем 800.000 простых чисел*. Причем доказательство Шнирельмана не обеспечивает практического метода для представления произвольного натурального числа в виде суммы простых чисел. В 1937 г. советский математик И. М. Виноградов (1891–1983), крупнейший специалист в аналитической теории чисел, доказал, что *всякое достаточно большое нечетное число $N > B$ представляется суммой трех простых чисел: $N = P_1 + P_2 + P_3$* , причем это доказательство не позволяет никак судить о величине числа B (*постоянной Виноградова*). Таким образом, Виноградов, по существу, решил проблему Гольдбаха для

нечетных чисел. Это – одно из крупнейших достижений математики XX века. Кстати, из него следует представимость *любого* натурального числа $N > B + 2$ в виде суммы *четырёх* простых чисел.

В 1939 г. К. Г. Бороздин впервые оценил постоянную Виноградова, а в 1956 г. снизил свою первоначальную оценку до числа $B = e^b$, где $e = 2,718\dots$; $b = e^{17} \approx 24154953$, т. е. число B настолько велико, что лежит далеко за гранью человеческого воображения. Например, даже уменьшив показатель степени b в 34032 раза (!) мы все равно получаем колоссальное значение для $B \sim 10^{308}$ (почти бесконечность). Конечно, дальнейшее *математически строгое* уменьшение числа B до разумных пределов позволило бы решить проблему Гольдбаха посредством прямой вычислительной проверки на компьютере за *реальное время* (пусть даже за десятки лет!), а пока задача о разбиении чётного числа на сумму двух простых чисел остается не решенной.

Учитывая «безумный» вывод автора о том, что бесконечность и единица – это практически одно и то же (п.1.8), можно считать, что проблема Гольдбаха попросту перестает существовать, т. к. $B \sim \infty \sim 1$. Оценка числа B , сделанная Бороздиным, доказывает, что единица близка к бесконечности?

Следует вдуматься в тот факт, что математикам удалось доказать: с одной стороны – представимость *любого* натурального числа, но в виде суммы *многих* простых чисел (не более 800000^1), а с другой стороны – представимость только *некоторых* натуральных чисел (нечетных и таких, что $N > B$), но зато в виде суммы всего на всего *трех* простых чисел. Вероятно, ничего другого средствами математики доказать невозможно и это лишний раз подтверждает, что натуральные числа адекватно отражают структуру реального пространства-времени. Возможно, здесь “проявляется” *принцип неопределённости*, хорошо известный в квантовой теории: любая физическая система не может находиться в состояниях, в которых координаты её центра инерции и импульс одновременно принимают вполне определенные, точные значения (чем точнее определена одна из величин, тем менее точно определено значение другой). Принцип неопределённости (с несколько иным смыслом) существует также для таких фундаментальных физических величин, как энергия и время. Указанный принцип был открыт в 1927 г. немецким физиком Вернером Гейзенбергом (1901–1976) и явился важным этапом в построении системы современных научных взглядов. Принцип Гейзенберга проявляется в основном для явлений атомных (и меньших) масштабов.

Теорема Шнирельмана о сумме 800000 простых чисел привлекает некой тайной. Приведем пример того, как можно её обыграть, “расшифровать”.

¹ В Японии не менее двух тысяч лет назад сложилось старое синто (учение, путь богов), у которого существовал пантеон «восьмисот мириадом божеств». Главное божество – Солнце, затем шли духи гор, ручьев, деревьев и т. д. Мириады (в переводе с греческого) – это десять тысяч или несметное множество. А может все-таки древние имели в виду число 800000 ?

Будем называть натуральное число NB – *базой* отрезка $[1; N]$, если сумма 800000 простых чисел, идущих подряд и замыкаемых числом NB , равна правой границе отрезка, т. е. числу N . Из этого определения следует, что минимально возможная база равна 800000-му простому числу: $NB_{min}=P_{800000}=12.195.257$, а само понятие «база» правомочно для любых отрезков (с началом в единице, разумеется), правая граница которых начинается с числа $N_{min}=4.705.814.230.311 \approx 4,7 \cdot 10^{12}$ (это сумма первых 800000 простых чисел: от числа $P_1=2$ до P_{800000}). Кстати, минимально возможную границу $N_{min} \sim 10^{12}$ можно условно принять за *границу сингулярности* натурального ряда, т. е. впредь будем считать, что на отрезке $[1; 10^{12}]$ большинство формул ГТНЧ имеют значительную погрешность или вовсе не работают (как и должно быть в сингулярности). Ещё раз подчеркнем, что до числа $N_{min} \sim 10^{12}$ нельзя искать базу (по её определению), а саму границу $N_{min} \sim 10^{12}$ после *эви*-конвертирования можно представить как 10^{-31} секунды или как 10^{-22} метра.

Очевидно, что сумму первых n простых чисел (идущих подряд друг за другом, начиная с $P_1=2$, у которого $n=1$) можно оценить по формуле $S_n \approx 2 + 2 \cdot \ln 2 + 3 \cdot \ln 3 + 4 \cdot \ln 4 + \dots + n \cdot \ln n$, причем в сингулярности относительную погрешность такой суммы можно оценить как $ОП \approx 0,3343 \cdot (\ln n)^{-0,3961}$. Используя полученную оценку, можно связать базу NB произвольного отрезка $[1; N]$ с его правой границей (весьма грубо, в первом приближении):

$$N \approx 200000 \cdot NB \cdot (\ln \ln NB)^{1,1852}. \quad (31)$$

В табл. 4 приведены некоторые отрезки вида $[1; N]$ (точнее говоря, их правая граница N , в т. ч. для МО, ЦО, БО) с указанием их базы NB , выраженной в *эви*, в секундах и метрах (см. «Ведение»).

Таблица 4. Базы семи отрезков

NB – база отрезка $[1; N]$			Граница
<i>эви</i>	секунды	метры	N (<i>эви</i>)
1,2E+07	6,6E-37	2,0E-28	4,7E+12
1,8E+08	9,9E-36	3,0E-27	1,4E+14
2,1E+09	1,1E-34	3,4E-26	1,6E+15
2,4E+10	1,3E-33	3,8E-25	1,9E+16
1,2E+14	6,4E-30	1,9E-21	1,0E+20
9,2E+28	5,0E-15	1,5E-06	1,0E+35
7,8E+54	4,2E+11	1,3E+20	1,0E+61

База МО по своим «размерам» близка к кваркам и лептонам, из которых строятся протоны (наименьшие из известных структурных единиц вещества). База ЦО – близка к органическим молекулам и живым клеткам, которые являются строительными кирпичиками человека (его символизирует ЦО). База БО – близка к звездным скоплениям и галактикам, которые являются кирпичиками Вселенной (её подразумевает БО). См. также п. 4.11.

1.10. ОРБИТЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ (МИРА №2)

Все натуральные числа внутри каждого отдельно взятого мира имеют одинаковый тип, например, все простые числа (мир №2) имеют тип $T=2$. Поэтому, для выявления более глубокой структуры чисел введем для них новую характеристику. Будем говорить, что **орбита** (H) числа N_n равна разности между последующим числом N_{n+1} и данным числом N_n :

$$H \equiv N_{n+1} - N_n, \quad (32)$$

где $n=1, 2, 3, \dots$ – это порядковый номер числа *внутри данного мира*.

Для мира №2 (для простых чисел) эту формулу запишем в виде

$$H \equiv P_{n+1} - P_n \quad (33)$$

где $n=1, 2, 3, \dots$ – это порядковый номер простого числа внутри мира №2. Так, простые числа 3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, ... лежат на второй орбите, т. к. у каждого из них $H=2$ (это и есть *числа-близнецы*). Простые числа 7, 13, 19, 37, 43, 67, 79, ... лежат на четвертой орбите (у них $H=4$); простые числа 23, 31, 47, 53, 61, 73, 83, ... лежат на шестой орбите ($H=6$) и т. д. до бесконечности. Орбиты простых чисел кратны 2, исключение составляет простое число $P_1=2$, у которого $H=3-2=1$, т. е. это единственное простое число, лежащее на первой орбите, общей для всех натуральных чисел.

Закономерности орбит простых чисел мы будем изучать на *рабочем отрезке* [1; 17051707] правая граница которого – также простое число с порядковым номером $n \approx 1095000$. На рабочем отрезке появилось всего 79 орбит, причем орбиты $H=1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 154$ – появились без пропусков, затем идет пробел в номерах орбит, т. е. орбиты $H=156, 158, \dots, 178$ – так и не появились, а последней появилась орбита $H=180$. Таким образом, «не появилось» 12 орбит, которые можно назвать **орбитами-фантамами**, т. к. за пределами рабочего отрезка простые числа могут «открыть» как одну из указанных орбит-фантомов, так и новую орбиту с $H > 180$ (пополнив список орбит-фантомов). Нельзя *точно* предсказать (с помощью какой-либо формулы) орбиту следующего простого числа – это псевдослучайный процесс (см. 5-й закон Пирамиды).

Первое простое число каждой орбиты будем называть **лидером орбиты** (PL). Кстати, рабочий отрезок замыкает лидер орбиты $H=180$ (79-й лидер). Пронумеруем лидеров PLz в порядке появления ($Z=1, 2, 3, \dots$ – порядковый

номер лидера), тогда их орбиты H_z почти образуют арифметическую прогрессию вида $H_z = 2 + 2(Z-1) = 2 \cdot Z$. Так, если обозначить через $S_z = \sum H_z$ – сумму орбит лидеров (их количество равно Z), а через $S_z^* = Z^2 - Z + 1$ – сумму Z первых членов указанной арифметической прогрессии (плюс единица), то эти суммы будут сближаться с относительной погрешностью равной

$$ОП \equiv (S_z - S_z^*)/S_z^* \approx \exp[-1,1447 \cdot (\ln PL_z)^{0,5}] \approx \exp[-\ln \pi \cdot (\ln PL_z)^{0,5}] . \quad (34)$$

Таким образом, зная Z (порядковый номер лидера PL_z), можно говорить, что его орбита примерно равна $H_z^* \approx 2 \cdot Z - 1$, причем с такой точностью:

$$\text{abs}(ОП) \equiv \text{abs}(H_z - H_z^*)/H_z^* \geq 0,2486 \cdot P_z^{-0,2486} \approx \lg(\pi^{0,5}) \cdot P_z^{-\lg(\pi^{0,5})} . \quad (35)$$

С другой стороны, если мы знаем орбиту HL некоего лидера PL_z , то можно утверждать, что порядковый номер данного лидера примерно будет равен

$$Z \approx (HL+1)/2 , \quad (36)$$

и этот важный факт в дальнейшем приведет нас к интересным выводам.

Номера орбит хаотично изменяются от $H=2$ до некоего H_{max} , который увеличивается с ростом простых чисел. Качественно картина флуктуаций орбит совершенно аналогична картине флуктуаций типов (миров) натуральных чисел (рис. 1). Подобно среднему типу, среднее арифметическое номеров орбит первых n простых чисел, определяемое выражением:

$$H_s \equiv (H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n)/n = (P_{n+1} - P_1)/n = (P_{n+1} - 2)/n, \quad (37)$$

ведет себя весьма спокойно. Величину H_s будем называть **средней орбитой** n простых чисел. Поскольку при $n \rightarrow \infty$ можно утверждать, что $P_{n+1} \sim (n+1) \cdot \ln(n+1)$, то из формулы (37) следует, такая оценка средней орбиты:

$$H_s \sim \ln(n+1) , \quad (38)$$

для которой $\text{abs}(ОП) \approx 0,1913 \cdot n^{-0,0348}$. Из формулы (38) с учетом выражения Чебышева ($n \sim P_n / \ln P_n$) можно получить другую оценку средней орбиты

$$H_s \sim \ln(P_n + \ln P_n) - \ln \ln P_n , \quad (39)$$

для которой $\text{abs}(ОП) \approx 0,239 \cdot P_n^{-0,0398}$. У формул (38) и (39) в конце рабочего отрезка имеем $\text{abs}(ОП) \approx 13\%$. Гораздо точнее работает формула

$$H_s \approx T_s \cdot \{1 + \exp[-\lg F \cdot (\ln P_n)^{0,475}]\}^{-1} , \quad (40)$$

где $T_s = \ln P_n + (2 \cdot C - 1)$ – средний тип всех натуральных чисел до простого числа P_n включительно (формула Дирихле); $\lg F = 0,6692 \dots$ – десятичный логарифм числа Фейгенбаума. На отрезке от $P_n = 139$ до $P_n \sim 10^8$ (?) это самая точная из формул, найденных для определения H_s ; так, в конце рабочего отрезка она дает $ОП$ не более $\pm 0,1\%$. Однако, от $P_n = 2$ до $P_n = 37$ и после $P_n \sim 10^8$ (?) наиболее точный результат, вероятно, дает следующая формула

$$H_s \approx T_s \cdot \{1 + \exp[-(\ln P_n)^{0,5}]\}^{-1} , \quad (41)$$

для которой $\text{abs}(ОП) \approx 0,1407 \cdot P_n^{-0,0542}$ (при $P_n > 1907$). Так, в конце рабочего отрезка эта формула дает $ОП \approx -6\%$, а в конце Большого отрезка $H_s \approx 140,6$ и

$\text{abs}(OP) \approx 0,01\%$. С ростом P_n выражение в фигурных скобках устремляется к единице, т. е. *средняя орбита H_s простых чисел асимптотически приближается к среднему типу T_s всех натуральных чисел*, что и должно быть (это нетрудно доказать).

Реальные значения отношения T_s/H_s сначала убывают от 1,5 (при $P=2$) до 1,0159 (“яма” при $P=7$), потом начинают расти до 1,2704 (“пик” при $P=109$), после чего уже окончательно устремляются к единице, не переставая совершать *затухающие колебания* (и проходя значение 1,0784 в конце рабочего отрезка). Еще раз подчеркнем, что T_s всегда больше H_s .

Выше мы уже говорили, что номера орбит HL лидеров PL_z (т. е. с порядковым номером Z внутри всех лидеров) совершают колебания вокруг некой виртуальной оси, уравнение которой: $HL \approx 2 \cdot Z - 1$. Эти колебания происходят в коридоре (рис. 6), верхняя граница которого – H_{max} (максимально возможная орбита у лидеров орбит из мира №2, а значит и у любого простого числа на отрезке от 1 до N), а нижняя граница – HL_{min} (минимально возможная орбита у лидеров орбит из мира №2 на отрезке от 1 до N). Анализ рабочего отрезка приводит нас к следующим формулам:

$$H_{max} \approx H_s \cdot \ln n \sim H_s^2 \quad ; \quad HL_{min} \approx 0,5 \cdot H_s \cdot \ln n \sim H_s^2 / 2, \quad (42)$$

где $n=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер простого числа внутри мира №2, т. е. именно некое простое число мы подразумеваем в качестве правой границы отрезка, на котором ищем границы H_{max} и HL_{min} . Например, в конце Большого отрезка имеем $n \approx 10^{61} / \ln 10^{61} \approx 7,12 \cdot 10^{58}$, по формуле (41) находим $H_s \approx 140,61$, поэтому орбиты простых чисел могут принимать значения от $HL_{min} \approx 9527$ до $H_{max} \approx 19055$. Откуда, с учетом формулы (36), следует, что в конце Большого отрезка количество различных орбит в мире №2 может достичь значения, лежащего в диапазоне от $Z_{min} \approx 4764$ до $Z_{max} \approx 9528$.

1.11. КОЛИЧЕСТВО РАЗЛИЧНЫХ ОРБИТ В МИРЕ №2

В конце предыдущей главы мы уже попытались оценить количество различных орбит (Z_{max}) в мире №2 на Большом отрезке, причем эта оценка справедлива, если выполняются следующие лаконичные соотношения:

$$Z_{max} \approx (H_{max} + 1) / 2 \approx (H_s^2 + 1) / 2 \quad \text{или} \quad Z_{max} \sim T_s^2 / 2. \quad (43)$$

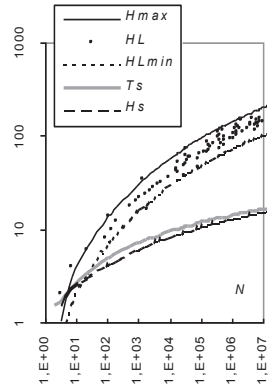


Рис. 6. Орбиты лидеров

Хочется верить, что количество различных орбит, действительно, стремится к половине квадрата среднего типа всех натуральных чисел на данном отрезке, однако слишком мал наш рабочий отрезок, чтобы не сомневаться в сделанном выводе. Поэтому приведем другие соображения.

Например, пусть Z – это порядковый номер лидера PL , тогда для отрезка $[1; PL]$ можно записать следующую эмпирическую формулу

$$PL \approx \exp(2,5362 \cdot Z^{0,4271}) , \quad (44)$$

которая дает хотя и грубую оценку количества лидеров орбит в конце БО – $Z \approx 12080$, и эта оценка одного порядка с ранее полученной ($Z_{max} \approx 9528$).

По аналогии с понятием “*лидер орбиты*” введем очень важное понятие в ГТНЧ – *лидер мира*, под которым будем понимать первое натуральное число из данного мира и обозначим его NL . Таким образом, каждый мир “открывается” своим лидером, например: $NL=1$ – это лидер мира №1 (и это единственный мир, в котором только одно число, во всех остальных мирах количество натуральных чисел бесконечно много); $NL=2$ – это лидер мира №2; $NL=4$ – это лидер мира №3; $NL=6$ – это лидер мира №4; и т. д. Аналогично лидерам орбит (внутри мира №2) лидеры миров появляются все реже и реже при удалении правой границы исследуемого отрезка. Определение количества лидеров всех миров (K) на произвольном отрезке – это также весьма непростая задача, но в дальнейшем она будет *почти* решена нами для Большого отрезка ($K \approx 807430$ различных миров, см. п. 1.36), т. е. будем считать, что нам известен закон, по которому происходит рост величины K с удалением правой границы отрезка. Но формулы (43) фактически выражают закон роста параметра Z (количества различных орбит в мире №2) при удалении правой границы отрезка. Поэтому мы можем проследить динамику отношений Z/K на протяжении всего Большого отрезка, что представляется весьма интересным и важным вопросом.

Динамика отношений Z/K для каждого лидера PL на рабочем отрезке представлена на рис. 7 (в виде точек). Сплошной линией показано среднее арифметическое всех отношений Z/K , которое имеет максимум при $PL=7$ ($Z/K \approx 0,656$) и минимум при $PL=30593$ ($Z/K \approx 0,532$), а потом начинает медленно расти. Следует заметить, что искать лидеров орбит в мире №2 можно исключительно путем перебора *всех* простых чисел, т. к. здесь не существует косвенных путей как в случае поиска *лидеров миров* (о чём будет ниже). Поэтому поиск лидеров орбит связан со временем расчёта на компьютере (t , час), которое зависит от правой границы N исследуемого отрезка: $t \approx 1,278 \cdot 10^{-8} \cdot N^{1,3524}$, и в конце рабочего отрезка достигает значения $t \approx 77$ часов непрерывной работы ПК по специальной программе. Анализ показывает, что вне сингулярности (при $N > 10^8$) отношение Z/K , скорее всего, начинает *убывать* по следующему эмпирическому закону

$$Z/K \approx \exp[-A \cdot (\ln \ln N)^B], \quad (45)$$

где $A=0,0033$; $B=4,513$ – и тогда мы получаем $(Z/K)_{max}$, или $A=0,0141$; $B=3,6874$ – и тогда мы получаем $(Z/K)_{min}$. Таким образом, в конце Большого отрезка $Z/K \approx 0,006 \div 0,0113368$. Вне сингулярности рост количества миров (K) начинает опережать рост количества орбит (Z) в мире №2, и отношение Z/K , вероятно, асимптотически устремляется к нулю.

Между лидерами миров NL и лидерами орбит простых чисел PL , несомненно, существует связь (в ГТНЧ всё взаимосвязано!), весьма грубо ($ОП=\pm 50\%$) её символизирует следующее выражение: $PL \approx \exp(5,3 \cdot NL^{0,0875})$. Ситуация такова, словно лидеры миров “формируют” лидеров орбит или, иначе говоря, именно натуральный ряд “порождает” простые числа, а не наоборот, как может показаться из утверждения, что простые числа – это базис натуральных чисел. *Простые числа – это всего лишь замечательный “продукт”, только следствие элементарного алгоритма Пирамиды.*

В заключение параграфа скажем несколько слов о количестве орбит-фантомов. Количество орбит-фантомов с увеличением длины отрезка, а точнее с ростом порядкового номера лидера орбиты, изменяется пилообразно (см. рис. 8, напоминающий зубья пилы). Сплошная линия – это максимально возможное количество орбит-фантомов (F), которое может быть при данном количестве лидеров орбит (Z). Причем

$F \approx 6,14 \cdot \ln Z - 9,09$, т. е. в конце Большого отрезка, вероятно, имеем $F \approx 43 \div 47$ орбит-фантомов. Столь малое их количество вызывает сомнения, но слишком трудоемки дальнейшие поиски “зубьев пилы” фантомов. Возможно, также, что всегда будут появляться “нулевые” лидеры орбит, при которых количество орбит-фантомов обнуляется, как это происходит при $Z=1, 2, 3, 4, 5, 8, 18, 19, 78$.

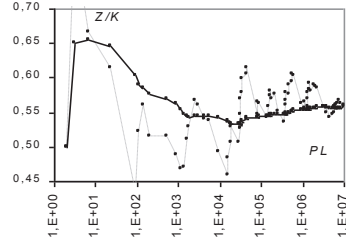


Рис. 7. Динамика отношений Z/K

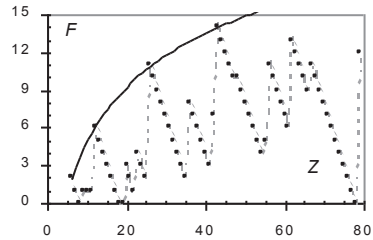


Рис. 8. Количество орбит-фантомов

1.12. СПЕКТР ОРБИТ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Под спектром в физике обычно понимают совокупность различных значений, которые может принимать некая величина. Аналогичное понятие введем и мы: **спектр орбит** – это распределение простых чисел на отрезке по различным орбитам (количество простых чисел на каждой из орбит). Рассмотрим первые 300000 простых чисел из отрезка $[1; 4253609]$, которые располагаются на 65 орбитах: с $H=2$ по $H=148$ ($P=2$ с орбитой $H=1$ здесь не рассматриваем). Доля чисел (D) на каждой орбите заметно колеблется, но, в общем, быстро уменьшается по экспоненте $D \approx A \cdot \exp(-B \cdot H)$, где $A=0,1741$, $B=0,0842$, причем эти параметры с ростом N уменьшаются, да и сама зависимость $D=f(H)$, наверняка, сложнее.

Распределение простых чисел по орбитам можно рассмотреть несколько иначе. Расположим 65 лидеров орбит (PL) в порядке их появления, сопоставив каждому – количество простых чисел (K), им “порожденных”. Первые лидеры представлены в табл.5 и на рис. 9. Скорее всего, спектр орбит с ростом правой границы отрезка $[1; N]$ изменятся: пики и ямы спектра для конкретных орбит – далеко не догма, они могут стать уделом совсем других орбит. На рис. 9 хорошо видны колебания количества простых чисел на разных орбитах. Причем расположение пиков и ям, близких по длине отрезков натурального ряда (с количеством простых чисел равным $K=60000$ и $K=300000$),

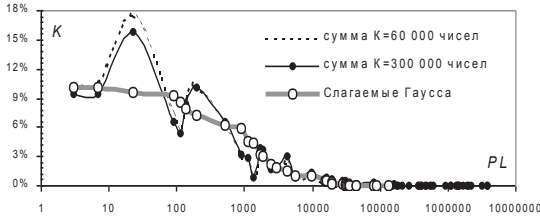


Рис. 9. Спектр орбит первых 300000 простых чисел

практически совпадает, и кривые сливаются уже на втором пике.

С ростом правой границы отрезка $[1; N]$ спектр орбит в целом имеет тенденцию к сглаживанию пиков, ям и общему снижению к оси абсцисс, т. е. спектр орбит стремится занять место жирной линии на рис. 9, которая соответствует *слагаемым Гаусса*.

Дело в том, что если в формулу Гаусса (26) подставить правую границу рассматриваемого отрезка ($N=4253609$), то эта формула выдаст нам 34 слагаемых (некие числа, которые

Таблица 5. Спектр орбит

Номер орбиты H	Лидер орбиты PL	Кол-во чисел K	Нарастающим итогом
2	3	9,5%	9,5%
4	7	9,4%	18,8%
6	23	15,8%	34,6%
8	89	6,6%	41,3%
14	113	5,3%	46,6%
10	139	8,4%	55,0%
12	199	10,0%	65,1%
18	523	6,5%	71,6%
20	887	3,2%	74,8%
22	1129	2,9%	77,7%
34	1327	0,9%	78,6%
24	1669	3,9%	82,5%
16	1831	3,8%	86,3%
26	2477	1,7%	88,0%
Прочие орбиты			12%
			100%

мы будем называть *слагаемыми Гаусса*). И если их отсортировать по убыванию и наложить на спектр орбит, то получается, что слагаемые Гаусса – это количество простых чисел на неких мнимых орбитах, которые мы будем называть *орбитами Гаусса*. При удалении правой границы отрезка (увеличении N) количество слагаемых в формуле Гаусса, вероятно, стремится к половине реального количества орбит. Причем эта половина содержит подавляющее большинство простых чисел, так, при $N=300000$ на 52-х% ($34/66=0,52$) первых орбит содержится 99,6% всех простых чисел данного отрезка. Кстати, слагаемые Гаусса (в порядке их появления по формуле Гаусса) для числа $N=4253609$ образуют идеальный “колокол” нормального (Гауссова) распределения (рис. 10).

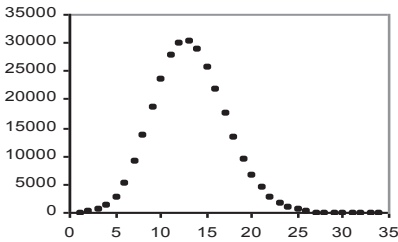


Рис. 10. «Колокол» Гаусса ($N=4253609$)

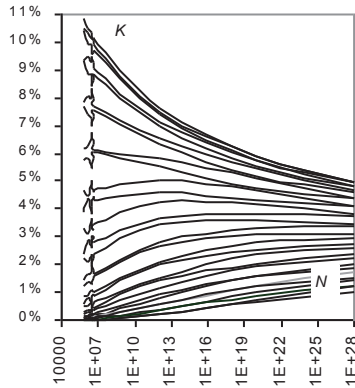


Рис.11. Спектр Гаусса

На рис. 11 показано как изменяется доля простых чисел на первых 30-ти орбитах Гаусса при возрастании правой границы отрезка $[1;N]$ (аналоги орбит $H=2, 4, 6, \dots$ идут сверху вниз). Такое построение (назовем его *спектром Гаусса*) позволяет увидеть *качественную* картину реального спектра на больших отрезках. Колебания (крючки) в начале спектра Гаусса в реальных спектрах имеют иной вид. Спектр Гаусса показывает, что с ростом номера орбиты (к низу рисунка) происходит всё более затяжной рост её доли. Хотя в дальнейшем (при $N > 10^{28}$) доля чисел на любой орбите должна неизбежно убывать, асимптотически стремясь к нулю при $N \rightarrow \infty$.

1.13. ПРИОРИТЕТ ОРБИТЫ $H = 6$ У ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Вероятность появления орбиты – это отношение количества чисел с данной орбитой (k) к количеству всех чисел (K) на отрезке $[1;N]$ (разумеется, речь идет о числах из одного мира, в данном случае из мира №2). Вместо термина “вероятность появления” мы чаще будем пользоваться термином “доля” (просто так короче), например, удобно сказать, что на отрезке $[1; 4253609]$ максимальная доля у орбиты $H=6$ и она равна $D \equiv k/K \approx 0,158\dots$ или около 15,8%. Ясно, что доля всех остальных орбит на этом отрезке составит около 0,842 (или $\sim 84,2\%$). В этом параграфе мы рассмотрим доли целого ряда орбит из мира №2, но доля орбиты $H=6$, вероятно, является наибольшей среди всех орбит простых чисел.

Доля любой орбиты, начиная с её лидера (PL), сначала увеличивается и при некотором числе (PS) достигает максимального значения (DS), а потом начинает убывать. Причем на разных орбитах расстояние (разность) между числами PS и PL разное. Динамику долей (D) орбит простых чисел как некую функцию правой границы ($N=P$) отрезка можно изобразить графически (рис. 12), но вот «подобрать» формулы для полученных кривых – весьма проблематично.

Орбита “близнецов” ($H=2$) открывается лидером $PL=3$ (это первое **гауссово число**, см. п. 2.5), при этом доля равна $D \equiv h/n = 1/2 = 0,5$, где $h=1$ – это порядковый номер на данной орбите, а $n=2$ – это порядковый номер внутри всех простых чисел. Максимально возможная доля на этой орбите реализуется сразу – буквально на следующем простом числе $PS=5$ (второе гауссово число) при этом $DS=2/3 \approx 0,666$. После этого все остальные отношения $D \equiv h/n$ на орбите «близнецов» начинают убывать. Так, при $P=17$ (третье гауссово число) имеем $D=4/7 \approx 0,5714$; при $P=65537$ (пятое гауссово число) имеем $D=861/6543 \approx 0,1316$. Причем пятое гауссово число условно можно считать точкой пересечения с графиком долей орбиты $H=4$ (рис.12). При $P \approx 1670057$ имеем $D \approx 0,1010$ – условная точка пересечения с графиком долей орбиты $H=12$ (рис.12). Вообще убывание доли орбиты “близнецов” в сингулярности можно описать выражением

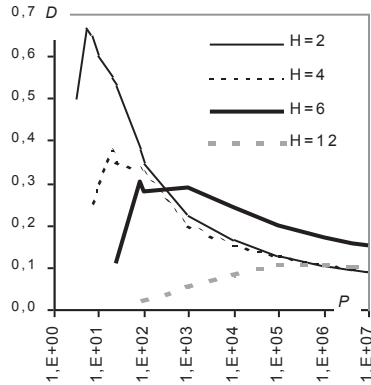


Рис. 12. Динамика долей (схематично)

$$D \equiv h/n \approx \exp[-0,6711 \cdot (\ln N)^{0,4618}] , \quad (49)$$

где N – это правая граница отрезка $[1; N]$. В конце Большого отрезка эта формула дает значение 0,0014 (0,14%). Следует подчеркнуть, что с позиций ГТНЧ знаменитой *проблемы «близнецов»* просто не существует, поскольку орбита $H=2$ ничем не лучше всех прочих орбит в мире №2, и удел любой орбиты – неизбежно понижать свою долю в общем спектре орбит, как бы далеко не находился максимум доли (DS) у данной орбиты.

Предположение о существовании убывающего, но, тем не менее, *бесконечного* множества «близнецов» кажется весьма правдоподобным, но математикам до сих пор даже не удалось приблизиться к его доказательству (и ГТНЧ здесь не в счет, см. п.3.4). Ещё в 1849 г. А. де Полиньяк высказал предположение, что всякое четное число можно представить в виде разности последовательных простых чисел *бесконечным* числом способов. В частности, для числа 2 отсюда следовало бы, что количество пар-близнецов бесконечно много. Но *гипотеза де Полиньяка* также пока не доказана, хотя с точки зрения ГТНЧ нет никаких сомнений, что любая орбита в мире №2 (H – всегда четное число) имеет бесконечно много простых чисел.

Приведем примеры некоторых пар близнецов: 3 и 5; 5 и 7; 11 и 13; 10006427 и 10006429; $9 \cdot 2^{21} \pm 1$; $156 \cdot 5^{202} \pm 1$. Самая большая пара близнецов, найденная к 1996 г. с помощью компьютера – это пара чисел из так называемого *глубокого числового космоса*: $242206083 \cdot 2^{38880} \pm 1$ (самые большие простые числа имеют вид $a \cdot 2^p \pm 1$). Любопытно, что среди близнецов встречаются и «*тройки*», например, 3, 5, 7. Более того, близнецы могут собираться в скопления, образуя *четверки* вида $(n-4, n-2, n+2, n+4)$, например, 5, 7, 11, 13 и 11, 13, 17, 19, но как много «троен» и четверок – неизвестно. Также до сих пор неизвестно конечно или бесконечно множество пар близнецов, и в этом состоит знаменитая *проблема близнецов*.

Лидер орбиты $H=6$ имеет долю $D=1/9 \approx 0,111\dots$, и с этого значения она начинает свой рост до максимального значения $DS=7/23 \approx 0,3043\dots$ при $PS=83$, после чего доля совершает *семь* циклов относительно «больших» колебаний в диапазоне $D=0,24 \div 0,30$, что хорошо видно на рис.13 (на схематичном рис.12 этот участок орбиты $H=6$ выглядит как «*плато*»). В центре рис.13 жирной точкой выделено простое число $P=257$ – это четвертое *гауссово число*, лежащее на орбите $H=6$, которое можно условно принять за точку пересечения с графиком долей орбиты «близнецов» (две сплошные косые линии – это «коридор», где расположены доли орбиты $H=2$, см. также рис.12). После $P \approx 10987$ начинается явное уменьшение доли орбиты $H=6$ с «малыми» затухающими колебаниями, причем есть основания предполагать, что эта орбита уже никогда не уступает первенства своей доли прочим орбитам мира №2.

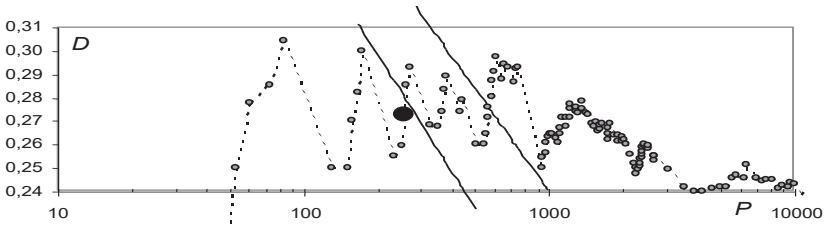


Рис. 13. «Плато» орбиты $H=6$ и гауссово число $P=257$ (жирная точка в центре)

Уточняя рис.12 можно ещё добавить, что на орбите $H=4$ пик доли $DS=3/8 \approx 0,375$ при $PS=19$, после чего идет короткое «плато», где доля D совершает заметные колебания. На орбите $H=12$ пик доли $DS=579/5516 \approx 0,0217$ при $PS=54181$, после чего доля D , совершая «малые» колебания, начинает очень медленно убывать (образуя затяжное «плато»). В конце отрезка $[1; 10^7]$ доли упомянутых орбит $H=6, 12, 2, 4$ соответственно равны $D=0,1505; 0,0986; 0,0887; 0,0882$.

Приоритет орбиты $H=6$ в известной степени подтверждает распределение максимальных долей DS («пиков») различных орбит в зависимости от их номера H , которое идет близко к экспоненте $DS \approx 0,37 \cdot \exp(-0,11 \cdot H)$. Приоритет орбиты $H=6$, вероятно, можно трактовать как некое «завуалированное» проявление «магии» числа 7 или как причину такой «магии». Близость $H=6$ к числу 7 здесь явно заслуживает особого внимания.

1.14. ПРИРОСТ И МНИМЫЙ ПРИРОСТ ЧИСЛА

Что еще объединяет простые числа, лежащие на одной орбите, кроме общего номера орбиты (H)? Для ответа на данный вопрос, введем очередной новый параметр для любого простого числа. Рассмотрим простые числа в порядке их следования, т. е. по возрастанию. Каждому числу P_n поставим в соответствие так называемый **прирост** R_n^* , равный:

$$R_n^* = P_{n+1} / P_n, \quad (50)$$

где $n=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер простого числа внутри мира №2.

Ещё введем понятие об *относительном приросте* n -го простого числа:

$$OR_n = (P_{n+1} - P_n) / P_n = H_n / P_n = R_n^* - 1. \quad (51)$$

По мере роста простых чисел P_n , лежащих на данной орбите H происходит монотонный рост некоего параметра H_h , равного

$$H_h = P_h \cdot \ln R_n^* = P_h \cdot \ln P_{n+1} - P_h \cdot \ln P_h, \quad (52)$$

где $h=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер простого числа *данной орбиты* (внутри чисел, лежащих на орбите H). Причем с ростом h параметр H_h асимптотически устремляется к номеру орбиты (H), т. е. никогда его не достигая. Поэтому параметр H_h будем называть *мнимой орбитой* числа P_n . Выражение (50) равносильно утверждению, что существуют *мнимые приросты* R_h асимптотически стремящиеся к единице по закону:

$$R_h = \exp(H/P_h) . \quad (53)$$

Значение R_h , получаемое по формуле (53), всегда будет несколько больше реального прироста R^*_n , определяемого по формуле (50), поэтому мы и назвали R_h – мнимым приростом. Так, например, простые числа 3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, ... лежат на второй орбите ($H=2$), их мнимый прирост изменяется по экспоненциальному закону $R_h = \exp(2/P_h)$, а относительная погрешность мнимых приростов стремительно убывает, никогда не превышая величины $1/h^e$, где $e=2,718\dots$ – основание натуральных логарифмов, а $h=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер простого числа внутри второй орбиты.

Если рассмотреть относительные приросты OR_n только у лидеров PL_h первых 79 орбит, то можно обнаружить следующую взаимосвязь:

$$OR_n \approx 9,7474 \cdot PL_h^{-0,8189} . \quad (54)$$

Сумма приростов n простых чисел (от $P_1=2$ до n -го простого числа P_n) определяется следующей эмпирической формулой

$$\Sigma R^* \approx n + \ln n + \ln \ln n , \quad (55)$$

которая дает заниженные значения, но относительная погрешность быстро убывает по закону $OP \approx e^{-2/n} \pi^3$.

Сумма относительных приростов n простых чисел будет равна

$$\Sigma OR = \Sigma R^* - n \approx \ln n + \ln \ln n \approx \ln N - \ln \ln N \approx \ln N \quad (56)$$

Поэтому *средний относительный прирост* n простых чисел будет равен

$$OR_s = \Sigma OR/n \approx \ln N/n \approx (\ln N)^2/N . \quad (57)$$

При рассмотрении всех натуральных чисел N (у них $H=1$) также можно пользоваться понятиями прирост и мнимый прирост (соответственно):

$$R^* = (N+1)/N \quad \text{и} \quad R = \exp(1/N) . \quad (58)$$

Мнимый прирост R чисел первой орбиты превосходит реальный прирост R^* , но относительная погрешность быстро убывает по закону $OP \approx 0,5/N^2$.

Сумма приростов всех натуральных чисел на отрезке от 1 до N равна

$$\Sigma R^* = 2/1 + 3/2 + \dots + (N+1)/N = N + (1/1 + 1/2 + \dots + 1/N) \approx N + (\ln N + C) . \quad (59)$$

Сумма относительных приростов всех натуральных чисел равна

$$\Sigma OR = \Sigma R^* - N \approx \ln N + C . \quad (60)$$

Поэтому *средний относительный прирост* всех натуральных чисел равен

$$OR_s = \Sigma OR/N \approx \ln N/N \quad (61)$$

Т. е. при $N \rightarrow \infty$ средний относительный прирост N натуральных чисел стремится к величине, обратной количеству простых чисел на отрезке от 1 до N . Средний относительный прирост простых чисел (меньших N) превосходит средний относительный прирост N натуральных чисел в $\ln N$ раз.

1.15. БЕСКОНЕЧНАЯ СЛОЖНОСТЬ СТРУКТУРЫ ЧИСЕЛ

До сих пор мы рассматривали мир №2 (мир простых чисел) как одно целое, и при этом ввели целый ряд понятий, определений, обозначений, получили некие формулы. Но, оказывается, почти то же самое можно проделать для простых чисел на каждой из орбит. Т. е. простые числа разных орбит образуют *миры второго уровня*, каждый из которых можно обозначить как №2-Н, где Н – номер орбиты в мире №2.

Если все числа из мира №2-Н пронумеровать в порядке их появления, то получим бесконечный ряд чисел, количество которых можно определить по формуле, похожей на формулу Чебышева:

$$n \sim P \cdot (\ln P)^{-a} . \quad (62)$$

Средняя орбита в мире №2-Н будет, вероятно, определяться выражением:

$$Hs \approx (A \cdot \ln n + B) \cdot \ln n . \quad (63)$$

Например, для мира №2-2 параметры в формулах (62) и (63) равны: $a=1,85$; $A=1,0131$; $B=4,3088$. Так, у простого числа $P \approx 4,48 \cdot 10^{61}$ его порядковый номер в мире №2-2 будет равен $n \approx 4,7 \cdot 10^{57}$, а средняя орбита $Hs \approx 18438$. Для мира №2-6 параметры будут иными: $a=1,66$; $A=0,4546$; $B=3,4404$.

Таким образом, в любом мире второго уровня (вида №2-Н), после нумерации в нем чисел в порядке появления, можно вычислить орбиты и построить их *спектр*; найти связь числа с его порядковым номером; найти выражение для средней орбиты; выделить лидеров орбит; найти приросты и т.д. Более того, можно перейти на третий уровень, например, в мир №2-2-6 (его открывает простое число $P=11$), который образуют числа из мира №2-2 с орбитами равными 6 и повторить опять все наши рассуждения. Еще более «низкий» – четвертый уровень образует, например, мир №2-2-6-90 (его также открывает $P=11$), т. е. числа из мира №2-2-6, у которых орбиты 90.

Иначе говоря, каждое простое число имеет *набор характеристик* (и это только с точки зрения его орбит на разных уровнях, а ведь могут быть и другие точки зрения, например, можно вычислять приросты на разных уровнях). Поэтому, можно говорить, что простое число $P=11$ имеет набор №2-2-6-90 (на четвертом уровне), причем этот набор уникален – ни одно натуральное число никогда его не повторит. Если на каком-то отрезке натурального ряда наборы двух чисел и совпадают, то дальнейшее увеличение отрезка (его правой границы) всегда сделает разными последние числа в наборе. Например,

на четвертом уровне у числа $P=101$ набор похож на набор числа $P=11$, но пятый уровень «расщепляет» эти два простых числа: набор $P=11$ равен №2-2-6-90-90, а набор $P=101$ равен №2-2-6-90-15540.

Чем больший отрезок натурального ряда мы рассматриваем, тем более низкие уровни будут проявляться, а на бесконечности количество таких уровней неограниченно возрастает. Причем с каждым переходом на более низкий уровень лавинообразно нарастают математические проблемы и объемы информации, необходимые для выяснения структуры чисел. Все это позволяет утверждать, что сложность структуры натуральных чисел имеет нарастающую динамику и она (структура) неисчерпаема в принципе.

Заканчивая рассмотрение простых чисел, необходимо заметить, что всё, проделанное нами с миром №2, можно повторить с другими мирами (которых бесконечно много!). В том числе свой набор характеристик есть абсолютно у каждого натурального числа, например: у $N=10$ набор равен №4-4-12-879-...; у $N=21$ набор равен №4-1-5-516-...; у $N=148$ набор равен №6-5-59-504-... Более того, натуральные числа, имеющие одинаковые наборы характеристик (разумеется, только на рассматриваемом отрезке), образуют «скопления», которые, вероятно, также могут обладать некими общими свойствами. Вообще, даже из сказанного ясно, что невозможно найти объект более сложный по своей структуре, чем натуральные числа, хотя их внешний вид воплощает предельно воображимую простоту: 1, 2, 3, 4, 5,

Рассмотренную выше ситуацию в мире натуральных чисел (с неповторимостью, уникальностью наборов) можно сравнить с *принципом Паули* из квантовой механики – в каждом квантовом состоянии не может находиться более одного электрона (так, состояние атома водорода полностью определяется дискретными значениями четырех квантовых чисел). Кстати, для модели атома Бора, согласно которой электрон движется в атоме по определенным орбитам, возможными будут только те круговые орбиты, на которых укладывается *целое число* длин волн. Не смотря на поразительные успехи квантовой механики – методами этой науки можно получить точную и полную картину состояний электрона только в одноэлектронном атоме (атоме водорода и водородоподобных атомах), в то время как задача о многоэлектронных атомах может быть решена только лишь приближенно.

Если нечто подобное (бесконечное усложнение структуры) происходит и со структурой реального пространства-времени, то окружающий нас мир хоть и *познаваем*, но не *исчерпаем* (познание может длиться бесконечно). И если завтра ученые, наконец, объявят о познании всех тайн природы, то уже в следующее мгновение появятся новые, *не существовавшие ранее* взаимосвязи, которые опять придется разгадывать ученым.

Натуральные числа представляют собой поразительный пример того, как очень простая система (Пирамида, рис.2) может развить незначительную информацию, содержащуюся в ключе $(1+1+1+...)$, и породить разнообразные

высокоорганизованные структуры – миры чисел, “вложенные” друг в друга, обладающие самыми удивительными свойствами.

1.16. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МИРОВ

Как образуется тот или иной мир натуральных чисел? Существует ли алгоритм, генерирующий все числа с конкретным типом? Иначе говоря, можно ли найти все числа из заданного мира на отрезке $[1;N]$, не перебирая подряд все числа и не определяя тип каждого из них, что довольно трудоёмко. Например, выявление чисел из мира №8 на компьютере указанным способом (что называется “в лоб”) потребует время $t \approx 4,24 \cdot 10^{-9} \cdot N^{1,4583}$ (часов). Так, время поиска порядкового номера числа $N \approx 10^7$ из мира №8 составит около 68,5 часов (непрерывного счета ПК). Вообще, поставленные нами вопросы достаточно интересны и мы попробуем на них ответить.

Мир №1 содержит только одно число $N=1$ и в этом уникальность данного мира. Мир №2 образован простыми числами и, как мы уже знаем, невозможно *точно* вычислить их количество на произвольном отрезке $[1;N]$, только перебрав все числа данного отрезка – мы получим точную информацию о простых числах. Если мы смогли найти все простые числа (на некотором отрезке натурального ряда), то нахождение всех чисел из любого другого мира становится в принципе решаемой задачей, т. к. тип (T) конкретного числа N (номер его мира) зависит только от набора показателей степени (a, b, c, \dots) в *каноническом разложении* (1) натурального числа: $T=(a+1)(b+1)(c+1)\dots$. Например, три набора: $a=7$ или $a=1, b=3$ или $a=1, b=1, c=1$ всегда будут генерировать числа из мира №8, поскольку: $8=(7+1)$ или $8=(1+1)(3+1)$ или $8=(1+1)(1+1)(1+1)$. Нетрудно убедиться, что других наборов, дающих $T=8$ не существует – это чисто *комбинаторная задача* (т. е. задача выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами). Таким образом, любое простое число, возведенное в степень 7, даст число из мира №8, например: $2^7=128, 3^7=2187, 5^7=78125, 7^7=823543$ и т. д.; любые два простых числа, возведенные в степени 1 и 3, формируют число из мира №8, например: $5^1 \cdot 7^3=1715, 5^3 \cdot 7^1=875$; любые три простых числа, возведенные в степени 1, 1, 1 формируют число из мира №8, например: $7^1 \cdot 13^1 \cdot 19^1=1729$.

Будем говорить, что у мира №8 *наборы ПСК* (показателей степени канонического разложения) имеют вид: $7-1; 3-1; 1; 1$, а *длина ПСК* равна $L=3$, т. е. в наборах ПСК может быть максимум до 3-х чисел (у набора $1; 1; 1$). Очевидно, что в мирах, номера которых совпадают с простыми числами (*простые миры*), самые короткие ПСК – у них длина $L=1$. Так, в простом мире №7 структура первых чисел имеет вид: $2^6, 3^6, 5^6, 7^6, 11^6, 13^6$ и т. д. Наборы

ПСК, скажем, для мира №16 имеют вид: 15–1;7–3;3–1;1;3, следовательно, длина ПСК равна $L=3$ (у набора 1;1;3). Среди первой тысячи миров (миры №1÷№1000 – это наш *рабочий отрезок*) самые длинные ПСК в мирах №512 и №768, для которых $L=9$ (в ПСК есть наборы с 9-ю числами).

Длина ПСК для произвольного мира T лежит в некоторых пределах $L_{min} \leq L \leq L_{max}$, которые можно оценить следующим образом:

$$L_{min} = \ln TT / \ln 2 \quad \text{и} \quad L_{max} = \ln T / \ln 2, \quad (65)$$

где TT – это тип мира T (тип типа или *тип второго порядка*). Например, для мира $T=512$ имеем $TT=10$, тогда $L_{min} = \ln 10 / \ln 2 \approx 3$ и $L_{max} = \ln 512 / \ln 2 = 9$, а реально $L=9$. В конце Малого отрезка максимально возможный тип в частых мирах может быть $T \approx 162500$, тогда $TT \approx 159$ (это максимально возможный тип для числа $T \approx 162500$, что не совсем корректно), а значит $L_{min} \approx 7$ и $L_{max} \approx 17$. В конце БО максимально возможный тип в частых мирах может быть $T \approx 7,2 \cdot 10^{11}$ (об этом сказано ниже), тогда $TT \approx 6062$, а значит $L_{min} \approx 13$ и $L_{max} \approx 39$, т. е. в некоторых наборах ПСК может быть до 39 чисел!

Если для данного мира известен полный набор ПСК, то в принципе можно найти все числа из этого мира на любом отрезке $[1;N]$. Например, в мире №8 на отрезке $[1;100000]$ первый набор ПСК ($a=7$) генерирует числа вида $N_n = P_n^7$, где $n=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер простого числа (внутри мира №2). Но уже при $n=4$ получаем $N_n > 100000$, т. е. первый набор ПСК на заданном отрезке порождает только 3 числа: $2^7=128$; $3^7=2187$; $5^7=78125$. А вот второй набор ПСК, состоящий из двух чисел ($a=1, b=3$), генерирует уже 2266 чисел, которые имеют вид $N_n = P_n \cdot P_i^3$, где для каждого значения n индекс $i=1, 2, 3, \dots$ «пробегают» все возможные значения, т. е. пока $N_n \leq 100000$. Третий набор ПСК, состоящий из трех чисел ($a=1, b=1, c=1$), генерирует больше всего чисел на заданном отрезке – 19915 чисел (их получение – чисто комбинаторная и довольно громоздкая задача, однако, можно придумать алгоритм для её решения на компьютере). Таким образом, с ростом количества чисел в наборе ПСК (с ростом «длины» набора) происходит резкое увеличение количества чисел, порожденных набором.

При рассмотрении наборов ПСК для конкретного мира T большое значение имеет вопрос о количестве этих наборов, которое примерно равно

$$K \approx A \cdot TT^{1,6487} \approx A \cdot TT^{e^{0,5}}, \quad (66)$$

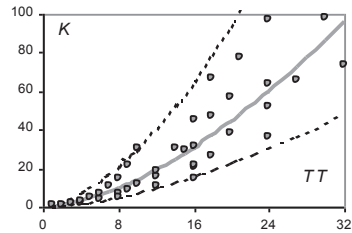


Рис. 14. Количество наборов ПСК

где TT – это тип мира T (тип второго порядка); $A \approx 0,3183 \approx \pi^{-1}$. Реальные количества наборов в зависимости от параметра TT представлены на рис. 14 в виде точек, разбросанных внутри сектора из пунктирных линий: K_{min} [$A \approx 0,1592 \approx 0,5\pi^{-1}$ в формуле (66)] и K_{max} [$A \approx 0,6692 \approx \lg F$]. Сплошная линия посередине указанного сектора – это некое среднее количество наборов ПСК, характерное для данного значения параметра TT и определяемое по формуле (66). Таким образом, количество наборов ПСК можно охарактеризовать такими цифрами: на Малом отрезке – $K_{min} \approx 680$; $K \approx 1360$, $K_{max} \approx 2850$; на БО – $K_{min} \approx 274000$; $K \approx 550000$, $K_{max} \approx 1153000$.

Номера миров – это любые натуральные числа $T=1, 2, 3, \dots$, однако, если учитывать очередность их первого появления (в лице лидеров миров), то и здесь можно сделать интересные наблюдения. Так, на отрезке $[1; 10^{32}]$ всего появилось 22164 различных частых мира, номера которых от $T=2$ до $T=28.311.552$. Для уменьшения трудоемкости исследований ограничим круг миров от $T=2$ до $T=299.880$, при этом у нас останется $K=11182$ различных частых мира (различных чисел T). Для каждого мира T найдем величину $R \equiv \text{abs}(T-P)$, где P – это простое число, ближайшее к числу T . Величину R будем называть **рангом** мира T , причем у частых миров ранг – нечетное число. Так вот, оказывается, что у 47% частых миров $R=1$, у 16% – $R=3$; у 13% – $R=5$; у 9% – $R=7$ и т. д., т. е. чем больше ранг мира, тем меньше таких миров. Если KR – это количество миров с рангом R , то вероятность появления мира с рангом R можно примерно оценить по формуле

$$VR \equiv KR/K \approx 0,5 \cdot \exp(-R/F) \approx 0,5 \cdot \exp(-0,2142 \cdot R) . \quad (67)$$

Итак, образно говоря, номера частых миров стремятся предстать перед нами в виде простого числа, предпочитая иметь минимальный ранг. Кстати, можно также оценить максимально возможный ранг R_{max} для мира T :

$$R \leq R_{max} \approx 0,1961 \cdot (\ln T)^{2,2895} \approx \ln(\pi/2) \cdot (\ln T)^{\ln(\pi^2)} . \quad (68)$$

1.17. ПРИОРИТЕТ МИРА №8 (МАГИЯ ЧИСЛА 7)

Вероятность появления (ВП) мира – это отношение количества чисел из данного мира к количеству всех чисел на отрезке $[1; N]$. Например, порядковый номер числа $N=999994$ в мире №8 равен $n=224431$, поэтому на отрезке $[1; 1000000]$ у мира №8 имеем $ВП \equiv n/N \approx 0,2244$, т. е. на указанном отрезке почти каждое пятое число (в среднем) принадлежит миру №8 (иначе говоря, имеет 8 делителей, включая единицу и самое себя). Вместо термина “вероятность появления” будем также пользоваться термином “*доля*” (просто так короче), например, удобно сказать, что на указанном выше отрезке доля мира №8 равна $D \equiv n/N \approx 0,2244 \dots$ или около 22,44%. Ясно, что доля всех

остальных миров на этом отрезке составит около 0,7756 (или ~ 77,56%). Вообще-то в этом параграфе мы рассмотрим доли целого ряда частых (четных) миров, но пусть даже заголовок напоминает нам об исключительности мира №8, доля которого, вероятно, является наибольшей среди всех миров.

Доля любого частого мира, начиная с его лидера (NL), сначала увеличивается и при некотором числе (NS) достигает максимального значения (DS), а потом начинает убывать. Причем в разных мирах расстояние (разность) между числами NL и NS может быть самым разным. Так, в мире №2 (у простых чисел) это расстояние наименьшее и равно единице, поскольку $NL=2$, а $NS=3$, т.е. уже у второго простого числа (его порядковый номер $n=2$) доля достигает своего максимума $DS=n/NS=2/3 \approx 0,666\dots$ Все остальные отношения n/N у простых чисел будут меньше DS , и в сингулярности убывание доли мира №2 можно оценить как $n/N \sim (\ln \pi \ln n)^{-1}$, ну а потом доля убывает совсем просто: $n/N \sim 1/\ln N$. Для остальных частых миров динамику доли – начальный её рост до значения DS , а затем неизбежное асимптотическое убывание к нулю, увы, невозможно описать так лаконично и красиво, как для мира простых чисел. Динамику долей (D) частых миров как некую функцию правой границы (N) отрезка ещё можно изобразить графически (см. рис.15, где $N > 42$), хотя это и требует долгих вычислений, но вот «подобрать» формулы для полученных кривых – весьма проблематично. В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим более подробно мир №8.

Лидер мира №8 имеет долю $D=1/NL=1/24 \approx 0,0416\dots$, с этого значения доля начинает свой рост, который довольно грубо описывает формула:

$$D \equiv n/N \approx n^{0,0038} / F \approx n^{0,0038} / 4,6692. \quad (71)$$

Максимально возможная доля мира №8 равна $DS=0,224432\dots$, это значение мы получаем при $n=224.431$ и $NS=999.994$, причем реальная доля совершает местные (локальные) колебания, но масштаб рис.15 не позволяет их увидеть (изменяется четвертая цифра после запятой в значении D). Амплитуда локальных колебаний с ростом N , вероятно, убывает. После своего пика (DS) доля мира №8 начинает относительно медленно уменьшаться, так при $N=10.199.985$ ($n=2.272.725$) она равна $D \approx 0,2228\dots$. После $n=1.118.598$

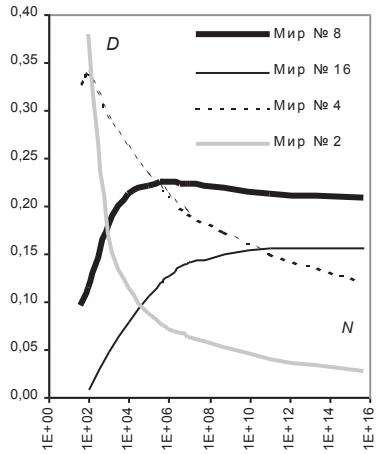


Рис. 15. Динамика долей (D)

($N \approx 5 \cdot 10^6$) уменьшение доли мира №8 можно довольно сносно (но как долго, пока не ясно) описать выражением следующего вида

$$D \equiv n/N \approx A \cdot (\ln n)^{-B}, \quad (72)$$

где $A=0,2741$; $B=0,0772$. Тогда получим такой прогноз: для МО – $D \approx 0,2045$; для ЦО – $D \approx 0,1956$; для БО – $D \approx 0,1873$; для ПО – $D \approx 0,1652$, и эти значения, скорее всего, больше реальных (не более чем в 2 раза?). Из формулы (72) также следует, что n -ое число из мира №8 описывается выражением, вида

$$N \approx (1/A) \cdot n \cdot (\ln n)^B, \quad (73)$$

которое напоминает формулу для n -го простого числа $N \sim n \cdot \ln n$. Пока можно только предположить, что в любом частом мире формула для n -го числа рано или поздно (после прохождения NS) приближается к выражению, похожему на формулу (3), но, разумеется, со своими неповторимыми коэффициентами A и B . Например, для мира №4 (рис.15) после $n \approx 15500$ ($N \approx 65000$) можно принять $A=0,8258$ и $B=0,5469$, причем максимум доли был очень рано ($DS=14/39 \approx 0,359$). А вот в мире №16 так и не удалось достичь максимальной доли DS , уж слишком длинное *плато* (всё более и более замедляющийся, «затяжной» рост доли мира №16) начинается в районе $N \approx 3 \cdot 10^6$ и, вероятно, DS лежит за $N \sim 10^{16}$ или даже дальше, однако, надо полагать, доля мира №16 никогда не дорастет до доли мира №8.

Как видно из рис.15, доля мира №4 быстро убывает и при $N^* \approx 245000$ «пересекает» растущую долю мира №8 (в районе его короткого плато), и именно после этого момента доля мира №8, вероятно, навсегда получает приоритет над долями остальных миров. В указанной точке N^* , которую будем называть *точкой приоритета* доли частых миров №8, 4, 16, 12, 2, 24, 6, 32 имеют соответственно следующие значения (в %): 22,35; 22,35; 11,59; 9,65; 8,83; 6,45; 5,08; 3,23, т. е. суммарная доля восьми миров составляет 89,52%, а всего на отрезке $[1; N^*]$ появилось 73 различных мира (49 частых и 24 редких). Полученный *спектр миров*, т. е. распределение их долей на конкретном отрезке, позволяет говорить о существовании *Большой восьмерки* частых миров, которая содержит подавляющее большинство всех чисел из частых миров (проявление магии числа 7 ± 2 ?).

Приоритет мира №8 в известной степени подтверждает распределение максимальных долей DS различных частых миров в зависимости от их номера T («жирные» точки на рис.16). Границы возможных значений долей

(DS_{max} – тонкая линия и DS_{min} – пунктирная линия на рис.16 образуют некий сектор DS) описываются выражениями:

$$DS_{max} \approx T^{-0,6692} \approx T^{-\lg F}; \quad (74)$$

$$DS_{min} \approx \exp(-0,1592 \cdot T^{1,3644}). \quad (75)$$

Подобные ограничения на максимальные доли DS являются необходимой гарантией абсолютного приоритета мира №8. Кстати, в редких мирах распределение максимальных долей DS носит аналогичный характер (образуя спектр наподобие рис.16), но уравнения для границ имеют, разумеется, уже другой вид

$$DS_{min} \approx 2^{1-T}; \quad DS_{max} \approx \exp[-1,1998 \cdot (\ln T)^{1,4181}]. \quad (76)$$

Причем, начиная с $T \approx 10$, параметр DS_{max} в редких мирах вполне может оказаться больше параметра DS_{min} частых миров.

Внутри редких миров также можно выделить *Большую восьмерку*, например, на отрезке $[1; 134.000.000]$ доли миров №9, 27, 3, 45, 15, 81, 63, 135 имеют соответственно следующие значения (в % от всех 11575 чисел из редких миров): 25,96; 19,50; 12,02; 9,79; 7,49; 6,03; 3,60; 3,38, т. е. суммарная доля восьми миров составляет 88,77%, а всего на указанном отрезке появилось 60 различных редких миров.

Первое, что бросается в глаза при изучении спектра миров, так это ничтожность суммарной доли (ΣD) чисел из редких миров и быстрое убывание этой доли по закону: $\Sigma D = N^{-1/2}$ с увеличением длины отрезка. Так и должно быть, ведь любое число из редкого мира – это начало очередной ступени Ствола (рис.2), т. е. на отрезке $[1; N]$ количество этих чисел равно количеству ступеней Ствола – целой части («антье») от корня квадратного из числа N . Ясно, что в конце Большого отрезка суммарная доля чисел из всех редких миров составляет только $\Sigma D \approx 3 \cdot 10^{-31}$ от всех натуральных чисел.

По крайней мере, до $N \sim 10^{10}$ уменьшение доли редкого мира №9 можно описать выражением $D \approx n/N \approx 0,1448 \cdot n^{-1,0961}$. А вот для мира №3 лучше подходит формула $D \approx \exp[-2,3232 \cdot (\ln n)^{0,8068}]$. Как видим, эти выражения существенно отличаются от закона убывания доли частого мира №8. Вообще, приходится признать, что поиск аналитических выражений, описывающих динамику доли каждого мира (и частого, и редкого мира), а по сути дела – поиск натурального числа N по его порядковому номеру n в «своём» мире ($N=f(n)$, т. е. поиск некой функции f), – это очень сложная задача, которая пока только сформулирована в ГТНЧ, но, практически, никак не решена.

Приоритет мира №8 можно трактовать, как наибольшую вероятность того, что произвольно выбранное натуральное число N будет иметь 7 пра-

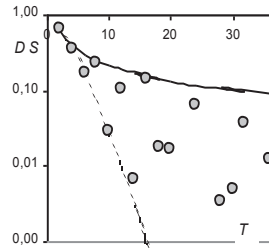


Рис. 16. Сектор долей (DS)

вильных делителей (т. е. меньших самого числа N). Разумеется, можно говорить и о *Большой семерке* частых (редких) миров, которая содержит наибольшее количество всех чисел произвольно выбранного отрезка. Таким образом, в данном параграфе мы рассмотрели важные аргументы, подтверждающие, что число 7 ± 2 является “магическим” числом в ГТНЧ.

1.18. СПЕКТРЫ ЧАСТЫХ И РЕДКИХ МИРОВ

Если выстроить в порядке появления: лидеров орбит простых чисел (исключив $PL=2$), лидеров частых миров и лидеров редких миров (исключив $NL=1$), сопоставив каждому из этих лидеров – количество чисел, им порожденных (точнее говоря, долю D от общего количества всех чисел на рассматриваемом отрезке), то получим картину, показанную на рис.17. Где хорошо видно, что с ростом порядкового номера ($x=1, 2, 3, \dots$) лидера происходят колебания его доли D вокруг воображаемой оси, которую будем называть *осью спектра* миров (три наклонных прямых линии на рис.17).

Уравнение оси спектра имеет вид: $D \approx A \cdot \exp(-B \cdot x)$, где параметры A и B

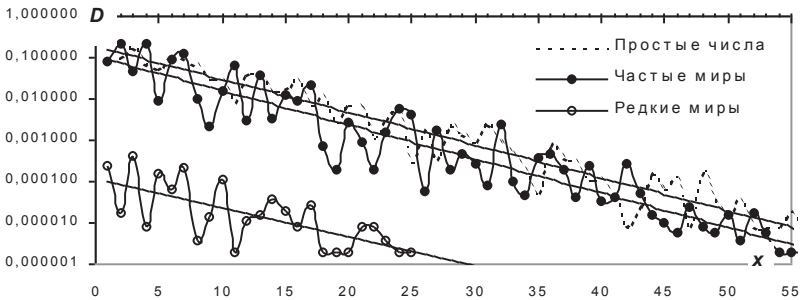


Рис. 17. Доля (D) различных миров в общем спектре на отрезке $[1; 520000]$ имеют соответственно значения: для частых миров – 0,1081 и 0,1906; для редких миров – 0,0001 и 0,1606; для простых чисел – 0,1881 и 0,1831. Эти параметры верны для миров на отрезке $[1; 520000]$, а для простых чисел брался отрезок со 120000 простыми числами, где проявилось 56 различных орбит, т. е. по количеству равных количеству частых миров. Данный пример лишний раз убеждает в наличии глубокой связи между лидерами миров и лидерами орбит простых чисел (в том числе между их спектрами).

Спектр миров на отрезке [1;520000] можно представить в совсем другом виде: как количество чисел (K), порожденных каждым лидером NL (см. рис.18). Если все точки на рис.18 описать некой плавной кривой линией, то её пик придется на лидера мира №8 (седьмой по порядку появления лидер $NL=24$ порождает больше всего чисел – $K=116650$), а в целом эта воображаемая линия ограничила бы максимально возможное количество чисел (скажем, K_{max}), которое «имеет право» породить любой лидер NL . Ясно, что чем больше лидер NL (разумеется, $NL>24$), тем, вообще говоря, меньше ему дано породить чисел (тем меньше у него будет K_{max}). Более того, рис.18 (по обеим осям графика взяты логарифмические шкалы) позволяет утверждать, что зависимость $K_{max}=\varphi(NL)$ носит логнормальный характер.

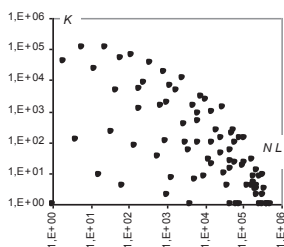


Рис. 18. Спектр миров

В табл. 6 и 7 приведены спектры миров на отрезке [1;520000], но не стоит забывать, что с изменением отрезка – спектры также меняются.

Обратим также особое внимание на тот замечательный факт, что редкие миры по своей структуре, по своему “поведению” весьма похожи на частые миры. Для редких миров “проходят” почти все рассуждения, понятия, взаимосвязи, что и для частых миров. И главное отличие редких миров – это чрезвычайно малая вероятность встречи с их представителями при движении по натуральному ряду.

Таблица 6. Спектр редких миров

Номер мира T	Лидер мира NL	Кол-во чисел K	Нарастающим итогом
3	4	17,8%	17,8%
5	16	1,3%	19,0%
9	36	29,6%	48,6%
7	64	0,6%	49,2%
15	144	11,3%	60,4%
21	576	4,7%	65,1%
27	900	15,3%	80,4%
11	1024	0,3%	80,7%
25	1296	1,0%	81,7%
45	3600	7,6%	89,3%
13	4096	0,1%	89,4%
35	5184	0,8%	90,3%
33	9216	1,1%	91,4%
63	14400	2,6%	94,0%
Прочие миры		6,0%	100%

Таблица 7. Спектр частых миров

Номер мира T	Лидер мира NL	Кол-во чисел K	Нарастающим итогом
2	2	8,3%	8,3%
4	6	21,6%	29,9%
6	12	4,7%	34,6%
8	24	22,5%	57,1%
10	48	0,9%	58,0%
12	60	9,4%	67,4%
16	120	12,2%	79,6%
18	180	1,0%	80,6%
14	192	0,2%	80,8%
20	240	1,5%	82,4%
24	360	6,7%	89,1%
30	720	0,3%	89,4%
32	840	3,7%	93,1%
28	960	0,3%	93,4%
Прочие миры		6,6%	100,0%

1.19. ПРОСТЫЕ И УДВОЕННЫЕ МИРЫ

Среди бесконечного многообразия миров можно попытаться выделять некие их семейства по тому или иному признаку (классификация миров). Именно такой подход мы только продемонстрируем в данном параграфе.

Среди всех миров сразу привлекают к себе внимание миры, номера которых суть простые числа, т. е. миры: №2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, Это семейство будем называть *простыми мирами*. Они примечательны тем, что, зная простые числа, мы можем легко находить все числа из этих миров, более того, все делители этих чисел также становятся досконально известными. Попробуем убедиться в этом.

Напомним, что первое число N , с которого начинается очередной мир, называется *лидером* и обозначается нами как NL . Поскольку в данной главе мы рассматриваем только простые миры, то речь пойдет о *простых лидерах*. Оказывается, все простые лидеры описываются лаконичной формулой:

$$NL=2^{(T-1)}, \quad (77)$$

где T – это номер простого мира, открываемого данным лидером. Таким образом, простые лидеры – это следующие числа: $2^{(2-1)}=2$, $2^{(3-1)}=4$, $2^{(5-1)}=16$, $2^{(7-1)}=64$, $2^{(11-1)}=1024$, $2^{(13-1)}=4096$, $2^{(17-1)}=65536$, $2^{(19-1)}=262144$, $2^{(23-1)}=4194304$, ... $2^{(199-1)}=4,0 \cdot 10^{59}$ (46-й простой мир), $2^{(211-1)}=1,6 \cdot 10^{63}$ (47-й простой мир), ..., $2^{(1021-1)}=1,1 \cdot 10^{307}$ (172-й простой мир), и т. д.

Числа-лидеры только “открывают” очередной простой мир, а внутри каждого простого мира с номером T содержатся числа N , имеющие вид: $2^{(T-1)}$, $3^{(T-1)}$, $5^{(T-1)}$, $7^{(T-1)}$, $11^{(T-1)}$, $13^{(T-1)}$, $17^{(T-1)}$, ..., т. е. очередное число N в нем – это $(T-1)$ -ая степень соответствующего очередного простого числа. Так, в мире №3 каждое очередное число N – это *квадрат очередного простого числа*: $2^2=4$, $3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$, $11^2=121$, $13^2=169$, $17^2=289$, ... А в мире №5 каждое очередное число N – это *биквадрат очередного простого числа*: $2^4=16$, $3^4=81$, $5^4=625$, $7^4=2401$, $11^4=14641$, $13^4=28561$, $17^4=83521$, ...

Если рассмотреть любое натуральное число N из любого простого мира с номером, равным T , то его n -ый делитель D_n (где $n=1, 2, 3, \dots, T$) равен

$$D_n = N^{(n-1)/(T-1)}. \quad (78)$$

Например, делители любого числа N из мира №5 ($T=5$) имеют структуру:

$$N^{0/4}, N^{1/4}, N^{2/4}, N^{3/4}, N^{4/4}. \quad (79)$$

Однако, формула (78) позволяет найти делители у числа N только в том случае, если *заранее известно*, что это число из простых миров. Поэтому можно сформулировать более сильное утверждение в части структуры делителей – все делители любого числа N из простого мира имеют вид:

$$1, P^1, P^2, P^3, \dots, P^n, P^{(n+1)}, \dots, P^{(T-1)}. \quad (80)$$

где T – номер данного простого мира, а P – простое число, причем для первого числа в данном мире берем первое простое число (2), для второго числа – второе простое число (3) и т. д. Например, в мире №7 делители первого числа $N=64$ это числа – 1, 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , $2^{(7-1)}$; делители второго числа $N=729$ это числа – 1, 3^1 , 3^2 , 3^3 , 3^4 , 3^5 , $3^{(7-1)}$; делители третьего числа $N=15625$ это числа – 1, 5^1 , 5^2 , 5^3 , 5^4 , 5^5 , $5^{(7-1)}$ и т. д. Поскольку все делители любого числа N из простого мира образуют *геометрическую прогрессию*, первый член которой равен 1, а знаменатель, которой равен соответствующему простому числу P , то n -ый делитель (D_n) можно также вычислить по экспоненте $D_n = (1/P) \cdot \exp(n \cdot \ln P)$ (см. п. 2.1).

Простые миры встречаются относительно редко, так на отрезке $[1; N]$ их количество можно оценить по формулой $K \approx [(e-2) \cdot \ln N] \sqrt{e}^{1/2}$, где $e=2,718$. В конце БО получаем $K \approx 45$ простых миров (см. примеры к формуле (77)).

У каждого простого лидера NL можно вычислить *превышение* $\Pi \equiv T/T_s$, т. е. превышение его типа T над средним типом T_s (по Дирихле). В сингулярности превышение растет (у миров №2, 3, 5), потом останавливается (у миров №5, 7 имеем одинаковые $\Pi=1,6$), после чего Π начинает асимптотически убывать к предельному на бесконечности значению $1/\ln 2 = 1,4427 \dots$

Структура простых миров полна гармонии и это особенно заметно, при попытках найти аналогичные (простые и лаконичные) закономерности в других мирах. Примером этому могут служить *удвоенные миры* – миры, номера которых суть удвоенные простые числа: 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, Все лидеры этих миров (*удвоенные лидеры*) имеют вид

$$NL = 3 \cdot 2^{(T/2-1)}, \quad (81)$$

где T – это номер удвоенного мира, открываемого данным лидером. Таким образом, удвоенные лидеры – это следующие числа: $3 \cdot 2^{(4/2-1)} = 6$, $3 \cdot 2^{(6/2-1)} = 12$, $3 \cdot 2^{(10/2-1)} = 48$, $3 \cdot 2^{(14/2-1)} = 192$, $3 \cdot 2^{(22/2-1)} = 3072$, $3 \cdot 2^{(26/2-1)} = 12288$, ... $3 \cdot 2^{(2042/2-1)} = 3,37 \cdot 10^{307}$ (172-й удвоенный мир) и т. д.

Делители всех *удвоенных лидеров* из мира T имеют следующий вид:

$$1, 2^{n/2}, 3 \cdot 2^{(k-3)/2}, NL, \quad (82)$$

где для четных делителей $n=2, 4, 6, \dots, T-2$, а для нечетных делителей $k=3, 5, 7, \dots, T-1$. Каждый (k -ый) нечетный делитель (кроме последнего) является средним арифметическим ($k-1$) и ($k+1$) делителя, поэтому делители удвоенных лидеров на графике хорошо “ложатся” на экспоненту.

Удвоенные лидеры только “открывают” очередной удвоенный мир, а внутри каждого удвоенного мира с номером T содержатся натуральные числа N , с которыми дела обстоят гораздо сложнее, чем это было в простых мирах. В заключение параграфа стоит обратить внимание на то, что первые

семь миров (№1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) относятся либо к простым, либо к удвоенным мирам, роль которых во многом уникальна (опять «магия» числа 7).

1.20. СКОПЛЕНИЯ ЧЕТНЫХ МИРОВ

В натуральном ряду некоторые числа из одного и того же *четного мира* могут идти подряд друг за другом (без пропусков) – такие последовательности чисел мы будем называть **скоплениями миров** (или скоплениями *типов*, т. к. в ГТНЧ это одно и то же). Количество чисел в конкретном скоплении будем называть его **размером R** . Например, простые числа 2, 3 образуют первое скопление, причем других скоплений чисел из мира №2 не существует, т. к. между остальными простыми числами всегда будет находиться как минимум одно натуральное число. Скопления всех остальных четных миров чаще всего содержат по два числа, например: 14 и 15; 21 и 22; 26 и 27 – три скопления размером $R=2$ из чисел мира №4. Скопление чисел 33, 34, 35 из мира №4 – это пример первого скопления с размером $R=3$. Скопление чисел 242, 243, 244, 245 из мира №6 – пример первого скопления с размером $R=4$. Скопление чисел 11605, 11606, 11607, 11608, 11609 из мира №8 – пример первого скопления с размером $R=5$. Скопление чисел 28374, 28375, 28376, 28377, 28378, 28379 из мира №8 – пример первого скопления с размером $R=6$. Скопление чисел 171893, 171894, 171895, 171896, 171897, 171898, 171899 из мира №8 – пример первого скопления с размером $R=7$. В ряду натуральных чисел скопления разных миров и размеров на первый взгляд располагаются беспорядочным образом, хаотически, однако на самом деле и здесь существуют свои закономерности. Только некоторые из них мы и попытаемся выяснить, причем все наши выводы в части скоплений миров мы будем делать на основе изучения отрезка от 1 до $N=545000$ (*рабочий отрезок* в части скоплений).

Первое число каждого скопления будем называть **лидером скопления**. Всего на рабочем отрезке оказалось $K=48877$ лидеров скоплений, и если расположить их в порядке возрастания, то получим выражение для оценки количества (K) всевозможных скоплений на любом отрезке от 1 до N :

$$K \approx N \cdot [7,389 \cdot (\ln N)^{0,1591} \text{J}^{-1} \approx N \cdot [e^2 \cdot (\ln N)^{0,5/\pi} \text{J}^{-1} \quad (85)$$

Например, на Большом отрезке $K \approx 6,16 \cdot 10^{59}$ всевозможных скоплений, а отношение $SK \equiv N/K$, которое мы назовем **скопом**, достигает значения $SK \approx 16$. Скоп говорит о том, сколько натуральных чисел в среднем находится между соседними лидерами (это среднее “расстояние” между ними).

Числа, равные 2, 33, 242, 11605, 28374, 171893 являются лидерами скоплений с размерами $R=2, 3, 4, 5, 6, 7$ соответственно (см. выше). За каждым из этих лидеров стоят следующие количества скоплений: 42223; 6106; 453; 85;

8; 2, т. е. на лицо главная закономерность – чем больше размеры скоплений, тем меньше таких скоплений на рабочем отрезке. Зная количество скоплений k каждого размера, а также общее количество всех скоплений K , мы можем оценить вероятность встречи ($P=k/K$) скопления данного размера R на отрезке произвольной длины:

$$P \approx 62,0126 \cdot \exp(-2,1416 \cdot R) \approx 2 \cdot \pi^3 \cdot \exp[(1-\pi) \cdot R]. \quad (86)$$

Например, при $R=66$ получаем $P \approx 2,55 \cdot 10^{-60}$, а количество таких скоплений на Большом отрезке будет равно $k=P \cdot K \approx (2,55 \cdot 10^{-60}) \cdot (6,16 \cdot 10^{59}) \approx 1$, т. е. формула (86) также позволяет утверждать, что на Большом отрезке размер наибольшего скопления достигнет примерно размера $R \approx 66$.

Между лидерами скоплений и размерами скоплений, вероятно, существует связь, которую можно выразить следующей эмпирической формулой

$$N \approx 0,0322 \cdot \exp(R \cdot 2,3026) \approx \pi^{-3} \cdot \exp(R \cdot \ln 10) \approx \pi^{-3} \cdot 10^R. \quad (87)$$

Нетрудно убедиться, что концу Большого отрезка соответствует размер скопления $R \approx 63$, и это близко к предыдущей оценке, вытекающей из формулы (86). Таким образом, в конце Большого отрезка примерно до $63 \div 66$ (!) натуральных чисел, скорее всего из мира №8, могут стоять рядом.

А можно ли определить количество скоплений k конкретного одного размера R на произвольном отрезке от 1 до N ? Некий ответ на поставленный вопрос дает следующее выражение:

$$k \approx N \cdot [A \cdot (\ln N)^B]^{-1}, \quad \text{где } A \approx e^{-\pi/2} \cdot (2 \cdot \pi)^R, B \approx 2 \cdot e^{-\pi} \cdot R. \quad (88)$$

Параметры $A \approx 0,2079 \cdot 6,2832^R$ и $B \approx 0,0864 \cdot R$, зависят только от вида скопления (его размера R) и, скорее всего, их действительно можно скомпоновать с числами e и π . Если взять $N=10^{61}$ и находить k при $R=2, 3, 4, \dots$, то при $R=63$ мы получим $k \approx 1$, а сумма всех 63-х значений k (стремительно убывающих по мере роста R) будет равна $K \approx 5,8 \cdot 10^{59}$, что хорошо согласуется с оценками, полученными нами выше для Большого отрезка.

Несколько слов необходимо сказать о **типах скоплений**, т. е. о типах чисел, образующих скопления. На рабочем отрезке появилось 17 типов скоплений в следующем порядке: $T=2, 4, 6, 8, 12, 16, 10, 20, 24, 18, 32, 14, 28, 30, 48, 36, 40$, причем первое скопление в каждом типе имело размер $R=2$ (состояло только из двух чисел данного типа T). Если эти типы расположить в порядке убывания количества скоплений, то получим совершенно иной порядок миров: $T=8, 4, 16, 12, 6, 24, 32, 20, 18, 10, 36, 48, 14, 30, 2, 28, 40$. Т. е. больше всего скоплений в мире №8 (их количество $k=23728$), почти в два раза меньше скоплений в мире №4 ($k=12120$), потом идут скопления в мире №16 ($k=6000$), и т. д. до мира №40 ($k=1$), ну а всего в 17-ти мирах рабочего отрезка $K=48877$ скоплений. Если пронумеровать последний ряд миров ($n=1$,

2, 3, ..., 17, ...), то можно оценить вероятность встречи ($P=k/K$) скопления с данным номером n :

$$P \approx \exp(-0,72 \cdot n) \quad (89)$$

Например, при $n=191$ получаем $P \approx 1,89 \cdot 10^{-60}$, а количество таких скоплений на Большом отрезке равно $k=P \cdot K \approx (1,89 \cdot 10^{-60}) \cdot (6,16 \cdot 10^{59}) \approx 1$, т. е. формула (89) также позволяет утверждать, что на Большом отрезке появятся скопления из 191-го различного мира (т. е. мы насчитаем около 191 типа).

Таблица 8. Параметры скоплений четных миров на четырех отрезках

Наименование параметра и его обозначение в тексте		Рабочий отрезок	Область сингулярности	Малый отрезок	Большой отрезок
Правая граница отрезка	N	545000	10^8	$4,74 \cdot 10^{19}$	10^{61}
Максимальн. размер скопления	R	7	$8 \div 9$	$20 \div 21$	$63 \div 66$
Количество скоплений	K	48877	8512000	$3,5 \cdot 10^{18}$	$6,16 \cdot 10^{59}$
Скол на данном отрезке	SK	11,15	11,75	13,56	16,23
Количество типов в скоплениях	n	17	22	59	191
Максимальн. тип в скоплениях	T	48	60	240	1440

Всего на рабочем отрезке появилось 56 четных миров (от $T=2$ до $T=200$), причем именно *первые* 17 миров имеют скопления, иначе говоря, **сумма этих миров** (т. е. 17-ти типов T в порядке их появления в натуральном ряду), равная $2+4+6+8+10+12+16+18+14+20+24+30+32+28+36+40+48=348$, в точности равна *сумме миров*, образующих скопления на рабочем отрезке. Возможно поэтому, справедливо такое утверждение: если на произвольном отрезке $[1;N]$ появились скопления в n мирах, то *сумма этих миров* (их типов T), стремится к сумме первых n четных миров (в порядке их появления в натуральном ряду). Забегая вперед, скажем, что нам удастся найти типы первых $n=22164$ -х четных миров, которые находятся на отрезке от 1 до $N \approx 10^{32}$ (см. п. 1.27, 1.28). Таким образом, если принять, что на Большом отрезке появились скопления в $n=191$ различном мире (см. выше), то, скорее всего, сумма этих миров (их номеров T) составит около 71856, а наибольший номер мира будет $T \approx 1440$. Причем можно указать номера всех миров, образующих скопления, а также примерную очередность их первого появления в скоплениях, которая повторяет (с некоторыми отклонениями) очередность появления первого 191 четного мира. В заключении приведем сводную таблицу по материалу параграфа.

1.21. СКОПЛЕНИЯ ЛИДЕРОВ МИРОВ

Рассмотрим лидеров частых миров (*частых лидеров*) с точки зрения их расположения относительно лидеров редких миров (*редких лидеров*) на рабочем отрезке $[1; 10^{32}]$. Здесь 5152 редких лидера словно столбы, поставленные случайным образом среди 22163 частых лидеров, и разбивающие их на скопления. Т. е. каждое **скопление частых лидеров** – это некое количество частых лидеров следующих подряд друг за другом до появления очередного редкого лидера. Скопление может состоять из одного частого лидера, и таких скоплений больше всего (836 одиноких лидера), а самое большое скопление содержит 43 частых лидера (оно одно). Всего на рабочем отрезке выявилось 4384 различных скоплений. На отрезке $[1; N]$, вероятно, будет содержаться следующее **количество скоплений** (KS):

$$KS \approx K \cdot 0,6065 \cdot (\ln N)^{-0,3183} \approx K \cdot (1/\sqrt{e}) \cdot (\ln N)^{-1/\pi}, \quad (90)$$

где K – это количество всех лидеров (и частых и редких миров) на отрезке $[1; N]$. В конце Большого отрезка, где $K \approx 807430$ лидеров (см. п. 1.36), количество скоплений может быть $KS \approx 101484$, т. е. количество всех лидеров превышает количество скоплений частых лидеров примерно в 8 раз.

На рабочем отрезке все скопления частых лидеров образуют **33 типа скоплений**: $S=1$ – это скопления, состоящие из одиноких лидеров; $S=2$ – это скопления, состоящие из двух частых лидеров (723 скопления); и т. д. до $S=43$, причем скопления типа $S=29, 31, 33, 35, 36, 38 \div 42$ не появились вовсе. Хорошо видна закономерность: чем больше тип скопления (S), тем, вообще говоря, меньше вероятность (PS) встретить такое скопление:

$$PS \approx 0,2486 \cdot \exp(-0,2171 \cdot S) \approx \lg \sqrt{\pi} \cdot \exp(-S \cdot \lg \sqrt{e}). \quad (91)$$

Такой закон для вероятности PS всегда приводит к тому, что больше всего частых лидеров должно содержаться в скоплениях типа $S=5$. Однако, в реальности (на рабочем отрезке) этот максимум приходится на скопления типа $S=4, 6, 7$, а при $S=5$ наблюдается даже местный провал числа лидеров. Это иллюстрирует рис. 19, где PK – вероятность встречи с частыми лидерами из скопления типа S . Скопления первых семи типов ($S=1 \div 7$) всегда будут содержать почти половину (49%) всех частых лидеров любого рассматриваемого отрезка.

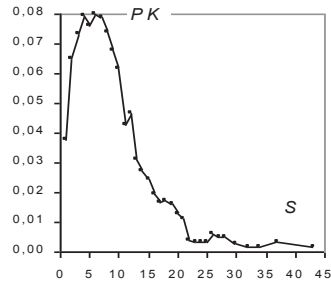


Рис. 19. Распределение лидеров частых миров по скоплениям

А насколько «длинные» скопления частых лидеров могут быть обнаружены на Большом отрезке? Оказывается, лидеры N , впервые «открывающие» скопления нового типа S , можно довольно сносно описать формулой $N \approx F \cdot \exp(2 \cdot S)$, где F – число Фейгенбаума. Таким образом, в конце Большого отрезка можно ожидать скоплений типа $S \approx 70$, т. е. содержащих до 70 лидеров частых миров, идущих подряд друг за другом. Следует заметить, что скопления появляются не строго по возрастанию их типов, и формула (92) указывает только «ось», вокруг которой «пляшут» типы скоплений. Появляются они так: $S=1, 2, 4, 6, 5, 3, 7, 9, 10, 11, 8, 14, 13, 15, 17, 12, 19, 18, 16, 25, 20, 27, 21, 24, 26, 37, 23, 22, 32, 30, 28, 43, 34$.

Количество частых лидеров, содержащихся во всех скоплениях данного типа S , скорее всего, также поддается описанию. Например, количество (K) частых лидеров во всех скоплениях первого типа ($S=1$) можно связать с правой границей отрезка (N) следующей эмпирической формулой:

$$N \approx \exp[3,627 \cdot (\ln K)^{1,5777}] \quad (92)$$

Согласно этой зависимости на Большом отрезке может содержаться около $K \approx 25660$ одиноких лидера из частых миров. Кстати, теперь можно проверить насколько точно работают вышеприведенные формулы на Большом отрезке. Пусть $KS=101484$ и $S=1 \div 70$, тогда формула (91) [$PS=f(S)$] приводит нас к количеству частых лидеров, равному 532893 (вместо 687430), причем 20302 из них – это одинокие лидеры (вместо 25660 по формуле (92)). Полученные расхождения говорят о том, что наши формулы – весьма грубые.

Итак, мы рассмотрели основные закономерности скоплений частых лидеров. Разумеется, нам никто не мешает рассматривать **скопления редких лидеров** «на фоне» частых лидеров совершенно аналогичным образом. Кстати, количество скоплений лидеров (KS), полученное нами ранее, – величина одинаковая и для частых и для редких лидеров (на любом отрезке).

На рабочем отрезке 4384 скопления редких лидеров образуют всего на всего четыре типа скоплений: $S=1$ – одинокие лидеры (их больше всего – 3715); $S=2$ – скопления-спарки (их 583); $S=3$ – скопления-триады (их 73); $S=4$ – скопления-квадры (их 13). Здесь, как и для скоплений частых лидеров, четко соблюдается главная закономерность: чем больше тип скопления (S), тем меньше вероятность (PS) встретить такое скопление:

$$PS \approx 5,6748 \cdot \exp(-1,9043 \cdot S) \quad (93)$$

Используя эту формулу, можно сделать следующий прогноз: на Большом отрезке редкие лидеры образуют скопления типа $S=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, количество которых соответственно равно 86922, 12945, 1928, 287, 43, 6, 1 (количество скоплений – 102850, а редких лидеров – 120002).

Найденный закон для вероятности PS всегда приводит к тому, что количество редких лидеров, входящих в скопления типа S , экспоненциально убывает с ростом S . Вероятность встречи с редким лидером (PK), входящим в скопления типа S относительно быстро убывает по закону

$$PK \approx 3,4342 \cdot \exp(-1,4646 \cdot S) \approx \ln(\pi^3) \cdot \exp(-S \cdot \sqrt[3]{\pi}), \quad (94)$$

из которого также следует существование скоплений семи типов $S=1 \div 7$, но уже в других количествах: 92265, 10665, 1644, 285, 53, 10, 2 (общее количество скоплений – 104924, а редких лидеров – 120007).

Лидеры N , впервые «открывающие» скопления нового типа S , на рабочем отрезке растут настолько стремительно по эмпирическому закону

$$N \approx \exp[0,5729 \cdot \exp(1,0868 \cdot S)] \quad (95)$$

что уже при $S=5$ получаем $N \approx 10^{61}$, т. е. здесь на Большом отрезке максимальный тип скопления не более 5, и это ставит под сомнение формулу (95). Но в любом случае, очевидно, что лидерам редких миров образовывать длинные скопления значительно «труднее», чем лидерам частых миров.

Заканчивая разговор о скоплениях лидеров, надо заметить, что если вероятность встречи со скоплением данного типа (см. формулы (91) и (93)) выражается экспонентой $PS \approx a \cdot \exp(-b \cdot S)$, то количество скоплений данного типа будет равно $KS \approx A \cdot \exp(-b \cdot S)$, т. е. также будет выражаться экспонентой, причем постоянная затухания b у них одинакова и всё различие только в начальных величинах ($A > a$). Аналогичная ситуация с вероятностью PK (формула (94)) и количеством лидеров, входящих в скопления данного типа – это тоже экспоненты с одинаковой постоянной затухания.

1.22. МАТРИЦА КАНДИДАТОВ В ЛИДЕРЫ РЕДКИХ МИРОВ

Напомним, что редкие миры образованы исключительно числами вида $N=i^2$, где $i=1, 2, 3, \dots$ – номер ступени Ствола, а тип (T) таких чисел (номер мира) – только нечетные числа. Каждый редкий мир начинается с некоторого числа N – *лидера* этого мира (*редкого лидера*). Вот первые редкие лидеры: $N=4, 16, 36, 64, 144, 576, 900, 1024, \dots$, и миры, которые они «открывают»: $T=3, 5, 9, 7, 15, 21, 27, 11, \dots$ (номера миров хаотически колеблются).

Путем сплошного перебора всех чисел N (действуя «в лоб») можно добраться, например, до 105-го лидера $N=14.428.814.400$ ($T=1701$), и эти 105 лидеров мы назовем *достоверными*. Рассмотрим их *каноническое разложение* $N=P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m$, и выберем только тех лидеров, у которых в разложении впервые появляется простое число $P=2, 3, 5, 7, 11, 13$ (т. е. степень при P больше нуля). Эти лидеры будем называть *главными лидерами*. В

табл.9 представлены: первые шесть главных лидеров N ; их тип (T); их порядковый номер в общем ряду всех редких лидеров (K); порядковый номер (j) простого числа P , наибольшего в каноническом разложении данного числа N . В левой части таблицы представлена матрица из показателей степени канонического разложения главных лидеров (т. е. $N=14.428.814.400=2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$). Даже только шесть главных лидеров указывают на очевидную зависимость $P \approx 0,5219 \cdot \ln N + 1,376$, откуда при $N=10^{61}$ получаем $P \approx 73$, т. е. 21-ое простое число. Таким образом, достоверные лидеры «подсказывают» нам найти 21-го главного лидера, т. е. достроить табл.9 до $j=21$ и получить, очевидно, довольно ценную таблицу, много говорящую о редких лидерах на Большом отрезке. Поэтому такую таблицу будем называть **матрицей главных лидеров** (МГЛ).

Но достроить МГЛ – это значит найти *все* редкие лидеры. Как это легче всего сделать? Рассматривая каноническое разложение достоверных лидеров, легко обнаружить закономерности, которые приводят к плодотворной идее, суть которой

Таблица 9. Первые главные лидеры редких миров

2	3	5	7	11	13	P	J	K	N	T
2						2	1	1	4	3
2	2					3	2	3	36	9
2	2	2				5	3	7	900	27
2	2	2	2			7	4	17	44100	81
4	2	2	2	2		11	5	46	21344400	405
6	2	2	2	2	2	13	6	105	14428814400	1701

– построение **матрицы кандидатов в лидеры** (МКЛ). Чтобы легче было представить структуру МКЛ, сначала оговорим некоторые понятия:

- $i=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер числа N_i (кандидата в лидеры);
- $j=1, 2, 3, \dots, 21$ – номер простого числа P_j в каноническом разложении;
- $P_j = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, 73$ – начало ряда простых чисел (только 21 число);
- A_{ij} – показатель степени при P_j в каноническом разложении у числа N_i ;

A_1 – первый показатель степени (т. е. при $P_1 = 2$), это обозначение просто удобнее (короче), чем обозначение $A_{i,1}$.

МКЛ – это матрица (таблица) из показателей степени A_{ij} , для чисел N_i , которые *могут* оказаться лидерами. Эта матрица содержит i строк и j столбцов и её удобно строить в электронных таблицах (ЭТ) на ПК. В каждой строке выполняется правило $A_{ij} \geq A_{i,j+1}$, т. е. у каждого числа N_i показатели степени при P_j не могут возрастать при увеличении j , причем степени могут быть только четными числами: $A_{i,j} = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$ (каждое числовое значение в ЭТ можно окрасить в свой цвет). Например, число $N=6350400=2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ входит в МКЛ с такими показателями степени $A_{i,j} = 6, 4, 2, 2$. В принципе МКЛ похожа на МГЛ (см. табл.9): количество столбцов у них будет одинаковое $j=21$, а вот количество строк (i) у МКЛ гораздо больше (по количеству всех кандидатов в лидеры). Строится МКЛ, начиная с первого

столбца $AI=2, 4, 6, 8, \dots$ и для каждой новой строчки матрицы берутся все возможные сочетания показателей степени Aij до тех пор, пока либо $j \leq 21$, либо $N \leq 10^{61}$. При этом показатели степени Aij (цветные клетки в ЭТ) выстраиваются в своеобразную «ёлку» (если $Aij=0$, то клетка остается пустой и белой). Причем о максимальном значении AI можно не беспокоиться, просто при $AI \geq 202$ построение МКЛ будет закончено, т. к. дальше все $N=2^{AI}$ будут больше, чем 10^{61} . Т. е. максимальное значение AI равно

$$AI_{max} \approx \ln N / \ln 2 \approx 202. \quad (102)$$

Строя МКЛ указанным способом мы получим $i=812895$ чисел Ni – кандидатов в редкие лидеры. Причем чисел, у которых первый показатель степени $AI=32$ – будет максимальное количество ($K=32780$ чисел), а в целом зависимость $K=f(AI)$ носит *логнормальный* характер, о чем свидетельствует «колокол» на рис.21, т. е. количество кандидатов, порожденных как очень малыми AI , так и очень большими AI – будет мало, а на долю первых $AI=2 \div 42$ (21% от всех AI) приходится 50,8% всего количества кандидатов.

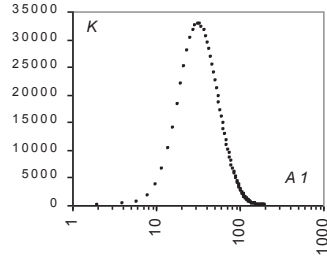


Рис. 21. «Колокол» у МКЛ

Построенная нами МКЛ для Большого отрезка имеет следующие параметры: количество столбцов $J=21$; максимальное значение первого показателя степени $AI_{max}=202$, а количество различных значений первого показателя степени равно $AI_{max}/2+1=202/2+1=102$, т. к. AI – только четные числа и показатель $AI=0$ не менее важен, чем другие показатели.

А теперь представим себе гипотетическую матрицу из показателей степени Aij , в которой $J=21$, и показатели степени принимают все 102 возможных значения $Aij=0, 2, 4, 6, 8, \dots, 202$, причем во всех возможных сочетаниях. Такую воображаемую матрицу будем называть *комбинаторной матрицей* редких миров на Большом отрезке. Нетрудно сообразить, что *высота* (H) такой матрицы (или количество строк в матрице, или количество чисел N , «зашитых» в матрице) определяется по формуле

$$H = (AI_{max}/2+1)^J. \quad (103)$$

Таким образом, при $AI_{max}=202$ и $J=21$ мы получим матрицу высотой $H \approx 1,5 \cdot 10^{42}$ различных натуральных чисел N . Уместно напомнить, что на Большом отрезке находится «всего на всего» $(10^{61})^{0,5} \approx 3 \cdot 10^{30}$ чисел N из редких миров, что составляет только $\sim 2 \cdot 10^{-12}$ часть от высоты комбинаторной матрицы. Однако не надо думать, что все числа N из редких миров, которые находятся на Большом отрезке содержатся в этой гигантской матрице. Например, все простые числа $P > 73$, будучи возведенными в четную степень (2, 4, 6, ...), образуют числа N , которых нет в комбинаторной матрице.

Максимально возможное число (N_{max}), порожденное комбинаторной матрицей, будет равно: $N_{max}=(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot\dots\cdot73)^{202}\approx(4\cdot10^{28})^{202}\approx10^{5656}$, но представить себе такое число просто невозможно, столь оно велико.

Следует подчеркнуть, что и МКЛ, и МГЛ, и комбинаторная матрица однозначно определяются единственным параметром – правой границей Большого отрезка (числом N).

1.23. МАТРИЦА ЛИДЕРОВ РЕДКИХ МИРОВ

Построив МКЛ, мы без труда найдем всех лидеров редких миров на Большом отрезке, для этого достаточно отсортировать все числа-кандидаты (все строчки МКЛ) по возрастанию типов (T), а внутри каждого типа отсортировать сами числа N по возрастанию и взять первое число N из каждого типа – это и будут лидеры (каждый со своим набором Aij). Матрицу Aij , полученную указанным образом из МКЛ, мы будем называть **матрицей лидеров** (МЛ). В нашем случае из 812.895 кандидатов в МЛ войдут только 120.000 лидеров, таким образом, на Большом отрезке *количество редких миров равно 120000*.

Структуру МЛ отражает сводная табл.10, где для каждого j -го столбца МЛ, приведены: P – простое число; AS – максимальный показатель степени; KA – количество всех показателей степени, в том числе нарастающим итогом в процентах от общего количества показателей, равного 984141 (т. е. $984141/(120000\cdot21) \approx 61\%$ всех показателей в МЛ равны нулю). Из табл.10 видно, например, что 7-й столбец МЛ содержит показатели степени при $P=17$ и все они $Aij\leq10$, причем первые 7 столбцов “вмещают” 78% всех показателей МЛ. Таблица подтверждает главную закономерность МЛ: чем больше простое число P , тем меньше вероятность обнаружить его в каноническом разложении лидера N . Для 21-го простого числа ($P=73$) эта вероятность устремляется к нулю.

Таблица 10. Сводка по МЛ

j	P	AS	KA	KA
1	2	198	120000	12%
2	3	78	119955	24%
3	5	40	119461	37%
4	7	22	117121	48%
5	11	18	110769	60%
6	13	12	99331	70%
7	17	10	83744	78%
8	19	6	66473	85%
9	23	6	49818	90%
10	29	6	35415	94%
11	31	4	24105	96%
12	37	4	15685	98%
13	41	4	9809	99%
14	43	2	5901	99%
15	47	2	3354	100%
16	53	2	1784	100%
17	59	2	877	100%
18	61	2	381	100%
19	67	2	130	100%
20	71	2	27	100%
21	73	2	1	100%
Всего:			984141	

Количество редких лидеров в зависимости от их первых показателей степени AI распределяется логнормально (рис.22), а максимальное количество лидеров имеет $AI=30$. Для сравнения здесь же пунктиром показаны количества лидеров в МЛ, построенной на отрезке от $N=1$ до $N\approx10^{23}$, где МЛ содержит только $j=10$ столбцов и всего 1135 лидеров. На графике хорошо видны

три «провала» по количеству K при $AI=8, 14$ и 24 . Всё дело в том, что у редких лидеров, вообще говоря, первые показатели степени AI – это числа на единицу меньше простого числа, т. е. нормальные $AI=2, 4, 6, 10, 12, 16, \dots, 198$ (46-ое простое число без единицы), а три «провала» – это интересные исключения из данного правила. В части «провалов» можно отметить, что если у лидеров N с нормальными $AI=6$ и 10 типы T образуют широкие шлейфы на графике $T=f(N)$, то у лидеров с «провальным» $AI=8$ все типы выстраиваются в тонкую линию, уравнение которой (с $OП=\pm 15\%$) можно записать в виде: $T \approx \exp[0,8124 \cdot (\ln N)^{0,6932}]$.

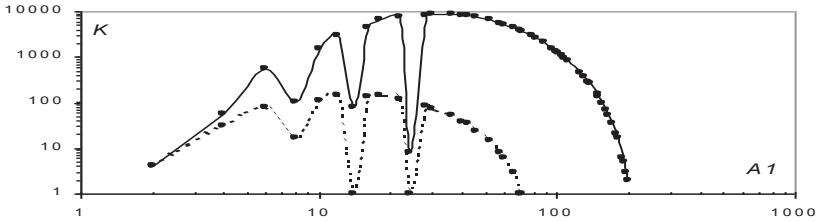


Рис. 22. Количество редких лидеров с данным первым показателем степени AI

1.24. МАТРИЦА ГЛАВНЫХ ЛИДЕРОВ РЕДКИХ МИРОВ

После того, как мы нашли всех редких лидеров на Большом отрезке, можно вернуться к табл.9 и достроить МГЛ до 21-го простого числа. При этом мы добавим в МГЛ (см. табл.11) столбцы TS , Ts и KR , смысл которых будет раскрыт ниже. Слева в МГЛ показаны три столбца показателей степени канонического разложения главных лидеров: $A1$ – при $P=2$; $A2$ – при $P=3$; $A3$ – при $P=5$. Показатели степени при всех остальных простых числах P у главных лидеров равны 2, причем последняя двойка стоит всегда в j -ом столбце МГЛ (поэтому остальные Aij в табл.11 просто не показаны).

МГЛ позволяет вывести следующее выражение (его $OП=\pm 5\%$):

$$PV \approx 0,5236 \cdot \ln N + 1,3956 \approx (\pi/6) \cdot \ln N + e^{1/3}, \quad (105)$$

где PV – *виртуальное простое число*. Т. е. любому лидеру N мы ставим в соответствие некое условное число PV , и только у главных лидеров за ним «скрывается» реальное простое число. Например, для 21-го главного лидера ($N \approx 8,6 \cdot 10^{60}$) имеем $PV \approx 74,97$, а реальное последнее простое число в каноническом разложении этого лидера равно $P=73$ (см. МГЛ – табл.11).

МГЛ позволяет также обнаружить связь между средним типом главного лидера (его типом по Дирихле – Ts) и простым числом P (с $OП=\pm 10\%$):

$$Ts \approx 1,9098 \cdot P - 2,5066 \approx (6/\pi) \cdot P - (2\pi)^{1/2}. \quad (106)$$

Для главных лидеров можно считать, что $P=PV$, но подстановка формулы (105) в формулу (106) никогда не приведет нас к выражению Дирехле ($Ts \approx \ln N + 2 \cdot C - 1$), т. к. будет «мешать» ничтожная разница около 0,0044. Чтобы её не стало наши формулы должны принять следующий вид:

$$PV = 0,5 \cdot \ln N + C \quad \text{и} \quad Ts = 2 \cdot PV - 1, \quad (107)$$

но относительная погрешность (ОП) этих формул на Большом отрезке явно больше, чем у формул (105), (106), которыми мы и будем пользоваться.

Таблица 11. Матрица главных лидеров (МГЛ) редких миров

Показатели степени			Простое число и его номер		Главный редкий лидер	Порядков. номер гл. лидера	Тип главного лидера	Средний тип гл. лидера	Средний тип по Дирихле	Кратность главного гл. лидера
A1	A2	A3	P	j	N	K	T	TS	Ts	KR
2			2	1	4	1	3	3	2,00	1,750
2	2		3	2	36	3	9	6	3,89	2,528
2	2	2	5	3	900	7	27	12	6,97	3,134
2	2	2	7	4	44100	17	81	30	10,85	3,646
4	2	2	11	5	21344400	46	405	98	17,03	4,437
6	2	2	13	6	1,44E+10	105	1701	327	23,55	4,921
6	2	2	17	7	4,17E+12	190	5103	807	29,21	5,228
4	4	2	19	8	3,39E+15	356	18225	2205	35,91	5,571
8	2	2	23	9	3,19E+18	638	5,90E+04	5,95E+03	42,76	5,802
6	4	2	29	10	6,03E+21	1135	2,30E+05	1,68E+04	50,31	6,177
8	4	2	31	11	2,32E+25	1998	8,86E+05	4,86E+04	58,56	6,421
8	4	2	37	12	3,17E+28	3186	2,66E+06	1,21E+05	65,78	6,599
8	4	2	41	13	5,33E+31	4967	7,97E+06	2,95E+05	73,21	6,764
8	4	2	43	14	9,86E+34	7613	2,39E+07	7,16E+05	80,73	6,925
6	6	2	47	15	4,90E+38	11998	7,81E+07	1,90E+06	89,24	7,060
8	6	2	53	16	5,51E+42	19163	3,01E+08	5,36E+06	98,57	7,238
8	6	2	59	17	1,92E+46	28227	9,04E+08	1,31E+07	106,72	7,363
8	6	2	61	18	7,13E+49	41039	2,71E+09	2,97E+07	114,95	7,485
8	6	2	67	19	3,20E+53	59194	8,14E+09	7,80E+07	123,35	7,599
8	6	2	71	20	1,61E+57	84505	2,44E+10	1,87E+08	131,88	7,707
8	6	2	73	21	8,60E+60	119312	7,32E+10	4,47E+08	140,46	7,814

1.25. ФЛУКТУАЦИЯ РЕДКИХ МИРОВ

Рассмотрим типы T у всех 120000 лидеров редких миров на Большом отрезке. При удалении правой границы отрезка (N) типы лидеров, как и типы всех натуральных чисел (см. рис.1), совершают случайные колебания (флуктуации) от T_{min} до T_{max} . Причем нижняя граница флуктуаций (T_{min}) образуется лидерами *простых миров*, у которых тип – суть простые числа $T= 3, 5, 7, 11, 13, \dots, 199$ (на Большом отрезке *нижних лидеров* набралось всего 45), а первый показатель степени $A1=T-1$. Поскольку каноническое разложение

любого лидера простого мира имеет вид $N=2^{T-1}$, то отсюда можно найти выражение для нижней границы флуктуаций лидеров:

$$T_{min} = \ln N / \ln 2 + 1 \quad (108)$$

Нижняя граница примечательна тем, что с ростом N у любого нового лидера тип будет не меньше T_{min} , хотя у очередного числа N из редких миров (не лидера) тип может оказаться меньше T_{min} , вплоть до $T=3$. Количество нижних лидеров на отрезке $[1; N]$ можно оценить как $K_{min} \approx 0,8791 \cdot (\ln N)^{0,7946}$. После $N \approx 3 \cdot 10^5$ относительная погрешность находится в пределах $\pm 4\%$.

Верхнюю границу флуктуаций (T_{max}) найти сложнее, и в этом нам поможет МГЛ. Дело в том, что именно типы главных лидеров образуют границу, вокруг которой совершают колебания все верхние лидеры. **Верхние лидеры** – это лидеры, типы которых только возрастают, т. е. если у очередного лидера тип оказывается больше, чем у последнего верхнего лидера, то это очередной верхний лидер. На Большом отрезке набралось 270 верхних лидеров, типы которых совершают колебания вокруг T_{max} . МЛ позволяет оценить количество верхних лидеров на произвольном отрезке ($OP = \pm 5\%$):

$$K_{max} \approx 0,6827 \cdot PV^{1,3956} \quad (109)$$

Следует помнить, что за PV всегда скрывается вполне определенное число N , т. е. вместо PV достаточно подставить формулу (105), и мы получим зависимость K_{max} от правой границы отрезка: $K_{max} = f(N)$. Это важное замечание полезно запомнить и для последующих рассуждений (формул).

МЛ помогает также выявить следующую зависимость ($OP = \pm 10\%$):

$$T_{max} \approx \exp(1,138 \cdot PV^{0,7165}) \quad (110)$$

В сингулярности (до $N \sim 10^7$) погрешность этой формулы убывает от -134% до -16% , т. е. в начале натурального ряда, как и следовало ожидать, формула попросту не работает. Не следует забывать, что T_{max} – это *виртуальная* (условная) граница, так, наибольший верхний лидер в МЛ – это $N \approx 9,1 \cdot 10^{60}$, у которого $T = 82.864.937.925$.

Рассматривая всех лидеров можно ввести понятие о *среднем типе лидеров* (TS), равном отношению суммы типов лидеров к количеству этих лидеров. Несмотря на огромные колебания типа у лидеров от T_{min} до T_{max} , средний тип лидеров ведет себя очень спокойно, т. е. ситуация аналогична среднему типу по Дирихле (п.1.3). Из МЛ нетрудно получить выражение:

$$TS \approx \exp(0,9 \cdot PV^{0,7165}) \quad (111)$$

Следует заметить, что при неограниченном росте N отношение TS/T_{max} асимптотически устремляется к нулю. На Большом отрезке это отношение убывает от 1 до $0,006$, а средний тип редких лидеров равен $TS \approx 4,6 \cdot 10^8$.

Представляется интересным вопрос о количестве (K) редких лидеров в зависимости от величины их типов (T) на Большом отрезке. Анализ МЛ приводит к графику (рис.23), который, например, показывает, что больше всего лидеров из редких миров имеют количество делителей равное $T=10^7 \div 10^9$.

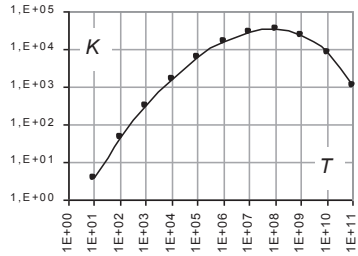


Рис. 23. Распределение Типов

1.26. БОГАТСТВО И КРАТНОСТЬ ЧИСЕЛ ИЗ РЕДКИХ МИРОВ

Сумма всех делителей числа N – весьма важная характеристика, которую будем называть **богатством** числа, и обозначать буквой S . Причем часто бывает удобнее рассматривать не само богатство, а его **кратность** (KR), показывающую во сколько раз богатство числа превосходит само это число: $KR \equiv S/N$. Например, у числа $N=16$ имеется пять делителей: 1, 2, 4, 8, 16, его богатство $S=1+2+4+8+16=31$, а кратность $KR=31/16=1,9375$. Наименьшее богатство у числа $N=1$, у простых чисел богатство всегда больше на единицу самого числа: $S=1+P$. Кратность простых чисел равна $KR=1+1/P$ и с ростом простых чисел их кратность уменьшается, стремясь к единице.

Проще всего изучать богатство и кратность в *простых мирах*, т. к. там мы знаем все делители любого числа N : эти делители всякий раз образуют геометрическую прогрессию, первый член которой равен единице, а знаменатель прогрессии – соответствующее простое число (см. п. 1.19). Поэтому богатство любого числа N из любого простого мира с номером T будет равно сумме геометрической прогрессии:

$$S = 1 + P^1 + P^2 + P^3 + \dots + P^{(T-1)} = (P^T - 1)/(P - 1). \quad (113)$$

Тогда кратность любого числа N из простого мира с номером T будет равна

$$KR = S/N = S/P^{(T-1)} = (1 - 1/P^T)/(1 - 1/P), \quad (114)$$

где $P=2$ (для первого числа в мире T), $P=3$ – для второго числа, $P=5$ – для третьего числа и т. д. (P – простые числа). Предел кратности чисел N внутри каждого из простых миров (где растет только P) устремляется к 1, причем уже после *седьмого* числа кратности чисел в простых мирах становятся практически неразличимыми (разновидность «магии» числа 7).

У лидеров простых миров (у них $P=2$, а T – растет) *предел кратности* равен 2. Кратность *нижнего лидера* мира с номером T очевидно равна

$$KR = 2 - 2^{(1-T)}. \quad (115)$$

В самом общем случае (для любого числа N из любого мира T) сумму всех делителей, включая единицу и само число N , можно найти по замечательной формуле У. Д. Валлиса (1616–1703): если известно каноническое разложение числа N на простые сомножители $N = P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m$, тогда

$$S = \frac{P_1^{a+1}-1}{P_1-1} \cdot \frac{P_2^{b+1}-1}{P_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{P_n^{m+1}-1}{P_n-1}. \quad (116)$$

Максимально возможная кратность (у верхних лидеров), определяется кратностью главных лидеров: из МЛ получаем $KR_{max} \approx 1,6901 \cdot \ln PV + 0,5158$. ОП этой формулы быстро убывает от -18% в сингулярности до $\pm 4\%$ при $N \sim 10^{10}$ и после $N \sim 10^{25}$ имеем $OП = \pm 1\%$. В конце БО кратность в редких мирах достигает $KR_{max} \approx 7,8$ (опять “магия” числа 7 ± 2 , но уже в конце БО).

Рассматривая всех лидеров можно ввести понятие о *средней кратности лидеров* (KRS), равной отношению суммы кратности лидеров к количеству этих лидеров. Несмотря на большие колебания кратности у лидеров вплоть до KR_{max} , средняя кратность редких лидеров ведет себя весьма спокойно:

$$KRS \approx 1,26 \cdot \ln PV + 0,2897. \quad (117)$$

Следует заметить, что отношение KRS/KR_{max} сначала убывает от 1 до 0,7 при $N = 705600$, а потом при неограниченном росте N это отношение асимптотически устремляется к некому числу (в конце Большого отрезка достигая значения 0,7358). Возможно, это число равно $(\pi/2e)^{1/2} \approx 0,7602$, поскольку кратности можно выразить (как вариант) простыми формулами:

$$KR_{max} \approx 1,6487 \cdot \ln \ln N \approx \sqrt{e} \cdot \ln \ln N, \quad (118)$$

$$KRS \approx 1,2533 \cdot \ln \ln N \approx \sqrt{\pi/2} \cdot \ln \ln N. \quad (119)$$

После того, как мы разобрались с кратностью у редких лидеров, возникает вопрос о кратности *всех чисел* из редких миров. И здесь общая картина такова: чем больше номер мира (T), тем больше кратность у лидера этого мира, а внутри каждого мира кратности убывают, стремясь на бесконечности к единице. Причем, если в простых мирах кратности “ложатся” на линию, определенную уравнением (114), то в остальных редких мирах кратности чисел образуют многоуровневый “шлейф” убывающих значений.

Сумма кратностей *всех* чисел (а не только лидеров) из редких миров на отрезке от 1 до N , вероятно, стремится к значению:

$$\sum KR \approx 2 \cdot N^{1/2} = 2 \cdot i, \quad (120)$$

где i – номер ступени Ствола. Если это верно, то средняя кратность всех чисел из редких миров стремится к 2. По крайней мере, у первых 1300 чисел из редких миров (до $N = 1690000$) средняя кратность растет от 1 до 1,824.

1.27. МАТРИЦА КАНДИДАТОВ В ЛИДЕРЫ ЧАСТЫХ МИРОВ

Напомним, что частые миры образованы всеми натуральными числами, за исключением редких чисел вида $N=i^2$, где $i=1, 2, 3, \dots$ – номер ступени Ствола. Тип (T) у чисел из частых миров – только четные числа. Каждый частый мир (тип) начинается с некоторого числа N – *лидера* этого мира. Вот первые лидеры частых миров: $N=2, 6, 12, 24, 48, 60, 120, 180, 192, \dots$, и номера миров, которые они «открывают»: $T=2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 14, \dots$ (далее номера миров начинают хаотически колеблутся). Если эти лидеры сравнить с первыми лидерами редких миров, то становится очевидным, что на Большом отрезке лидеров частых миров будет гораздо больше, чем лидеров редких миров. Забегая вперед, скажем, что на БО содержится, вероятно, около 700000 частых миров, и построить соответствующую МКЛ довольно сложно, поэтому лидеры частых миров мы будем искать только на отрезке от $N=1$ до $N=10^{32}$ (*рабочий отрезок* для чисел из частых миров).

Путем сплошного перебора всех чисел N (действуя “в лоб”) можно добраться, например, до 59-го частого лидера $N=720.720$ ($T=240$), поэтому первые 59 лидеров назовем *достоверными лидерами*. Рассматривая их каноническое разложение, мы сможем выделить шесть *главных лидеров*: $N=2, 6, 60, 840, 27720, 720720$, которые приводят нас к выражению $P \approx 0,8819 \cdot \ln N + 1,3907$, откуда при $N=10^{61}$ получаем $P \approx 127$, т. е. 31-ое простое число. Таким образом, достоверные лидеры «подсказывают» найти не менее 31-го главного лидера, ну а на самом деле надо найти 33 главных лидера ($P=137$), чтобы построить МГЛ частых миров на Большом отрезке. На рабочем отрезке достаточно добраться до 19-го главного лидера ($P=67$).

Любопытно, что на Большом отрезке “ширина” матриц в частых и редких мирах (количество столбцов в МКЛ, МЛ, МГЛ или, иначе говоря, параметр j у этих матриц) соотносится как $33/21=1,57$, что довольно близко к “золотому сечению” ($\Phi=1,618\dots$).

Рассматривая каноническое разложение достоверных лидеров, легко обнаружить закономерности, которые приводят нас к построению МКЛ для частых миров *на рабочем отрезке*. Уточним основные понятия по МКЛ: $i=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер числа N_i (кандидата в частые лидеры); $j=1, 2, 3, \dots, 19$ – номер простого числа P_j в каноническом разложении; $P_j = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, 67$ – начало ряда простых чисел (только 19 чисел); A_{ij} – показатель степени при P_j в каноническом разложении у числа N_i ; A_1 – первый показатель степени, обозначение удобнее, чем $A_{i,1}$.

МКЛ – это матрица из показателей степени A_{ij} , для чисел N_i , которые могут оказаться лидерами. Эта матрица содержит i строк и j столбцов. В каж-

дой строке выполняется правило $A_{i,j} \geq A_{i,j+1}$, т. е. у каждого числа N_i показатели степени при P_j не могут возрастать при увеличении j , причем степени могут быть любым натуральным числом: $A_{i,j} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, но вот последний показатель степени здесь всегда равен 1. Например, число $N = 50400 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ входит в МКЛ с такими показателями степени $A_{i,j} = 5, 2, 2, 1$. Строится МКЛ, начиная с первого столбца $A1 = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ и для каждой новой строчки матрицы берутся все возможные сочетания показателей степени A_{ij} до тех пор пока либо $j \leq 19$ либо $N \leq 10^{32}$. Показатели степени A_{ij} при этом выстраиваются в своеобразную «ёлку». О максимальном значении $A1$ можно не беспокоиться, просто при $A1 \geq 105$ построение МКЛ будет закончено, т. к. дальше все $N = 2^{A1} \cdot 3$ будут больше, чем 10^{32} . таким образом, максимальное значение $A1$ в частых мирах равно

$$A1_{max} \approx (\ln N - \ln 3) / \ln 2. \quad (121)$$

Строя МКЛ указанным способом мы получим $i = 887123$ чисел N_i – кандидатов в лидеры. Причем чисел, у которых первый показатель степени $A1 = 16$ будет максимальное количество ($K = 34329$ чисел), а в целом зависимость $K = f(A1)$ носит *логнормальный* характер (аналогично рис.21): количество кандидатов, порожденных как очень малыми $A1$, так и очень большими $A1$ – будет мало (все как в редких мирах). Кстати, если бы мы строили МКЛ, взяв $j = 16$ столбцов, то высота МКЛ была бы равна $i = 159613$ чисел, таким образом, простая линейная экстраполяция для МКЛ, “накрывающей” Большой отрезок ($j = 33$) приводит к очень высокой МКЛ, в которой $i > 4$ млн. чисел (даже работать с такой МКЛ проблематично).

Как мы уже знаем, МКЛ для Большого отрезка имела бы следующие параметры: количество столбцов $J = 33$; максимальное значение первого показателя степени $A1_{max} = (\ln 10^{61} - \ln 3) / \ln 2 \approx 201$, а количество различных значений первого показателя степени равно $A1_{max} + 1 = 201 + 1 = 202$, т. к. показатель $A1 = 0$ не менее важен, чем другие показатели. Тогда высота *комбинаторной матрицы* частых миров будет равна (количество чисел):

$$H = (A1_{max} + 1)^J = 202^{33} \approx 1,2 \cdot 10^{76} \quad (122)$$

Значит, на Большом отрезке находится $10^{61} / 10^{76} \approx 10^{-15}$ часть от высоты комбинаторной матрицы, что меньше аналогичной доли в редких мирах.

Максимально возможное число (N_{max}), порожденное комбинаторной матрицей частых миров, очевидно, будет следующим:

$$N_{max} = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 137)^{201} \approx (7 \cdot 10^{52})^{201} \approx 10^{10653}. \quad (123)$$

Это число равно почти квадрату аналогичного числа в редких мирах.

1.28. МАТРИЦА ЛИДЕРОВ ЧАСТЫХ МИРОВ

Построив МКЛ, мы легко находим всех частых лидеров (МЛ) на рабочем отрезке: из 887.123 кандидатов в МЛ войдут только 22.164 лидера.

Структуру МЛ совершенно аналогична структуре МЛ в редких мирах: чем больше простое число P , тем меньше вероятность обнаружить его в каноническом разложении лидера N . Так, первые *семь* столбцов ($P=2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$) “вмещают” 72% всех показателей МЛ, а половина всех показателей вообще равны нулю (пустые ячейки в МЛ).

Количество лидеров в зависимости от их первых показателей степени AI также распределяется логнормально (аналогично рис.22), а максимальное количество лидеров (“пик”) наблюдается при $AI=18$ (на Большом отрезке “пиковая” степень AI будет явно больше, возможно, как и в редких мирах при $AI=30$). В частых мирах также имеются «провалы» по количеству чисел с $AI=3, 5, 7, 8, 9, 14, \dots$. Причина в том, что, вообще говоря, первые показатели степени AI – это числа на единицу меньше соответствующего простого числа, т. е. «нормальные» $AI=1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, \dots, 102$, а «провалы» – это исключения из данного правила.

1.29. МАТРИЦА ГЛАВНЫХ ЛИДЕРОВ ЧАСТЫХ МИРОВ

После того, как мы нашли всех лидеров на рабочем отрезке, можно составить МГЛ до 19-го простого числа (табл.12). Слева в МГЛ показаны четыре столбца с показателями степени канонического разложения главных лидеров: $AI \div A4$. Показатели степени при всех остальных простых числах P у главных лидеров равны 1, причем последняя единица всегда стоит в j -ом столбце МГЛ (поэтому остальные Aij в табл.12 просто не показаны).

МГЛ позволяет вывести следующее выражение (его $ОП=\pm 5\%$):

$$PV \approx 0,9415 \cdot \ln N + 0,7988 \quad (124)$$

В частых мирах также существует связь между средним типом главного лидера (его типом по Дирихле – T_s) и простым числом P (с $ОП=\pm 10\%$):

$$T_s \approx 1,0571 \cdot P - 0,4822 \quad (125)$$

Однако, как и в редких мирах, подстановка формулы (124) в формулу (125) никогда не приведет нас к выражению Дирехле ($T_s \approx \ln N + 2 \cdot C - 1$). Чтобы не было разногласий наши формулы должны принять следующий вид:

$$PV = \ln N + 2 \cdot C \quad \text{и} \quad T_s = PV - 1, \quad (126)$$

но тогда их относительная погрешность на рабочем, а значит и на Большом отрезке будет явно больше, чем у формул (124), (125), которыми мы и будем пользоваться, помня о том, что они “*ad hoc*” (все аналогично ситуации в ред-

ких мирах). Из формулы (126) следует, что при N , стремимся к бесконечности, последнее (наибольшее) простое число в каноническом разложении главного лидера на единицу больше среднего арифметического типа всех чисел, перед этим лидером. Или, иначе говоря, виртуальное простое число PV стремится к типу по Дирихле, увеличенному на единицу.

Таблица 12. Матрица главных лидеров (МГЛ) частых миров

Показатели степени при P				Простое число и его номер		Главный редкий лидер	Порядков. номер гл. лидера	Тип главного лидера	Средний тип гл. лидера	Средний тип по Дирихле	Кратность главного гл. лидера
A1	A2	A3	A4	P	j	N	K	T	TS	Ts	KR
1				2	1	2	1	2	2	1,50	1,500
1	1			3	2	6	2	4	3	2,33	2,000
2	1	1		5	3	60	6	12	7	4,35	2,800
3	1	1	1	7	4	840	13	32	15	6,91	3,429
3	2	1	1	11	5	27720	32	96	39	10,39	4,052
4	2	1	1	13	6	720720	59	240	83	13,64	4,509
4	3	1	1	17	7	3,68E+07	118	640	193	17,57	4,897
4	3	1	1	19	8	6,98E+08	180	1280	350	20,52	5,154
4	3	1	1	23	9	1,61E+10	280	2560	644	23,65	5,379
4	4	2	1	29	10	6,99E+12	577	9600	1915	29,73	5,797
4	4	2	1	31	11	2,17E+14	838	1,92E+04	3,42E+03	33,16	5,984
6	3	3	1	37	12	5,34E+16	1460	5,73E+04	8,43E+03	38,67	6,283
6	3	3	1	41	13	2,19E+18	2064	1,15E+05	1,51E+04	42,39	6,436
6	3	3	1	43	14	9,42E+19	2885	2,29E+05	2,72E+04	46,15	6,586
6	3	3	1	47	15	4,43E+21	3980	4,59E+05	4,79E+04	50,00	6,726
6	4	2	2	53	16	9,85E+23	6117	1,29E+06	1,06E+05	55,40	6,989
7	3	3	2	59	17	1,94E+26	9054	3,15E+06	2,22E+05	60,68	7,122
7	3	3	2	61	18	1,18E+28	12141	6,29E+06	3,96E+05	64,79	7,238
6	4	3	2	67	19	1,19E+30	16612	1,38E+07	7,36E+05	69,40	7,379

1.30. ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТЫХ МИРОВ

Рассмотрим типы T у всех частых лидеров на рабочем отрезке. При удалении правой границы отрезка (N) типы лидеров совершают случайные колебания (флуктуации) от T_{min} до T_{max} . Причем нижняя граница флуктуаций (T_{min}) образуется лидерами удвоенных миров, у которых тип – суть удвоенные простые числа $T= 4, 6, 10, 14, 22, 26, \dots, 206$ (на рабочем отрезке таких лидеров набралось всего 28). Поскольку каноническое разложение любого лидера удвоенного мира (нижнего лидера) имеет вид

$$N = 2^{T/2-1} \cdot 3 \quad , \quad (127)$$

то для нижней границы флуктуаций лидеров частых миров получаем:

$$T_{min} = 2 \cdot \ln(N/3) / \ln 2 + 2 \quad . \quad (128)$$

Нижняя граница примечательна тем, что с ростом N у любого нового лидера частых миров его тип будет не меньше T_{min} , хотя у любого нового числа N (не лидера) тип вполне может оказаться меньше T_{min} , вплоть до $T=2$ (у простых чисел). Следует заметить, что четвертый частый лидер $N=24$ имеет тип $T=8$ и также удовлетворяет формуле (128), но этот лидер не является удвоенным простым числом. Таким образом, нижняя граница в частых мирах стремится превзойти нижнюю границу в редких мирах в два раза (при $N \rightarrow \infty$), а вот количество нижних лидеров в частых и редких мирах примерно одинаково. В конце Большого отрезка должно быть 47 нижних лидеров, а $T_{min} \approx 199 \cdot 2 = 398$ (в 1,984 раза больше, чем в редких мирах).

Количество нижних лидеров на отрезке от 1 до N можно оценить так:

$$K_{min} \approx 1,1447 \cdot (\ln N)^{0,7457} . \quad (129)$$

После $N \approx 2 \cdot 10^7$ относительная погрешность находится в пределах $\pm 5\%$.

На рабочем отрезке набралось 313 верхних лидеров, типы которых совершают колебания вокруг верхней границы флуктуаций T_{max} . МЛ позволяет оценить количество верхних лидеров на произвольном отрезке:

$$K_{max} \approx 1,1292 \cdot P V^{1,3286} , \quad (130)$$

т. е. на Большом отрезке может содержаться около 748 верхних лидеров. С другой стороны есть основания полагать, что отношение количества верхних лидеров в частых мирах ($K2_{max}$) к количеству верхних лидеров в редких мирах ($K1_{max}$) стремится к числу e :

$$K2_{max}/K1_{max} \approx 2,718 . \quad (131)$$

Если это справедливо, то на Большом отрезке должно быть 734 верхних лидера (в редких мирах при $N \approx 7,9 \cdot 10^{60}$ имеем 270 верхних лидера).

МЛ позволяет выявить следующую зависимость для верхней границы:

$$T_{max} \approx \exp(0,8888 \cdot P V^{0,6964}) , \quad (132)$$

откуда при $N \approx 7,9 \cdot 10^{60}$ получаем виртуальное значение $T_{max} \approx 4,2 \cdot 10^{11}$ (судя по поведению ОП, этот результат несколько занижен). Причем явно существует связь между максимально возможным типом в частых мирах ($T2_{max}$) и максимально возможным типом в редких мирах ($T1_{max}$), например:

$$T2_{max}/T1_{max} \approx 1,14473 \cdot N^{0,0144} \approx (\ln \pi) \cdot N^{0,0144} . \quad (133)$$

Откуда в конце Большого отрезка (при $N \approx 7,9 \cdot 10^{60}$) получаем $T2_{max}/T1_{max} \approx 8,63$ (“магия” числа 7 ± 2 , но в конце БО), а максимально возможное количество делителей у чисел в частых мирах равно $T_{max} \approx 7,2 \cdot 10^{11}$.

Из МЛ также получаем примерную оценку для среднего типа лидеров:

$$TS \approx \exp(0,7306 \cdot P V^{0,6963}) , \quad (134)$$

откуда в конце Большого отрезка получаем $TS \approx 3,6 \cdot 10^9$. При неограниченном росте N отношение TS/T_{max} асимптотически устремляется к нулю. На рабочем отрезке это отношение убывает от 1 до 0,047.

Анализ МЛ на рабочем отрезке показывает, что количество лидеров в зависимости от величины их типов распределяется аналогично редким мирам (см. рис.23). Максимум по количеству лидеров приходится на типы $T \approx 10^6$, но на Большом отрезке этот максимум, скорее всего, сдвинется к типам $T = 10^8 \div 10^9$ (несколько больше, чем в редких мирах?).

1.31. КРАТНОСТЬ ЧИСЕЛ ИЗ ЧАСТЫХ МИРОВ

Зная каноническое разложение (1) любого нижнего лидера и используя формулу Валлиса (116), несложно найти кратность любого нижнего лидера мира с номером T (где T – удвоенные простые числа):

$$KR_{min} = (1 - 2^{-T/2}) \cdot 8/3. \quad (135)$$

Таким образом, кратность нижних лидеров очень быстро устремляется к значению $8/3 = 2,666\dots$

Максимально возможная кратность (кратность верхних лидеров), определяется кратностью главных лидеров, которую находим из МГЛ:

$$KR_{max} \approx 1,804 \cdot \ln PV - 0,2155. \quad (136)$$

В конце Большого отрезка кратность в частых мирах при этом должна достигать $KR_{max} \approx 8,6$. Средняя кратность лидеров определяется формулой:

$$KRS \approx 1,3718 \cdot \ln PV + 0,0356. \quad (137)$$

С ростом N отношение KRS/KR_{max} убывает, устремляясь, вероятно, к некому числу (в конце рабочего отрезка имеем 0,784). Возможно, это число равно $e/2\pi^{-1/2} \approx 0,7668$, поскольку кратности можно представить в виде:

$$KR_{max} \approx 1,7724 \cdot \ln \ln N \approx \sqrt{\pi} \cdot \ln \ln N, \quad (138)$$

$$KRS \approx 1,3591 \cdot \ln \ln N \approx 0,5 \cdot e \cdot \ln \ln N. \quad (139)$$

Формула (138) в конце Большого отрезка дает $KR_{max} \approx 8,6 \div 8,76$ (“магия” числа 7 ± 2 , но в конце БО). Таким образом, можно утверждать, что максимально возможная кратность чисел в частых мирах больше максимально возможной кратности чисел в редких мирах в $(\pi e)^{1/2} \approx 1,075$ раза.

Общая картина с кратностями всех чисел (не только лидеров) в частых мирах аналогична редким мирам: чем больше номер мира (T), тем больше кратность у лидера этого мира, а внутри каждого мира кратности убывают, стремясь на бесконечности к единице. Причем, если в удвоенных мирах кратности “ложатся” на некую линию, то в остальных частых мирах кратности чисел образуют многоуровневый “шлейф” убывающих значений.

Сумма кратностей всех чисел (а не только лидеров) из частых и редких миров на отрезке от 1 до N , вероятно, стремится к значению:

$$\sum KR \approx 1,6487 \cdot N \approx e^{1/2} \cdot N. \quad (140)$$

Если это справедливо, то средняя кратность всех чисел из всех миров стремится к $e^{1/2}=1,648\dots$. По крайней мере, у первых 30000 натуральных чисел средняя кратность достигает значения, равного 1,644773.

1.32. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПОВ ПО ПЯТИ КЛАССАМ

Типы частых лидеров – это четные натуральные числа и как всякие натуральные числа их можно отнести к одному из трех классов: 26, 46, 66 (см. п.1.2). Поэтому будем говорить, например, что типы $T=6, 12, 18, 24, 30, \dots$ принадлежат классу 66 (из класса 66). Так вот оказывается, что отношение количества лидеров с типами из класса 66 (K_{66}) к общему количеству всех частых лидеров (K) растет от значения $1/3$ по следующему закону:

$$K_{66}/K \approx (1 + 4,12/N^{0,5})^{-1} . \quad (141)$$

Т. е. доля лидеров с типами из класса 66 асимптотически стремиться к 100%, а в конце Большого отрезка она составляет около 74,2%. Еще быстрее растет доля *верхних* лидеров с типами из класса 66 среди всех верхних лидеров; в конце Большого отрезка она, вероятно, составляет около 95%. Возможно, при $N > 4,4 \cdot 10^{18}$ у верхних лидеров типы только из класса 66.

Отношение количества лидеров с типами из класса 26 (K_{26}) к количеству лидеров из класса 46 (K_{46}), вообще говоря, убывает от 2 до 1, причем параметр K_{26}/K_{46} совершает затухающие колебания около значения 1 и, например, при $N \approx 10^{32}$ среднее арифметическое всех значений K_{26}/K_{46} равно 1,00257... . Таким образом, лидеры с типами из классов 26 и 46 стремятся друг к другу в части количества, т. е. в этом отношении лидеры ведут себя, как и все остальные натуральные числа с типами из классов 26 и 46.

Из анализа МЛ частых миров следует, что на любом отрезке от 1 до N появятся все типы из класса 66 (поряд, без пропусков) до типа T_{min} :

$$T_{min} = (6/\ln 2) \cdot \ln(N/3) \approx 8,6562 \cdot \ln(N/3) . \quad (142)$$

Так, на Большом отрезке должны появиться все типы (без пропусков) из класса 66 до $T_{min}=1206$ (это 201-ое натуральное число из класса 66).

Типы редких лидеров – это нечетные натуральные числа, которые принадлежат классу 14 или 34. Отношение количества лидеров с типами из класса 34 (K_{34}) к количеству всех редких лидеров (K), вообще говоря, убывает от 1 до 0,5, причем параметр K_{34}/K совершает затухающие колебания около значения 0,5 и, например, при $N \approx 2 \cdot 10^{48}$ среднее арифметическое всех значений K_{34}/K равно 0,49974... . Таким образом, типы редких лидеров стремятся распределиться поровну между классами 14 и 34, т. е. в этом отношении редкие лидеры ведут себя, как и все остальные натуральные числа с типами из классов 14 и 34.

Из анализа МЛ редких миров следует, что на любом отрезке от 1 до N появятся все типы из класса 34 (поряд, без пропусков) до типа T_{min} :

$$T_{min} = \ln N / \ln 2 + 1 \approx 1,4427 \cdot \ln N + 1 \quad (143)$$

Так, на Большом отрезке появились все типы (без пропусков) из класса 34 до $T_{min}=203$ (это 51-ое натуральное число из класса 34).

1.33. ПАУЗЫ, ЭОНЫ, СТВОРЫ РЕДКИХ МИРОВ

Рассматривая процесс образования различных миров, мы часто будем отождествлять натуральные числа N с моментами времени, выраженными в *эви* (напомним, что $1 \text{ эви} \approx 5,39 \cdot 10^{-44}$ секунд, а 1 год = 365 дней $\approx 5,84 \cdot 10^{50}$ *эви*, см. также «Ведение»). Это делает изложение ГТНЧ более наглядным.

Начнем с изучения того, как ведет себя разность между соседними лидерами редких миров (расположенными в порядке их появления):

$$P_i \equiv N_{i+1} - N_i \quad (144)$$

Эту разность, равную «времени», прошедшему до появления следующего лидера, будем называть *паузой* i -го мира. Паузы миров хаотически колеблются в своеобразном *восходящем* «луче», т. е. все паузы расположены между нижней и верхней границами. На Большом отрезке *верхнюю границу*

(P_{max}) образуют 578 лидеров: их паузы (*верхние паузы*) растут по закону:

$$P_{max} \approx \exp[0,8729 \cdot (\ln N)^{1,018}] \quad (145)$$

Реальные верхние паузы совершают колебания с $ОП = \pm 50\%$ у верхней границы P_{max} : 276 пауз превосходят верхнюю границу, а 302 паузы – “не дотягивают” до границы, т. е. P_{max} – это некая *виртуальная* граница.

Нижнюю границу (P_{min}) на Большом отрезке образуют 328 лидеров, их паузы (*нижние паузы*) растут с удалением правой границы N по закону:

$$P_{min} \approx \exp[0,6438 \cdot (\ln N)^{1,0625}] \quad (146)$$

Однако некоторые реальные нижние паузы могут на порядок превышать виртуальную нижнюю границу P_{min} , либо почти на два порядка быть ниже её. А всё дело в том, что БО в части поведения нижних пауз явно делится на 5 участков, которые мы будем называть *эонами*. (Эоны – это промежутки времени в геохронологии Земли, отвечающие наиболее крупным подразделениям общей стратиграфической шкалы. Их только два: криптозой и фанерозой). В каждом эоне нижняя граница пауз описывается уравнением:

$$P_{min} \approx \mathcal{E} \cdot N^s, \quad (147)$$

где числовой коэффициент \mathcal{E} постоянен для данного эона (табл.13) и *скачком* убывает при переходе к последующему эону, а показатель степени $s=1$ для всех эонов, кроме первого, где $s \approx 0,7271$ (эпицентр сингулярности). Реальные нижние паузы, вообще говоря, весьма точно лежат на такой ступенчатой нижней границе ($ОП < 0,007\%$), особенно в 4 и 5 зонах. Во всех зонах некоторые реальные нижние паузы могут “проваливаться” ниже виртуальной границы Π_{min} ; а два самых крупных провала были при $N \approx 6,67 \cdot 10^{13}$ ($3,6 \cdot 10^{-30}$ секунды), когда реальная пауза оказалась в 6,3 раза меньше Π_{min} и при $N \approx 2,85 \cdot 10^{60}$ (4,9 млрд. лет), когда реальная пауза ($\Pi=133$ года) оказалась в 4,5 раза меньше $\Pi_{min} \approx 603$ года.

Все 120000 реальных пауз Π на Большом отрезке образуют довольно узкий “луч”, направленный под некоторым углом к оси времени N . Построение линии тренда для этого луча пауз приводит к уравнению

$$\Pi_o \approx \exp[0,7997 \cdot (\ln N)^{1,0317}] \quad (148)$$

Π_o – это *местная средняя пауза* (в малой области перед самим числом N).

Также можно говорить о глобальной *средней паузе* (Π_s), под которой будем понимать среднее арифметическое всех пауз на отрезке от 1 до N :

$$\Pi_s \equiv \sum \Pi_i / i \approx \exp[0,695 \cdot (\ln N)^{1,0561}] \quad (149)$$

Относительная погрешность средней паузы Π_s в 1-м эоне изменяется от +78% до -100%, а затем убывает и после $N \sim 10^{30}$ эви имеем $ОП = \pm 7\%$. Кстати, значение местной средней паузы Π_o всегда превосходит среднюю паузу Π_s , т. е. отношение Π_o / Π_s растет от 1 до 13,8 в конце Большого отрезка.

Таблица 13. Эоны, паузы и количество редких миров

Эон	N , эви	секунд	\mathcal{E}	Кол-во миров	Π_{min}	Π_o	Π_{max}
					эви	эви	эви
1	4,0E+00	2,2E-43	2,4022E+00				
2	2,1E+07	1,1E-36	5,2151E-03	0,04%	1E+05	3E+06	5E+06
3	1,4E+15	7,7E-29	4,8845E-04	0,28%	7E+11	4E+13	1E+14
4	1,4E+24	7,7E-20	1,2093E-05	1,39%	2E+19	9E+21	5E+22
5	1,6E+34	8,5E-10	1,2372E-07	5,78%	2E+27	3E+31	2E+32
5	4,9E+38	2,6E-05	0,00003 сек	10,06%	6E+31	5E+35	4E+36
5	5,5E+42	3,0E-01	0,3 сек	16,06%	7E+35	3E+39	3E+40
5	1,9E+46	1,0E+03	17,2 мин	23,66%	2E+39	8E+42	9E+43
5	7,1E+49	3,8E+06	44,6 дней	34,40%	9,Е+42	2,Е+46	2,Е+47
5	3,2E+53	1,7E+10	548 лет	49,61%	4,Е+46	7,Е+49	9,Е+50
5	1,6E+57	8,7E+13	2,8 млн. лет	70,83%	лет	млн.лет	млн.лет
5	4,7E+60	2,5E+17	8 млрд.лет	97,57%	990	0,9	13,1
5	5,8E+60	3,1E+17	10 млрд.лет	98,45%	1237	1,2	16,2
5	7,6E+60	4,1E+17	13 млрд.лет	99,49%	1608	1,5	20,9
5	8,6E+60	4,6E+17	15 млрд.лет	100%	1822	1,7	23,6
5	1,0E+61	5,4E+17	17 млрд.лет		2117	2,0	27,4

Рассматривая паузы миров, введем еще одно интересное понятие. Будем называть отношение виртуальной верхней границы к реальным нижним паузам – **реальным створом** ($ST \equiv \Pi_{max}/\Pi_{min}$), а их некие усредненные значения – **средним створом** (ST_0), уравнение которого имеет вид

$$ST_0 \approx \exp[0,2497 \cdot (\ln N)^{0,7703}] \quad (150)$$

Реальный створ в каждом эоне, кроме 1-го, образует явно выраженную ступень (рис.24), и самая большая из них – ступень 5-го эона. Убывание (сужение) реального створа внутри каждого эона происходит потому, что нижняя граница Π_{min} растет быстрее, чем верхняя граница Π_{max} . Это можно легко выявить, введя параметр $V \equiv (\Pi_{min2}/\Pi_{min1})/(\Pi_{max2}/\Pi_{max1})$ – условная скорость роста границ внутри эона, где индексы “1” относятся к началу эона, а индексы “2” – к любому другому моменту времени этого же эона. Например, в конце 1, 2, 3, 4-го эонов параметр V достигал соответственно 2,67; 2,43; 2,25; 2,15, а вот в 5-м эоне в конце Большого отрезка имеем $V \approx 7,76$. Следует подчеркнуть, что мы пока не знаем, где находится конец 5-го эона, т. к. для этого

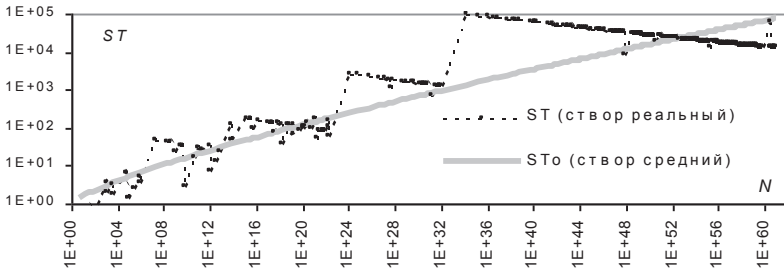


Рис. 24. Реальный и средний створ в редких мирах

надо построить **большую матрицу лидеров**, у которой количество столбцов $j > 21$.

Виртуальные паузы в конце Большого участка можно вычислять довольно точно, причем по очень простым формулам. Так, для отрезка $N \approx 14 \div 17115$ млн. лет ($N \approx 8,18 \cdot 10^{57} \div 10^{61}$ эву) справедливы формулы, где N подставляем в млн. лет, а все паузы получаем в годах:

$$P_{max} \approx 2331 \cdot N^{0,949}, \quad (151)$$

$$P_o \approx 163,24 \cdot N^{0,9662}, \quad (152)$$

$$P_s \approx 12,308 \cdot N^{0,96}, \quad (153)$$

$$P_{min} \approx 0,12372 \cdot N, \quad (154)$$

$$K \approx 81311 \cdot N^{0,04}. \quad (155)$$

Относительная погрешность при этом составляет: $\pm 40\%$ – для P_{max} и $\pm 0,08\%$ – для P_s , P_{min} и K (K – это количество редких миров на отрезке от 1 до N).

На рис.26 представлены результаты расчетов по этим формулам, причем для наглядности точками показаны только каждая сотая реальная пауза (P), всего же на отрезке $N \approx 14 \div 17115$ млн. лет около 29700 пауз (актов «рождения» новых редких миров). Таким образом, с удалением правой границы N виртуальные паузы P_{max} , P_o , P_s , P_{min} увеличиваются, или, иначе говоря, скорость образования миров (мирообразование) в целом замедляется. К моменту зарождения планеты Земля (скажем, через 10 млрд. лет от Начала, см. табл.13) – уже существовало 98,45% всех редких миров. Возраст Земли составляет около 5 млрд. лет и за это время возникло всего лишь 1,55% всех редких миров (~1840 миров). Реальные паузы (P) указанных 1840 миров (за время существования Земли) изменялись от 1491 года до 20409067 лет. Распределение реальных пауз по продолжительности в годах представлено на рис.25, где K – количество таких пауз в процентах от общего их количества

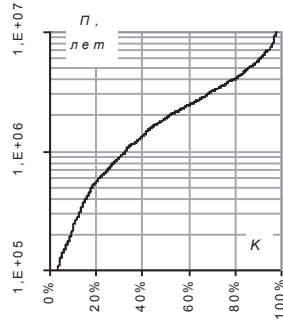


Рис. 25. Реальные паузы (P)

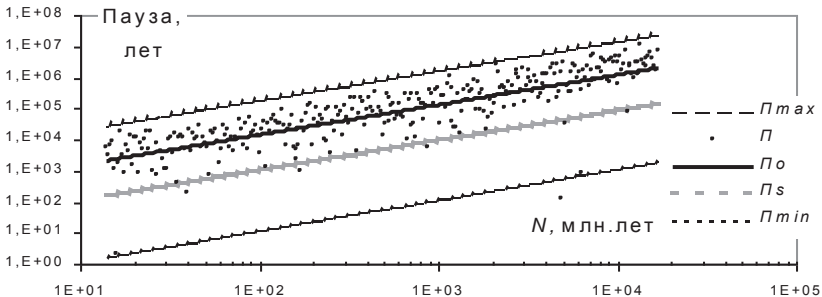


Рис. 26. Паузы редких миров в конце Большого отрезка

(1840). Из этого распределения, например, видно, что около 80% пауз не превышали 4 млн. лет.

1.34. КОЛИЧЕСТВО РЕДКИХ МИРОВ

При построении МЛ мы нашли 120000 редких миров на Большом отрезке. А можно ли описать количество редких миров (K) аналитически? Самое простое выражение здесь имеет тот же вид, что и для виртуальных пауз:

$$K \approx \exp[0,9982 \cdot (\ln N)^{0,4983}] \quad (156)$$

Однако, только после $N \sim 10^{17}$ эви эта формула дает $ОП = \pm 5\%$.

Можно выразить количество миров (с $ОП = \pm 40\%$), используя МГЛ:

$$K \approx \exp[0,8795 \cdot (\ln PV)^{1,7474}] \quad (157)$$

Относительную погрешность удастся уменьшить до $\pm 5\%$, если описывать количество редких миров «навороченной» рекуррентной формулой:

$$K_{j+1} \approx K_j \cdot (N_{j+1} / N_j)^{V_j}, \quad (158)$$

где $j=1, 2, 3, \dots, 20$; $N_j - j$ -й главный лидер из МГЛ; $K_1 = 0,78$;

$V_j = 1,05 \cdot A \cdot P_j^{-B}$; $A = 0,9437 \cdot P_j^{-0,0996}$; $B = 0,967 \cdot P_j^{-0,0948}$; $P_j = 2, 3, 5, \dots, 71$.

Формула (158) определяет порядковый номер $(j+1)$ -го главного лидера в общем ряду всех лидеров, если известен такой номер у j -го главного лидера.

Оценивать количество миров на отрезке от 1 до N позволяет также средняя пауза Ps (это пригодится потом в частых мирах). Действительно, поскольку сумма всех пауз (начиная с паузы первого лидера и заканчивая паузой K -го лидера) сводится к разности $N_K - N_1$, то $Ps \equiv (N_K - N_1) / K \approx N / K$, откуда $K^* \approx N / Ps$. Причем, если брать реальные N и Ps , то относительная погрешность убывает по закону $ОП \equiv (K - K^*) / K^* \leq N^{-a}$, где $a = e^{-\pi}$. Разумеется, если брать произвольное N и Ps , вычисляемое по формуле (149), то количество редких миров $K^* \approx N / Ps$ не будет отличаться особой точностью (только после $N \sim 10^{30}$ эви будем получать $ОП = \pm 7\%$).

1.35. ПАУЗЫ, ЭОНЫ, СТВОРЫ ЧАСТЫХ МИРОВ

Для частых миров можно повторить все рассуждения по мирообразованию, которые приведены в редких мирах. Однако не следует забывать, что рабочий отрезок в частых мирах существенно короче Большого отрезка, поэтому экстраполяция формул таит в себе немалые погрешности.

Паузы частых миров также хаотически колеблются в «луче» между нижней и верхней границами. На рабочем отрезке *верхнюю границу* (Ps_{max}) образуют 294 лидера, их паузы (*верхние паузы*) растут по закону

$$P_{max} \approx \exp[0,8355 \cdot (\ln N)^{1,0232}] \quad (161)$$

Нижнюю границу (P_{min}) на рабочем отрезке образуют 98 лидеров, их паузы (нижние паузы) растут с удалением правой границы N по закону:

$$P_{min} \approx \exp[0,4353 \cdot (\ln N)^{1,1423}] \quad (162)$$

Реальные нижние паузы могут на порядок отличаться от нижней границы, заданной уравнением (162). Это объясняется наличием четырех эонов на рабочем отрезке в частых мирах. В каждом эоне нижняя граница имеет вид

$$P_{min} \approx \mathcal{E} \cdot N^s, \quad (163)$$

где коэффициент \mathcal{E} убывает скачком при переходе к последующему эону (табл.14, где все данные после 4-го эона – только гипотеза), а показатель степени $s=1$ для всех эонов, кроме первого, где $s \approx 0,6072$ (эпицентр сингулярности). Во всех эонах некоторые реальные нижние паузы могут “проваливаться” ниже виртуальной границы P_{min} . Начало у первых четырех эонов в частых и редких мирах практически совпадает.

Таблица 14. Эоны, паузы и количество частых миров

Эон	N , эви	секунд	\mathcal{E}	Кол-во миров	P_{min} эви	P_o эви	P_{max} эви
1	2,0E+00	1,1E-43	1,7308E+00				
2	2,3E+08	1,2E-35	2,4420E-04	0,02%	6E+04	7,Е+06	4E+00
3	6,7E+13	3,6E-30	9,5260E-06	0,11%	6E+08	5,Е+11	3E+07
4	7,1E+22	3,8E-21	1,2116E-06	0,73%	9E+16	1,Е+20	3E+12
5	1,0E+33	5,4E-11	7,0000E-08	3,24%	7E+25	4,Е+29	6E+20
?	4,9E+38	2,6E-05	0,00003 сек	8,26%	3E+31	1,Е+35	3E+30
?	5,5E+42	3,0E-01	0,3 сек	13,77%	4E+35	9,Е+38	7E+35
?	1,9E+46	1,0E+03	17,2 мин	20,99%	1E+39	3,Е+42	5E+39
?	7,1E+49	3,8E+06	44,6 дней	31,52%	5E+42	8,Е+45	1E+43
?	3,2E+53	1,7E+10	548 лет	46,89%	2E+46	3,Е+49	3E+46
?	1,6E+57	8,7E+13	2,8 млн. лет	68,91%	лет	млн.лет	млн.лет
?	4,7E+60	2,5E+17	8 млрд.лет	97,39%	370	0,7	1,2
?	5,8E+60	3,1E+17	10 млрд.лет	98,34%	460	0,9	1,5
?	7,6E+60	4,1E+17	13 млрд.лет	99,45%	600	1,2	1,9
?	8,6E+60	4,6E+17	15 млрд.лет	100%	690	1,3	2,1
?	1,0E+61	5,4E+17	17 млрд.лет		800	1,5	2,5

Все 22163 реальных паузы P на рабочем отрезке образуют довольно узкий “луч”, направленный под некоторым углом к оси времени N . Построение линии тренда для этого луча пауз приводит к уравнению

$$P_o \approx \exp[0,673 \cdot (\ln N)^{1,0662}] \quad (164)$$

P_o – это местная средняя пауза (в малой области перед самым числом N).

Также можно говорить о глобальной средней паузе (P_s), под которой будем понимать среднее арифметическое всех пауз на отрезке от 1 до N :

$$P_s \equiv \sum P_i / i \approx \exp[0,5734 \cdot (\ln N)^{1,0956}] \quad (165)$$

Понятия “реальный створ” и “средний створ” также хорошо срабатывают в частых мирах, как и в редких мирах, при этом повторяется главная

закономерность – глобальный рост среднего створа и локальное убывание реального створа внутри каждого эона (см. рис.24).

1.36. КОЛИЧЕСТВО ЧАСТЫХ МИРОВ (ВСЕХ МИРОВ)

Между количеством частых миров (K_2) и количеством редких миров (K_1) выявляется красивая взаимосвязь (на отрезке от 1 до N):

$$K_2 \approx K_1 \cdot 0,6692 \cdot (\ln N)^{0,4343} \approx K_1 \cdot \lg F \cdot (\ln N)^{\lg e}, \quad (166)$$

где $F=4,669$ – число Фейгенбаума; $e=2,718$ (после $N \approx 10^8$ формула дает $ОП < \pm 4\%$). В конце Большого отрезка (при $N \approx 8,6 \cdot 10^{60}$) формула дает $K_2 \approx 687430$, т. е. частых миров примерно в 5,7 раза больше, чем редких миров.

С другой стороны, количество миров можно оценить через среднюю паузу $П_s$ (см. п. 1.34), поэтому: $K \approx N/П_s \approx 8,6 \cdot 10^{60} / 1,31 \cdot 10^{56} \approx 76510$ миров, чего быть никак не может, а значит, среднюю паузу $П_s$ мы завысили на порядок (из-за малости рабочего отрезка). Т. е. можно ожидать, что реальные минимальные паузы в частых мирах составляют всего *десятки лет*, а не сотни лет как показано в табл.14, где $П_{max}$, $П_{min}$, $П_0$ в конце Большого отрезка получены по формулам (161), (162), (164).

Если рассматривать все лидеры вместе (и частых, и редких миров), то ($K+1$)-го лидера можно примерно указать по рекуррентной формуле:

$$N_{K+1} \approx N_K \cdot (1+K^{-1})^b, \quad \text{где } b=2 \cdot K^{1/F}; \quad (167)$$

$K=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер лидера; $N_1=2$ – первый лидер; $F=4,669\dots$ – число Фейгенбаума. Эта рекуррентная формула позволяет оценивать количество лидеров всех миров (K) на отрезке от 1 до N_K . Так, в конце Большого отрезка (при $N \approx 8,6 \cdot 10^{60}$) получаем $K=416500$, что, вероятно, всего в два раза меньше реального количества ($120000+687430=807430$ миров). Формулы (166) и (167) говорят о возможной глубокой связи числа Фейгенбаума с процессами миробразования в ряду натуральных чисел.

Таблица 15. Количество редких миров ($K1$) и всех миров (K) на отрезке $[1;N]$

N	$K1$	K	N	$K1$	K	N	$K1$	K
36	3	7	1,04E+20	837	3746	1,00E+41	15714	9,14E+04
64	4	10	1,01E+21	989	4508	1,00E+42	17609	1,03E+05
144	5	12	1,01E+22	1175	5429	1,00E+43	19735	1,17E+05
1024	8	22	1,01E+23	1383	6491	1,00E+44	22033	1,31E+05
14400	14	40	1,00E+24	1615	7740	1,00E+45	24609	1,48E+05
129600	21	63	1,01E+25	1901	9181	1,00E+46	27402	1,66E+05
1166400	31	96	1,00E+26	2212	10843	1,00E+47	30485	1,86E+05
1,13E+07	42	137	1,01E+27	2566	12780	1,00E+48	33887	2,09E+05
8,54E+07	57	188	1,00E+28	2968	14961	1,26E+49	38007	2,36E+05
1,02E+08	58	191	1,00E+29	3414	17468	1,00E+50	41662	2,61E+05
1,07E+09	76	266	1,01E+30	3935	20358	9,96E+50	46144	2,91E+05
1,02E+10	101	360	1,00E+31	4516	23647	1,21E+52	51459	3,27E+05
1,11E+11	131	486	9,94E+31	5151	27306	1,00E+53	56292	3,60E+05
1,10E+12	166	635	1,00E+33	5894	3,16E+04	9,99E+53	62131	4,00E+05
1,04E+13	209	811	1,00E+34	6725	3,65E+04	1,00E+55	68476	4,44E+05
1,02E+14	261	1037	1,00E+35	7616	4,18E+04	1,03E+56	75471	4,92E+05
1,03E+15	321	1309	1,00E+36	8650	4,79E+04	1,18E+57	83417	5,48E+05
1,02E+16	393	1633	1,00E+37	9794	5,48E+04	1,00E+58	91049	6,01E+05
1,01E+17	477	2028	1,00E+38	11042	6,24E+04	1,05E+59	100050	6,65E+05
1,01E+18	578	2502	1,00E+39	12445	7,10E+04	1,06E+60	109780	7,34E+05
1,03E+19	697	3074	1,00E+40	14008	8,07E+04	1,00E+61	120000	8,08E+05

1.37. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧИСЛА

Как мы уже знаем, в *простых мирах* делители любого числа N растут по экспоненте, а делители *лидеров удвоенных миров* – почти по экспоненте (см. п.1.19). Но у чисел из других миров делители распределяются более затейливым образом. Рассмотрим, например, число $N=19.999.980.000$ из мира №1920. Все его 1920 делителей имеют *логарифмически нормальное распределение* (для краткости – *логнормальное распределение*), в чем легко убедиться, если построить график зависимости количества делителей K от величины самих делителей D (рис.27). Данный график говорит о том, что, например, если $10^2 < D < 10^3$, то количество таких делителей будет $K=148$; если $10^3 < D < 10^4$, то количество таких делителей будет $K=286$ и т. д. Иначе говоря, величина $\ln D$ имеет *нормальное распределение* (об этом свидетельствует почти идеальный «колокол» на графике), а значит, сами делители D подчиняются *логнормальному* распределению (поскольку на рис.27 по оси абсцисс – логарифмическая шкала). Такое распределение делителей приво-

дит к тому, что по количеству больше всего делителей “принадлежат” среднему диапазону $10^4 < D < 10^7$, а количество как очень малых, так и очень больших делителей – совсем ничтожно.

Кстати, в реальном мире найдется бесконечно много аналогий нормальному распределению (образующему «колокол»). Например, средний рост мужчин в нашей стране равен 168 см (это вершина «колокола») и совершенно очевидно, что мужчины ростом 272 см (американец Роберт Уодлоу, умер в 1940 г.) или ростом 57 см (Гуль Мухаммед из Индии, умер в 1997 г. в возрасте 36 лет) – будут очень редким исключением среди нескольких миллиардов мужчин планеты. А вот если мы возьмем «мощность» интеллекта

людей, или объем их финансовых капиталов (что совсем не обязательно коррелирует с интеллектом, см. п. 5.5), то здесь мы уже столкнемся с логнормальными распределениями, поскольку различия в интеллекте или в капиталах достигнут несколько порядков, т. е. почти как у делителей рассмотренного нами числа N . Вообще-то понятие о логнормальном распределении относится к высшей математике, и там всё далеко не так просто, однако, даже наши “примитивные” рассуждения позволяют получить интересные результаты.

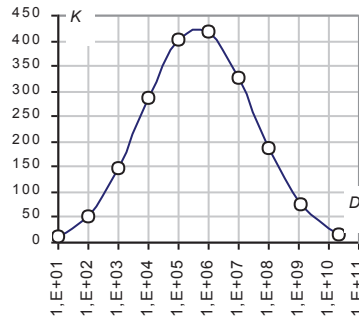


Рис. 27. «Колокол» для делителей числа $N=19.999.980.000$

А можно ли распределение делителей числа $N=19.999.980.000$ описать некой формулой? Попробуем это сделать, для чего построим график зависимости величины делителя D (в логарифмической шкале) от его порядкового номера x (рис. 28). В этом случае делители числа N образуют волнистую линию, напоминающую классическую **тильду** (~) с приподнятым правым краем (кстати, у каждого компьютера есть клавиша с символом “~”). Нетрудно убедиться, что делители многих натуральных чисел образуют подобные тильды, поэтому можно считать, что в данном параграфе мы рассматриваем типичного представителя, скажем, **тильда-чисел**. Будем говорить, что делители таких чисел имеют **тильда-распределение**, и будем подразумевать, что это верный признак логнормального распределения делителей. Оказывается, что тильду более или менее точно можно описать некой функцией (**тильда-функцией**), имеющей следующий вид:

$$D^* = S \cdot \exp \left[-A \cdot \left(\ln \frac{K}{x} \right)^p \right], \quad (168)$$

где $x=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер делителя (они идут по возрастанию);

D^* – мнимый делитель (значение, близкое к реальному делителю D);
 K – количество всех делителей у натурального числа N (тип числа N);
 S – сумма всех делителей (*богатство* натурального числа N);
 A и p – числовой коэффициент и показатель степени (параметры).

Наибольший мнимый делитель (при $x=K$) разумно определять как разность между богатством числа N и суммой всех предшествующих делителей:

$$D_k = S - (D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_{k-1}). \quad (169)$$

Сумму всех делителей числа N (включая 1 и само N) можно найти по формуле Валлиса (116), если известно каноническое разложение числа N .

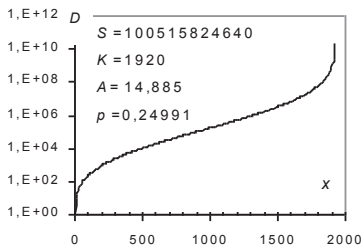


Рис. 28. Тильда-функция (тильда)

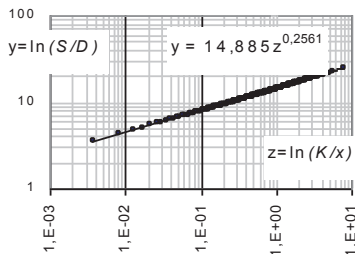


Рис. 29. Нахождение параметров тильды

Параметры тильды (A и p) легко найти, если построить график (рис.29) зависимости $y=f(z)$, где $y=\ln(S/D)$ и $z=\ln(K/x)$ – некие комплексы. На этом графике компьютер легко выдает *параметры степенной линии тренда* – это и будут искомые параметры A и p . Останется только немного изменить показатель степени p , «вогнав» значение наибольшего делителя (D_k) максимально близко к числу N (и стараясь “не испортить” остальные значения).

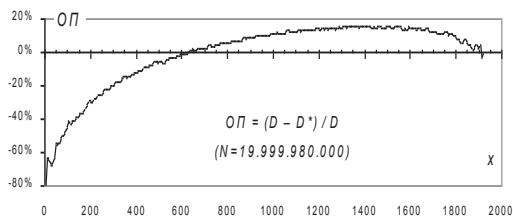


Рис. 30. Относительная погрешность тильды

Найденные параметры (S , K , A , p) *тильда-распределения* числа N позволяют вычислить его делители с некой относительной погрешностью ($ОП$), которая представлена на рис.30. Данная картина (качественно) является вполне типичной для многих тильда-чисел N . Очевидно, что с ростом

N относительные погрешности численно будут увеличиваться.

Что касается параметров тильды (S , A , p), то внутри конкретного типа чисел ($K=const$) они, вообще говоря, увеличиваются с ростом числа N . Так,

например, для мира №45 (количество делителей $K=45$) эту зависимость можно выразить следующими эмпирическими соотношениями:

$$S \approx 7,1308 \cdot N^{0,9138}; \quad A \approx 1,2629 (\ln N)^{0,7456}; \quad p \approx 0,0694 (\ln N)^{0,7209}. \quad (170)$$

Однако и здесь всё не просто. Это иллюстрирует рис.31, на котором представлено распределение делителей у четырех чисел из мира №45. Если у первого числа ($n=1, N=3600$) делители образуют стройную тильду, то у 1128-го числа ($N=132.595.225$) тильда уже имеет ступенчатый вид, а у соседнего с ним 1134-го числа делители выстраиваются почти по экспоненте. Многообразие «картинок» в части распределения делителей у чисел, вероятно, связано с тем, что *кратность богатства* внутри мира носит, вообще говоря, многоуровневый псевдослучайный характер (см.п.1.26, 1.31).

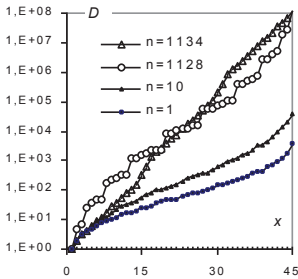


Рис. 31. Тильды из мира №45

Следует обратить внимание на то, что тильда-распределение на графике вовсе не обязательно образует “волну” (тильду), а главное, чтобы это распределение описывалось формулой (168). Так, например, *первые 3, 4, 5, 6, 7, 8 членов ряда Фибоначчи* (см. п. 2.3) образуют 6 тильда-распределений с точностью до целого числа, но тильды (в виде волны) на графике не наблюдается.

Рассматривая вопрос о распределении всех делителей натурального числа, мы не должны забывать, что достаточно найти только *малые делители* числа N , а остальные делители – просто их антиподы (п. 1.3). С этой точки зрения можно попытаться описать аналитически исключительно малые делители. Например, для выбранного выше числа $N=19.999.980.000$ x -й малый делитель (всего их $1920/2=960$) описывается следующей функцией:

$$D \approx \exp(M \cdot x^m), \quad (171)$$

где $M=1,0501$; $m=0,3516$ – некие параметры для выбранного числа N . Относительная погрешность этой формулы составляет $\pm 15\%$, что меньше, чем у тильда-распределения. Малую погрешность обеспечивает также сложный, но любопытный сам по себе метод, когда вычисление $(x+1)$ -го делителя числа N производится по рекуррентной формуле:

$$D_{x+1} = (Z+1/1^n)(Z+1/2^n)(Z+1/3^n) \cdot \dots \cdot (Z+1/x^n), \quad (172)$$

где $Z=1,0035$; $n=1,163$ – параметры, для исследуемого нами числа N .

Формула (171) при $M=0,6$; $m=0,804$ с $ОП=\pm 10\%$ описывает также количество различных разбиений числа $N < 20$ на натуральные слагаемые. Так, число $N=2$ имеет два разбиения: 2 и 1+1; число $N=3$ имеет три разбиения: 3, 2+1, 1+1+1; число $N=4$ имеет пять разбиений: 4, 3+1, 2+2; 2+1+1, 1+1+1+1 и

т. д. Первые натуральные числа $N=1, 2, 3, \dots, 20$ имеют соответственно следующее количество различных разбиений: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627. При $N>20$ формула (171) перестает работать, однако существует замечательный закон *Харди-Рамануджана-Радемахера* (закон *XPP*), который справедлив для любого натурального N :

$$XPP \approx (4 \cdot N \cdot 3^{1/2})^{-1} \cdot \exp[\pi(2 \cdot N/3)^{1/2}] \text{ или } XPP \sim 0,1443 \cdot N^{-1} \cdot \exp(2,5651 \cdot N^{1/2}),$$

где *XPP* – это **количество различных разбиений** числа N на натуральные слагаемые. Модуль относительной погрешности закона *XPP*, вероятно, можно оценить как $\text{abs}(OП) \approx N^{-\lg \pi} \cdot \lg e$. Например, при $N=200$ имеем $OП \approx 3,1\%$ ($XPP=3.972.999.029.388$), а при $N=3445$ имеем $OП \approx 0,8\%$ ($XPP \approx 10^{61}$). Кстати, для любого числа N нетрудно найти все его *слагаемые*, если представить их в виде некоей матрицы с числами 1, 2, 3, ... N ; количество столбцов этой матрицы равно числу N , а алгоритм её построения во многом напоминает построение МКЛ для частных миров (см. п. 1.27).

Красивый закон *XPP* поучителен для нас тем, что формулы из ГТНЧ, как правило, не более чем “бледная тень” *истинных* соотношений, царящих в мире чисел (как наша формула (171) – для случая количества различных разбиений числа N на слагаемые). Это очень важное замечание, о котором следует помнить, работая грубыми «инженерными» методами ГТНЧ.

Что касается малых делителей числа $N=19.999.980.000$, то их распределение также можно описать функцией $D \approx 0,368 \cdot x \cdot \exp(0,188 \cdot x^{1/2})$, которая напоминает закон *XPP*, однако и здесь $OП$ не менее $\pm 15\%$. Поэтому остается признать, что «истинный» закон распределения делителей (и малых делителей) произвольного числа N нами, увы, так и не найден.

Если внимательнее посмотреть на тильду (рис.28), то можно заметить, что ее средняя часть – это практически прямая линия, т. е. большая часть всех делителей «лежит» на некоей экспоненте. Так, у нашего числа $N=19.999.980.000$ около 66% всех “средних” делителей можно описать с $OП=\pm 15\%$ экспонентой $D \approx 485 \cdot \exp(0,0059 \cdot x)$. Таким образом, тильда-функцию на большем участке ее значений можно рассматривать как *псевдоэкспоненту*. Именно поэтому для большинства тильда-распределений с хорошей точностью выполняется закон *Бенфорда* (см. п. 3.1).

Необходимо заметить, что не только тильда служит «лакмусовой бумажкой» логнормального распределения делителей. Можно привести пример еще одного косвенного признака. Покажем это на примере другого числа, скажем, $N=9.999.990.000$ (кстати, с идеальной тильдой). Все его делители образуют ряд из 1602 чисел, в котором числа распределяются крайне неравномерно. Так, на отрезке $[1, 200000]$, составляющем всего 0,002% от “длины” числа N (100% – это само число N), содержится более половины всех его делителей – 911 штук (~57%). Если же указанный отрезок в свою очередь

разбить, скажем, на 20 равных участков длиной $L=10.000$, то тогда в каждом из них будет содержаться следующее количество делителей: $K_i=A \cdot (i \cdot L)^{-m}$, где $i=1, 2, 3, \dots, 20$ – порядковый номер участка; $A=2 \cdot 10^7$; $m=1,2051$ – параметры при разбиении отрезка на 20 участков (разумеется, они изменятся, если взять иной отрезок “внутри” числа N , иную длину участков L и их количество). Т. е. речь идет о том, что наличие тильда-распределения также может «скрываться» за функцией, имеющий вид:

$$K = \text{const} \cdot X^{-m}. \quad (173)$$

Заканчивая разговор о распределении делителей, необходимо еще раз напомнить, что делители чрезвычайно «любят» распределяться по экспоненте. Это идеально получается у всех чисел из простых миров, чуть хуже у лидеров удвоенных миров, в остальных мирах можно встретить все возможные варианты: от плавных «волн» вокруг экспоненты, до хаотичного расположения делителей. Очевидно, вопрос о законах распределения делителей бесконечно богат и весьма сложен, а мы его едва только коснулись.

Тильды в ГТНЧ возникают не только при распределении делителей, но и в других случаях. Например, если рассмотреть *каноническое разложение* (см. п. 1.1) первых 150-ти натуральных чисел (исключив из них 36 простых чисел), то окажется, что встретившийся 21 простой множитель (2, 3, 5, 7, ..., 73) с точки зрения количества повторений также образует тильда-распределение: $S=338$ (суммарное количество повторений всех множителей); $K=21$; $A=5,37$; $p=0,38$. При этом количество появлений (K) конкретного множителя (P) (например, 2 – 145 раз, 3 – 71 раз, 5 – 36 раз и т. д.) довольно точно описывается формулой: $K \approx 362 \cdot P^{-1,39}$, т. е. формулой (173). Вероятно, структура натуральных чисел порождает множество самых разных *логнормальных распределений* подобно реальному пространству-времени, для которого такие распределения – характерное явление (см. п. 5.5÷5.7).

1.38. ПИФТРОЙКИ И ИХ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

Великая теорема Ферма (ВТФ) гласит, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ (174) не имеет решений в целых положительных числах x, y, z для любого натурального числа $n > 2$ (это доказано в 1993 г., см. п. 3.4). Нас будет интересовать единственный случай – когда уравнение (174) имеет решения, т. е. речь пойдет о хорошо известной *теореме Пифагора*: $x^2 + y^2 = z^2$. Кстати, еще за тысячу лет до Пифагора китайцы и вавилоняне использовали эту теорему, однако именно Пифагору (ок.570–ок.500 до н. э.) удалось доказать универсальность этого уравнения для всех прямоугольных треугольников. Заслуга Пифагора в том, что он впервые ввел понятие о математическом доказательстве

теорем, суть которого – безупречно строгие логичные рассуждения, приводящие к абсолютным (математическим) истинам. Теорема Пифагора справедлива только для прямоугольных треугольников и, следовательно, определяет прямой угол, перпендикуляр, т. е. отношение вертикали к горизонтали, а, в конечном счете, – определяет отношение между тремя измерениями нашего мира или самую структуру пространства. Над этим стоит глубоко подумать, особенно с учетом нижеизложенного.

Тройки натуральных чисел, которые являются решением уравнения Пифагора, называются *пифагоровы числа*. Таковыми, например, являются числа 3, 4, 5 или числа 6, 8, 10. Еще Евклид путем простых рассуждений доказал, что существует бесконечно много пифагоровых чисел. Но что такое пифагоровы числа с точки зрения ГТНЧ? Ведь числа x, y, z – это ни что иное, как *номера ступеней* Ствола Пирамиды (рис. 2), а их квадраты – соответствующие числа из *редких миров* $Nx=x^2, Ny=y^2, Nz=z^2$. Таким образом, теорема Пифагора просто утверждает, что в редких мирах существуют числа (Nz), которые равны сумме двух других чисел из редких миров (Nx, Ny). Например, число 25 равно сумме двух чисел: $9+16$, а вот число 36, хотя также из редких миров, но его невозможно представить в виде суммы двух других чисел из редких миров. Кстати, поскольку каждое натуральное число “стоит” на своей ступени Ствола и нет чисел (кроме $N=8$), равных номеру своей ступени в степени выше 2, то в рамках ГТНЧ великая теорема Ферма превращается в совершенно очевидное утверждение, т. к. в уравнении (174) все степени большие второй степени ($n>2$) просто не имеют смысла. Доказательство ВТФ – это, по сути дела, математическое (абсолютно строгое) доказательство того, что все натуральные числа распределены исключительно среди частых и редких миров (т. е. других миров не существует!). Чтобы помнить о такой трактовке данного вопроса мы будем впредь называть пифагоровы числа x, y, z – *пифступенями* (Ствола), а натуральные числа Nx, Ny, Nz – *пифчислами* (не путать с пифагоровыми числами), причем число Nz всегда наибольшее среди них. Пифступени или пифчисла, когда не существенно (или совершенно понятно) о чём именно идет речь, удобно называть *пифтройками*.

Пусть $N=w^2$, где w – это номер ступени Ствола «под» числом N , а по сути w – это *количество ступеней* на отрезке от 1 до N , т. к. любое число N из редкого мира «стоит» исключительно в начале каждой ступени.

Пары-кандидаты в пифтройки на отрезке от 1 до $N=w^2$ – это пары любых натуральных чисел x, y , которые удовлетворяют условию:

$$x^2 + y^2 \leq w^2; \quad x=1, 2, 3, \dots; \quad y=x+1, x+2, x+3, \dots \quad (175)$$

Глядя на формулы (175), нетрудно прийти к выводу, что количество пар-кандидатов (Kp) определяется выражением

$$K_p = \sum \{A[(w^2 - x^2)^{0.5}] - x\}, \quad (176)$$

где A – функция антье (целая часть); $x=1, 2, 3, \dots$ до тех пор, пока очередное слагаемое (в фигурной скобке) не станет равным нулю. Расчет до $w=10^8$ (уже при 10^9 компьютер будет считать около 4 часов) позволяет надеяться, что количество пар-кандидатов стремится к значению

$$K_p \approx 0,3989 w^2 \approx (0,5/\pi)^{0.5} w^2 \approx (0,5/\pi)^{0.5} N. \quad (177)$$

Эта формула дает завышенное значение, реальное количество пар будет всегда меньше: при $N=10^2$ имеем $OIP=-28,7\%$, при $N=10^4$ $-3,8\%$; при $N=10^8$ $-1,6\%$. Возможно, количество всех возможных пар-кандидатов в пифтройки на отрезке от 1 до N стремится примерно к 40% от самого значения N .

Если брать в качестве пифступеней *взаимно простые* числа x, y, z :

$$x=m^2-n^2; \quad y=2mn; \quad z=m^2+n^2, \quad (178)$$

где m и n – целые числа, причем $m>n>0$, то мы будем получать исключительно одни пифтройки. Пифтройки, полученные указанным способом, обладают рядом особых свойств, поэтому будем называть их **особыми** пифтройками. В подтверждение их необычности, например, можно сформулировать, такое правило (не доказанное автором): хотя пифступени x, y, z – взаимно простые числа (не имеют общих делителей), сами пифчисла Nx, Ny, Nz будут взаимно простыми только при условии, если z (Nz) – нечетное число; при четном z (примерно в половине случаев) в пифчислах будут совпадать делители 2, 4, 8, 16, ... Если z (Nz) – нечетное число, то у числа Ny будет наибольший тип (внутри данной пифтройки).

Чтобы найти количество особых пифтроек, надо перебрать все значения $n=1, 2, 3, \dots$ (см. формулы (178)), причем, при каждом из этих значений, в свою очередь, надо перебрать все значения $m=n+1, n+2, n+3, \dots$, до тех пор, пока выполняется условие $m \leq (w - n^2)^{0.5}$. Нетрудно убедиться, что количество особых троек (K_o) определяется выражением

$$K_o = \sum \{A[(w - n^2)^{0.5}] - n\}, \quad (179)$$

где A – функция антье; $n=1, 2, 3, \dots$ до тех пор, пока очередное слагаемое (в фигурной скобке) не станет равным нулю. Расчет до $w=10^{13}$ позволяет надеяться, что количество особых пифтроек стремится к значению

$$K_o \approx 0,3989 w \approx (0,5/\pi)^{0.5} w \approx (0,5/\pi)^{0.5} N^{0.5}. \quad (180)$$

Эта формула дает завышенное значение, реальное количество будет всегда меньше: относительная погрешность при $N=10^4$ составит $-28,7\%$, при $N=10^8$ $-3,8\%$; при $N=10^{16}$ $-1,6\%$. Количество особых пифтроек составляет всего на всего $N^{0.5}$ часть от количества пар-кандидатов: $K_o \approx K_p \cdot N^{-0.5}$. Формула (180) приводит к любопытному утверждению: на отрезке от 1 до N количество особых пифтроек численно стремится к радиусу круга, удвоенная площадь которого равна числу N (поскольку $N \approx 2\pi K_o^2$).

Особые пифтройки далеко не исчерпывают множество всех пифтроек на отрезке от 1 до N . Чтобы найти количество всех возможных пифтроек, очевидно, надо перебрать все значения $x=1, 2, 3, \dots$ (речь об уравнение $x^2+y^2=z^2$), причем при каждом из этих значений, в свою очередь, надо перебрать все значения $y=x+1, x+2, x+3, \dots$ (проверяя условие $z \leq w$, чтобы не выйти за пределы изучаемого отрезка). Такой алгоритм можно реализовать в простенькой программе (всего с десяток строк) в среде *Mathcad-2000*, но даже при $w=45000$ (всего-то $N \approx 2 \cdot 10^9$) ПК *Pentium-III* более 9-ти часов будет “просеивать” все возможные пары-кандидаты x, y (их почти 800 миллионов), чтобы найти в итоге 66922 пифтройки. Для указанного алгоритма время расчета (t , час.) на ПК будет равно $t \approx 1,43 \cdot 10^{-9} \cdot w^{2,1074}$.

В результате исследований на отрезке от 1 до $w=45000$ нетрудно убедиться, что между количеством всех пифтроек (K) и количеством особых пифтроек (K_0) существует связь и справедливы соотношения:

$$K \approx 0,3679 \cdot K_0 \cdot \ln w \approx K_0 \cdot \ln w / e \approx [(0,5/\pi)^{0,5} / e] \cdot w \cdot \ln w. \quad (181)$$

Формула (181) дает завышенное значение: относительная погрешность при $N=10^2$ составит -69% , при $N=10^9$ -6% , т. е. формула традиционно плохо работает в сингулярности, но её *ОП* быстро убывает. Полученное нами выражение ($K \sim w \cdot \ln w$) интересно своим сходством с выражением простого числа через его порядковый номер: $P \sim n \cdot \ln n$. Ситуация такова, что если берем w ступеней Ствола, то количество всех пифтроек – это квазипростое число (как бы простое число) с порядковым номером w . Более того, отношение количества пар-кандидатов к количеству всех пифтроек пропорционально количеству простых чисел: $M \equiv Kp/K \sim w/\ln w$ (параметр M – квазиколичество простых чисел на отрезке от 1 до w). Все это укрепляет уверенность в том, что, по крайней мере, при $N=10^{61}$ ($w \approx 3 \cdot 10^{30}$) мы получаем правдоподобные цифры: количество пар-кандидатов – $Kp \approx 4 \cdot 10^{60}$; количество всех пифтроек – $K \approx 3 \cdot 10^{31}$ (в 10,3 раза больше, чем количество ступеней Ствола); количество особых пифтроек – $K_0 \approx 10^{30}$ (всего 0,0387 часть от всех пифтроек или почти 40% от количества ступеней $-w$).

Среди обыкновенных (не особых) пифтроек могут встречаться также интересные пифтройки. Например, если взять два одинаковых прямоугольных треугольника с длинами сторон $x=210; y=280; z=350$ и сложить их вместе гипотенузами, то получим совершенно удивительный четырехугольник. Все его стороны, диагонали, радиусы различных вписанных и описанных окружностей, расстояния между центрами этих окружностей, между точками касания окружностей со сторонами и диагоналями – целые числа. Возможно, дело в том, что у чисел 210, 280, 350 много общих делителей (82% малых и 27% больших делителей).

Для выявления закономерностей особых пифтроек рассмотрим первые $w=165000$ ступеней Ствола. Всего здесь оказалось $K_o=64452$ особых пифтройки x, y, z . Отсортируем эти тройки по возрастанию старшего члена тройки – z . При этом обнаружим, что пифступень $z=160225$ образуются 12-ю различными парами x и y (т. е. у них одинаковые z). Поэтому будем говорить, что *кратность пифступени z* равна 12 (обозначим $kr=12$), кстати, это максимальная кратность пифступеней для выбранного w . Затем идет $kr=10$ у пифступени $z=138125$. А вот $kr=9$ оказалась уже не у одной, а сразу у пяти различных пифступеней z , которые, таким образом, образуют группу с размером 5 (обозначим $R=5$). Итак, для каждой пифступени z можно указать: kr – кратность пифступени и R – размер группы, к которой принадлежит эта пифступень. Например, для пифступени $z=160225$ имеем: $kr=12$; $R=1$. При выбранном w всего выявляется 11 различных групп, у которых $kr=1\div 10$; 12 ($kr=11$ нет), а $R=1\div 20365$. Общая тенденция такова: *чем меньше кратность пифступеней, тем больше размер группы, в которую эти пифступени объединяются*. Например, пифступени с минимальной кратностью $kr=1$ образуют группу с наибольшим размером $R=20365$. Количественно это выражается экспонентой $R \approx 41315 \cdot \exp(-0,9982 \cdot kr)$, причем реальные размеры групп (R) весьма сильно колеблется вдоль указанной экспоненты, а числовые коэффициенты, разумеется, годятся только для выбранного количества ступеней w .

2. ТАКИЕ РАЗНЫЕ ЧИСЛА

Материал данной главы существенно обогащает общую картину мира натуральных чисел, их внутренней структуры. Но здесь методы изучения чисел, как правило, не относятся к ГТНЧ, а полученные результаты (формулы, теоремы, гипотезы) уже давно известны в математике. Вся математика – это *единый* сложнейший организм, а столь непохожие разделы, существующие в математике, говорят только о неполноте наших знаний. В самом деле, если даже простейшие натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... дали нам повод занять 80 страниц книги, то что же говорить о других математических объектах, какой объем информации скрывается за ними!?

2.1. ЧИСЛО ЭЙЛЕРА (e) И ВЕЗДЕСУЩАЯ ЭКСПОНЕНТА

Число e – это важнейшая фундаментальная константа, которая в высшей математике встречается буквально на каждом шагу (также и в ГТНЧ). Число e обозначает предел, к которому стремится выражение $e^* \equiv (1+1/N)^N$ при

$N \rightarrow \infty$, т. е. при $N=1, 2, 3, \dots$ параметр e^* устремляется к числу $e=2,71828\ 1828\ 45\ 90\ 45\dots$. Относительная погрешность при этом убывает по закону:

$$ОП \equiv (e - e^*)/e^* \leq (2 \cdot N)^{-1} \quad (185)$$

В некотором смысле число e “генерируется” Пирамидой (последовательностью пар чисел N и $N+1$, поскольку $e^* \equiv [(N+1)/N]^N$), причем e^* приближается к числу e довольно медленно. Например, куда быстрее к числу e устремляется сумма бесконечного ряда $e^{**}=1+1/1!+1/2!+1/3!+\dots+1/N!+\dots$, полученная путем разложения e^* по формуле бинома Ньютона. Вторым (и последним) способом представления числа e является бесконечная цепная дробь $e^{***}=2+1/(1+1/(2+2/(3+3/(4+4/(\dots))))))$, которую открыл Л.Эйлер. Кстати, именно гениальный Эйлер первым ввел символ e и сделал так много открытий, связанных с числом e , что, в конце концов, e стали называть **числом Эйлера** (не путать с постоянной Эйлера – $C=0,577\dots$).

Есть много интересных задач с числом e . Приведем только 4 примера.

1) Лучшими приближениями числа e являются дроби $87/32$ и $878/323$, (из чисел-палиндромов, их разность – также палиндром: $878-323=555$).

2) Выражение $y=x^{1/x}$ имеет единственный максимум и именно при $x=e$.

3) Если суммировать случайные числа (от некоего «генератора чисел», работающего в диапазоне $0 \div 1$) до тех пор, пока их сумма не станет больше 1, то среднее значение (математическое ожидание) слагаемых – число e .

4) Любопытна карточная игра «солитер» (условное название) – пример несовершенства нашей интуиции. Пусть игрок записал N карт в *любом* порядке (как ему захотелось). Тщательно перетасовав эти N карт, ведущий выкладывает их на стол по одной (вверх картинкой), одновременно игрок называет одну (очередную) карту из своего перечня. Какова вероятность совпадения названной и положенной на стол карты? Оказывается, что при любом $N \geq 7$ вероятность такого совпадения будет равна $1-1/e \approx 0,632$ (почти 63%)! Например, из 30 партий “солитера” игрок выиграет *примерно* в 19 партиях, но наша интуиция верит в это с трудом, не правда ли? Объяснение такого результата в том, что число “беспорядочных” перестановок из N предметов равно целому числу, ближайшему к дроби $N!/e$. Очередная перестановка N предметов считается «беспорядочной», если *ни один* предмет не занимает своего исходного места (до начала процедуры перестановок). Карты («солитер») – только один из вариантов этой удивительной задачи. Причем в *теории вероятностей* много задач, в которых наша интуиция заставляет нас делать неверные заключения. Такие провалы интуиции свидетельствуют о том, что мозг человека далек ещё от совершенства. При этом становится очевидным, что интуиция не может служить арбитром истины в математике (как и во всём остальном). *Роль арбитра исполняет логика.*

Число e – трансцендентное число (доказал Ш. Эрмит в 1873 г.), т. е. оно не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами, и не существует закона, по которому чередуются цифры после запятой в значении числа e (ещё в 1961 г. с помощью ЭВМ было получено 100265 десятичных знаков). Иногда число e малообоснованно называют *неперовым числом*, по имени изобретателя логарифмов Джона Непера (1550–1617), который использовал в качестве основания число $0,9999999^{10000000}=0,367\dots$ (это меньше $1/e$, но отличия начинаются в восьмой цифре после запятой!).

В математике существует замечательная функция – **экспонента** (экспоненциальная функция), имеющая вид $y=e^x$ или (просто в ином обозначении) $y=\exp(x)$. Таким образом, экспонента – это обычная показательная функция $y=a^x$, у которой $a=e$. Экспонента в точности совпадает со своей производной: $(e^x)'=e^x$. Именно этим и объясняется причина столь частого появления экспоненты в формулах математического анализа.

Обратной к экспоненциальной функции является логарифмическая функция $x=\ln y$, т. е. число e служит основанием *натуральных логарифмов*.

Поскольку геометрическую прогрессию $y_n = y_1 \cdot a^{n-1}$ (y_1 – первый член, a – знаменатель, $n=1, 2, 3, \dots$) можно рассматривать как показательную функцию, где аргумент x принимает только дискретные значения ($x=n-1$), то, очевидно, всякой геометрической прогрессии соответствует экспонента:

$$y_n = (y_1/a) \cdot \exp(n \ln a). \quad (186)$$

Если у экспоненты $y=C \cdot \exp(k \cdot x)$ аргумент x принимает ряд последовательных целочисленных значений, то величина y изменяется в геометрической прогрессии, у которой: первый член $y_1=C \cdot \exp(k)$, а знаменатель $a=\exp(k)$.

Экспонента очень часто встречается в приложениях математики к естествознанию и технике, когда *скорость изменения* какой-либо величины y прямо пропорциональна её наличному значению: $dy/dx=ky$. Решением этого дифференциального уравнения является экспонента

$$y = C \cdot \exp(k \cdot x), \quad (187)$$

где C – начальная величина, k – интенсивность экспоненты. Очевидно, *экспонента есть прямое следствие того, что величина y изменяется независимым образом, случайно*, т. к. скорость ее изменения пропорциональна только самой величине в рассматриваемое мгновение. При $k>0$ (k – постоянная роста) экспонента с увеличением аргумента x довольно быстро (экспоненциально) возрастает и выражает так называемый *закон естественного (органического) роста*, например, рост колонии бактерий, увеличение денежного вклада при постоянном процентном приращении. При $k<0$ (k – постоянная распада, затухания) экспонента с увеличением аргумента x стремится к

нулю. Так протекает, например, процесс радиоактивного распада, затухающие колебания, распространение волн, и т. п. Возьмите и полистайте любой солидный справочник по физике – вы убедитесь, что большинство приведенных там формул содержат экспоненту или число e .

Экспонента – главная функция во всех технических науках и их бесконечных приложениях. В технике существует также понятие *предпочтительные числа* – система параметрических десятичных рядов чисел, построенных по геометрической прогрессии со знаменателем $10^{1/n}$ (т. е. по экспоненте), где $n=5, 10, 20, 40, 80$ – номера рядов, безграничных как в большую, так и в меньшую сторону. Такой подход обеспечивает базу для наиболее оптимальной стандартизации в технике.

Экспонента незримо присутствует и в нашей повседневной жизни. Например, начиная с 1961г. россияне использовали *семь* видов казначейских билетов: 1, 3, 5, 10, 25, 50, 100 рублей, а их числовые значения были близки к экспоненте: $y \approx 0,5406 \cdot \exp(0,7518 \cdot x)$, где $x=1 \div 7$. Провисание проводов, тросов, цепей, веревок и даже паутиновой нити (любой гибкой однородной и тяжелой нерастяжимой нити, концы которой закреплены) описывается уравнением «щепной линии»: $y=0,5a(e^{x/a}+e^{-x/a})$. Существование закона Бенфорда (см. п. 3.1) – также весомо подтверждает экспоненциальный характер большинства явлений природы (распределения величин).

Реальный, физический мир – это во многом *экспоненциальный мир*, а поскольку в ГТНЧ также сплошь и рядом “проявляется” экспонента (почти в каждой формуле), то, очевидно, структура натуральных чисел, действительно, имеет самое прямое отношение к реальному пространству-времени.

2.2. ЧИСЛО π ОПРЕДЕЛЯЕТ ПИРАМИДА?

Число $\pi=3,14\dots$ – это важнейшая фундаментальная константа (наравне с числом e), которая встречается во множестве разнообразных математических предложений. И просто невозможно вообразить мир, в котором не существовало бы чисел π и e . Они универсальны для всех уголков Вселенной!

Всем хорошо известный факт, что *отношение длины окружности к её диаметру равно π* , – это далеко не лучшее определение числа π , а лишь одно из многочисленных его свойств. Например, к ним же можно отнести любопытное свойство числа π , которое открыл профессор Ханс-Хенрик Стоун – специалист по физике Земли из Кембриджского университета. Он вычислил для *петляющих* рек отношение между истинной длиной реки (S – извилистой линии от истока до устья) и длиной «идеальной» реки (L – воображаемого спрямленного русла, вокруг которого петляет реальное русло). И среднее значение этих отношений (S/L) для всех рек оказалось близким к числу π .

Столь необычное свойство этого числа можно объяснить как *результат борьбы между порядком и хаосом*. Реки имеют тенденцию к все более извилистому руслу, т. к. малейшее искривление русла приводит к ускорению течения у «наружного» берега, что приводит к ускорению эрозии и увеличению крутизны поворота. Однако увеличение извилистости русла приводит к появлению петель и, наконец, к «короткому замыканию» русла: река в какой-то момент спрямляет русло (оставляя петлю в стороне от него). Отношение равное π чаще встречается у рек, текущих по равнинам с очень слабым уклоном (таковы реки Бразилии и Сибири).

Численное значение π можно приближенно определить одним из двух методов с *любой* необходимой степенью точности. Первый из этих методов – геометрический, известный ещё древним математикам. Он состоит в вычислении периметров многоугольника, вписанного в окружность и многоугольника, описанного вокруг неё, причем предполагается, что длина окружности заключена между значениями этих периметров. Приближение будет более точным, если вместо периметров использовать площади. Второй, современный метод, опирается на использование определенных бесконечных сходящихся рядов, сумма которых выражается через π .

Число π встречалось еще в древнеегипетских вычислениях 2-го тыс. до н. э. (тогда считали, что $\pi \approx 256/81 \approx 3,16$). Иногда число π называют *лудольфовым числом* в честь Лудольфа ван Цейлена (1540–1610), вычислившего значения числа π с 32-мя верными десятичными знаками. Число π является трансцендентным (доказано Ф. Линдеманом в 1882 г.), иррациональным числом, представимым бесконечной непериодической десятичной дробью:

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 375\dots$$

Интересно, что статистическая обработка на компьютере ста тысяч десятичных знаков числа π показывает, что эта совокупность знаков обладает многими чертами *случайной последовательности* (как и у числа e). Шесть знаков после запятой дает замечательная дробь $\pi \approx 355/113$.

Вот только некоторые красивые выражения для определения числа π .

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{3}{2} \frac{5}{6} \frac{7}{10} \frac{11}{14} \dots; \quad \pi^2/6 = 1+2^{-2}+3^{-2}+4^{-2}+\dots \text{ (Л. Эйлер);}$$

$$4/\pi = 1+1^2/2+3^2/2+5^2/2+7^2/2+\dots; \quad \pi/4 = 1-1/3+1/5-1/7+\dots;$$

$$\pi/4 = \arctg(1/2) + \arctg(1/5) + \arctg(1/8). \quad (188)$$

В первой формуле (Эйлера) в числителях стоят все *простые числа* (P), а в знаменателях число $P+1$, если $P=4n+1$ (где $n=1, 2, 3, \dots$), иначе число $P-1$.

Во многих книгах по *теории вероятностей* приводится весьма любопытный результат: брошенная на плоскость палочка («игла» длиной l) пересечет одну из начертанных на плоскости параллельных линий (расположенных на

расстоянии $L > l$ друг от друга) с вероятностью равной $2l/\pi L$. В 1864 г. капитан Фокс провел 1120 таких испытаний и получил $\pi \approx 3,1419$. Ещё одним экспериментальным способом определения числа π , может служить выписывание случайных пар натуральных чисел, поскольку вероятность того, что они *взаимно просты* равна $6/\pi^2$ (10-й закон Пирамиды).

Не исключено, что именно Пирамида дает самое глубокое по смыслу определение числа π . Кстати, число $6/(\pi^*)^2$, которое «генерирует» Пирамида, устремляется к числу $6/\pi^2$ с относительной погрешностью $\text{abs}(OII) \leq (2 \cdot N)^{-1}$, что равно скорости сближения числа e^* с числом e (см. п. 2.1).

Два наиболее известных трансцендентных числа e и π связывает немало соотношений. Самый красивым из них является равенство $e^{i\pi} + 1 = 0$, найденное Л. Эйлером (где $i = (-1)^{1/2}$ – мнимая единица). По словам академика А. Н. Крылова (1863–1945), в этом равенстве таинственным образом воссоединились числа, символизирующие арифметику (0 и 1), алгебру (i), анализ (e) и геометрию (π). К шедеврам математики можно также отнести формулу, открытую С. Рамануджаном (см. п.2.10): $2(A+B)^2 = \pi e$, где первое число равно бесконечной сумме нечетных чисел $A = 1 + (1 \cdot 3)^{-1} + (1 \cdot 3 \cdot 5)^{-1} + (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^{-1} + \dots$; а второе – бесконечной цепной дроби $B = 1 / (1 + 1 / (1 + 2 / (1 + 3 / (1 + 4 / (1 + \dots))))))$, которая, совершая затухающие колебания, устремляется к числу $0,655679\dots$

2.3. СТРУКТУРА ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Каждый, наверняка, слышал про “числа Фибоначчи” или “ряд Фибоначчи”. Так называется числовая последовательность $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$, в которой каждый член, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих, т. е. $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ (что является примером *рекуррентной формулы*, где для вычисления последующего члена последовательности надо знать предыдущие члены). Считается, что впервые сформулировал задачу, приводящую к такому ряду итальянский математик Леонардо Пизанский (1180–1240), которого называли также Фибоначчи (“сын Боначчо” – “сын добродушного”), и которому не было равного не только среди современников, но три последующих столетия. А формулировка задачи, приводящей к числам Фибоначчи, выглядит следующим образом: сколько пар кроликов родится от одной пары в течение года, если а) каждая пара каждый месяц порождает новую пару, которая со второго месяца становится производителем, и б) кролики не погибают.

Несложно доказать, что любое n -ое число Фибоначчи ($n = 1, 2, 3, \dots$) определяется также по *точной формуле*, которая позволяет получить любой n -й член последовательности, не обращаясь к предыдущим членам

$$A_n = [\Phi^n - (-\varphi)^n] / \sqrt{5} \quad , \quad (189)$$

где Φ и φ – так называемые *числа Фидия*, которые являются корнями квадратного уравнения $X^2 - X - 1 = 0$ и соответственно равны:

$$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618034\dots, \quad \varphi = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618034\dots \quad (190)$$

Числа Φ и φ различаются ровно на единицу: $\varphi = \Phi - 1$. Эти числа названы в честь древнегреческого скульптора Фидия, жившего в V в. до н. э. Он руководил строительством храма Парфенон в Афинах, в пропорциях которого многократно присутствует число φ . Числа Фидия близки к другим важным в математике числам: $e^{0.5} = 1,6487\dots$; $e^{-0.5} = 0,6065\dots$; $\pi^2/6 = ,6449\dots$ (см. 10-й закон Пирамиды). «Тени» чисел Φ и φ также можно обнаружить в ГТНЧ.

Число Фидия φ характеризует так называемое *золотое сечение* (*гармоническое деление*) – деление отрезка L на две части таким образом, что большая его часть A является средней пропорциональной между всем отрезком и меньшей его частью ($A = \varphi L \approx 0,618 \cdot L$). Вероятно, задача золотого сечения была решена еще пифагорейцами, впервые она встречается во II книге “Начал” Евклида, а сам термин “золотое сечение” ввел гениальный итальянец Леонардо да Винчи (1452–1519). Итальянский математик Лука Пачоли (ок.1445–ок.1509), друг Леонардо да Винчи, посвятил золотому сечению трактат “Божественная пропорция” (1509 г.). О золотом сечении много писал великий немецкий астроном – Иоганн Кеплер (1571–1630).

Золотое сечение легло в основу композиционного построения многих произведений мирового искусства, главным образом в живописи, архитектуре античности и Возрождения. Кульминация многих музыкальных произведений часто приходится на точку золотого сечения их общей продолжительности. В большинстве пейзажей у художников линия горизонта делит полотно по высоте в отношении, близком к φ . А, выбирая размеры самой картины (отношение высоты к ширине), также стремились к числу φ .

Пятиконечная звезда – всегда привлекала внимание людей совершенством формы. Недаром *пифагорейцы* (см. п. 3.13) именно её выбрали символом своего союза. Она считалась амулетом здоровья. В наши дни звезда красуется на флагах и гербах многих стран. А все дело в том, что в этой фигуре “заложено” число $\Phi = 1,618\dots$ (в виде удивительного постоянства отношений отрезков, составляющих пятиконечную звезду).

Уравнение (189) позволяют утверждать, что отношение двух соседних чисел Фибоначчи ($3/2, 5/3, 8/5, 13/8, \dots$) быстро устремляется к числу Φ , т. е. ряд Фибоначчи хорошо «накладывается» на экспоненциальную функцию с аргументом $n=1, 2, 3, \dots$ и интенсивностью равной $\ln \Phi = 0,4812\dots$:

$$N \approx G \cdot \exp(n \cdot \ln \Phi), \quad (191)$$

где $G = \Phi \cdot (1 + \Phi^2)^{-1} = 0,4472\dots$. Погрешность формулы (191) быстро убывает:

$$\text{abs}(A_n - N)/N \approx 0,1961 \cdot A_n^{-2} \approx \lg(\pi/2) \cdot A_n^{-2}. \quad (192)$$

Следует заметить, что можно сконструировать бесконечное множество рядов (назовем их **Ф-рядами**), в которых каждый последующий член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, но первые два члена которых ($A1$ и $A2$) могут быть любыми числами (не единицами). Ф-ряды быстро устремляются к экспоненте вида (191) с интенсивностью, равной $\ln\Phi$, но параметр G для них надо вычислять по формуле $G=(A1+\Phi\cdot A2)/(1+\Phi^2)$.

Более того, можно сконструировать бесконечное множество, скажем, **ФМ-рядов**, в которых каждый последующий член равен сумме M предыдущих членов ($M=3$, или $M=4$, или $M=5$, и т. д.). Экспонента (191) для ряда, в котором каждый последующий член равен сумме 3-х предыдущих членов ($M=3$) будет иметь интенсивность, равную $\ln f$, где $f=1,839\dots$ – действительный корень кубического уравнения $X^3 - X^2 - X - 1 = 0$, и параметр G равный

$$G=B1\cdot A1+B2\cdot A2+B3\cdot A3; \text{ где } B1=f^3/(f^3+b\cdot f+1); B2=b\cdot B1; B3=f\cdot B1,$$

$A1, A2, A3$ – первые три числа ФМ-ряда (любые числа); $b=f^3 - 2\cdot f - 1$. Интенсивность экспонент для ФМ-рядов растет от значения $\ln(1,839\dots)$, асимптотически устремляясь к значению $\ln 2$, а параметр G (если считать, что все эти ряды начинаются с чисел 1, 2, 3, ...) очень быстро, почти экспоненциально уменьшается. Параметр f для рядов с $M=3, 4, 5, \dots$ является корнем уравнений 3-й, 4-й, 5-й, ... степеней, а параметр G будет «помнить» 3, 4, 5, ... первых членов этих рядов (соответственно), выполняя функцию своеобразного «генетического кода» данного ФМ-ряда. Автором найден алгоритм для определения параметра G у любого ФМ-ряда при любых значениях первых членов ряда, что весьма занятно само по себе, но, пожалуй, чересчур детализирует этот вопрос для данной книги. Очевидно, некоторые конкретные экспоненты $y=C\cdot\exp(k\cdot x)$ (вспомним об их большой распространенности в природе) могут «накладываться» на ФМ-ряды, если интенсивность экспонент находится в интервале от $k=\ln\Phi\approx 0,481$ до $k=\ln 2\approx 0,693$.

Какое место занимают числа Фибоначчи в натуральном ряду с точки зрения ГТНЧ? Сначала несколько слов о типах этих чисел, которые, вообще говоря, принадлежат частым мирам. Некоторые числа Фибоначчи принадлежат к редким мирам (у них тип T – число нечетное), но таких чисел немного: на Большом отрезке – 15 чисел (из 294 чисел Фибоначчи), на Предельном отрезке – всего 93 числа (из 1476 чисел). На отрезке $[1; N]$ количество (k) чисел Фибоначчи из редких миров примерно равно

$$k \approx 0,1353 \cdot (\ln N - 6,2832) \approx e^{-2} \cdot (\ln N - 2\pi). \quad (193)$$

Несмотря на бурные колебания типов у чисел Фибоначчи, их средний арифметический тип (TS) ведет себя спокойно, причем после $N=1597$ растет быстрее, чем средний тип всех чисел (T_s , по Дирихле): $TS \approx 0,3857 \cdot N^{0,0374} \cdot T_s$.

После $N_n=3$ между соседними числами Фибоначчи всегда будут стоять лидеры миров, причем с ростом чисел Фибоначчи таких лидеров будет все

больше. Но совпадает с лидером по значению только $N_n=1, 2, 144$. Анализ первых 154-х чисел (до $N_n \approx 6,83 \cdot 10^{31}$) показывает, что числа Фибоначчи относительно “сближаются” с лидерами миров, т. к. с ростом порядкового номера n – промежуток между очередным числом Фибоначчи и ближайшим к нему лидером (NL) относительно сокращается, что можно записать так

$$\text{abs}(N_n - NL)/NL \leq \exp(-0,0432 \cdot n) \approx \exp(-e^{-\pi} \cdot n) , \quad (194)$$

$$\text{abs}(N_n - NL)/NL \leq 0,5 \cdot N_n^{-0,0888} . \quad (195)$$

Заметим, что абсолютный промежуток ($N_n - NL$), вообще говоря, увеличивается. Указанное сближение сопровождается связью порядковых номеров чисел Фибоначчи (n) и порядковых номеров лидеров всех миров (иначе – их количества K), например, для отрезка $N=10^{25} \div 10^{31}$ имеем

$$K \approx \exp[0,2538 \cdot (\ln n)^{2,2838}] . \quad (196)$$

Поскольку мы достоверно знаем, что в конце Большого отрезка находится число Фибоначчи с порядковым номером $n=294$, то по формуле (196) можем оценить количество всех миров на Большом отрезке: $K > 680000$, что согласуется с ранее полученной оценкой (см. п. 1.36).

Некоторые числа Фибоначчи являются простыми числами, но таких чисел немного: на Большом отрезке – 17 чисел, на Предельном отрезке – всего 23 числа. На отрезке $[1; M]$ количество (k) таких чисел будет равно

$$k \approx 3,5 \cdot \ln \ln(N/G) - 0,35 , \quad \text{где } G = \Phi \cdot (1 + \Phi^2)^{-1} = 0,4472 \dots . \quad (197)$$

Числа Фибоначчи “сближаются” не только с лидерами миров, но и с простыми числами, т. е. промежуток между очередным числом Фибоначчи и ближайшим к нему простым числом (P) относительно сокращается:

$$\text{abs}(N_n - P)/P \leq 7,389 \cdot N_n^{-0,9549} \approx e^2 \cdot N_n^{-3/\pi} . \quad (198)$$

Если рассмотреть семь коротких числовых рядов, состоящих соответственно из первых трех, четырех, пяти, ..., девяти чисел Фибоначчи, то каждый из этих коротких рядов хорошо приближает соответствующее тильда-распределение со своими параметрами S, K, A, p (см. формулу (168) и табл. 16). Первым числам Фибоначчи «повезло» не только в части тильда-распределения, а также в том, что они близки к первым *простым числам* (значение которых трудно переоценить).

Таблица 16. Семь тильд

Ряд	Кол. чисел	Сумма чисел	Параметры тильды	
			A	p
1	K	S	A	p
2	3	4	1,3863	0,0000
3	4	7	1,9024	0,2897
5	5	12	2,2844	0,3220
8	6	20	2,6248	0,3616
13	7	33	2,9419	0,3844
21	8	54	3,2454	0,4047
34	9	88	3,5406	0,4212

Числа Фибоначчи, особенно начало ряда (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), можно обнаружить, «узнать» абсолютно во всех науках, в технике, в искусстве. Приведем лишь некоторые примеры, подтверждающие это.

Последовательность дробей, которыми в ботанике описывается спиральное расположение семян подсолнуха или чешуе шишек, состоит из чисел

Фибоначчи. Отношения этих чисел, взятых через одно, измеряют угол между соседними листьями на стебле растений, точнее говоря, определяют какую долю полного оборота составляет этот угол: $1/2$ – для вяза и липы, $1/3$ – для бука и лещины, $2/5$ – для дуба и яблони, $3/8$ – для тополя и розы, $5/13$ – для ивы и миндаля и т. д. Листья на стебле растения располагаются по спирали так, чтобы не мешать друг другу воспринимать солнечный свет, при этом сумма двух предыдущих шагов спирали, начиная с вершины, равна величине последующего шага. Профиль большинства птичьих яиц (высота/большой диаметр) также соответствует золотому сечению.

Числа Фибоначчи встречаются во многих разделах математики: в комбинаторике, геометрии, теории чисел, в задачах на максимум и минимум. Пример задачи из комбинаторики: сколькими способами можно подняться по лестнице, у которой n ступенек? Оказывается, количество таких способов равно $(n+1)$ -му члену последовательности Фибоначчи. В оптимальном программировании (вычислительная математика) при поиске экстремума точность повышается более чем на 20%, если использовать лишь первые члены ряда Фибоначчи, а выбор их в качестве расчетных точек позволяет получить экспоненциальное увеличение точности. Одна из особенностей множества Мандельброта (см. п.3.6) связана с числами Фибоначчи: функция $index(c)$ определяет разбиение Фибоначчи на множестве Мандельброта.

Немало примеров можно привести из техники. Так, *взаимозаменяемость* всех технических изделий (деталей, узлов, механизмов) базируется на понятии о классах (качествах) точности, количество единиц допуска которых почти “повторяет” начало ряда Фибоначчи. Многие параметрические ряды, определяющие основные конструктивные, эксплуатационные или технологические характеристики самых разных изделий близки к ряду Фибоначчи (к его различным фрагментам). Почему-то именно эти ряды оказываются наиболее оптимальными, дающими наибольший эффект.

2.4. СТРУКТУРА ЧИСЕЛ КАТАЛАНА

В математике существует множество бесконечных последовательностей, составленных из натуральных чисел. Самая известная из них – числа Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), рассмотренные нами выше. Как ни странно, первый «Справочник по целочисленным последовательностям» [32] был опубликован только в 1973 г., и первым, кто догадался это сделать был Н. Слоун. Он собрал и упорядочил более 2300 (!) последовательностей, каждую из которых описывает *рекуррентная* и (или) *точная формула*, а также сопровождает список рекомендуемой литературы. Кстати, этот «Справочник» можно

было бы дополнить последовательностями, «открытыми» ГТНЧ: лидеры частых и редких миров, верхние лидеры миров, лидеры орбит простых чисел, верхние лидеры орбит, и т. д. (правда, никаких формул для получения членов этих рядов, очевидно, не существует).

В «Справочнике» Слоуна под номером 577 значатся так называемые **числа Каталана**: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, Эти числа не столь известны, как числа Фибоначчи, но они не менее значимы и возникают в самых неожиданных местах, особенно при решении комбинаторных задач. По некоторым компетентным оценкам **числа Каталана** – наиболее часто встречающаяся последовательность (!), однако, она всё еще недостаточно известна даже среди математиков, особенно не имеющих доступа к «Справочнику» Слоуна.

Указанные числа открыл вездесущий Л. Эйлер, когда занимался *триангуляцией* выпуклых многоугольников, т. е. разбиением их на треугольники с помощью непересекающихся диагоналей всевозможным количеством способов (пример *комбинаторной задачи*). Оказалось, что количество способов разбиения для треугольников равно 1, для четырехугольников – равно 2, для пятиугольников – 5, для шестиугольников – 14, для семиугольников – 42, и т. д. Эйлер получил точную формулу для этого ряда чисел

$$N_n = [2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4 \cdot n - 10)] / (n-1)! , \quad (199)$$

где $n = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ – количество сторон выпуклого многоугольника.

Современник Эйлера известный венгерский ученый И. А. Зегнер (1704–1777) придумал красивую схему нахождения чисел, полученных Эйлером. *Схема Зегнера* для нахождения, например, 9-го числа ($N=4862$) представлена

1	1	2	5	14	42	132	429	1430	
1430	429	132	42	14	5	2	1	1	
1430	+429	+264	+210	+196	+210	+264	+429	+1430	=4862

ниже и почти не требует пояснений (верхний ряд умножаем на нижний):

Бельгийский математик Э. Ш. Каталан (1814–1894), в честь которого и названа рассматриваемая последовательность, в 1838 г. доказал, что Эйлерова триангуляция многоугольников **изоморфна** (подобна) комбинаторной задаче *расстановки скобок*, т. е. внутреннее «устройство» (природа) этих двух задач совершенно одинакова и изучение свойств одной системы (её объектов) в значительной мере сводится к изучению другой системы.

Задача расстановки скобок при наличии двух букв имеет 1 решение – (ab) ; при наличии трех букв есть 2 способа – $((ab)c)$ и $(a(bc))$; при наличии четырех букв есть 5 способов – $((ab)(cd))$, $((ab)c)d$, $a(b((cd)))$, $a((bc)d)$, $((a(bc)d))$, и т. д., причем внутри каждой пары скобок (одной “открывающей” и одной “закрывающей”) всегда должны находиться 2 «терма» (любые две буквы или буква и соседняя группа символов, заключенная в скобки). Таким образом, мы также приходим к числам Каталана. *Смысл изоморфизма* поясняет рис. 32, на котором представлена триангуляция семиугольника (один из 42-х способов разбиения его на треугольники) и соответствующая ей расстановка скобок для шести букв (один из 42-х возможных способов).

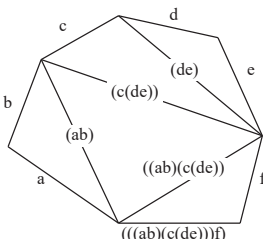


Рис. 32.

Помимо всего прочего, автор пытается также доказать, что структура натуральных чисел (описываемая ГТНЧ) в некотором смысле *изоморфна* структуре реального (физического) пространства-времени, но об этом ниже.

Практически невозможно перечислить все обнаруженные примеры изоморфизма чисел Каталана. Мы только перечислим некоторые из них (для самостоятельных справок читателя). Так, числа Каталана легко обнаружить в *треугольнике Паскаля*, для этого необходимо опускаться по центральному столбцу (1, 2, 6, 20, 70, ...) и из каждого «центрального» числа вычитать соседнее число, скажем, стоящее слева от него (сам треугольник играет весьма важную роль в комбинаторике). Числа Каталана указывают количество плоских, тривалентных посаженных деревьев (*связанных графов*), и позволяют пересчитывать нормальные посаженные деревья. Числа Каталана дают ответ на вопрос о том, сколько различных траекторий существует для шахматной ладьи на доске, у которой $n \times n$ клеток. Если $2n$ точек на окружности соединить попарно хордами всеми возможными способами, то общее число таких хорд есть число Каталана. Общее число состояний для всех разновидностей правильных *гексафлексонов* с n «гранями» задается числом Каталана (гексафлексоны – забавные игрушки из прямых и фигурных полосок бумаги, особым образом сложенных в виде правильных шестиугольников, при перегибании они проходят различные состояния). Числа Каталана показывают, сколько различных *полимино* может очертить один человек за n шагов в случайно выбранном направлении.

Последовательность Каталана не стоит путать с *числами Белла*: 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, ..., которые “пересчитывают” разбиения n элементов (числа названы в честь Эрика Т. Белла). Например, число схем рифмующихся строк

в стихотворении из n строк есть не что иное, как числа Белла. Так, четверостишие ($n=4$) может быть зарифмовано 15 возможными способами: а, аа, аb, ааа, ааb, аbа, аbb, аbс, аааа, аааb, ааbа, абаа, аbbb, аabb, аbba, **аbab** (это единственная схема с “пересечением”), аabc, abac, abca, abbc, abcb, abcc, abcd. Числа Каталана “пересчитывают” схемы рифм без “пересечений”, а числа Белла – все возможные схемы, в т. ч. с “пересечениями”.

Не следует забывать, что числа Каталана, а вернее многие комбинаторные задачи, в которых они возникают, имеют непосредственное отношение к *реальному миру*, и, аналогично числам Фибоначчи, они отражают гармоничную сущность реальности.

Точная формула для n -го числа Каталана имеет совсем простой вид

$$N_n = (2 \cdot n)! / n! / (n+1)! , \quad (200)$$

где $n=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер числа в последовательности Каталана. Однако при расчете на компьютере эта формула позволяет добраться только до 85-го числа, т. к. при $n=86$ получаем число выходящее за *предел компьютера*: $(2 \cdot 86)! > 10^{308}$. Но если в начале последовательности Каталана добавить еще одну единицу: 1, 1, 2, 5, 14, 42, ..., то будет работать следующая *рекуррентная формула* (не менее лаконичная, чем формула выше):

$$N_{n+1} = N_n \cdot (4 \cdot n - 6) / n , \quad (201)$$

где $n=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер числа в последовательности ($N_1=1$). И теперь компьютер легко “добирается” до конца Большого отрезка, который находится между 106 и 107 числами Каталана, а *предел ПК* – это $n=515$ (здесь и в дальнейшем нумерация чисел Каталана всегда соответствует *точной формуле*, т. е. ряду с одной единицей в начале: 1, 2, 5, 14, 42, ...).

Нетрудно убедиться, что на Предельном отрезке последовательность Каталана (N_n) *почти* “накладывается” на экспоненциальную функцию вида

$$N \approx 0,0019 \cdot \exp(1,3778 \cdot n) \approx e^{-2\pi} \cdot \exp[(3\pi)^{1/7} \cdot n] , \quad (202)$$

которая при $N_n > 10^{18}$ обеспечивает такую точность: $0,6 \cdot N < N_n < 2 \cdot N$, а в сингулярности формула попросту не работает (N значительно меньше N_n).

Какое место занимают числа Каталана в натуральном ряду с точки зрения ГТНЧ? Чтобы понять это, первым делом необходимо установить их тип, что удастся легко сделать только для первых 28-ми чисел, т. е. до $N_{28}=263\ 747\ 951\ 750\ 360$, у которого $T=4096$. Кстати, точная формула (200) говорит о том, что все числа $N_n > 1$ будут иметь только четные типы, т. е. будут принадлежать исключительно частым мирам. Типы (T) чисел Каталана, вообще говоря, увеличиваются, причем с ростом правой границы (N) исследуемого отрезка примерно соблюдается следующее соотношение

$$T/T_{max} \approx 0,9637 \cdot (\ln N)^{-0,4476} , \quad (203)$$

где T_{max} – это максимально возможный тип чисел в частых мирах, который при $N < 10^{21}$ с точностью $ОП = \pm 5\%$ можно определить по формуле

$$T_{max} \approx \exp[0,955 \cdot (\ln N)^{0,6692}] \approx \exp[0,955 \cdot (\ln N)^{\lg \Phi}] . \quad (204)$$

В конце Большого отрезка тип чисел Каталана, вероятно, всего на один порядок меньше максимально возможных значений ($T/T_{max} > 0,1$). Возможно отношение T/T_{max} стремится не к нулю, а к некому числу, но в любом случае ясно, что числа Каталана довольно “тяжелые” числа, у которых много делителей. Средний арифметический тип чисел Каталана (TS) растет быстрее, чем средний тип всех чисел (T_s , по Дирихле): $TS \approx 0,5 \cdot N^{0,1013} \cdot T_s$.

После $N_n = 5$ между соседними числами Каталана всегда будут стоять лидеры частых миров, причем с ростом чисел Каталана таких лидеров будет все больше. Но совпадает с лидером по значению только $N_n = 2$. Анализ первых 57-ми чисел (до $N_n \approx 10^{31}$) показывает, что числа Каталана “сближаются” с лидерами частых миров, т. е. с ростом порядкового номера n – промежутки между числом Каталана и ближайшим к нему лидером (NL) относительно сокращаются, что можно записать так

$$\text{abs}(N_n - NL)/NL \leq 1,6487 \cdot \exp(-0,1061 \cdot n) \approx e^{0,5} \cdot \exp(-n/3/\pi) . \quad (205)$$

Такое сближение сопровождается взаимосвязью между порядковыми номерами чисел Каталана (n) и порядковыми номерами лидеров частых миров (иначе – с их количеством K), например, для отрезка $N = 10^{21} \div 10^{31}$ имеем

$$K \approx \exp[0,5839 \cdot (\ln n)^{2,0276}] . \quad (206)$$

Поскольку мы достоверно знаем, что в конце Большого отрезка находится число Каталана с порядковым номером $n = 107$, то по формуле (206) можем оценить количество частых миров на Большом отрезке: $K > 600318$, что согласуется с ранее полученной оценкой.

Числа Каталана “сближаются” не только с лидерами частых миров, но и с простыми числами, т. е. промежуток между очередным числом Каталана и ближайшим к нему простым числом (P) относительно сокращается:

$$\text{abs}(N_n - P)/P \leq 3,4342 \cdot N_n^{-0,9189} \approx \ln(\pi^3) \cdot N_n^{-\ln[(2\pi)^{0,5}]} . \quad (207)$$

Такое «сближение» и чисел Фибоначчи, и чисел Каталана обусловлено вполне определенным законом роста средней орбиты (H_s) простых чисел.

2.5. ЧИСЛА ФЕРМА (ГАУССОВЫ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА)

В одном из своих писем к М. Мерсенну (см. п. 2.8) Пьер Ферма (1601–1665) высказал предположение, что числа вида $PF = 2^n + 1$ обязательно простые, если n – степень двойки (т. е. если $n = 2^m$, и такие PF потом стали называть числами Ферма), а если $n \neq 2^m$ (не число Ферма), то PF – не простое число. Это выполняется при $m = 0, 1, 2, 3, 4$ ($n = 1, 2, 4, 8, 16$) и получаем пять

простых чисел Ферма: $PF=3, 5, 17, 257, 65537$. Гипотеза Ферма просуществовала более ста лет – до тех пор, пока в 1732 г. Л. Эйлер не показал, что при $m=5$ получаем не простое, а составное число $PF=2^{32}+1=641 \cdot 6700417$. Все дальнейшие проверки (до $m=1945$ и более) также дали только составные числа, поэтому возникло предположение, прямо противоположное исходному: *а не конечно ли количество простых чисел среди чисел Ферма?* Однако никаких подходов к доказательству последнего предположения пока не существует. Известны только достаточно общие свойства чисел Ферма. Например, любые два числа Ферма взаимно просты.

В 1801 г. 17-ти летний Карл Гаусс исследовал возможности построения правильных “ N -угольников» с помощью только циркуля и линейки (т. е. возможности их *геометрического* построения). Гаусс установил, что правильный n -угольник можно построить, когда число его сторон имеет вид: $N=2^n \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \dots \cdot P_k$, где $n=0, 1, 2, 3, \dots$, а P_i – числа Ферма (после этого их ещё стали называть *гауссовы простые числа*)¹.

Из теории Эвариста Галуа (1811–1832) следует, что никаких других правильных n -угольников, кроме указанных Гауссом, геометрически построить нельзя. Таким образом, построение возможно при числе сторон n -угольника $N=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34, \dots$ и невозможно при $N=7, 9, 11, 13, \dots$. Следует отметить, что в древности умели по стороне или радиусу описанного круга строить циркулем и линейкой правильные n -угольники только в том случае, если число сторон (N) у них было равно 2^n , или $2^n \cdot 3$, или $2^n \cdot 5$, или $2^n \cdot 3 \cdot 5$, где $n=0, 1, 2, 3, \dots$.

С точки зрения ГТНЧ гауссовы простые числа можно охарактеризовать следующим образом (см. также п. 1.12, 1.13): **3** – лидер орбиты “близнецов” (орбиты $H=2$); **5** – второе число орбиты “близнецов”, при котором она достигает наибольшей доли среди прочих орбит простых чисел; **17** – просто число с орбиты “близнецов”; **257** – число с орбиты $H=6$, при котором данная орбита пересекает орбиту “близнецов”; **65537** – число с орбиты “близнецов”, при котором она пересекает орбиту $H=4$.

Пять гауссовых простых чисел по своему количеству совпадают с 5-ю типами тел Федорова, которые Е. С. Федоров нашел в 1885 г. (к вопросу о связи структуры натуральных чисел со структурой пространства-времени). Тела Федорова – это выпуклые многогранники (например, куб), параллельными

¹ Это открытие произвело на юного Гаусса такое впечатление, что он сразу отказался от филологической карьеры, и решил посвятить свою жизнь математике. Он и позднее смотрел на это первое из своих открытий с особенной гордостью. После смерти Гаусса в Гёттингене была воздвигнута его бронзовая статуя, с пьедесталом в форме правильного 17-угольника.

переносами которых можно заполнить пространство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой (см. также п. 5.10).

2.6. ЧИСЛА 1, 2, 3 – ОСОБЫЕ ЧИСЛА

Подчеркнем ещё раз в отдельном параграфе уникальность чисел 1, 2, 3.

Число **1** – это начало натурального ряда (начало всех начал). Единица – единственное число из первого редкого мира №1 (с типом $T=1$). Единица – имеет максимально возможный прирост $R^*=(1+1)/1=2$, а мнимый прирост единицы равен замечательному числу e : $R=\exp(1/1)\equiv e=2,718\dots$. Единица – это “шаг”, которым мы переходим от предыдущего натурального числа к последующему (лучшее воплощение *дискретности*?). Единицу можно считать первым *простым числом*, порядковый номер которого по формуле Чебышева “равен” бесконечности ($1\approx\infty?$, см. п.1.8).

Число **2** – это единственное *четное простое число* и первое из них, входящее в базис натуральных чисел (см. п. 1.1). Это лидер первого частого мира №2, его орбита равна общей орбите $H=1$ натуральных чисел. Мнимый прирост числа 2 равен $R=\exp(1/2)=1,648\dots$, что близко к числу Фидия ($\Phi=1,618\dots$, золотому сечению), которому часто придается прямо-таки мистический смысл. Число 2 делит числовой отрезок $[1; e]$ в пропорции золотого сечения: $\varphi\approx(2-1)/(e-1)\approx 0,582$ (правда, если точно, то $\varphi=0,618\dots$).

Число **3** – открывает собой бесконечное количество четных орбит с бесконечным количеством простых чисел (базисом натурального ряда). Это первое Гауссово число (см. п. 2.5). Число 3 делит числовой отрезок $[e;\pi]$ в пропорции золотого сечения (близко к этому): $\varphi\approx(3-e)/(\pi-e)\approx 0,665511$.

Не только в рамках ГТНЧ выявляется некая исключительность чисел 1, 2, 3. Ещё в далекие от нас времена люди наделяли эти числа таинственным смыслом. Приведем только 4 примера, подтверждающих сказанное:

1) В *пифагорейзме* (см. п. 3.13) возникла весьма оригинальная арифметика, придававшая пластичный и жизненный смысл каждому числу:

“**1**” – абсолютная и неделимая единичность, без неё нет ни одного числа. Символизирует единство бытия и мира. Точка была единицей положения, а пространство представлялось как сумма точек (дискретное пространство!).

“**2**” – уход в неопределенную даль. Символизирует полярность во Вселенной (свет – тьма, женское – мужское, жизнь – смерть, добро – зло, правое – левое, предел – беспредельность, прямое – кривое, единое – многое и т. д.).

“**3**” – первое оформление бесконечности, это совершеннейшее из чисел, ибо имеет начало, середину и конец.

2) Мудрейший китайский философ Лао-Цзы (579–499 гг. до н. э.), в своем знаменитом учении о Дао (якобы, лежащем в основе мира) утверждал, что

«Дао рождает одно, одно рождает два, два рождает три, а три – все существа. Все существа носят в себе «инь» и «ян» наполнены «ци» и образуют гармонию». (Найдите сами «инь», «ян» и «ци» в рамках ГТНЧ).

3) Согласно одному из основных догматов христианства (которое возникло в 1 веке нашей эры), бог един по своей сущности, но существует как три личности (“лица”, “ипостаси”): бог-отец, бог-сын и святой дух; все лица троицы равносущны (между ними нет элемента подчинения) и извечны. На сегодняшний день в мире существует более 36 религий, и нет сомнений, что многие из них по-своему “обыгрывают” числа 1, 2, 3.

4) “Бог любит троицу. Святой счет, что троица. Три перста крест кладут” – так гласят русские пословицы. Безусловно, богатейший фольклор всех наций и народностей также упоминает “святую троицу” и числа 1, 2, 3.

В связи со сказанным можно заметить, что годы жизни Пифагора и Лао-Цзы практически совпадают (Пифагор был старше на 3 года, и оба мудреца прожили по 80 лет), что все равно не исключает плагиат идей как минимум из общего более раннего источника (накопленной человеческой мудрости). Очевидно, наши далекие предки смогли увидеть (угадать, почувствовать) исключительную роль чисел 1, 2, 3 просто созерцая окружающий мир. Всё довольно просто, например, у большинства пород деревьев в структуру заложена очевидная триада: *ствол – ветки – веточки*, на которых бесчисленное множество листочков. Даже этого достаточно, чтобы пылливый ум задумался на тему «1, 2, 3». Именно *в наблюдениях природы и их обобщениях* лежат корни мудрости и многочисленных мифов, легенд, учений древних философов, религиозных учений, сказок, пословиц, поговорок и т. д., и т. п.

Наукой достоверно установлено, что на долю только двух химических элементов: водорода (заряд ядра его атома $Z=1$) и гелия ($Z=2$) приходится 99,9% всего вещества во Вселенной. Литий ($Z=3$) открывает вереницу всех прочих элементов в природе, причем его распространенность во Вселенной занимает среднее местоположение среди остальных элементов (оцененных по логарифмической шкале распространенности). Вообще ***природа отдает предпочтение малым числам***, а числа 1, 2, 3 – первые из них (см. п. 4.9).

2.7. В ПОИСКАХ ЧИСЛА ФЕЙГЕНБАУМА

Число Фейгенбаума (F) – это относительно новая универсальная константа, равная 4,669201660910.... Это число, впервые опубликованное З. Гроссманном и С. Томэ в 1977 г., названо в честь Митчела Фейгенбаума, который показал, что то же самое число возникает не только в *процессах Ферхюльста* (см. п. 3.8), но и в целом ряде одномерных процессов, являясь *универсальной* (как, например, число π для отношения длины окружности к

ее диаметру) характеристикой сценария удвоения периода. Позднее ученые-экспериментаторы доказали, что сценарий удвоения периода действительно наблюдается во многих естественных системах: начало турбулентности в потоке жидкости, нелинейные колебания в химических и электрических сетях, и даже переход нормального ритма сердца в угрожающую жизни фибрилляцию. Необходимо подчеркнуть, что ученым пока еще до конца не понятна такая универсальность числа Фейгенбаума, поэтому «проявление» этого числа в ГТНЧ могло бы приблизить разгадку его тайны. «Призрак» числа Фейгенбаума иногда появляется в ГТНЧ, но поскольку здесь все очень зыбко, то будем говорить только о некоем Φ -параметре, который, возможно, действительно устремляется к числу Фейгенбаума ($\Phi \rightarrow F$). Ниже приведены конкретные примеры “проявления” числа Фейгенбаума в ГТНЧ.

Ранее мы говорили о том, что невозможно вывести формулу для точного вычисления n -го простого числа, а значит и его орбиты. Процесс появления новых орбит (*лидеров орбит*) – это псевдохаотичный процесс. Рассмотрим сценарий его развития на рабочем отрезке [1;17.051.887], где появилось 79 различных орбит: от $H=1$ (у первого лидера $PL_1=2$) до $H=180$ (у 79-го лидера $PL_{79}=17.051.707$).

По аналогии с процессами Ферхюльста сконструируем параметр Φ_n , который равен отношению длин двух отрезков натурального ряда, следующих друг за другом (отрезки между лидерами):

$$\Phi_n \equiv (PL_n - PL_{n-1}) / (PL_{n+1} - PL_n), \quad (208)$$

где $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots, 78$ – порядковые номера лидеров орбит (т. е. в порядке их появления), а $PL_0=1$, хотя единицу и не относят к простым числам. Полученные значения параметра Φ_n представлены на рис.33 в виде 78 точек, причем хорошо видно их псевдослучайный разброс. Однако среднее арифметическое значение параметров Φ_n (на рис.33 – это сплошная линия) ведет себя более «внятно» и к концу рабочего отрезка выходит на значение, примерно равное 4,74. Не исключено, что при дальнейшем движении «вглубь» мира простых чисел (при $n \rightarrow \infty$), указанное отношение стремится именно к числу Фейгенбаума.

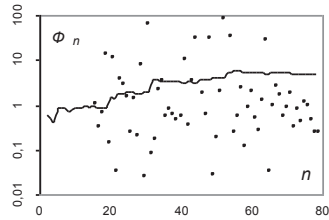


Рис. 33. Изменение параметра Φ_n

Теперь рассмотрим *лидеров миров* (NL – это первые числа, «открывающие» каждый новый мир или, иначе говоря, каждый тип натуральных чисел). Для лидеров миров Φ -параметр определим аналогичным образом:

$$\Phi_n \equiv (NL_n - NL_{n-1}) / (NL_{n+1} - NL_n), \quad (209)$$

где $n=2, 3, 4, 5, \dots$ – порядковые номера лидеров миров (их очередность).

Начнем свой поиск с лидеров редких миров, т. к. здесь мы можем отследить поведение Φ -параметра дальше всего (на Большом отрезке). Что же

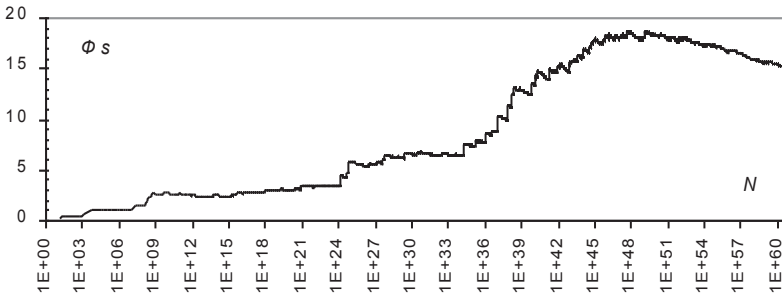


Рис. 34. Динамика среднего Φ -параметра для лидеров редких миров

происходит в редких мирах с этим параметром? Начиная от значения $\Phi=0,6$ (при $N=16$) Φ -параметры хаотично колеблются в некотором коридоре, границы которого на Большом отрезке доходят от $\Phi_{min} \approx 8 \cdot 10^{-5}$ до $\Phi_{max} \approx 16140$. Как и следовало ожидать, гораздо спокойнее ведет себя *средний Φ -параметр* (Φ_s), равный среднему арифметическому значению Φ -параметров: $\Phi_s \equiv \sum \Phi_n / n$. Его поведение довольно любопытно (см. рис. 34): начиная от значения $\Phi_s=0,3$, он растет до значения $\Phi_s \approx 18,78$ при $N \approx 4,3 \cdot 10^{47}$ ($n=32595$), а потом начинает убывать, достигая к концу Большого отрезка значения $\Phi_s \approx 14,86$. Но к чему стремится параметр Φ_s дальше?

С лидерами частых миров можно проделать абсолютно то же самое, причем на рабочем отрезке $[1; 10^{32}]$ Φ -параметр также хаотично колеблется в коридоре, границы которого совпадают с границами в редких мирах. А вот средний Φ -параметр ведет себя иначе (см. рис. 35), впрочем, при $N \sim 10^{32}$ он вырастает-таки до $\Phi_s \approx 7$, т. е. почти до того же значения, что и в редких мирах (перед подъемом в «гору»).

Рассматривая все лидеры вместе (и частые и редкие миры), можно также найти Φ -параметр и Φ_s (см. рис. 36), причем, вероятно, именно так имеет смысл искать число Фейгенбаума в части лидеров миров. Глядя на три графика для Φ_s , трудно сказать, куда устремляется средний Φ -параметр, возможно, вовсе не к числу Фейгенбаума, а, скажем, к магической семерке или некой другой константе, или таковой вовсе не существует?

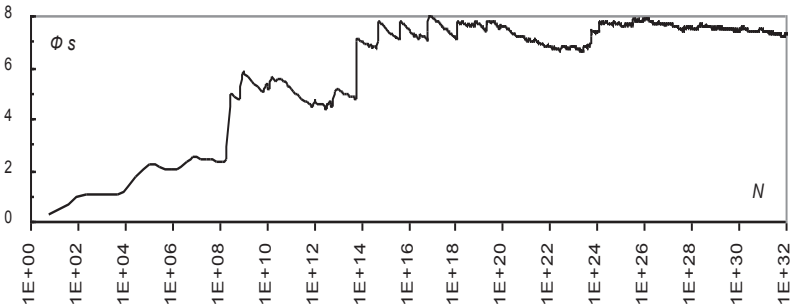


Рис. 35. Динамика среднего Φ -параметра для лидеров частых миров

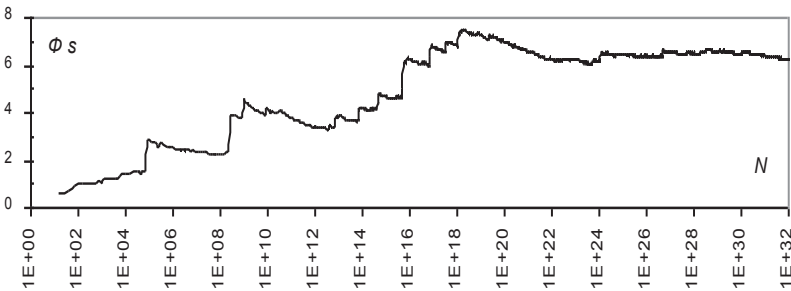


Рис. 36. Динамика среднего Φ -параметра для лидеров всех миров

2.8. СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА И ЧИСЛА МЕРСЕННА

При рассмотрении делителей натуральных чисел среди них можно особо выделить так называемые *совершенные числа*. Это числа, равные сумме всех своих *правильных делителей* (то есть меньших этого числа). Например, числа $N=6$ ($1+2+3$) и $N=28$ ($1+2+4+7+14$) являются совершенными числами. Еще Евклидом (3 век до н.э.) было указано, что совершенные числа можно получить по формуле

$$N = (2^p - 1) \cdot 2^{p-1} \quad (210)$$

при условии, что p и $(2^p - 1)$ есть числа простые. Л. Эйлер показал, что эта формула исчерпывает *все четные совершенные числа*. Простые числа вида $M=(2^p - 1)$ при простых p называют **числами Мерсенна**. По имени Марена Мерсенна (1588–1648) – французского физика, жившего в монастырях ордена миноритов и выполнявшего, так сказать, обязанности «центра научной информации» своей эпохи (обладал замечательной памятью и переписывался со многими учеными разных стран). Мерсенн в 1644 г. заявил, что среди первых 55-ти простых чисел всего на всего для 11-ти из них ($p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$) число M будет простым. Только в 1883 г. русский священник И. М. Первушин доказал, что Мерсенн пропустил одно число ($p=61$), а уже в XX веке было доказано, что при $p=67, 257$ получаются не простые, а составные числа. Для примера: чтобы разложить число Мерсенна $2^{67}-1 \approx 1,48 \cdot 10^{20}$ на множители (их оказалось два) американский профессор Коул потратил по его признанию «все воскресенья в течение трех лет» (около 156 дней, закончил в 1903 г.). Теперь компьютер проделает это за одно мгновение! Для получения основных результатов ГТНЧ автор потратил несколько месяцев работы за ПК. Очевидно, совсем скоро кто-то проведет аналогичные исследования куда быстрее (и, без сомнения, существенно продвинется в понимании структуры натуральных чисел).

Как узнать, будет ли очередное число Мерсенна простым числом? Для этого существует мощный критерий Люка (1877) – Д. Х. Лемера (1931): число $2^p - 1$ (где $p > 2$, p – нечетное число) является простым тогда и только тогда, когда оно делит число V_{p-1} , где $V_1=4$ и $V_{n+1} = V_n^2 - 2$. Рекорды в поисках чисел Мерсенна теперь ставят компьютеры, и так будет до тех пор, пока не появятся теоретические результаты об общих закономерностях этих чисел (см. табл. 17, данные относятся к 1997 г.)

Легко доказать, что любое совершенное число N равно сумме M первых натуральных чисел (где M – число Мерсенна для данного N), например: $6=1+2+3$ ($M=3$);

$$28=1+2+3+4+5+6+7 \quad (M=7).$$

Очевидно, всегда $N=(1+M)M/2$.

Числа Мерсенна есть не что иное, как сумма p членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 1, а знаменатель равен 2. Джиллис

Таблица 17. Числа Мерсенна (p к ним)

n	p	n	p	n	p	n	p
1	2	10	89	19	4253	28	86243
2	3	11	107	20	4423	29	110503
3	5	12	127	21	9689	30	132049
4	7	13	521	22	9941	31	216091
5	13	14	607	23	11213	32	756839
6	17	15	1279	24	19937	33	859433
7	19	16	2203	25	21701	34	1257787
8	31	17	2281	26	23209	35	1398269
9	61	18	3217	27	44497	?	2976221

высказал предположение, что число простых чисел Мерсенна на отрезке $[1; M]$ примерно равно $2 \cdot \log \log N / \log 2$. Табл. 17 позволяет также говорить об экспоненциальном росте чисел p (показателей степени):

$$p \approx 1,7724 \cdot \exp(0,3927 \cdot n) \approx \pi^{0,5} \cdot \exp(\pi n / 8), \quad (211)$$

где $n=1, 2, 3, \dots, 35, \dots$ – порядковый номер числа Мерсенна. Однако это не является математическим доказательством бесконечности множества простых чисел Мерсенна (четных совершенных чисел). И до сих пор неизвестно бесконечно или конечно множество чисел Мерсенна.

Итак, теория совершенных чисел опирается непосредственно на теорию чисел Мерсенна. Совершенные числа $N=6, 28, 496, 8128$ были известны еще древним математикам, 5-е число $N=33550336$ – открыли в 1456 г., за следующие пять столетий список четных совершенных чисел был доведен до 36 чисел. Поскольку уже 11-е совершенное число огромно ($N \approx 10^{64}$), то речь идет о поиске очередного (37-го) числа Мерсенна, вернее простого числа p , которое его порождает. Легко видеть, что две последние цифры четного совершенного числа всегда либо 28, либо 6 после нечетной цифры (за исключением самого числа 6). Кроме того, каждое четное совершенное число (помимо 6) *сравнимо с 1 по модулю 9* (если разность двух целых чисел X и Y кратна некоторому Z , то X и Y называют *сравнимыми по модулю Z* ; записываю это следующим образом: $X - Y \equiv 0 \pmod{Z}$ или $X \equiv Y \pmod{Z}$).

До сих пор неизвестно ни одного *нечетного* совершенного числа и вопрос о существовании их остается открытым; известно лишь, что нечетных совершенных чисел нет в интервале от 1 до 10^{50} . Работы ученых, проведенные в XX веке, свидетельствуют, что если нечетные совершенные числа и существуют, то они должны подчиняться многочисленным “хитрым” условиям. Современный немецкий математик Вальтер Боро как-то сказал: « Работы, посвященные нечетным совершенным числам, напоминают охоту за призрак: никто никогда его не видел, но проведено много остроумных исследований того, как он не может выглядеть”. Так, Дж. Сильвестр

выдвинул гипотезу (И. С. Градштейн её доказал), согласно которой если нечетное совершенное число существует, то оно должно иметь не меньше 6 различных простых делителей (см. п.1.17 о приоритете мира №8). Из существования нечетного совершенного числа следовало бы существование двух или более нечетных чисел, обратные величины которых в сумме дают 1 (поиск таких чисел пока не дал положительных результатов).

Любопытно, что существует множество *дефектных чисел*, у которых сумма правильных делителей всего на единицу меньше самого числа. Но никому не удалось найти *избыточного числа*, у которого сумма правильных делителей всего на единицу больше самого числа. Также пока не удалось доказать, что избыточных чисел не существует.

В заключении ещё пару слов об исследованиях, проведенных автором.

Совершенные числа принадлежат *удвоенным мирам*, т. е. их *тип* равен $T=2 \cdot P$, где P – это простые числа, порождающие соответствующие числа Мерсенна. *Малые делители* первых совершенных чисел образуют геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1, а знаменатель равен 2, т. е. это числа 1, 2, 4, 8, ..., $(M+1)/2$, причем сумма малых делителей равна числу Мерсенна (M). *Большие делители* первых совершенных чисел образуют геометрическую прогрессию, первый член которой равен числу Мерсенна, а знаменатель равен 2, т. е. это числа $M, 2M, 4M, 8M, \dots, N$, причем сумма больших делителей равна квадрату числа Мерсенна (M^2). Таким образом, *богатство* совершенного числа N равно $S=2 \cdot N$, а *кратность* богатства равна 2. Делители первых совершенных чисел N из мира T «растут» очень близко к экспоненте:

$$D_n \approx 0,5 \exp(n \ln 2) \approx 2^{n-1}, \quad (212)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots, T$ – порядковый номер делителя. Причем аналогичный закон роста реализуется и для самих совершенных чисел (как функции T):

$$N = 2^{T-1} - 2^{(T-2)/2} \approx 2^{T-1}. \quad (213)$$

Но для всех ли совершенных чисел справедливы эти закономерности?

2.9. ДРУЖЕСТВЕННЫЕ И ОБЩИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Дружественные числа – это пара натуральных чисел, каждое из которых равно сумме всех собственных (или правильных) делителей другого. Когда Пифагора однажды спросили, что такое друг, он сказал, что это “второе я”, и упомянул о дружественных числах 220 и 284 ($220=1+2+4+71+142$, а $284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$). Приписывая мистический смысл свойствам чисел, пифагорейцы (см. п. 3.13) придавали дружественным числам большое значение. Около 60 пар таких чисел было найдено Л. Эйлером. Использование компьютера позволило отыскать 1100 пар дружественных

чисел (1998 г.), причем оба числа в паре являются либо четными, либо нечетными числами, а существуют ли смешанные пары – неизвестно. Конечно или бесконечно множество дружественных чисел пока также неясно. Несмотря на многочисленные усилия (например, древние формулы багдадского математика Ибн Курра, жившего в 836–901 гг.), до сих пор не найдена и общая формула, описывающая все дружественные числа. Короче говоря, эти числа продолжают скрывать множество тайн.

В XX веке математики занялись поиском так называемых **общительных чисел** – замкнутых циклов из трех и более чисел. Так, в тройке чисел 1.945.330.728.960; 2.324.196.638.720; 2.615.631.953.920 делители 1-го числа в сумме дают 2-е число, делители 2-го числа в сумме дают 3-е число, а делители 3-го числа в сумме дают 1-е число. Самый длинный из известных циклов состоит из 28 общительных чисел (первое число – 14316).

Ниже приведены результаты исследования первых 13-ти пар ($N1$, $N2$) дружественных чисел (см. табл. 18). Все дружественные числа – это, вероятно, числа только из *частых миров*. Типы дружественных чисел, вообще говоря, либо равны, либо $T1=2 \cdot T2$ (исключение – 5-я пара). *Богатство* (сумма всех делителей – S) у дружественных чисел совпадает ($S1=S2$), причем *кратность* богатства у всех этих чисел близка к 2 ($KR=S/N \approx 1,77 \div 2,29$). Отношение *большого* числа в паре к *меньшему* ($N2/N1$) изменяется в пределах от 1,0009 до 1,29. Меньшее число $N1$ в каждой паре с порядковым номером x растет близко к экспоненте $N1 \approx A \exp(Bx)$, где $A=507,48$; $B=0,4482$. Распределение делителей у чисел в отдельных парах могут почти идеально совпадать (тильды в 6, 10, 11-й парах), отличаться незначительно (тильдаобразный и волнистый характеры у 9-й пары; тильда и экспонента у 13-й пары), либо весьма существенно различаться между собой.

Таблица 18.

x	$N1$	$T1$	$N2$	$T2$
1	220	12	284	6
2	1184	12	1210	12
3	2620	12	2924	12
4	5020	12	5564	12
5	6232	16	6368	12
6	10744	16	10856	16
7	12285	32	14595	16
8	17296	20	18416	10
9	63020	24	76084	12
10	66928	20	66992	20
11	67095	32	71145	32
12	69615	48	87633	24
13	79750	32	88730	16

2.10. ПОЧТИ ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Примером такого числа является число $N^* = \exp(\pi \cdot 163^{1/2})$, оно почти равно натуральному числу $N_s = 262.537.412.640.768.744$ (меньше его на 0,000.000.000.000.75...). Значение этого *почти целого числа* с 39 знаками после запятой приведено в работе Д. Лемера еще в 1943 г., а обнаружил столь необычное число А. К. Айткен – чудо-вычислитель (см. п. 5.2).

Целое семейство *почти целых чисел* (все они трансцендентны по своей природе) подробно рассмотрел индийский математик С. Рамануджан (1887–1920). Этому молодого человека многие считали гением, т. к. не имея специального математического образования, он получил замечательные результаты в области теории чисел. Он также обладал феноменальными и во многом загадочными математическими способностями, причем, по словам его друга, математика Дж. Литлвуда: “Создавалось впечатление, что каждое натуральное число являлось “личным другом” Рамануджана”. Например, однажды он мгновенно разложил номер машины-такси: $1729=9^3+10^3=1^3+12^3$, заметив своему собеседнику, что 1729 – первое число, которое представимо в виде суммы двух кубов двумя разными способами, и это прибавило настроения безнадежно больному Рамануджану. Организованный англичанином Г. Харди, горячим поклонником таланта Рамануджана, переезд последнего из Индии в Англию в 1914 г. оказался, к сожалению, трагичным для молодого индийца, не сумевшего приспособиться к английскому климату: в 1917 г. он заболел туберкулёзом и вскоре умер.

2.11. САМОПОРОЖДЕННЫЕ ЧИСЛА КАПРЕКАРА

Индийский математик Д. Капрекар известен, прежде всего, тем, что в 70-х годах минувшего столетия ему удалось обнаружить неизвестную ранее постоянную (число). Суть открытия проявляется в следующем алгоритме:

а) Выберите любое четырехзначное число, в котором не все цифры одинаковы (поясним работу алгоритма на примере, скажем, числа 1121);
б) Расположите цифры в порядке убывания – это большее число (2111);
в) Переставьте цифры в обратном порядке – это меньшее число (1112);
г) Отнимите от большего числа меньшее – получите новое число (0999);
д) Повторите для нового числа алгоритм, начиная с пункта б) и так до тех пор, пока новое число не станет равным числу 6174, причем это произойдет не более чем за 7 шагов (производя перестановки цифр и вычитания, нули следует сохранять: $9990-0999=8991$; $9981-1899=8082$; $8820-0288=8532$; $8532-2358=6174$). Далее число **6174** будет воспроизводить самое себя, вот это число и назвали *постоянной Капрекара*. Любопытно, не правда ли? Причем опять (который раз!) возникает магическое число 7.

Капрекар открыл также целый класс натуральных чисел, которые он назвал *самопорожденными числами* (1949 г.). Эти числа появляются в результате *цифросложения*. Поясним суть последнего на примере числа 13, сумма цифр которого $1+3=4$, тогда число $13+4=17$ называется *порожденным числом*, а число 13 – его *генератором*. Таким образом, цифросложение порождает последовательность 13, 17, 25, 32, 37, 47, ... (от генератора 13).

Сумма всех цифр в последовательности, порождаемой цифросложением, находится просто: нужно от последнего числа вычесть первое число (генератор) и прибавить сумму цифр последнего числа (в нашем примере: $47-13+11=45$). Порожденные числа $N > 100$ могут иметь более одного генератора (такие числа N называются *соединениями*), так у соединения $N=101$ есть два генератора 91 и 100. Наименьшее соединение с тремя генераторами это число $N=10^{13}+1$, генераторы которого 10^{13} ; $10^{13}-99$; $10^{13}-108$. Наименьшее число с четырьмя генераторами это соединение $N=10^{24}+102$, найденное Капрекаром в 1961 г., ему удалось также найти минимальные соединения с 5 и 6 генераторами. *Самопорожденное число (СП-число)* – это число, у которого просто нет никакого генератора (оно себя само порождает). Этих чисел бесконечно много, среди них есть простые числа (и тогда их называют *сампростыми*). К множеству СП-чисел относится известное “циклическое” число **142857** (умножайте его на числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и увидите циклическую перестановку цифр), или, например, только такие *круглые числа* (степени числа десять): 10^6 ; 10^{16} ; 10^7 . Пока не открыта *точная формула* для n -го СП-числа, но Капрекар придумал простой алгоритм для проверки любого числа N на самопорожденность. Вот этот алгоритм:

а) Найдем *цифровой корень (ЦК)* числа N (т. е. остаток от деления числа N на 9) путем сложения цифр числа N , а затем – сложения цифр полученного результата и т. д. до тех пор, пока не получим однозначное число;

б) Если ЦК четный, то $C=ЦК/2$, иначе $C=(ЦК+9)/2$, затем $R1=N-C$;

в) Проверим, не порождает ли $R1$ число N . Если не порождает, то $R2=R1-9$ и проверим, не порождает ли $R2$ число N . Если не порождает, то $R3=R2-9$ и повторяем проверку для $R3$ и т. д. Если мы не получим генератор числа N за k шагов, где k – число цифр в N , то N – СП-число. Замечание: если на k -м шаге получаем $R_k < 0$, то число N также СП-число.

Пример работы алгоритма Капрекара для числа $N=1975$: а) $1+9+7+5=22$; $2+2=4$; ЦК=4; б) $C=4/2=2$; $R=1975-2=1973$; в) $1+9+7+3=20$; $1973+20=1993$; $1993 \neq 1975$; $1973-9=1964$; $1+9+6+4=20$; $1964+20=1984$; $1984 \neq 1975$; $1964-9=1955$; $1+9+5+5=20$; $1955+20=1975$, т. е. 1955 – генератор числа 1975.

Если мы возьмем произвольный набор (ряд) натуральных чисел, идущих подряд друг за другом, и “пропустим” этот набор через алгоритм Капрекара, то наибольшая “отбраковка” чисел произойдет на средних шагах (вокруг $k/2$ шага, т. е. почти по нормальному закону распределения).

Таким образом, используя алгоритм Капрекара, можно построить ряд СП-чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97, Ниже приводятся некоторые результаты исследований данного ряда, полученные автором.

Если N_n – это n -ое СП-число, то при $n=1, 2, 3, 4, 5$ имеем $N_n=2n-1$, а далее количество СП-чисел на отрезке $[1; N]$ можно оценить по формуле

$$n \approx (N + 41 + F^{-1}) \cdot (10 + F^{-1})^{-1}, \quad (214)$$

где $F=4,669202\dots$ – число Фейгенбаума. Причем $\text{abs}(OIT) < 11 \cdot N^{-1}$, но только до $N=10004$, т. е. формула (214) описывает только сингулярность. Здесь же она позволяет указать *примерное* значение n -го СП-числа

$$N_n \approx 10 \cdot n - 41 + (n-1) \cdot F^{-1}, \quad (215)$$

при этом ошибка может быть до 11 чисел, поскольку $\text{abs}(OIT) \leq n^{-1} \cdot \ln n$.

Как ведет себя отношение количества СП-чисел к количеству простых чисел (скажем, параметр W) на отрезке $[1; N]$? Сначала, на отрезке $[3; 97]$, параметр W убывает от 1 до 0,52, а потом начинает расти и после $N=80599$ всегда $W > 1$, причем на бесконечности, надо полагать, $W \approx (0,09 \div 0,10) \cdot \ln N$.

Количество (k) *самопростых* чисел на отрезке $[1; N]$, а точнее их *доля* среди самопорожденных чисел ($D \approx k/n$), будет равна

$$D \approx 4,6692 \cdot (\ln N)^{-1,6487} \approx F \cdot (\ln N)^{-e^{0,5}}, \quad (216)$$

т. е. в конце Большого отрезка $D \approx 0,0013$.

Для любителей толкования истории по числам (или составлению прогнозов) мы приведем простой алгоритм для нахождения выборки из 108 СП-чисел от $N=1111$ ($n=113$) до $N=2211$ ($n=220$). «Роковые» СП-числа (годы) необходимо находить по формуле $N=11 \cdot n - B$, где параметр B берем из табл. 19. Например, начиная с $n=193$ ($N=1919$ год) берем $B=204$ вплоть до $n=201$. Так, последним “роковым” был год $N=11 \cdot 200 - 204 = 1996$ год, а следующими самопорожденными годами будут $N=11 \cdot 201 - 204 = 2007$ год, $N=11 \cdot 202 - 200 = 2022$ год и т. д.

n	N	B
113	1111	132
123	1212	141
133	1313	150
143	1414	159
153	1515	168
163	1616	177
173	1717	186
183	1818	195
193	1919	204
202	2022	200
211	2112	209

При исследовании СП-чисел, вероятно, большое значение имеет параметр, равный разности между последующим СП-числом и данным (n -м) СП-числом: $H_n = N_{n+1} - N_n$. Этот параметр (H_n) будем называть *орбитой* n -го СП-числа. Например, у первого СП-числа $N_1=1$ орбита равна $H_1=2$ и остается таковой до пятого СП-числа $N_5=9$, у которого орбита $H_5=11$. Далее идут в подавляющем большинстве орбиты 11 (т. е. равные 11), которые лишь изредка «позволяют» появиться орбите 2. И только при $N_{103}=1006$ появляется третья новая орбита $H_{103}=15$. СП-числа ($N=1, 9, 1006, \dots$), у которых впервые появляется очередная новая орбита, удобно называть *лидерами орбит* (NL). На отрезке $[10^3; 10^{11}]$ все лидеры орбит – это почти *круглые числа* (степень числа $10 \pm$ величина орбиты лидера), причем орбиты этих лидеров ($HL=15, 28, 41, 54, 67, 80, 93, 106, 119$) хорошо описываются формулой $HL=5,6531 \cdot \ln NL - 24,079$. Однако при $NL=10^{12} \pm 1000$ уже не удается обнаружить ожидаемую орбиту $HL=132$. Вероятно, для СП-чисел характерно *скачкообразное изменение структуры* и в данном случае происходит некий очередной скачок.

На отрезке $[1; 10^{11}]$ явно господствуют орбиты 11 (равные 11), все остальные орбиты (2, 15, 28, 41, 54, 67, 80, 93, 106, 119, ...) напоминают некие регулярные (?) “вкрапления” в общий 11-й фон. Среднее арифметическое всех орбит (от 1-го до n -го СП-числа), которое мы будем называть *средней орбитой* (H_s), стремительно увеличивается и уже при $N=1300$ достигает значения $H_s=10$, после чего продолжает свой рост, но уже чрезвычайно медленно (при $N=135003$ имеем $H_s=10,2236\dots$). Возможно, средняя орбита асимптотически стремится к некому числу, из диапазона $H_s=10\div 11$, что равносильно следующему утверждению: отношение количества (k) всех орбит кроме 11-й к общему количеству (K) всех орбит стремится к некому числу (при $N=135003$ имеем $k/K=0,11415\dots$). Можно также попробовать оценить количество орбит (kl), стоящих «за плечами» каждого лидера NL , точнее их долю (D) среди всех орбит, кроме 11-й:

$$D \approx kl/k \approx 1,3456 \cdot \exp(-0,1818 \cdot HL), \quad \text{где } HL=2, 15, 28, 41, \dots, 119, ? \quad (217)$$

Самопорожденные числа таят в себе ещё немало сложных вопросов и убедительно доказывают, что в мире чисел, как и в обыденной жизни, серьезные проблемы могут возникать почти “на голом месте”.

2.12. ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА (КВАТРЕ-ЧИСЛА)

Так называются числа, связанные с геометрическими построениями определенного типа. Из них чаще всего рассматриваются **многоугольные числа**. Так, q -угольное число с порядковым номером $n=1, 2, 3, \dots$ можно найти по точной формуле, имеющей вид

$$N_n = n + (q - 2) \cdot n \cdot (n - 1) / 2. \quad (218)$$

Таким образом, *треугольные числа* ($q=3$) выражаются формулой $N_n = n(n+1)/2$ и образуют последовательность 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...; *квадратные числа* ($q=4$) выражаются формулой $N_n = n^2$ и образуют последовательность 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...; *пятиугольные числа* ($q=5$) выражаются формулой $N_n = (3n^2 - n)/2$ и образуют последовательность 1, 5, 12, 22, 35, 51, ... , и т. д. Название «многоугольные числа» связано с их построением. На рис. 37 дано построение пятиугольных чисел: на каждой стороне отложены отрезки единичной длины; число точек деления в наименьшем пятиугольнике равно 5, в двух пятиугольниках (в наименьшем и среднем) – 12, в трех – 22 и т. д. Кстати, рассматривают также фигурные числа, аналогичные треугольным числам, в пространстве 3-х и большего числа измерений: пирамидальные и т. д. Пирамидальные числа выражают числа шаров, складывающиеся в правильные пирамиды. Изучением фигур-

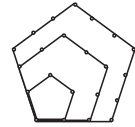


Рис. 37

ных чисел занимается раздел теории чисел, получивший название *диофантова анализа*, который служит для нахождения целочисленных решений уравнений.

Оказывается, существуют числа, которые являются одновременно и квадратным и треугольным (*квадратные треугольники* или *кватре-числа*), причем еще в 1730 г. Л. Эйлер нашел точную формулу для n -го числа

$$N_n = [(17+12\sqrt{2})^n + (17-12\sqrt{2})^n - 2]/32 . \quad (219)$$

Эта формула дает последовательность кватре-чисел: 1, 36, 1225, 41616, 1413721, ..., которые обладают многими необычными свойствами. Нетрудно убедиться, что на отрезке $[1; N]$ находится n кватре-чисел

$$n \approx 0,283648 \cdot \ln(N/32) , \quad (220)$$

т. е. на БО примерно 41 кватре-число, а на ПО их около 201.

Одно из наиболее необычных свойств кватре-чисел состоит в том, что каждое такое число задает прямоугольный треугольник, у которого один катет (Y) всего на единицу длиннее другого катета (X), т. е. $Y-X=1$ и получаем почти равнобедренный треугольник с гипотенузой (основанием), скажем, Z . Вот алгоритм для нахождения таких, скажем, *кватреугольников*:

$$u=A\sqrt{2 \cdot N_n} ; \quad v=\sqrt{N_n} ; \quad X=2 \cdot v+u ; \quad Z=2 \cdot (v+u)+1 ; \quad Y=\sqrt{Z^2-X^2} , \quad (221)$$

где A – функция “антье”. Таким образом, меньший катет любого кватреугольника примерно равен $X \approx (2+2^{0.5}) \cdot N_n^{0.5} \approx 3,4142 \cdot N_n^{0.5}$ (u , v , и пифагоровы тройки X , Z , Y – всегда целые числа). Только представьте себе такое *чудо-вище*, как 80-й кватреугольник – почти равнобедренный, катеты у него близки к БО ($X \approx 10^{61}$) и отличаются на 1 *эви* ($Y-X=1$; при $n=80$ кватре-число равно $N_n \approx 10^{121}$). При $n=41$ кватре-число равно $N_n \approx 10^{61}$, а меньший катет равен $X \approx 10^{31}$ (что примерно в 4 раза меньше номера ступени Ствола i , на которой стоит число N_n). О пифагоровых тройках смотри п. 1.38.

Среди фигурных чисел существуют также центрированные шестиугольные числа (*гексы*): 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, ..., их точная формула имеет вид $N_n=3n(n-1)+1$. С гексами тесно связаны *числа-звезды*: 1, 13, 37, 73, 121, 181, 253, ..., их точная формула имеет вид $N_n=6n(n-1)+1$. Звезды можно отождествлять с формой досок для китайских шашек, а вторая звезда (число 13) изображена на обороте купюры достоинством в 1 доллар (над орлом). Есть треугольные и квадратные числа-звезды, а также точные формулы для них. Есть числа, которые одновременно и гексы и звезды: 1, 37, 1261, 42841, ... [10]. На Большом отрезке около 10^{30} и гекс, и звезд.

2.13. ВСЯКИЕ ПРОЧИЕ ЧИСЛА

Числа, рассмотренные нами выше, далеко не исчерпывают всё многообразие мира *натуральных чисел* (а ведь ещё существуют отрицательные, рациональные, иррациональные, трансцендентные, комплексные числа). В бесконечном натуральном ряду продолжает таиться много интересного. Приведем только несколько примеров, поясняющих данное утверждение.

П.Ферма доказал, что число **26** – единственное число, которое «зажато» между квадратом и кубом, т.е. между числами $25=5^2$ и $27=3^3$.

Только 4 числа обладают тем свойством, что они равны сумме кубов своих цифр: **153** $=1^3+5^3+3^3$; **370** $=3^3+7^3+0^3$; **371** $=3^3+7^3+1^3$; **407** $=4^3+0^3+7^3$.

Число **142857** (кстати, это период десятичной дроби $1/7$) после «рокировки» первой слева цифры превращается в число 428571, которое кратно исходному. Второе такое число – **285714**, и других в первом миллионе нет.

Существуют числа кратные своим “перевертышам” (т.е. числам, полученным перестановкой цифр в обратном порядке). Среди четырехзначных чисел таким свойством обладают только **8712** $=4 \times 2178$ и **9801** $=9 \times 1089$. Можно также попытаться найти два числа, перевернутое произведение которых равно произведению перевернутых сомножителей: **312** \times **221** $=68952$ и $213 \times 122 = 25986$. Число **698896** является полным квадратом, совпадает со своим “перевертышем” и имеет четную сумму цифр (такое число одно?).

Очевидно, можно выделять некие семейства “новых” чисел (унитарные, круглые числа – термины автора) и исследовать их в рамках ГТНЧ.

Унитарное число – это число состоящее из одинаковых цифр. Будем говорить, что существуют *первые унитарные числа*: 1, 11, 111, ..., $1N$ (где $1N$ – количество цифр в числе, в данном случае количество единиц); *вторые унитарные числа*: 2, 22, 222, ..., $2N$; ...; *девятые унитарные числа*: 9, 99, 999, ..., $9N$. Унитарные числа могут представлять интерес с различных точек зрения. Например, давно уже установлено, что среди *единичных чисел* (а по нашему – первых унитарных чисел) *простыми* являются: 2-значное число ($1N=2$, т.е. это число **11**), 19-значное число ($1N=19$), 23-значное число ($1N=23$). Существует ли четвертое простое единичное число – неизвестно. Ближайший кандидат в простые числа состоит из 47 единиц (числа из 29, 31, 37, 41, 43, 53, 61 и 73 единиц – составные).

Унитарное число **666** («число зверя» – см. п. 3.12) довольно необычное: $666 = 1+2+3+4+5+\dots+36$ (равно сумме первых 36-ти натуральных чисел); $666 = 2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$ (квадраты первых семи простых чисел); $666 = 1^6-2^6+3^6$; $666=9+87+6+543+21$ (цифры идут по убыванию: 9,8,7,...,2,1); $666 = 1+2+3+4+567+89$; $666=123+456+78+9$ (цифры идут по возрастанию).

Кстати, все делители числа 666 (их дюжина: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 37, 74, 111, 222, 333, 666) хорошо “ложатся” на экспоненту вида $D_n=0,55 \cdot \exp(0,592n)$.

Круглое число – это число вида $N \cong 10^a = 2^a \cdot 5^a$, где $a=1, 2, 3, \dots$. Т.е. это числа 10, 100, 1000 и т. д. (количество нулей равно числу a). Тип круглых чисел равен $T=(a+1)^2$, их богатство можно определить по формуле Валлиса (116), откуда получаем $S=(2^{a+1}-1)(5^{a+1}-1)/4$. Кратность (S/N) круглых чисел очень быстро устремляется к числу 2,5. Чем ещё интересны круглые числа?

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕСЬ

3.1. ЗАКОН БЕНФОРДА (О ПЕРВОЙ ЗНАЧАЩЕЙ ЦИФРЕ)

В 1938 году американский физик Ф. Бенфорд открыл “закон аномальных чисел”. Начальный толчок его поискам дали библиотечные таблицы логарифмов. Бенфорд заметил, что первые несколько страниц захватаны больше, чем следующие за ними, в то время как последние страницы почти совсем чисты. “Почему студенты и инженеры чаще пользуются первыми страницами таблиц логарифмов, чем последними? – подумал Бенфорд. – Потому что им чаще приходится иметь дело с числами, начинающимися с цифры 1, чем с цифр 2, 3, 4 и т.д. А логарифмы каких чисел чаще всего приходится искать в таблицах? Очевидно – тех чисел, которые находятся в специальных справочниках”.

Бенфорд исследовал около 20 таблиц, среди которых были данные о площади поверхности 335 рек, удельной теплоемкости и молекулярном весе тысяч химических соединений и даже номера домов первых 342 лиц, указанных в биографическом справочнике американских ученых. Проанализировав около 20 тысяч содержащихся в таблицах чисел, Бенфорд установил удивительную закономерность. Казалось бы, все девять цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (из которых состоит любое мыслимое число) равноправны, и вероятность появления каждой из них в начале числа должна составлять $1/9=0,111\dots$. Точнее говоря, не в начале числа, а в качестве первой значащей цифры числа (понятие о *первой значащей цифре* проще всего пояснить на примере, так, у совершенно разных чисел 0,0123; 0,1456; 1,789; 1957 – первая значащая цифра равна 1). Однако, обработав таблицы, Бенфорд получил, что вероятность появления в качестве *первой значащей цифры* единицы, оказалась почти втрое больше, чем вытекает из равновероятного распределения! А вероятность появления первой значащей цифры 9 составляет всего 0,047 – почти в 2,4 раза меньше, чем 0,111. Короче говоря, если таблицы логарифмов разместить на 9 страницах, то первая страница окажется почти в семь раз грязнее, чем последняя!

В итоге проделанной работы Бенфорд установил *эмпирический* “закон аномальных чисел”: вероятность того, что у некоего случайного числа первая значащая цифра будет равна i , определяется по формуле

$$P_i = \log(1+i^{-1}) , \quad \text{где } i=1, 2, 3, \dots, 9 \quad (222)$$

Слово “аномальные” в названии закона появилось потому, что одни таблицы находились в лучшем соответствии с формулой, чем другие. Площади рек и случайные номера домов давали лучшее совпадение, а таблицы квадратных корней или удельной теплоемкости – худшее. Поэтому Бенфорд решил, что открытый им закон приложим только к таким – аномальным – числам, между которыми не угадывается никаких связывающих их закономерностей. Вот какой красивый (лаконичностью) закон на протяжении сотен лет являлся миру в виде захватанных первых страниц справочников!

Странно, что Бенфорд не смог получить свою формулу *аналитически*, поскольку совсем простые рассуждения позволяют это сделать. Приведем только общую схему для нахождения вероятностей распределения первой значащей цифры, вообще говоря, у *любой* непрерывной функции $y=f(x)$.

Пусть даны значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[y_n; y_k]$, где $y_n=10^n$; $y_k=10^k$; n, k – любые натуральные числа, причем $k>n$. Первая значащая цифра i у всякой десятичной дроби (по оси ординат) будет оставаться неизменной, если рассматривать такие отрезки (проверьте это на конкретных примерах)

$$[y_{ij}; y_{i+1,j}], \quad \text{где } y_{ij}=i \cdot 10^{n+j-1}; \quad y_{i+1,j}=(i+1) \cdot 10^{n+j-1};$$

и для каждого $i=1, 2, 3, \dots, 9$ берём $j=1, 2, 3, \dots, (k-n)$. Будем считать, что количество значений функции $y=f(x)$ на отрезке $[y_{ij}; y_{i+1,j}]$ в точности равно количеству значений аргумента x на отрезке $[x_{ij}; x_{i+1,j}]$ по оси абсцисс, причем появление любого аргумента x на отрезке $[x_n; x_k]$ – равновероятно, и, разумеется, что $y_n=f(x_n)$; $y_k=f(x_k)$. Тогда вероятность появления первой значащей цифры i в значении функции $y=f(x)$ будет равна

$$P_i = \Sigma [f^{-1}(y_{i+1,j}) - f^{-1}(y_{i,j})] / [f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_n)] , \quad (223)$$

где f^{-1} – функция, обратная функции f , а суммирование производится по $j=1, 2, 3, \dots, (k-n)$ (для каждого $i=1, 2, 3, \dots, 9$). Если в качестве функции $y=f(x)$ взять любую *показательную функцию* $y=b \cdot a^{cx}$, то после её «обработки» по указанной схеме мы получим формулу Бенфорда (222). Более того, для показательной функции вероятность P_i не зависит ни от выбора интервала рассматриваемых значений функции $y=f(x)$, ни от параметров показательной функции (b, a, c). Таким образом, слово “аномальные” в законе Бенфорда просто лишнее, и, например, для таблиц квадратных корней ($y=x^{1/2}$) вероятность P_i с увеличением i даже растет, а не убывает, как того требует формула (222).

Т. к. любая *экспоненциальная функция* – это частный случай показательной функции, у которой $a=e=2,718\dots$, и т. к. большинство природных явлений описывается именно *экспонентами* (см. п. 2.1), то нет ничего таинственного в закономерности распределения первых значащих цифр, на которую впервые обратил внимание Бенфорд. Кроме того, целый ряд других функций после их подстановки в формулу (223) – выдают вероятности P_i , весьма близкие к закону Бенфорда. Например, функция $y=f(x) = \text{tg}(b \cdot x)$ при любом b на отрезке от $u_n=10^{-3}$ до $u_k=10^3$ “порождает” P_i , которые практически совпадают с вероятностями Бенфорда.

Что касается “никаких связывающих закономерностей” между площадями поверхности рек или номерами домов (а по сути – длины улиц, на которых стоят дома) и т. п., то можно смело утверждать, что числа, количественно описывающие самые разнообразные физические объекты, подчиняются *тильда-распределениям (логнормальным распределениям)*. А тильда-распределение, как мы знаем, – это псевдоэкспонента (см. п. 1.37).

Доказательством того, что тильда-распределения, наравне с экспонентами, могут приводить к вероятностям Бенфорда, являются данные табл. 20, где показаны вероятности появления (P_i) первой значащей цифры i у всех 216-ти делителей числа $N=655200$ с “классической” тильдой. Хорошо видно, что эти вероятности близки к значениям, полученным по формуле (222), и к фактическим (статистическим) данным, полученным Бенфордом.

Таким образом, огромный фактический материал, собранный Бенфордом, и закон, названный его именем, это веское доказательство экспоненциального характера большинства явлений в природе, а также доказательство

Таблица 20. Закон Бенфорда

i	Вероятность P_i		число N
	у Бенфорда		
	формула	факт.	
1	0,301	0,306	0,296
2	0,176	0,185	0,181
3	0,125	0,124	0,125
4	0,097	0,094	0,093
5	0,079	0,080	0,079
6	0,067	0,064	0,069
7	0,058	0,051	0,060
8	0,051	0,049	0,046
9	0,046	0,047	0,051

наличия множества тильда-распределений (логнормальных распределений) в окружающем нас мире (см. также п. 5.5÷5.7).

3.2. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПОЛНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Проблема родилась в 1611 г., когда немецкий астроном и математик, открывший законы движения планет, Иоганн Кеплер (1571–1630) написал небольшое сочинение «О шестиугольных снежинках». В этом сочинении Кеплер объяснил, почему снежинки всегда имеют шестиугольную форму: рост каждой из них начинается с зародыша, обладающего гексагональной симметрией (впоследствии Кеплер стал одним из основоположников *кристаллографии*, см. п. 5.10). Интерес Кеплера к расположению и самоорганизации частиц вещества привел его к вопросу о плотнейшей упаковке частиц, при которой они занимают наименьший объем. Если предположить, что частицы имеют форму шаров, то при любой их упаковке между ними неизбежно будут оставаться зазоры, и вопрос состоит в том, чтобы объем зазоров свести к минимуму или, иначе говоря, найти предельное значение *коэффициента заполнения пространства* (КЗП).

Как заполнить пространство (грубо говоря, ящик) наибольшим количеством одинаковых шариков? Для этого их надо уложить так, чтобы каждый из них касался четырех шаров нижележащего слоя, четырех шаров своего слоя и четырех шаров вышележащего слоя. Такое расположение называется *нормальной укладкой* или *сферической плотной упаковкой* (пространство заполнено шарами примерно на 74%), при этом шары вписаны в ромбические додекаэдры (12 граней) заполнения, а их центры служат вершинами. Следует заметить, что хотя один твердый шар может касаться не более чем 12 других шаров такого же размера, есть много разных способов упаковки одинаковых шаров, при которой каждый из них касается ровно 12 других.

Если сделать большое количество одинаковых шариков из пластилина, обвалить их в меловой пудре, *аккуратно* упаковать любым способом и затем сжать в сплошной ком, то шарики, оказавшиеся в центре кома, будут стремиться принять форму ромбического додекаэдра или трапециомбического додекаэдра. Если вместо аккуратной упаковки шарики, уложенные *случайным* образом, как можно плотнее «утрясти», а затем спрессовать, как раньше, получатся неправильные многогранники разных видов. Среднее число граней равно не 12, а примерно 13,3. Не доказано, что одинаковые шары при такой *случайной* укладке занимают меньшую часть пространства, чем те же шары при *нормальной укладке*. Но ясно, что при любом незначительном смещении общий объем возрастает за счет увеличения просветов.

В результате своих вычислений Кеплер установил, что наибольший КЗП $\approx 74\%$ имеет *гранецентрированная кубическая* упаковка одинаковых шаров. Это легко проверить: представьте себе куб, в каждой вершине которого помещен шар (всего таких шаров – 8), а также в центре каждой грани по шару (всего таких шаров – 6), причем диаметры всех шаров одинаковы и шар в центре каждой грани должен касаться четырех шаров, которые в ближайших вершинах куба. Теперь мысленно «обрежьте ножом» все 6 граней и получите куб, «начиненный» 8-ю восьмушками и 6-ю половинками шаров. Отношение объема указанной «начинки» к объему куба будет равно $\text{КЗП} = (2^{3/2} / 12) \cdot \pi \approx 0,235702 \cdot \pi \approx 0,74048$ или примерно 74,05%. При гранецентрированной упаковке в каждом слое вокруг каждого шара уложено 6 других шаров, частной разновидностью такой упаковки служат пирамиды из апельсинов, которые торговцы выкладывают на своих прилавках.

Однако все это не исключает возможность существования какого-то другого расположения шаров, с еще *большим* КЗП, ведь вариантов упаковки бесконечно много, причем надо рассматривать не только регулярное, но и хаотичное, случайное расположение шаров. За последние 390 лет никому не удалось доказать гипотезу Кеплера о том, что гранецентрированная кубическая решетка действительно служит оптимальной стратегией упаковки (нет *математически строго* доказательства гипотезы). Но никто пока не открыл и более эффективного метода упаковки. В связи с этим британский специалист по упаковке шаров К. А. Роджерс пошутил, что «большинство математиков в правильность гипотезы Кеплера верят, а все физики в её правильности твердо убеждены, так как это знают».

В 1892 г. скандинавский математик Аксель Туэ нашел математически строгое доказательство для двумерного аналога проблемы Кеплера, т. е. доказал, что наиболее эффективное расположение шаров в одном слое – это гексагональное расположение шаров (6 шаров с центром в углах правильного шестиугольника, а в середине – 7-й шар, который касается всех остальных шаров, все шары одинаковы). Эта математическая задача также имеет самое непосредственное отношение к реальной структуре пространства-времени. Достаточно вспомнить общеизвестный пример самоорганизации в гидродинамике – образование в плоском горизонтальном слое вязкой подогреваемой жидкости (начиная с некоторых градиентов температуры) *шести-гранных призматических ячеек Бенара* [36]. Однако, увы, математическое доказательство, найденное А. Туэ для двумерного случая, не применимо к исходной трехмерной проблеме Кеплера.

В наше время некоторые математики попытались подойти к проблеме Кеплера с другой стороны, а именно – вычислить *верхний предел* КЗП. Упо-

мянутый выше К. А. Роджерс в 1958 г. впервые вычислил этот предел, который оказался равным 77,97%. После Роджерса другим математикам за 30 лет удалось понизить верхний предел КЗП всего на всего до 77,84% (1988 г.) [31], что лишь на 0,13% улучшает оценку Роджерса. Таким образом, если у какого-нибудь расположения шаров КЗП и оказался бы выше, чем у гранцентрированной кубической решетки, то превышение КЗП составило бы всего лишь 77,84–74,05≈3,79%. Если узкое окно в 3,79% (возможно и меньше?), в которое могло бы «втиснуться» какое-то невозможное расположение шаров, действительно существует, то гипотеза Кеплера будет опровергнута. Итак, все сводится к нахождению *предельного* КЗП, который согласно гипотезе Кеплера равен 74,05%, а по оценкам современных математиков он может быть и больше, но не превышает 77,84%.

После того, как Великая теорема Ферма была доказана Эндрю Уайлс (см. п. 3.4), наибольшие шансы занять её место имеет рассмотренная нами проблема плотнейшей упаковки шаров.

После краткого описания сути проблемы предельного КЗП можно было бы сделать сенсационное заявление: предельный (оптимальный) коэффициент заполнения пространства равен 77,5568..., а доказательство этого факта заключено в структуре чисел, которая в некотором смысле *изоморфна* (подобна) структуре пространства-времени. Однако это слишком серьезное утверждение, и мы ограничимся только описанием фактов из ГТНЧ¹.

Рассматривая спектры миров (см. п. 1.17), мы убеждаемся, что на отрезках, правая граница которых $N > 245000$, самым распространенным становится мир №8. Иначе говоря, среди чисел (разумеется, речь идет только о натуральных числах) чаще всего будут встречаться числа N , у которых количество всех делителей равно 8 (включая единицу и само число N). Это равносильно утверждению, что доля (D) чисел из мира №8 всегда будет наибольшей, где $D \equiv n/N$, и $n = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер числа N из мира №8 (внутри данного мира). При $N = 999994$ ($n = 224431$) имеем $D_{max} \approx 0,224432 \dots$. Следовательно, некий параметр $X \equiv 1 - D = (N - n)/N$ будет иметь минимально возможное значение, равное $1 - 0,224432 \approx 0,7756$ (или 77,56%), что поразительно близко к предельному КЗП (“улучшает” оценку Роджерса на 0,41%). Что скрывается за столь удивительным совпадением параметра ГТНЧ ($X_{min} \approx 77,56\%$) и предельным коэффициентом заполнения пространства (КЗП $\leq 77,84\%$)? Кстати, можно добавить, что это происходит при $N \approx 10^6$ эви ($\sim 10^{-38}$ секунды, $\sim 10^{-29}$ метров), а параметр X выражает вероятность появления на отрезке $[1; N]$ любого мира, кроме мира №8.

Любопытно, что при большом желании ГТНЧ позволяет “улучшить” оценку Роджерса на 2,97%! В самом деле, посмотрите на вершину Пирамиды

¹ Далее до конца параграфа идут ортодоксальные мысли автора (д. б. мелкий шрифт).

(рис. 2). Если для каждого числа $N=3, 4, 5, 6, 7, \dots$ мы будем вычислять отношение количества черных камней к количеству белых камней, то получим соответственно ряд значений $Y=2/3; 3/4; 2/5; 4/6; 2/7; \dots$, среди которых максимальным является значение $Y_{max}=3/4=0,75$ (при $N=4$). Вот вам, пожалуйста, и предельный КЗП=75%, правда, в таком случае при $N=1$ и $N=2$ мы имеем КЗП=100%! Насколько правомочна такая манипуляция числами? В данном случае в оправдание можно привести следующие соображения и факты. Отношение количества черных камней к количеству белых камней на отрезке $[1;M]$ – это ни что иное, как **чернота** Пирамиды, равная $B \approx 2 \cdot (\ln N/N)$ (см. 16-й закон Пирамиды), и параметр $Y_{max}=0,75$ весьма близок по смыслу к понятию «чернота». Известно, что плотность ядерного вещества (плотность протона) составляет около 10^{14} г/см³, с другой стороны нетрудно подсчитать, что отношение черноты Пирамиды на Малом отрезке (B_{20} , где индекс 20 говорит о том, что $N \approx 10^{20}$) к её черноте на Центральном отрезке (B_{35}) близко к значению $B_{20}/B_{35} \approx 10^{14}$, поэтому можно предположить (?), что плотность вещества на Центральном отрезке в 10^{14} раз меньше его плотности на Малом отрезке (плотности протона), т. е. примерно равна 1 г/см³ (плотность воды). Таким образом, ГТНЧ «подсказывает» нам, что в масштабах, характерных для человека (ЦО=1,616 м) типичная плотность вещества должна быть близка к плотности воды и это очень близко к реальности. Более того, несложно убедиться, что отношение $B_{20}/B_{61} \approx 10^{40}$, а значит плотность вещества во Вселенной (на Большом отрезке) в 10^{40} раз меньше ядерной плотности (на Малом отрезке). Наблюдаемая учеными плотность вещества во Вселенной ($\sim 10^{-31}$ г/см³) в 10^{45} раз меньше ядерной плотности, т. е. на 5 порядков меньше, чем дает ГТНЧ. Однако физика не исключает существование скрытой от наблюдений материи во Вселенной и поэтому «прогнозы» ГТНЧ не столь абсурдны. Но если плотность вещества больше 10^{-31} г/см³, то мы имеем дело с закрытой (замкнутой) моделью Вселенной (согласно теории А. Фридмана), а ГТНЧ «подтверждает» и этот факт: в ней единица замкнута на бесконечность (см. п.1.8). Какие удивительные «совпадения» физики и ГТНЧ!

Согласно данным космологии в сингулярности плотность Вселенной должна была быть не менее 10^{93} г/см³ (!), однако чернота Пирамиды при $N=1$, вероятно, равна $B_0=1$, поэтому $B_0/B_{20} \approx 10^{18}$, т. е. ГТНЧ дает в сингулярности плотность «всего на всего» $\sim 10^{32}$ г/см³. И, разумеется, эта плотность устремляется к бесконечно большому значению, если предположить, что при $N=1$ имеем $B_0 \rightarrow \infty$ (замкнуть единицу на бесконечность?).

3.3. ТЕОРИЯ БЛУЖДАНИЙ А. ЭЙНШТЕЙНА

Про знаменитое *броуновское движение*, наверняка, слышал каждый. Его суть в беспорядочных движениях малых (размерами в несколько микрон и менее) частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящих под действием толчков со стороны молекул окружающей среды. Открыто это движение Р. Броуном в 1827 г. Видимые только под микроскопом взвешенные частицы движутся независимо друг от друга и описывают сложные зигзагообразные траектории (блуждают). Броуновское движение не ослабевает со временем и не зависит от химических свойств среды. В результате «бомбардировки» молекулами броуновская частица меняет величину и направление своей скорости примерно 10^{14} раз в секунду. Теория случайных блужданий была построена Альбертом Эйнштейном (1879–1955). Она составила предмет одной из трех статей, опубликованных в 1905 г. и определивших пути развития физики XX века (две другие статьи посвящены теории относительности и теории световых квантов). Теория Эйнштейна гласит, что если частица в ходе блужданий (из стороны в сторону «прямолинейным шагом», равным S) пройдет суммарный путь N (длина зигзагообразной траектории), то в итоге частица сместится из исходной точки на расстояние i :

$$i = \sqrt{N \cdot S} \quad . \quad (224)$$

Следует заметить, что в справедливости теории блужданий может убедиться каждый. Так, в густом незнакомом лесу в пасмурную погоду вам вряд ли удастся выдержать прямолинейный отрезок S более 25 м («шаг» блужданий). Пусть за пять часов зигзагообразных (скорее всего) блужданий вы прошли в лесу суммарный путь $N=10$ км. Тогда вы сместитесь из исходной точки, вероятней всего, на $i=(10000 \cdot 25)^{0,5}=500$ м. Вам остается только проверить это число «на местности», и чем больше таких проверок вы сделаете, тем ближе будет *средний* результат к 500 м.

А теперь обратимся к ГТНЧ и “переосмыслим” формулу (224). Так, если под величиной N понимать натуральное число, и принять шаг S равным единице (что вполне логично для ряда натуральных чисел), то тогда i – это ни что иное, как номер ступени Ствола, на которой находится число N (см. 1-й закон Пирамиды). Таким образом, в ГТНЧ номера ступеней Ствола – это некая “абсолютная” шкала на пути натуральных чисел в таинственную бесконечность. Почему Эйнштейн получил именно корень квадратный из N , а не корень кубический, например? Очевидно, потому, что такова структура пространства-времени, так, можно сказать, захотел сам Бог. Но, с другой стороны, именно такова структура натуральных чисел, вот почему сто раз прав Пифагор, сказавший, что «Бог – это число...»!

Любопытно отметить, что из основных характеристик Пирамиды и Ствола можно сконструировать четыре относительных параметра (см.

табл.2.): P^*/p^* ; K/k ; P/p ; M^*/m^* , у которых общая формула имеет вид $i=(N \cdot S)^{1/2}$, где величина S в зависимости от конкретного параметра (i) изменяется в пределах от $\pi^4/256 \approx 0,38$ до $\pi^4/64 \approx 1,52$. Т. е. указанные относительные параметры ГТНЧ также неким образом воплощают собой фундаментальные свойства пространства-времени.

3.4. КАК ДОКАЗАЛИ ВЕЛИКУЮ ТЕОРЕМУ ФЕРМА

Согласно официальным опросам общественного мнения (в России и США) самой *честной* категорией населения считают *ученых* (за ними идут учителя) [49]. Однако, как гласит один из афоризмов Козьмы Прутковка: “Пороки входят в состав добродетели, как ядовитые снадобья – в состав лекарственного средства”, и в этом можно убедиться, прочитав, например, любопытную книгу С. Г. Бернатосяна “Воровство и обман в науке” [1]. В настоящее время многие разделы физики, математики достигли таких высот абстрактного мышления и логики, что только весьма изощренный ум ученого способен понять их в полном объеме. И уж если такой ум задумал какую-либо интригу, скажем, против коллеги по работе, то она может быть не менее изощренной, т. е. для многих даже непонятной и незаметной.

Числа существуют независимо от материального мира, истины здесь более абсолютны, чем любые другие знания. Поэтому *математика* – одна из наиболее чистых и совершенных форм человеческого мышления. А математики, как правило, необычайно точно выражают свои мысли, и просто терпеть не могут высказывать ложные утверждения. Они используют интуицию, не чужды вдохновения, но всегда помнят, что формальные суждения должны быть логически безупречны. Изоляция, вообще говоря, чужда математике, и она обычно представляет собой коллективную деятельность. Довольно часто математиков считают людьми не от мира сего, настолько глубоко они бывают погружены в свои проблемы. Математическая жизнь ученого-математика коротка (пик в 25–30 лет), т. е. математика – игра молодых людей. В математике опыт, который приходит с возрастом, менее важен, чем интуиция и смелость, свойственные юности. Практически ни одна серьезная математическая идея не была высказана человеком старше 50-ти лет. Большинство современных доказательств невероятно сложны, и разобраться в них неспециалисту просто не по силам. Более того, доказательства могут быть весьма объемными, например, так называемое доказательство классификации конечных простых групп состоит из 500 отдельных работ (всего 15000 страниц), написанных более ста математиками. Разделы современной математики – это как разные миры, причем математики любят наводить мосты между ними.

В будущем, вероятно, возникнет великая *единая* математика. Этапом к этому светлому будущему может стать создание ГТНЧ – теперь уже *глобальной теории натуральных чисел*.

Кстати, чтобы читатель смог бы критически оценить «вклад» нашей ГТНЧ в *теорию чисел* приведем три главных признака, которые отличают действительно важную математическую теорему: 1) Она должна представлять собой некую универсальную истину (верна для всей группы чисел). 2) Она должна раскрывать какую-нибудь более глубоко лежащую истину об отношениях между числами. Теорема может быть трамплином для создания других теорем и даже стимулом для развития новых областей математики. 3) Если существование целых областей исследования может оказаться под угрозой из-за отсутствия даже одного логического звена.

Необходимо также подчеркнуть, что экстраполяция некой теории с конечного множества на большее множество (а тем более на бесконечное множество) – игра рискованная и, вообще говоря, неприемлемая. Например, следующие семь чисел: 31, 331, 3331, ..., 33333331 – простые числа, и эту закономерность легко выдать за правило, однако уже следующее число 333333331 – составное (и вся скороспелая «теория» мгновенно рушится).

Отдельного разговора заслуживает понятие о безупречной *строгости математического доказательства*. Мы познакомимся с этим феноменом на поучительном примере доказательства *Великой теоремы Ферма* (ВТФ).

В 1637 г. великий французский математик Пьер де Ферма (1601–1665) на полях одной книги («Арифметики» Диофанта) написал такую теорему: для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых положительных числах x, y, z . А ниже Ферма приписал: «Я нашёл поистине удивительное доказательство этого предложения, но поля здесь слишком узки для того, чтобы вместить его». При этом сам Ферма оставил доказательство для случая $n=4$ (в зашифрованном виде). Так родилась проблема, не дававшая покоя математикам до конца XX века.

В 1770 г. Эйлер, используя понятие о «мнимой единице» (см. п. 1.8), доказал ВТФ для случая $n=3$. В 1825 г. Дирихле и Лежандр доказали теорему для $n=5$, а в 1839 г. Ламе доказал для $n=7$. Доказательства ВТФ для различных значений n устанавливались в дальнейшем многими учеными. Особенно трудно было доказать ВТФ при $n=37, 59, 67$ (это так называемые *нерегулярные простые числа* из первой сотни чисел).

В 1908 г. после смерти богатого немецкого промышленника Пауля Вольфскеля и оглашения его секретного завещания вокруг ВТФ начался невиданный ажиотаж. Вольфскель, понимавший и ценивший красоту математики, завещал 100000 марок тому, кто сумеет доказать ВТФ (но не позже 13.09.2007 г.!). Такое завещание он написал после того, как ВТФ спасла его

от самоубийства: коротая в библиотеке (!) часы до намеченного им выстрела, он так увлёкся доказательством ВТФ, что просто забыл о своей любовной катастрофе к одной женщине. Кстати, из-за ВТФ люди дрались на дуэли, а некоторые, отчаявшись найти доказательство, даже кончали с собой. Трудно сказать, сколько людей (от профессиональных математиков до безграмотных любителей) пыталось доказать ВТФ, так их было много. Но общее доказательство теоремы оставалась практически неприступным.

Во второй половине XX века с помощью ЭВМ удалось проверить ВТФ сначала при всех значениях n до 500 (в 50-е годы), затем до 1000, до 10000, до 25000 (в 80-е годы), до 4 млн. (в конце XX века). Однако всё это только говорило в пользу справедливости ВТФ, но ни в коем случае не являлось *математическим* доказательством, т. к. по условию теоремы $n \rightarrow \infty$ и даже, например, вигинтиллион ($n=10^{63}$) – ничто по сравнению с бесконечностью.

И вот в 1993 г. совершенно неожиданно для математического сообщества мало кому известный 40-летний англичанин Эндрю Уайлс предъявил доказательство ВТФ, которое и поставило крест на многовековой проблеме.

Эндрю Уайлс родился в 1953 г. в Кембридже. В 9 лет он впервые узнал о ВТФ из книги, которую взял в библиотеке, а в 10 лет мальчик уже был очарован математикой. В 22 года Уайлс поступил в аспирантуру Кембриджского университета. В 80-х годах молодой математик эмигрировал в Америку, где вскоре стал профессором Принстонского университета. Уайлса уже считали одним из наиболее одаренных математиков своего поколения, как вдруг он почти исчез из ежегодного круга конференций и семинаров. Многие даже сочли, что Уайлс «перегорел» как математик (такое случается). Но на самом деле он решил посвятить себя целиком одной проблеме – доказательству ВТФ (своей сокровенной мечте). Об этом знала только жена, остальные и не догадывались о его честолюбивых планах.

Математик-отшельник фантастически быстро продвигался к поставленной цели, изобретая всё новые методы и средства. Хотя работа над проблемой в полной изоляции – весьма рискованная стратегия, неслыханная в современном математическом мире, пропитанном коллективизмом (и сложнейшим хитросплетением самых изощренных околонуточных интриг). Без достойных оппонентов в работе даже у такого сильного математика, как Уайлс, была высока вероятность допустить фундаментальную ошибку в своих рассуждениях. И, тем не менее, в ходе работы Уайлсу удалось совершить ряд чрезвычайно важных открытий, которые он также держал в тайне. Кстати, для поисков доказательства ВТФ он никогда не пользовался компьютером, только лист бумаги, карандаш и свой разум. Уайлс ни на миг не забывал о своей цели. С этим он просыпался по утрам, над этим размышлял

весь день, об этом думал засыпая. Даже на регулярных прогулках к озеру он продолжал размышлять и что-то записывать в свой блокнот.

И вот после семи лет работы в одиночку Уайлс получил доказательство ВТФ, которое занимало около 200 (!) страниц. 23 июня 1993 г. в Кембридже состоялась его первая сенсационная лекция. После чего полный текст доказательства был передан на проверку шести рецензентам-математикам (обязательная процедура перед публикацией в ведущем математическом журнале «Анналы математики»). И тут происходит нечто ужасное – один из рецензентов (профессор Ник Катц) находит в доказательстве ошибку, которая ставит Уайлса в тупик. Зимой 1993 г. Уайлс пригласил Ричарда Тейлора (бывшего своего аспиранта, а теперь – одного из шести рецензентов) для совместной работы по исправлению доказательства. Но и совместная их работа не изменяет угрожающей ситуации. К лету 1994 г. Уайлс был уже на грани того, чтобы признать свое поражение и опубликовать доказательство (тогда все лавры достались бы тому, кто устранит ошибку в доказательстве), но верный Тейлор предложил поработать еще один месяц. А дальше как в сказке со счастливым концом – 19 сентября 1994 г. к Уайлсу пришло озарение, о котором он вспоминает так: «Решение было неопишимо прекрасно, такое простое и изящное. Я никак не мог взять в толк, почему оно не приходило мне в голову раньше. Не веря самому себе, я минут 20 молча тараторил на него... Ничто из того, что мне суждено свершить, не могло сравниться с переживаемым моментом» [31]. Так была доказана ВТФ.

В мае 1995 г. в журнале было опубликовано полное доказательство ВТФ (за подписью Э. Уайлса и Р. Тейлора, который помог устранить пробелы). 27 июня 1997 г. Уайлс получил премию Вольфскеля в размере 50000\$.

За восемь лет упорнейшего труда Уайлс, по существу, свел воедино все достижения теории чисел XX века, выстроив из них одно сверхмощное доказательство – шедевр современной математики. Уайлс совершил прорыв, который может привести математику в новый золотой век. По сути, он восстановил связи между разделами математики, казалось, разошедшимися навсегда (значит, математика может быть *единой!*). Надо заметить также, что доказательство Уайлса во всей его полноте понимают не более 10% специалистов по теории чисел (настолько сложна современная математика).

Безусловно, Уайлс обессмертил свое имя, ибо как сказал Дж. Г. Харди: «... языки умирают, но не математические идеи... по всей видимости, математик имеет наилучший шанс на бессмертие...». Сам Уайлс говорил о чувстве душевного подъема, которое охватывает его при мысли о том, что он совершил. В заключение следует подчеркнуть, что Ферма не мог распо-

лагать доказательством, аналогичным уайлсовскому, поскольку это доказательство XX века. Скорее всего, Ферма просто подшутил над своими коллегами, ведь, как хорошо известно, историкам, он был не чужд озорству...

История доказательства Великой теоремы Ферма – это лучший пример, поясняющий, что такое *математическое доказательство*. Это – *безупречная логика и кристальная «чистота» формул* (часто – многие сотни страниц таких формул), а также, возможно, несколько веков (!) поисков, множество удивительных судеб, человеческих страстей и трагедий.

3.5. ПЕРВЫЕ ПРИЗНАКИ УПАДКА МАТЕМАТИКИ?

В 1852 г. англичанин Фрэнсис Гатри обратил внимание на *проблему о четырех красках*. Гатри просто захотел узнать, какое минимальное количество красок надо взять для раскраски любой мыслимой карты при условии, что никакие две смежные области (имеющие общую границу) не оказались окрашенными в одинаковый цвет. Например, для такого раскрашивания карты на рис. 38 необходимо 4 краски, также оказалось, что в 4 цвета можно раскрасить карту любого государства (которое делится на некие области) или карту всего мира (со всеми государствами). Долго никому не удавалось придумать гипотетическую карту, для раскраски которой потребовалось бы 5 цветов, но никто не мог доказать, что такой карты не существует. В 1890 г. П. Д. Хивуд получил строгую оценку для максимального числа красок: оно могло быть не более 5. Кстати, попытки решить задачу о 4-х красках внесли большой вклад в новый (сложнейший!) раздел математики – топологию. Первый успех пришел только в 1925 г., когда Ф. Франклин сумел доказать, что для раскрашивания любой карты, содержащей не более 25 областей, требуется только 4 краски. Потом количество областей удалось увеличить до 39 (1970 г.), однако такой подход не сулил решения проблемы, ведь количество областей бесконечно много!

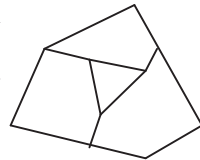


Рис. 38. «Карта»

Радикальный поворот проблемы произошел в 1976 г., когда В. Хакену и К. Аппелю удалось свести проблему четырех красок к 1482 конфигурациям (неким «элементарным» картам), служащим строительными блоками, из которых можно составить любую карту (аналогично тому, как из немногих элементарных частиц составлено все вещество во Вселенной). Таким образом, оставалось доказать, что каждую из 1482 «элементарных» карт можно раскрасить только четырьмя красками. Но проверка всех 1482 карт и перебор различных комбинаций раскраски каждой из них – задача невыполнимая (необычайно громоздкая и трудоемкая) для любого мыслимого коллектива

математиков. Поэтому была составлена специальная *самообучающаяся* программа для компьютера, т. е. она не просто перебирала комбинации раскраски, но и выдавала новые стратегии, используя всевозможные трюки, которым *сама* «научилась». В июне 1976 г., затратив 1200 часов машинного времени, Хакен и Аппель смогли проанализировать 1482 «элементарные» карты. Все эти карты оказалось возможным раскрасить 4-мя красками, поэтому проблема, просуществовавшая 124 года, была, наконец, решена.

Это стало первым в истории математики доказательством, в котором роль компьютера не сводилась только к ускорению вычислений, поскольку без него доказательство было бы невозможно в принципе! Причем проверка этого доказательства в традиционном смысле (шаг за шагом «с карандашом в руке») невыполнима: можно было только ввести программу Хакена и Аппеля в независимый компьютер с тем, чтобы убедиться, что результат повторится. Именно принципиальная невозможность проверки «компьютерного» доказательства привела в ярость некоторых математиков и дала им основание говорить о *первых признаках упадка математики*. Но большинство математиков все же считают, что просто меняется практика математического доказательства и никакой катастрофы за этим не стоит.

В самом конце XX века математики наделили компьютеры еще большей властью, используя так называемые *генетические алгоритмы*. Их общая структура составлена математиками, но тонкие детали определяются самим компьютером. Некоторые направления («линии») в программе обладают способностью мутировать и эволюционировать, наподобие генов в органической ДНК (см. п. 5.1), порождая множество дочерних программ, которые используются в попытках решения проблемы. В некоторых случаях генетические алгоритмы оказались весьма успешными.

В 1987 г. специалист в области “computer science” (науки о компьютерах) Эдвард Френкин учредил премию Лейбница размером в 100000 долларов первой компьютерной программе, способной сформулировать и доказать теорему, которая окажет «глубокое влияние на развитие математики».

Быть может, 4 цвета и 1482 «элементарные» карты это не просто два числа из каверзной математической головоломки, а некое отражение свойств нашего 4-х мерного пространства-времени (три координаты плюс время). Кстати, согласно ГТНЧ в конце Большого отрезка в матрице главных лидеров (МГЛ) редких миров «защито» $21^2=441$ коэффициентов (почти половина из них – нули, см. п. 1.24), а в МГЛ частых миров «защито» $32^2=1024$ или $1024 \div 1089$ коэффициентов (половина – нули, см. п. 1.29). Таким образом, обе МГЛ подразумевают от 1465 до 1530 коэффициентов, а их среднее значение (1498) близко к числу 1482. Что бы это значило?

3.6. ФРАКТАЛЫ (МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА)

Сейчас в самых разных дисциплинах (небесной механике, физике элементарных частиц, биологии, экономике и т. д.) растет озабоченность ученых тем, что о следствиях нелинейных законов известно совсем немного. Даже для физиков оказалось сюрпризом существование хаоса в их самых простых уравнениях. Так, например, верно, что наши космические корабли могут полагаться на ньютоновские законы движения и уравнения Эйнштейна и что современные компьютеры направляют их к нужным целям, но остается верным и то, что по истечении *достаточно большого периода времени* траектории их движения становятся непредсказуемыми. До сих пор не получен ответ на старый вопрос об устойчивости солнечной системы, т. к. долгосрочный прогноз здесь невозможен (уравнения являются “неинтегрируемыми”). Мы не имеем адекватного представления о хаотическом движении заряженной частицы в системе магнитных зеркал, поэтому пока и не умеем управлять термоядерной реакцией. Изучение развития яиц насекомых показывает, что и морфогенез невозможно понять, опираясь только на знание соответствующего генома и его молекулярного строения. Вся “беда” в том, что на каждой новой ступени организации вступают в силу новые правила, а любая *самая малая неточность* в начальных условиях может позже радикально повлиять на последующее движение.

Все это не означает, что известные законы природы неверны, просто трудно обнаружить всё скрытое в этих законах. “Моделей мира”, которые превращаются в сотни уравнений при обсуждении конкретных вопросов, теперь совершенно недостаточно (см. п. 5.3, о «Римском клубе»). Уже мало понять, как работает мир “в принципе”, важно каким образом эти принципы проявляют себя в реальности. Любой нелинейный процесс приводит к ветвлению, т. е. мы имеем дело с выбором решений, последствия которых предсказать невозможно, поскольку для каждого из этих решений характерно усиление с далеко идущими последствиями. Вероятно, рано или поздно начальная информация о состоянии системы вообще становится бесполезной (в ГТНЧ это не так!). Таким образом, законы природы допускают для событий множество различных исходов, порождают вселенский хаос.

Однако все не так безнадежно, уже сейчас ученые пришли к пониманию того, что и сам хаос *не лишен определенных правил, неких характерных сценариев*. Растет уверенность в том, что процессы образования структур и самоорганизация (напомним, что человеческое общество – неравновесная самоорганизующаяся система), развиваются в соответствии с небольшим числом сценариев, не зависящих от конкретной системы. Новая наука

синергетика целенаправленно пытается отыскать правила, по которым возникает порядок в сложных системах. Множество *Мандельброта* и головоломные на первый взгляд *фракталы* относятся к этому направлению. Они касаются хаоса и порядка, их конкуренции или сосуществования. Они показывают переход от одного к другому и то, какой изумительно сложной является область перехода вообще (Россия сейчас тоже в области перехода?).

Бенуа Б. Мандельброт (р. 1924) открыл множество, носящее теперь его имя в 1980 году. Он обнаружил принцип, с помощью которого образуется целый мир самоподобных структур, а само множество Мандельброта может оказаться одним из ключевых элементов некой новой “натуральной” математики (как прямая линия является одним из основных элементов евклидовой геометрии). Множество Мандельброта воплощает в себе *принцип перехода от порядка к хаосу*.

С точки зрения математики речь идет о теории динамических систем¹, точнее об итерациях² рациональных функций. В основном рассматривается самая простая нелинейная функция $f(z)=z^2+c$, где переменная величина z и параметр c – комплексные величины: $z=x+iy$; $c=p+iq$. Отображение $z \rightarrow z^2+c$ задает динамическую систему на плоскости (x,y) , т. е. просто указывает, куда должна переместиться очередная точка в плоскости:

$$x_{k+1}=x_k^2 - y_k^2 + p, \quad y_{k+1}=2 x_k y_k - q, \quad \text{где } k=0, 1, 2, \dots \quad (225)$$

Конкретный вид отображения не является существенным, поскольку различные отображения могут порождать то же самое множество Мандельброта. Происходящая в системе эволюция выделяет различные множества в фазовом пространстве и пространстве параметров. Даже для самых простых динамических систем среди таких множеств имеются уникальные объекты, например, *множество Мандельброта* и *множество Жюлиа*.

Простейшее из возможных значений константы – это $c=0$. Тогда плоскость делится на две зоны влияния, где так называемые *аттракторы* (в данном случае нуль и бесконечность) ведут конкурентную борьбу за влияние на плоскости: все точки, находящиеся на расстоянии меньше 1 от нуля ($x_0^2 + y_0^2 < 1$), движутся к нулю (при $k=0, 1, 2, \dots$); все точки, лежащие на расстоянии больше 1 от нуля ($x_0^2 + y_0^2 > 1$), движутся к бесконечности. Таким образом, в центре нашего внимания оказывается именно *граница* между двумя зонами, которая в данном случае является просто окружностью.

Сюрпризы начинаются, когда выбирается ненулевое значение константы, например, $c=-0,12375+0,56508 \cdot i$. Здесь внутренний аттрактор уже не

¹ “Динамическая система” – это система дифференциальных уравнений (которые “рождаются” в умах ученых при рассмотрении разнообразных физических систем).

² *Итерация* – результат повторного применения какой-либо математической операции, многократные вычисления по одной и той же формуле : $y=f(x) \equiv f_1(x)$; $f_2(x)=f[f_1(x)] \dots$

ноль, а граница влияния между ним и бесконечностью – сильно изломанная линия (напоминает линию морского берега, края облака), причем под лупой она выглядит столь же изломанной, как и без нее. Именно такие фигуры Мандельброт назвал *фракталами*, они обладают свойством быть “нерегулярными, но самоподобными” (похожими, “геометрически хаотичными”); и именно красота бесконечного множества фракталов (количество значений c – бесконечно) вызывает восхищение, сравнимое по силе воздействия на человека с красотой самой природы. В основе понятия фрактала содержится одна важная идеализация действительности: фрактальные объекты самоподобны, т. е. их вид не претерпевает существенных изменений при разглядывании их с любым увеличением. Эта идеализация на порядок увеличивает глубину нашего математического описания природы.

Границы фрактальных структур называют *множествами Жюлиа*. Существует правило, указывающее, какой вид имеет множество Жюлиа при каждом конкретном выборе c . Это правило и приводит к *множеству Мандельброта* (M), которое можно представить себе как закрашенная черным цветом часть комплексной c -плоскости (черную “кляксу”, для которой $-2,25 < \operatorname{Re} c < 0,75$; $-1,5 < \operatorname{Im} c < 1,5$). Каждое комплексное число c либо принадлежит структуре M , либо нет. Соответствующие множества Жюлиа процесса $z \rightarrow z^2 + c$ существенно различаются: они образуют связные структуры, когда c лежит внутри M , и рассыпаются (взрываются) на бесконечное число кусочков, когда c лежит снаружи M . Таким образом, граница M определяет момент *математического фазового перехода* для множества Жюлиа, само множество Мандельброта – это своего рода путеводитель в мире параметров c . Фантастический мир, *бесконечное* богатство форм множеств Жюлиа¹ контрастирует почти на грани абсурда с простотой формулы $z \rightarrow z^2 + c$. Трудно поверить, что эта формула содержит такую массу структур. Любопытно, что процессы в комплексной плоскости порождают картины почти в стиле барокко, в то время как итерации действительных функций приводят к созданию картин в современном стиле (с точки зрения обычного художественного восприятия). Пока непонятно, в чем причина этих различий в зрительном восприятии, да и чисто математические особенности последних картин далеко не полностью ясны.

Бесконечная микроскопическая глубина, на которую, кажется, простирается самоподобие, является математической конструкцией, не существую-

¹ Успех первой выставки цветных компьютерных “картин” в январе 1984 года в Бремене превзошел все ожидания обескураженных авторов. Непосвященные зрители требовали многозначительных, “глубоких” объяснений, желая понять значение увиденного (картины же были не более чем забавой математиков при научной работе). На обложке нашей книги также изображен фрактал ($c = -0,52150 + 0,49985i$), причем показаны только первые 5000 точек.

шей в реальном мире. Физические объекты редко оказываются самоподобными при увеличении более чем на 4 порядка. Так, в биологии новые принципы самоорганизации проявляются обычно при увеличении на 2 порядка (макромолекулы имеют диаметр, примерно равный 100 атомам, а простые клетки – диаметр около 100 макромолекул и т. д.). Следовательно, процесс $z \rightarrow z^2 + c$ не дает точного описания реального мира, но этот нелинейный закон может помочь нам понять окружающий мир. Ведь знание добывается учеными ради того, чтобы отыскать существенное и представить его “в двух словах”.

Фракталы вокруг нас повсюду, а фрактальная геометрия в некотором смысле моделирует природу. Вот что говорит об этом физик, Г. Айленберг (р. 1936): “Наше ощущение прекрасного возникает под влиянием гармонии порядка и беспорядка в природных объектах – тучах, деревьях, горных грядках или кристалликах льда. Их очертания – это динамические процессы, застывшие в физических формах... наука и эстетика согласны в том, что именно теряется в технических объектах по сравнению с природой: роскошь некоторой нерегулярности, беспорядка и непредсказуемости”. Бенуа Мандельброт оценивает ситуацию следующим образом: “Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно. Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные, – задачи исследования морфологии аморфного”. Безусловно, можно говорить о существенной эволюции взглядов ученых на прекрасное, если вспомнить, например, кредо Галилео Галилея (1564–1642), высказанное им в 1623 году: “Вселенную нельзя понять, не научившись понимать язык, на котором она написана. А написана она на языке математики и ее буквами являются треугольники, окружности и другие геометрические фигуры”.

3.7. ПИРАМИДА ДЕЛИТЕЛЕЙ – ФРАКТАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ?

Если мы будем измерять длину береговой линии морей и океанов на географических картах разного масштаба, то увидим, что она тем больше, чем крупнее масштаб карты, т. к. с увеличением масштаба все большее количество изломов реальной береговой линии удастся отобразить на бумаге. Англичанин Л. Ричардсон (1881–1953) одним из первых установил, что длину береговой линии (N), оказывается, можно выразить формулой

$$N \sim d^{-r}, \quad (226)$$

где d – это длина стороны квадрата масштабной сетки (чем меньше d , тем крупнее масштаб карты), а показатель r характеризует степень изрезанности берега. Например, для побережья Великобритании $r \approx 1,24$; для побережья Австралии – $r \approx 1,13$ и т. д. Береговая линия – это хороший пример *фрактала* (фрактального объекта). Кстати, обычные, “благообразные” линии (периметры кругов, квадратов, треугольников, параллелограммов и т. д.) имеют размерность $r=1$, в чем можно легко убедиться, например, с помощью масштабной сетки (палетки).

Представим себе объект (скажем, некую линию или фрактал), сплошь покрытый сеткой-квадратиками со стороной d . Количество квадратиков (N), содержащих точки объекта, зависит от формы этого объекта и значения d (масштаба). Если при этом имеет место зависимость (226), то показатель степени r объявляют размерностью объекта. Именно так определяют математики степень изрезанности или сложности структуры фрактала. Следует заметить, что к запутанным, раздробленным или ветвистым структурам математики всегда относились несколько настороженно. Вероятно из-за того, что природа подобных структур (в том числе фракталов) – нечто большее, чем просто математика ...

Ярким представителем фракталов является *кривая Пеано*, у которой показатель $r=2$, т. е. как бы мы не дробили масштабную сетку – в любом её мельчайшем квадратике окажутся точки этой удивительной кривой. Причем для кривой Пеано зависимость (226) можно переписать в виде $d \sim N^{-1/2}$.

Обратимся к ГТНЧ. Из основных характеристик Пирамиды и Ствола можно сконструировать четыре относительных параметра (см. табл. 2): m^*/M ; p/P ; k/K ; p^*/P^* . Пусть это некие параметры d , причем общая для них формула имеет вид $d \sim A \cdot N^{-1/2}$, где величина A в зависимости от конкретного параметра (d) изменяется в пределах от $8/\pi^2 \approx 0,811$ до $16/\pi^2 \approx 1,621$ (значения близки к единице). Таким образом, Пирамида является в некотором роде фрактальным объектом с размерностью $r=2$ (при рассмотрении натурального ряда через “сетку” относительного параметра d).

3.8. СЦЕНАРИЙ ПЕРЕХОДА ПОРЯДКА В ХАОС

Модель роста популяции (в т. ч., например, роста популяции человечества на планете, см. п. 5.3) – это сама по себе интересная задача, но, оказывается, она приводит к очень серьезным фундаментальным выводам.

Пусть y_1 – начальная численность некоторой популяции, а y_n – ее численность через n лет ($n=1, 2, 3, \dots$). *Коэффициентом прироста* R называют относительное изменение численности популяции за год:

$$R = (y_{n+1} - y_n) / y_n \quad (227)$$

Если эта величина остается постоянной в течение всего периода времени ($R=const=c$), то говорят, что закон роста является линейным, а сам рост является экспоненциальным (см. п. 2.1), т. к.

$$y_{n+1} = (1+c) y_n = (1+c)^n y_1 = y_1 \exp[n \ln(1+c)]. \quad (228)$$

Например, при $R=0,05$ (5%) популяция удваивает свою численность каждые 14 лет; для популяции человечества на планете в настоящее время $R \approx 0,019$. Однако, экспоненциальный рост (228) применим только на ограниченных промежутках времени. Для роста популяции в реальном физическом мире всегда существуют пределы. Одним из первых обратил на это внимание П. Ф. Ферхюльст в 1845 г. Он объяснил это тем, что любая экологическая ниша может обеспечить существование популяции только определенного максимального размера X (пусть это значение равно 1), и что коэффициент прироста R должен снижаться, когда размеры популяции приближаются к значению X . Поэтому Ферхюльст предположил, что $R=r(1-y_n)$, где $r=const$ – параметр роста, тогда из уравнения (228) он получил уже *нелинейный* закон, управляющий динамикой популяции (закон Ферхюльста):

$$y_{n+1} = f(y_n) = (1+r) y_n - r y_n^2. \quad (229)$$

Прошло более ста лет, прежде чем были осознаны все проблемы, вытекающие из нелинейного закона Ферхюльста (229). Так, если при малых параметрах роста ($0 < r < 2$) численность популяции действительно регулируется и приходит к оптимальному значению $X=1$ (рис. 39), то при дальнейшем увеличении параметра роста r становится невозможным достижение оптимальной численности X , так как начинаются устойчивые колебания между двумя размерами популяции ($2 < r < 2,449$), потом между 4, затем 8, затем 16 различными величинами численности популяции и так далее, до тех пор, пока для параметров $r \geq 2,57$ не возникает хаос: беспорядочные скачки вверх и вниз никогда не превратятся в упорядоченную последовательность.

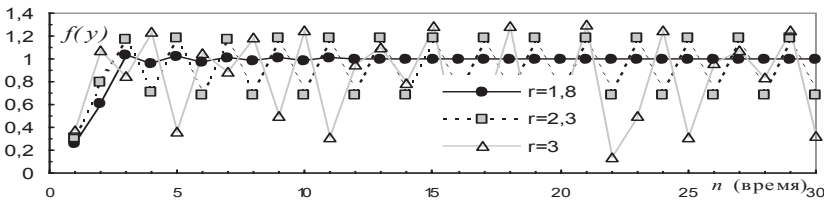


Рис. 39. Изменение популяции по закону Ферхюльста (при $y_1 = 0,1$)

Таким образом, хотя последовательность (229) *определена* своим начальным значением – все же ее поведение, вообще говоря, *невозможно* предсказать! А все дело, вероятно, в том, что возможность определения последую-

щих значений с *бесконечной* точностью (именно это равносильно утверждению, что процесс определен своим начальным значением), верно только “в принципе”, и любое реальное описание начальной величины можно получить только с *конечной* точностью (в т. ч. и в компьютере). Если r_n – значение параметра роста, соответствующее n -ой *бифуркации* (т. е. моменту, когда колебания периода 2^n теряют устойчивость и устойчивыми становятся колебания периода 2^{n+1}), то оказывается, что отношение длин следующих друг за другом двух интервалов $(r_n - r_{n-1})$ и $(r_{n+1} - r_n)$

$$\delta_n = (r_n - r_{n-1}) / (r_{n+1} - r_n) \tag{230}$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится к значению $\delta = 4,669201660910\dots$ т. е. к числу *Фейгенбаума* (подробней о нем см. параграф 2.7).

Итак, уравнение Ферхюльста (229) – это *сценарий, по которому порядок превращается в хаос*; это процесс, дающий наглядный пример того, как простые нелинейные системы далеко не всегда обладают простыми динамическими свойствами. В связи с этим впервые возникла надежда, что и сам хаос не лежит за пределами систематизации и научной классификации.

3.9. МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ И ОШИБКА ГЕНИЯ

Стандартный *магический квадрат* представляет собой квадратную матрицу натуральных чисел от 1 до N^2 , расположенных в таком порядке, при котором сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и каждой диагонали равна одному и тому же числу *МП (магической постоянной)*. Число N называется *порядком магического квадрата*. Нетрудно доказать, что

$$МП = (1+2+3+\dots+N^2)/N = (N^3 + N)/2. \tag{231}$$

При $N=1$ и $N=2$ магических квадратов не существует. При $N=3$ расположить числа от 1 до 9 в магический квадрат 3×3 можно 8 различными способами (рис.40, древнекитайский квадрат Ло шу с магической постоянной равной 15). Однако, по традиции зеркально симметричные

Ло шу			Дьюдени		
4	9	2	67	1	43
3	5	7	13	37	61
8	1	6	31	73	7

Рис. 40. Магические квадраты

квадраты и квадраты, переходящие друг в друга при поворотах, не считаются различными. Поэтому остается только один магический квадрат 3-го порядка (из последовательных чисел). Генри Э. Дьюдени первым построил наименьший магический квадрат из одних лишь простых чисел (рис. 40). В 1913 г. Дж. Н. Манси доказал, что наименьший магический квадрат из *последовательных* простых чисел должен иметь порядок 12, т. е. в его клетках расставлены 144 первых простых числа (правда, вместо первого простого числа 2 стоит единица).

Существует 880 магических квадратов 4-го порядка, впервые они были перечислены еще в 1693 г. Бернардом де Бесси. С точностью до повторов и отражений существует 275.305.224 магических квадратов 5-го порядка (Р. Шрёппель, М. Билер, компьютерная программа 1973 г.), однако это число можно понизить примерно до 35 млн., если принять известные определения изоморфизма (преобразования). Предприняты попытки построения классификации магических квадратов 5-го порядка и это приводит к неожиданным результатам (аномалиям) [10].

Понятие магического квадрата допускает обобщение на случай 3 и большего числа измерений. Совершенным *магическим кубом* называется кубическая матрица из натуральных чисел от 1 до N^3 , такая, что сумма чисел в любых N клетках, выстроенных в ряд постоянна. В этом случае имеем

$$MP = (1+2+3+\dots+N^3)/N^2 = (N^4 + N)/2. \quad (232)$$

Доказано, что не существует совершенных магических кубов порядка 1, 2, 3, 4. Не известно пока кубов 5, 6, 10-го порядка. Но существуют совершенные магические кубы 8-го порядка, и первый такой куб был построен неизвестным автором, вероятно, в 1875 г. Оригинальный метод, позволяющий строить их миллионами, был открыт Майерсом в 1970 г. (ему было тогда 16 лет). Есть методы построения кубов порядка 9, 11 и выше.

aα	bβ	cγ	dδ
bγ	aδ	dα	cβ
cδ	dγ	aβ	bα
dβ	cα	bδ	aγ

Рис. 41. Греко-латинский квадрат

Разновидностью магических квадратов является, так называемый, *греко-латинский квадрат*. Такой квадрат 4-го порядка представлен на рис. 41. У него каждая латинская буква появляется один и только один раз в паре с каждой греческой буквой, образуя некий символ из двух букв. Причем каждый такой символ встречается один и только один раз в каждом столбце и в каждой строке. Разумеется, что вместо букв могут стоять цифры, образуя символ-число; или под первой буквой можно понимать карты (туз, кроль, дама, валет), а под второй буквой – четыре разных масти, и тогда мы получим решение любопытной карточной головоломки (нетрудно сообразить какой именно).

Во времена Эйлера уже доказали, что греко-латинских квадратов 2-го порядка не существует, и умели строить квадраты 3-го, 4-го и 5-го порядка. Л. Эйлер¹ в своем обширном мемуаре о магических квадратах написал: “Я не сомневаюсь в том, что невозможно построить квадраты 6-го, 10-го, 14-го порядка и вообще, если порядок равен любому нечетно-четному числу” (т. е. четному числу, которое не делится на 4). Эта *гипотеза Эйлера* в течение 177 лет считалась неопровержимой, до тех

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Рис. 42. Греко-латинский квадрат 10-го порядка, построенный Э. Т. Паркером

пор, пока математикам не удалось построить квадраты 10-го порядка ($n=10$, см. рис. 41). Удивительно и то, что сам Эйлер считал исследования греко-латинских квадратов бесполезными, а в XX веке они оказались очень важными для планирования экспериментов в сельском хозяйстве, биологии, медицине, социологии, торговле и т. д. [9]. Гипотеза Эйлера оказалась неверна для всех порядков $n=4k+2$ (где $k=1, 2, 3, \dots$), когда $n>6$. Интерес к греко-латинским квадратам сейчас возрастает из-за их тесной связи с так называемыми “конечными проективными плоскостями” (топология). История с греко-латинскими квадратами убеждает нас, что даже гениям свойственно ошибаться, а сами магические квадраты – не просто математические головоломки, а нечто большее, что каким-то образом связано с реальным физическим миром.

В теории магических квадратов много сложных вопросов, над которыми продолжают трудиться не самые худшие умы человечества. И если даже такая «забава», как магические квадраты «касается» реального пространства-времени, то наша ГТНЧ вполне может рассчитывать на нечто подобное.

¹ Леонард Эйлер (1707–1783) – гениальный и самый плодовитый математик всех времен. Список его книг и статей доходит до 886 работ. В области теории чисел Эйлер получил такие результаты, что только одно это дало бы ему место в пантеоне славы (и в настоящей книге его имя встречается чаще всего!). В 28 лет он потерял один глаз, а в 59 лет – второй, но слепой Эйлер, пользуясь своей феноменальной памятью, еще 17 лет продолжал диктовать свои удивительные открытия. Около 3/5 его работ относится к математике, остальные – преимущественно к её приложениям: механике, физике, астрономии и т. д. Эйлер был швейцарец по происхождению, но работал в России и Германии, а умер в Петербурге.

3.10. МОЗАИКИ И ... СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Сколько существует типов выпуклых многоугольников, которыми можно *заполнить плоскость* (выложить без зазоров и наложений)? Речь идет о так называемой *мозаике*, материальный прототип которой – мозаика из кафельной плитки на полу (стенах) в ванной комнате. Оказывается, плоскость можно заполнить только тремя *правильными* многоугольниками: равносторонним треугольником, квадратом и правильным шестиугольником. Специалистами по *комбинаторной геометрии* доказано, что ни одним выпуклым многоугольником, имеющим более 6 сторон, невозможно заполнить плоскость. Таким образом, задача сводится к исследованию многоугольников с 3, 4, 5 и 6 сторонами.

Любым *треугольником* можно заполнить плоскость. В этом легко убедиться, если сложить любых два одинаковых треугольника так, чтобы получился параллелограмм, которым без труда выкладывается плоскость. Также легко доказать, что любым *четыреугольником* можно заполнить плоскость, причем четырехугольник может быть и невыпуклым.

Выпуклые *шестиугольники* были исследованы в 1918 г. К. Рейнхардтом, который показал в своей диссертации, что они заполняют плоскость, если принадлежат к одному из трех классов (или нескольким сразу). Пусть A, B, C, D, E, F – углы в шестиугольнике (проставлены “против часовой стрелки”); a, b, c, d, e, f – стороны шестиугольника (проставлены также, причем сторона a между углами F и A). Тогда указанные три класса можно описать следующим образом: I класс: $A+B+C=360^\circ, a=d$; II класс: $A+B+D=360^\circ, a=d, c=e$; III класс: $A=C=E=120^\circ, a=b, c=d, e=f$. Кстати, пчелиные соты принадлежат ко всем трем классам одновременно.

Если для выпуклых *пятиугольников* применить обозначения и понятия, аналогичные шестиугольной мозаике, то мы насчитаем 14 классов пятиугольников. Первые пять из них нашел Рейнхардт в 1918 г., потом Кершнер после 35 лет поисков нашел еще 3 класса. В 1975 г. Р. Э. Джеймс III открыл 9-й класс красивых пятиугольных мозаик ($A=90^\circ, C+D=270^\circ, 2D+E=2C+B=360^\circ, a=b=c+e$). В 1976 г. миссис М. Райс (домохозяйка из Сан-Диего, не имеющая математического образования) открыла 10, 11, 12-й классы, а через год обнаружила и 13-й класс. В 1985 г. Р. Стейн, выпускник Дортмундского университета, открыл последний (?) 14-й класс пятиугольной мозаики. Однако математического доказательства полноты имеющегося перечня пятиугольных мозаик пока не существует.

Среди бесконечного множества мозаик на плоскости в самостоятельный раздел можно выделить мозаики из полиомино, полиамондов и политексов.

Полиомино – это фигуры, составленные из квадратов, имеющих общие стороны, **полиамонды** – из равносторонних треугольников и **полигексы** – из правильных шестиугольников. Здесь множество интересных и не решенных пока еще задач. Впервые мир узнал о полиоминах в 1953 г. из монографии С. В. Голомба. Приведем примеры только некоторых выводов, полученных в процессе развития идей Голомба. Мозаику, *вероятно*, невозможно сложить: 26-ю октамино (из 369-ти); 21-м нонамондом (из 160-ти); 5-ю гексагексами (из 82-х). Теория мозаик привлекает многих талантливых ученых, например, в 1958 г. Р. Пенроуз (работы по теории относительности и космологии) придумал великолепную головоломку – полиамонд “грузеная тачка” (см. рис.43). Заполнить плоскость таким полиамондом не просто!

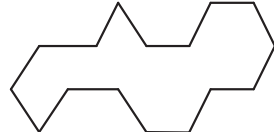


Рис. 43. Полиамонд «грузеная тачка»

Все рассмотренные выше мозаики *периодичны*, т. е. в каждой из них можно выделить (и даже многими способами) некую область (несколько соседних многоугольников), из которой параллельным сдвигом можно получить всю мозаику. Этим свойством периодические мозаики моделируют *кристаллические структуры*, существующие в природе (см. п. 5.10). Долгое время предполагали, что не существует многоугольников и даже их наборов, копии которых могли бы устлать плоскость только *непериодически*. Однако в середине 60-х годов XX в. эта гипотеза была опровергнута (на примере набора из 20000 разных видов многоугольников). А в 1978 г. Р. Пенроузу удалось обойтись всего двумя очень простыми фигурами, причем их форма может быть различной, но все они связаны с правильным пятиугольником: например, треугольники Робинсона (ABC и ACD на рис. 44) или ромбы с острыми углами 72 и 36° .

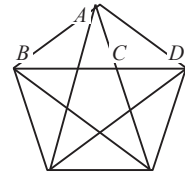


Рис. 44

Все указанные мозаики Пенроуза *квазипериодические* (от лат. quasi – «почти»), т. е. любая их конечная часть повторяется в такой мозаике бесконечное число раз. Но самое поразительное в том, что вскоре были получены *вещества* с квазипериодической структурой (см. п. 5.10).

Это является ещё одним замечательным подтверждением некой адекватности структуры натуральных чисел (в данном случае в лице «легкомысленных» мозаик) структуре реального пространства-времени.

3.11. ФИЛОСОФИЯ БЕЗ МАТЕМАТИКИ БЕССИЛЬНА!

В философии существует термин «*апория*» (от греческого слова, означающего затруднение, недоумение), которым ещё древнегреческие мудрецы обозначали трудноразрешимые или неразрешимые проблемы (чаще всего связанные с противоречиями между данными наблюдения и опыта и попытками их мысленного анализа). Наиболее известны апории, исходящие от Зенона Элейского (ок. 490–430 гг. до н. э.). Их не менее пяти и одна из них гласит, что быстроногому *Ахиллесу никогда не догнать черепаху*, т. е. за время его движения будет продвигаться и черепаха (и так до бесконечности). Поскольку это так и это абсурд, то Зенон заключал, что все представления о движении и его возможности в принципе – ложны. Однако, например, наш современник П. С. Таранов [34] легко «разрешает» эту апорию, считая, что в какой-то момент времени (когда Ахиллес буквально над самой черепахой) термин «расстояние» (а значит и сама апория) попросту теряет всякий смысл. Т. е. по Таранову Ахиллес элементарно догоняет черепаху. Но надо отметить, что в философии и в настоящее время ни один из предлагаемых путей разрешения возникающих в апориях противоречий не может считаться общепринятым [4].

Очевидно, в философии проблемы часто возникают из-за ограниченных возможностей самого языка (русского, английского – любого другого). При этом современные философы-гуманитарии ухитряются игнорировать математику (в том числе теорию чисел, а уж ГТНЧ – и подавно), хотя исключительно на языке математики можно представить и понять структуру пространства-времени. Недаром современная теоретическая физика – это сплошная суперсложная математика! Отдельный человек и сообщество людей – всего лишь некие формы проявления (существования) этой структуры, причем, вероятнее всего, далеко не самые совершенные.

Любопытно, что если в апории Зенона Ахиллес ни при каких условиях не способен догнать черепаху, то можно сформулировать условия, при которых ***черепаха всегда догонит Ахиллеса!*** Вот доказательство этому.

Пусть черепаха и Ахиллес (спиной к ней) стоят на разных концах гипотетической резиновой дорожки, начальная длина которой $L=3,9 \text{ м}=390 \text{ см}$. Эта дорожка в конце каждой секунды скачком (т. е. дискретно) удлиняется на 390 см, что почти равносильно убеганию Ахиллеса от черепахи (со средней скоростью хорошего марафонца, равной $V=3,9 \text{ м/с}=390 \text{ см/с}$). Скорость черепахи по резиновой дорожке (в сторону Ахиллеса) постоянная и составляет $v=1 \text{ см/с}$. Тогда к концу первой секунды черепаха проползет $1/390$ начальной длины дорожки (L). За вторую секунду она проползет $1/(2 \cdot 390)$ новой длины дорожки. За третью секунду она проползет $1/(3 \cdot 390)$ растянувшейся вновь дорожки и т. д. Продвижение черепахи в долях дискретно удлиняющейся

дорожки можно описать формулой $(1/390) \cdot (1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/N)$. Во вторых скобках мы получили *сумму гармонического ряда*, которая расходится, т. е. сумма этого ряда может быть сколь угодно велика и определяется по формуле $S \approx 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/N \approx \ln N$ (см. формулу (15)), где N – это количество секунд. Как только сумма гармонического ряда станет больше 390 – черепаха достигнет противоположного конца дорожки (догонит Ахиллеса). В нашем примере, это произойдет через $N \approx e^L \approx e^{390}$ секунд, т. е. примерно через 10^{162} лет (поскольку $e^{390} \approx (e^{2,3})^{169} \approx 10^{169}$, а один год равен $\sim 3,15 \cdot 10^7$ секунд). Итак, черепаха догонит Ахиллеса за конечное время! Более того, это произойдет независимо от параметров задачи (L, V, v). И если растяжение дорожки не дискретно, а непрерывно (Ахиллес убегает с постоянной скоростью), то всё остается в силе, только труднее анализировать ситуацию. Таким образом, если черепаха может догнать Ахиллеса, то Ахиллес и подавно догонит черепаху (апории не существует?).

Даже в своих парадоксальных примерах математика на много порядков интереснее, изощреннее парадоксов философии, которые просто блекнут на фоне яркой человеческой мысли, сфокусированной в точной формуле.

3.12. КАБАЛИСТИКА – «НАУКА» О ЧИСЛАХ

Существуют всемирно признанные законы *нумерологии*, точнее даже – *кабалистики* или «науки о числах». Её истоки лежат в *пифагореизме* (см. п. 3.13). Причем у некоторых народов отношение к числительным не лишено своей специфики. Это можно проиллюстрировать на примере Китая, в основе представлений которого лежит древнейший памятник китайской цивилизации – «*Ицзин*» («Книга перемен»).

Согласно воззрениям древних, нечетные числа принадлежат к «янь», а четные – к «инь», т. е. соответственно к активному мужскому и пассивному женскому началам мироздания. А что же означает каждая цифра в отдельности для китайцев? Вкратце пройдемся по всем десяти цифрам.

«0» (нуль, от лат. nullus – никакой) – олицетворяет собой пустоту и завершенность, вечный круг без начала и без конца. «1» – символизирует честь и лидерство, а также постоянную величину в развитии всего сущего. «2» – означает прибавление, баланс и взаимодействие – как «янь» и «инь». «3» – цифра удачи и успеха, духовное начало, единство Неба, Земли и Человека. «4» – число материальное и приземленное, отражается в основании зданий и говорит об ограниченности земного по контрасту с безбрежным небом. Это число созвучно на китайском понятиям «смерть», «умереть», поэтому четверку китайцы всячески избегают (в номерах дат, домов, квартир, теле-

фонов, автомашин и т. д.). Популярность «5» объясняется ее срединным расположением в ряду цифр, она вбирает в себя все пять основных элементов мироздания: воду, металл, дерево, огонь, землю, а также пять основных пожеланий, принятых у китайцев: долголетия, благосостояния, здоровья, добродетели, и ... естественной смерти. «6» – в китайском языке созвучна достатку и тоже признана весьма уважаемым числом. «7» – наделена на Востоке таким же божественным смыслом, как и на Западе. Буддисты верят в семь реинкарнаций (переселений душ) и семь недель траура после окончания земного цикла жизни. «8» – традиционно считается в Поднебесной символом приумножения и достатка, а на южном кантонском диалекте звучит как слово «процветание». К тому же предсказания на страницах «Книги перемен» изложены языком «багуа» – октограмм, восьмигранных геометрических фигур. Наконец, «9» – самая значительная в ряду цифр (вобрала в себя их качества и не нуждается в дополнении) – символ полноты и завершения. Она по-китайски созвучна слову «долго» и не случайно исстари считалась цифрой императорской власти: никому не позволялось носить одежду с девятью драконами, а самого «сына Неба» сплошь окружали девятки в разных сочетаниях (999 комнат во дворце, столько же наложниц в гареме и т. д.). А вот, например, к несчастливой у нас «чертовой дюжине» (к числу 13) китайцы относятся безразлично ... [29].

В рамках кабалистики уместно сказать о «магическом» числе **666** – числе зверя. В одной из книг Нового завета – в «Откровении Иоанна Богослова» (по-гречески слово «откровение» звучит как *апокалипсис*) говорится о видении им зверя с двумя рогами, число которого 666: «Здесь мудрость. Кто имеет ум, тот сочти число зверя, ибо это число человеческое; число его шестьсот шестьдесят шесть». О свойствах числа 666 см. п. 2.13.

Числа вида 2^i , содержащие в своей записи число 666, называют апокалиптическими (например, число, равное 2^{157}). Число, имеющее в своей записи 666 знаков – это, якобы, число Апокалипсиса. Наиболее ретивые толкователи Библии предсказывали конец света еще в 1999 году, усматривая в его написании число зверя в перевернутом виде. Остается согласиться с самым хитроумным взглядом на Библию – с тем, что в ней *все зашифровано*. Тогда дело за малым – надо только расшифровать Библию, и нам откроются все тайны мироздания... . Кстати, в этом отношении «расшифровка» структуры натуральных чисел (ГТНЧ) выглядит более перспективной.

Если число 666 действительно любопытно с точки зрения его арифметической структуры, то наделение других натуральных чисел (за исключением, быть может, числа 7 и некоторых других чисел) магическими свойствами чаще всего носит весьма надуманный характер. Типичным примером малообоснованных фантазий может служить теория русского поэта Велимира

(Виктора Владимировича) Хлебникова (1885–1922), который в молодости учился на физико-математическом и историко-филологических факультетах Петербургского университета. Согласно его теории числа **48** и **365** считались ключевыми, а их комбинация, равная $(48 \times 2 + 365) \times 3 = 1383$, якобы, определяла промежутки времени, через который происходили эпохальные события в истории разных стран и народов. Так, полное уничтожение рабовладельческого города-государства Карфагена (149–146 до н. э.) и установление монголо-татарского ига на Руси (около 1243) разделяют 1383 года; в 534 г. распалось королевство вандалов, разграбивших в свое время Рим и уничтоживших многие памятники античной культуры, а ровно через 1383 года – в 1917 г. появилась Страна Советов. Целый ряд других исторических событий Хлебников также “связывал” числом 1383. Мечту о всемирном братстве людей, собственные поэтические предчувствия “нового космического сознания” Хлебников пытался проверить математическими расчетами и выяснением “законов времени” (это чем-то напоминает ГТНЧ).

Скрытые пружины *социальных потрясений* в человеческом обществе не возможно найти на базе социально-философских (гуманитарных) наук, понимание истины и здесь придет из глубины естественно-математических наук (см. п. 3.11). Кстати, *единая* Природа и не догадывается о хитроумной классификации наших знаний, похожих на «параллельные миры» (из-за непонимания и безразличия друг к другу), которые теперь ждут своего «Великого объединения». Но и после объединения всех знаний математика останется королевой наук, а теория чисел – королевой математики.

Сравнение с королевой принадлежит великому Карлу Гауссу (1777–1855), и для объективности следует заметить, что далеко не все математики разделяют такой взгляд на теорию чисел. Например, известный английский математик Годфри Харди (1877–1947) соглашался с Гауссом, но в том смысле, что теория чисел также бесполезна, как английская королева.

Мнение Харди остроумно, но вызывает большие сомнения. Ведь теория простых чисел – одна из немногих областей чистой математики, которые нашли непосредственное приложение в реальном мире, а именно в *криптографии*. Криптография занимается кодированием секретных сообщений, а простые числа – идеальный базис для процесса легкой шифровки и трудной дешифровки (при перехвате сообщений противником). В нашей книге мы вообще пытаемся осознать, что числа не только близки к королеве, но и сравнимы с самим Богом (по Пифагору, см. эпиграфы в начале книги).

Что касается *кабалистики*, то, вероятно, расцвет этой «науки» ещё впереди. Подобно тому, как *астрология* процветает благодаря астрономии (а также безграмотности и духовной нищете многих людей в начале ХХI века), так и кабалистика может завоевать свой «сектор рынка», если возьмет на вооружение ГТНЧ или подобную ей теорию. Так что, граждане *кабалисты*,

овладевайте знаниями, и ГТНЧ приведет вас к духовному и экономическому процветанию!

3.13. ПИФАГОРЕЙЦЫ: “ВСЁ ЕСТЬ ЧИСЛО”

Еще 25 веков назад мир чисел настолько поразил один из лучших умов того времени – Пифагора, что он даже пришел к выводу о том, что *количественные отношения являются сущностью вещей* (см. эпитафия к книге).

Пифагор (576–496 гг. до н. э.) – древнегреческий мыслитель, религиозный и политический деятель родом из города Регия на острове Самос (Южная Италия). Пифагор (“убеждающий речью”) – это не имя, а прозвище, за то, что он высказывал истину так же постоянно, как дельфийский оракул. Скучные сведения о жизни и учении Пифагора трудно отделить от легенд, представляющих его как полубога, совершенного мудреца, наследника всей античной и ближневосточной науки, чудотворца и мага. У Пифагора была красивая внешность, он носил бороду, а на голове золотую диадему, он никогда не плакал и вообще был недоступен страстям и волнению. Был склонен к мистификациям и “демонстративности” в поведении. Пифагор подвергнул себя операции обрезания, чтобы быть допущенным к знакомству с тайной египетской наукой (22 года обучался у жрецов в Египте). Пифагор был первым, кто назвал свои рассуждения о смысле жизни *философией* (любомудрием). Сам он ничего не писал, но в результате первой же прочитанной лекции Пифагор приобрел 2000 учеников, которые не вернулись домой, а вместе со своими женами и детьми образовали громадную школу и создали государство (строго закрытое сообщество своих последователей), названное “Великая Греция”, в основу которого были положены законы и правила Пифагора, почитаемые как божественные правила. Учение Пифагора уравнивало всех свободных граждан по меркам высших духовных ценностей, что серьезно беспокоило власть имущих. Согласно легенде 80-ти летний Пифагор был коварно убит ночью в Метапонте, где он пытался скрыться от мести богачей.

Из произведений Пифагора нам известны: “О природе”; “О государстве”; “О воспитании”; “О душе”; “О мире”; “Священное слово”. Пифагору приписывается учение о *метемпсихозе*, то есть о переселении душ из одного живого тела в другое. Он будто бы утверждал, что сам побывал в телах других людей и даже в некоторых растениях. В области математики Пифагору приписывается систематическое введение доказательств в геометрию, построение планиметрии прямолинейных фигур, создание учения о подобии, построение некоторых правильных многоугольников и многогранников, *доказательство в общем виде* теоремы, носящей его имя. Кстати, эта теорема

(квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов) была известна в Вавилоне еще в 6 веке до н. э. С именем Пифагора связывают также учение о четных и нечетных, простых и составных, о фигурных и совершенных числах, об арифметических, геометрических и гармонических пропорциях и средних.

Религиозно-философское учение Пифагора, исходившее из представления о числе, как основном принципе всего существующего, вошло в историю человечества как *пифагореизм*. Основы своего учения о числах (“Все есть число”) пифагорейцы, очевидно, заимствовали у *орфики*, а последние из мифов и культа *Аполлона* и *Дионисия*. Вначале это учение передавалось устно, как тайна, в пределах организованного Пифагором сообщества, которое было одновременно философско-научной школой, религиозно-магическим союзом “посвященных” (прообраз духовных “ордеров” средневековья) и, наконец, политической организацией. Самым выдающимся представителем этого учения был Архит из Тарента (около 428–365 гг. до н. э.) – древнегреческий математик и астроном, государственный деятель и полководец, очевидно, именно ему следует приписать большую часть “пифагорейской” математики. Пифагореизм имел влияние на умы людей вплоть до начала 4 века.

Пифагореизм обращал основное внимание на арифметически-геометрическую структуру окружающего мира, которую он соединял с акустикой и астрономией. В основе всего лежит учение о числах самих по себе, или о богах как числах, которое разворачивается в учение о космосе как числе, о вещах как числах, о душах как числах и, наконец, об искусстве как числе (концепция числового “канона” в скульптуре, математизация музыки). Некоторые цитаты из учения Пифагора приведены в начале книги. Как заметил еще Аристотель (384–322 гг. до н. э.): “У них, пифагорейцев, по-видимому, число принимается за начало и в качестве материи для вещей”.

В пифагореизме возникла весьма оригинальная арифметика, придававшая пластичный и жизненный смысл каждому числу (см. п. 2.6).

Из всех чисел священо и даже сверхсвящено число “36”, так как $36=1\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot2+3\cdot3\cdot3$, и вместе с тем $36=1+2+3+4+5+6+7+8$.

У пифагорейцев число 7 считалось мироуправляющим (божественным), требующим особого почитания, оно играет “космическую” роль. В качестве всеопределяющей силы (“силы свершений”) и творца всего (“демиурга”) число 7 есть судьба под именем *kairos* (*критическое время*). Число 7, судьба и *kairos* для пифагорейцев одно и то же.

У пифагорейцев считалось чем-то замечательным, если число равнялось сумме своих собственных делителей. Такие числа считались *совершенными* (например, $28=1+2+4+7+14$, см. также п.2.8). Пифагорейцы различали также

“треугольные” числа – 3, 6, 10, 15, 21, ...; “квадратные” – 4, 9, 16, 25, 36, ...; “пятиугольные” – 5, 12, 22, 35, 51, ... (см. также п. 2.12).

Арифметика пифагорейцев была в высшей степени *спекулятивной наукой* и имела мало общего с современной ей математической школой Вавилона. Обнаружение “несоизмеримости” в мире чисел стало скандальным открытием в пифагорейской школе. Так, если гипотенузой служит диагональ квадрата, то длину гипотенузы невозможно выразить ни четным, ни нечетным числом (например, если катеты равны “единице”, то длина гипотенузы равна *иррациональному числу* $\sqrt{2}$). Величины, невыразимые через целое число, вызывали мистический ужас у пифагорейцев, они хранили их в строжайшей тайне (для таких случаев теория чисел ими отвергалась, синтез же искали в геометрии). Любопытно, что именно открытие иррационального теперь признается математиками как наиболее важное открытие пифагорейцев (очень поучительная история, а ведь такое было не раз!).

В эпоху упадка античного рабовладельческого общества (1 век до н. э.) пифагорейская мистика чисел была усвоена и воскрешена в *неоплатонизме* и *неопифагореизме*. Согласно неоплатонизму материя лишь низшее звено в иерархии вселенной, превращенный отблеск *эманации* (излучения, истечения) “мировой души”, над которой возвышается “дух”, а еще выше – “первосущность”, или “единое”. Важным шагом в развитии понятия натурального числа явилось также осознание *бесконечности* натурального ряда, т. е. потенциальной возможности его безграничного продолжения, что отражено в знаменитых памятниках античной математики: в “Началах” Евклида (3 век до н. э.); в книге “Псаммит”, принадлежащей великому Архимеду (ок. 287–212 гг. до н. э.).

3.14. ХАРАКТЕРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ИЗ МИРА ЧИСЕЛ

В настоящем параграфе собраны вместе все величины (*характерные величины*), которые могут играть существенную роль в теории чисел и в ГТНЧ. Сюда обязательно необходимо добавить *фундаментальные математические константы* (ФМК, см. п. “Обозначения”), а также полезно иметь в виду буквально *все таблицы* из глав 1, 2, 3 настоящей книги.

Отдельные “любопытные” числа (где N – некое натуральное число):
0,2244 – *тах* вероятность появления мира №8 (имеет место при $N=999994$);
0,6079 ($=6/\pi^2$) – важный параметр Пирамиды (см. 10-й закон Пирамиды);
0,618= $1/1,618$ – число Фидия (к нему близки числа $e^{-0,5}\approx 0,606$; $\pi^2/6\approx 0,645$);
0,7602= $(\pi/2e)^{1/2}$ – средняя кратность/*тах* кратность (лидеры редких миров, $N\rightarrow\infty$);
0,7668= $e/2\pi^{-1/2}$ – средняя кратность/*тах* кратность (лидеры частых миров, $N\rightarrow\infty$);

$1,07=(\pi e)^{1/2}$ – *max* кратность в частых мирах/*max* кратность в редких мирах;
 $1,6449 (= \pi^2/6)$ – значение *дзета-функции* $\zeta(s)$ при $s=2$; $n \rightarrow \infty$ (теория чисел);
 $1,648=e^{1/2}$ – средняя кратность всех чисел из всех миров (предел при $N \rightarrow \infty$);
 2 – средняя кратность всех чисел из редких миров (её предел при $N \rightarrow \infty$);
 5 – количество классов натуральных чисел (5 арифметических прогрессий);
 7 ± 2 – “магическое” число как в ГТНЧ, так и в реальном (физическом) мире;
 12 – количество классов (дюжина), которое чередуется до бесконечности;
 $77,5568\%$ – *max* коэффициент заполнения пространства? (вместо $77,84\%$);
 245000 – граница отрезка (N), после которой наступает приоритет мира №8;
 $12.195.257 - 800000$ -е простое число (P_{800000}), минимально возможная база;
 $4.705.814.230.311 \approx 4,7 \cdot 10^{12}$ – сумма первых 800000 простых чисел (от $P_1=2$);
 $1,86 \cdot 10^{43}$ – количество *эви* в 1 секунде (1 год= $3,15 \cdot 10^7$ сек. $\approx 5,84 \cdot 10^{50}$ *эви*).

Значения, достигаемые **в конце Большого отрезка**, т. е. при $N=10^{61}$. (Разумеется, аналогичные величины можно найти для МО, ЦО, ПО и любых других отрезков натурального ряда, но мы их приводим для БО):

10^{-31} – доля всех чисел из редких миров (от общего количества чисел N);
 $0,006 \div 0,011$ – отношение: количество орбит (мир №2)/количество миров;
 0,19 – вероятность появления числа из мира №8 (доля чисел данного мира);
 0,7358 – средняя кратность/*max* кратность (у лидеров редких миров);
 5,7 – отношение: количество частых миров/ количество редких миров;
 6 – номер орбиты в мире №2, которая, вероятно, “населена” больше других;
 7 – наибольшая “длина” скопления лидеров редких миров (их количество);
 7,8 – *max* кратность в редких мирах (сумма делителей числа N /число N);
 8,7 – *max* кратность в частых мирах (сумма делителей числа N /число N);
 8 – номер мира, который, вероятно, “населен” больше всех других миров;
 8,63 – *max* тип чисел из частых миров/*max* тип чисел из редких миров;
 13,8 – отношение: местная средняя пауза/средняя пауза (в редких мирах);
 14,86 – сред. Φ -параметр (при $N \rightarrow \infty$ число Фейгенбаума?) в редких мирах;
 $13 \div 39$ – количество членов в каноническом разложении числа (длина ПСК);
 16 – средняя “длина” скопления чисел из частых миров (количество чисел);
 21 – «ширина» МЛ редких миров (*max* номер простого числа P , столбцы);
 30 – «пик» для значений 1-го показателя степени (AI) в МЛ редких миров;
 33 – «ширина» МЛ частых миров (*max* номер простого числа P , столбцы);
 $43 \div 47$ – ожидаемое количество орбит-фантомов (мир №2 – простые числа);
 45 – количество *нижних лидеров* в редких мирах (лидеры простых миров);
 47 – количество *нижних лидеров* в частых мирах (лидеры удвоенн. миров);
 66 – *max* “длина” скопления чисел из частых миров (количество чисел);

70 – наибольшая “длина” скопления *лидеров* частых миров (их количество);
 73 – *max* простое число в МЛ редких миров (21-ое простое число);
 137 – *max* простое число в МЛ частых миров (33-ое простое число);
 140,6 – средний тип числа (среднее количество делителей, тип по Дирихле);
 202 – *max* показатель степени ($A1_{max}$) в МЛ редких и частых миров (у $P=2$);
 270 – количество *верхних лидеров* в редких мирах (эти лидеры не описать?);
 398 – *min* тип у лидеров частых миров (количество делителей у лидеров);
 734÷748 – ожидаемое количество верхних лидеров в частых мирах;
 4764÷9528 – возможный диапазон для *max* количества орбит в мире №2;
 9527÷19055 – возможный диапазон для *max* номера орбиты простых чисел;
 10^5 – кол-во скоплений лидеров частых миров (между редкими лидерами);
 120000 – точное количество редких миров (лидеров редких миров) на БО;
 687430 – примерное количество частых миров (лидеров частых миров);
 807430 – примерное количество частых и редких миров (их лидеров) на БО;
 $274.000 \div 1.153.000$ – количество наборов ПСК (см. параграф 1.16);
 $4,6 \cdot 10^8$ – средний арифметический тип всех лидеров редких миров;
 $3,6 \cdot 10^9$ – средний арифметический тип всех лидеров частых миров;
 10^9 – отношение *max* возможного типа к среднему типу (T_{max}/T_s);
 $8 \cdot 10^{10}$ – *max* тип у чисел из редких миров (количество делителей у числа N);
 $7,2 \cdot 10^{11}$ – *max* тип у чисел из частых миров (колич-во делителей у числа N);
 10^{42} – количество чисел N в комбинаторной матрице редких миров;
 $6 \cdot 10^{59}$ – количество скоплений чисел из частых миров (между редкими);
 10^{76} – количество чисел N в комбинаторной матрице частых миров.

Некоторые **бесконечные последовательности** натуральных чисел:

Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61...

Простые лидеры: 2, 4, 16, 64, 1024, 4096, 65536, 262144, 4194304, ...

Удвоенные лидеры: 6, 12, 48, 192, 3072, 12288, 196608, 786432, 12582912, ..

Числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ..

Числа Каталана: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, ..

Совершенные числа: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, $2 \cdot 10^{18}$, $2 \cdot 10^{36}$.

Числа Ферма (Гауссовы простые числа): 3, 5, 17, 257, 65537, (а дальше –?).

4. СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Данная глава посвящена физике, причем самым общим её вопросам, затрагивающим фундаментальные истины. Это интересно само по себе, но основная цель автора – показать, что структура натуральных чисел иногда удивительным образом «моделирует» структуру пространства-времени. Чтобы

«почувствовать» это – необходимо сопоставлять закономерности физического мира, его числовые соотношения и формулы с результатами, полученными в рамках ГТНЧ. Например, физика доказывает, что природа отдает предпочтение *малым числам*, а число 7 ± 2 обладает некой “магией”, но об этом говорит нам и ГТНЧ. В ряде случаев автор сам проводит сопоставления реального мира с миром чисел, выделяя такой текст мелким шрифтом, благодаря чему, искушенный читатель сможет легко пропускать наиболее ортодоксальные мысли автора, а для желающих «пофантазировать» это послужит заразительным примером к своим собственным изысканиям. Для справок будет полезен п. 3.14 «Характерные величины...».

Совокупность всего, что существует в пространстве и времени, можно назвать одним словом – Вселенная. Постигая её, мы приближаемся к пониманию структуры пространства-времени. Изучением Вселенной как единого целого, ее геометрической структуры, происхождения и эволюции всех ее объектов занимается удивительная наука – *космология*¹.

4.1. ОБЩАЯ КАРТИНА ВСЕЛЕННОЙ

В данном параграфе мы рассмотрим основные крупномасштабные структурные единицы Вселенной, начиная с объектов Солнечной системы.

Солнце – это типичная звезда массой около $2 \cdot 10^{30}$ кг, диаметром примерно 1 391 950 км (в 109 раз больше диаметра Земли), с температурой поверхности порядка 6050°K , и температурой в ядре $15\,000\,000^\circ\text{K}$. Солнце – самая заурядная карликовая звезда, каких большинство в нашей Галактике. По физике происходящих процессов в Солнце можно выделить 7 зон: гелиевое ядро, зона лучистого переноса, зона конвекции, фотосфера, хромосфера, корона, гелиосфера (зона солнечного ветра, она охватывает границы всей солнечной системы). Протяженность шести первых зон соответственно (в тыс. км): 175; 425; 271; 0,5; 2,5; 3000 (эти числа почти образуют тильду: 50; 610; 200; 1; 10; 3000). На поверхности Солнца (в фотосфере) семь вещей составляют 99,75% по её химическому составу, из них водород –

¹ Интерес к этой науке не смог погубить даже «ветер перемен» последних 15 лет российской истории. Более того, с 1999 г. в Подмоскowie (в поселке Ново-Никольское) в конце апреля собираются *любители* астрономии (космологии) и телескопостроения. Фестиваль собирает более ста человек со всего бывшего Союза, он открыт и для новичков (их друзей и родных). Организационный комитет фестиваля: 125083, Москва, Петровско-Разумовский пр-д, д. 9, кв. 35, «АстроФест» (ваш запрос + конверт с обратным адресом), тел. (095) 214-98-77. Московский астрономический клуб (095) 255-15-71. Подробную информацию о фестивале также можно найти в сети «Интернет».

73,46% и гелий – 24,85%. В спектре Солнца можно выделить около 21 сильных фраунгоферовых линий, а соотношение длин волн (нм) достигает значения 656,28/358,12 \approx 1,83 (близко к «золотому сечению»).

Внешняя атмосфера Солнца (его корона) обеспечивает постоянное испускание в космическое пространство потока частиц (электронов, протонов, альфа частиц) – солнечного ветра, который пронизывает всю Солнечную систему. По существу Солнце – это раскаленный плазменный шар, состоящий в основном из водорода и гелия. Источником энергии, пополняющим потери на излучение, является непрерывная реакция *термоядерного синтеза*¹ в ядре Солнца, в результате которой из водорода образуется гелий. Солнце движется относительно межзвездной среды (ближайших звезд) со скоростью около 20 км/с, а скорость вращения вокруг центра Галактики («нашего» скопления звезд) достигает 250 км/с. Удаление Солнца от центра Галактики составляет 26100 световых лет (*световой год* равен $\sim 9,46 \cdot 10^{12}$ км – это расстояние, которое проходит луч света в вакууме за год, т. е. за $\sim 365, 24$ солнечных суток. Удобная единица расстояний в астрономии).

Фотосфера, хромосфера и корона образуют *солнечную атмосферу*, в которой наблюдается 7 нестационарных образований: солнечные пятна, гранулы, ячейки супергрануляции, спикулы, факелы (флоккулы), вспышки, протуберанцы. Протуберанцы достигают в высоту $3 \cdot 10^4$ км, в длину – $2 \cdot 10^4$ км, а в ширину $5 \cdot 10^3$ км. Размеры факелов – $5 \cdot 10^3$ км, спикул – $(1-7) \cdot 10^3$ км, ячеек супергрануляции – $(2-4) \cdot 10^4$ км. Время жизни пятен – $1 \div 300$ суток, протуберанцев – 60 суток, факелов – 10 суток, спикул – 10 минут.

Самые грандиозные образования на Солнце – это пятна, их диаметр может быть от 10^3 км до 10^5 км и более, по своей сути – это области, температура которых на 1700° К ниже окружающих их областей. Возможно, пятна образуются из-за того, что Солнце представляет собой гигантскую «динамо-машину», которой закручиваются магнитные поля, и некоторые из них

¹ В середине XX века человеком создано *рукотворное солнце* – это термоядерный взрыв (взрыв водородной бомбы). Самый мощный взрыв на нашей планете (130-й по счету) был произведен 30 октября 1961 г. в СССР над архипелагом Новая Земля в районе пролива Маточкин Шар. Мощность бомбы была 57 мегатонн в тротиловом эквиваленте (т. е. равна энергии взрыва тритилового куба со стороной ребра 329 метров!). «Царь-бомбу» весом 26 тонн (8 м в длину и 2 м в диаметре) сбросили с самолета Ту-95 на высоте 10500 м на специальных парашютах. Бомба взорвалась через 3 минуты после сброса на высоте 4000 м в 11 часов 30 мин. (самолет успел отойти на 40 км, но все равно опасно пострадал). Длительное свечение небывалой яркости наблюдалась в течение 70 секунд, а очень яркая её часть – в течение 30 секунд. Взрывная волна трижды обогнула земной шар, а радиоактивное облако накрыло острова Карского моря. Последствия испытаний были страшными. Еще в 1961 г. в СССР была бомба мощностью 100 мегатонн. Ядерным оружием обладают уже около 10 стран, в том числе Индия и Пакистан, пребывающие сейчас на грани войны друг с другом.

всплывают до уровня фотосферы, приводя к образованию пятен. “Истинный” цикл активности (с учетом магнитной полярности *ведущих пятен* на Солнце) составляет в среднем 22 года. Последний перевернут магнитных поясов (реверс) на Солнце произошел в 2001 г., т. е. пройден очередной максимум солнечной активности и начался его спад. В настоящее время у науки нет удовлетворительной картины объяснения процессов, приводящих к образованию солнечных пятен и природы активности Солнца.

Согласно ГТНЧ реальные минимальные паузы частых миров (см. п. 1.33, 1.35) в конце Большого отрезка могут составлять несколько десятков лет, т. е. они близки к средней продолжительности цикла активности Солнца. В данном случае идея заключается в том, что природа активности звезд может быть связана со структурой пространства-времени в настоящую эпоху.

Степень активности Солнца характеризуется числом Вольфа $W=10 \cdot g + f$, где g – число групп пятен; f – число солнечных пятен. Средняя продолжительность пятнообразовательного цикла или цикла активности Солнца – 11,04 года (его открыл немецкий аптекарь Швабе, проанализировав накопленные за 230 лет наблюдения). Точные циклы активности Солнца спрогнозировать невозможно, реальный период активности колеблется от 7 до 17 лет, но еще в 1893 г. английский астроном Уолтер Маундер обнаружил, что раньше были и более продолжительные циклы, а последний из них (так называемый “маундеровский минимум” активности, когда на Солнце почти не было пятен) составил 70 лет (с 1645 по 1715 г.). Кстати, в Европе в это время были самые холодные зимы за последнее тысячелетие.

Известный астроном Пулковской обсерватории Ю. А. Наговицин (специалист по солнечной активности) утверждает, что сейчас мы находимся вблизи пиков векового и 200-летнего циклов активности Солнца, именно поэтому на планете наблюдается всеобщее потепление. Но в ближайшие 20 лет наступит очередной “провал” солнечной активности, который приведет к резкому похолоданию (малому оледенению) на Земле. Зимы в России будут суровыми как в 1812 г. (тогда ситуация была аналогичной).

Солнце является гравитационным центром *Солнечной системы* – совокупности небесных тел, вращающихся вокруг него. В Солнечную систему входят планеты, пояс астероидов (в т. ч. метеороиды), микрометеориты, пояс небесных тел Койпера-Эджворта, Кентавры, кометы.

Планеты – это 9 наиболее массивных, сфероидальных тел, движущихся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца и светящихся отраженным солнечным светом. В порядке удаления от Солнца: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон (МВЗМ-ЮСУНП – эту аббревиатуру легко запомнить). Планеты земной группы (МВЗМ, см. табл. 21) – сравнительно небольших размеров и массы, но большой средней плотности с твердой поверхностью. Средний диаметр Земли составляет ~ 12 742 км, а

масса равна $\sim 5,98 \cdot 10^{24}$ кг. Среднее расстояние от Земли до Солнца $\sim 1,5 \cdot 10^{11}$ м – это так называемая *астрономическая единица* (а. е.), которой удобно измерять расстояния в Солнечной системе. Внешние планеты (ЮСУНП) обладают значительными размерами и массой, но малой плотностью, по-видимому, это шары газа с ядром в центре (из железа и скальных пород). Самая далекая планета – Плутон еще плохо изучена и ее принадлежность к одной из двух групп планет пока не установлена, возможно, это самый крупный объект из пояса Койпера-Эдворта (см. ниже).

Таблица 21. Основные параметры планет солнечной системы

Наименование планеты	Расстояние от Солнца, R (а. е.)	Масса, в массах Земли	Радиус, в радиусах Земли	Орби-таль-ный период	Период вращения планеты	Кол-во спутников у планеты
Меркурий	0,387	0,055	0,382	88 сут	58,7 сут	нет
Венера	0,723	0,815	0,949	225 сут	243 сут	нет
Земля	1	1	1	365 сут	23,9 ч	1
Марс	1,52	0,107	0,533	1,9 года	24,6 ч	2
Юпитер	5,20	318	11,2	12 лет	9,92 ч	39
Сатурн	9,54	95,2	9,45	30 лет	10,7 ч	31
Уран	19,2	14,6	4,10	84 года	23,9 ч	15
Нептун	30,1	17,2	3,88	165 лет	17,8 ч	8
Плутон	39,4	$\sim 0,002$	$\sim 0,24$	248 лет	6,39 сут	1

Почти все планеты имеют спутники – космические тела существенно меньшей массы, чем сама планета (например, масса Луны равна всего 0,012 массы Земли), связанные с планетой силами тяготения и движущиеся вокруг нее по эллиптическим орбитам. Полная масса спутников всех планет около 0,12 массы Земли. Юпитер, Сатурн, Уран помимо спутников имеют так называемые кольца (соответственно 1, 5, 9 колец) толщиной 1–2 км, состоящие из множества твердых частиц различных размеров.

У планет земной группы среднее расстояние от Солнца (R , км) увеличивается по экспоненте $R \approx \exp(17,857 \cdot J^{0,0516})$, где $J=1 \div 4$ – порядковый номер планеты от Солнца. У внешних планет ($J=5 \div 9$) эта зависимость принимает вид: $R \approx \exp(15,681 \cdot J^{0,1663})$. Плутон в 102 раза дальше от Солнца, чем Меркурий, однако, это соотношение близко к 200, если брать недавно открытые тела Койпера-Эдворта и Кентавры (1992 г.).

Наибольшая масса у Юпитера, наименьшая – у Плутона (их соотношение $\sim 10^5$). Наибольшая плотность у Земли (в два раза больше, чем у гранита), наименьшая – у Сатурна (как у бензина), их соотношение равно 8. Массы планет (M , кг) подчиняются распределению $M \approx 10^{22} \cdot \exp(1,3644 \cdot x) \approx 10^{22} \cdot \exp[\lg(e^x) \cdot x]$, где $x=1 \div 9$ – порядковые номера планет после их упорядочения по возрастанию масс. При этом диаметры планет (D , км) близки к экспоненте: $D \approx 1514 \cdot \exp(0,5162 \cdot x)$. Планеты-гиганты по размерам сравнимы со

звездами-карликами и, вероятно, не существует резкой границы между ними (так, в центре Юпитера температура может быть 25000°K).

Массы основных объектов Солнечной системы (Солнца, 9 планет, всех астероидов, всех тел Койпера-Эджворта и Кентавров) образуют тильду (168) с параметрами: $S=333393$ (масс Земли); $K=12$ (объектов); $A=15,43$; $p=0,336$. Стройную тильду образуют и *радиусы орбит* 9 планет и всех астероидов (их пояса между орбитами Марса и Юпитера): $S=110$ (а. е.); $K=11$ (объектов); $A=4,62$; $p=0,56$ (где 1 а. е. $\approx 1,5 \cdot 10^8$ км – астрономическая единица, равная радиусу орбиты Земли). При этом наименьшую орбиту с радиусом около 0,06 а. е. можно отождествлять с самим Солнцем (его короной).

Среднее количество больших спутников у планет солнечной системы – около 7. Радиусы орбит у спутников Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна ближе всего к тильда-распределениям, так для Сатурна имеем: $S=22685$ (тыс. км); $K=18$ (спутников); $A=4,67$; $p=0,26$. Диаметры (D , км) 61 наибольших спутников подчиняются формуле $D \approx \exp[e \cdot \exp(10 \cdot e^{-2\pi \cdot x})]$, где $x=1 \div 61$ – порядковые номера спутников после их упорядочения по возрастанию диаметров (по закону подобного вида в ГТНЧ, например, растут лидеры, «открывающие» скопления редких лидеров нового типа, см. п. 1.21).

Астероиды (*малые планеты*) – это твердые космические тела поперечником от 1000 км до 1 км. Количество астероидов оценивается в 50000, а их общая масса составляет всего около 1/25 массы Луны. Средние диаметры самых крупных астероидов таковы (в км): 941, 530, 512, 457, 344, 317, 303, 277, 272, 269, ..., причем у небесных тел подобных размеров гравитационные силы уже не способны сжать твердую структуру (и даже расплавить ее в центре как у более массивных планет), поэтому у астероидов не может быть сферoidalной формы, и почти все они – бесформенные глыбы.

Принимая условно астероиды за шары некоего диаметра с плотностью 0,83 г/см³, можно построить их тильда-распределение (168) с параметрами: $S=3 \cdot 10^{21}$ (масса всех астероидов, кг); $K=50000$; $A=15,07$; $p=0,11$. Отсюда следует, например, что у 50000 астероидов диаметр более 2,8 км, у 38000 – более 10 км, у 760 – более 80 км, а у 35 – более 200 км. Это близко к истине?

Все астероиды по составу их поверхности можно разделить на 5–7 типов, соотношение их плотностей достигает 1/7. Различают каменные (плотностью от 2 г/см³) и железно-никелиевые (плотностью до 8 г/см³) астероиды. Подавляющее большинство (до 98%) астероидов движется вокруг Солнца между орбитами Марса и Юпитера. Пояс астероидов – это некий тор в пространстве, причем в нем выделяется около 7 малых *пустых* торов (люков Кирквуда), где почти нет астероидов из-за гравитационного воздействия Юпитера. С другой стороны, в системе Солнце–Юпитер–астероид существует 5 точек (*лагранжевых точек*), где движение астероида оказывается устойчивым, что приводит к «скоплению» там сотен астероидов. Очевидно, в системе любых гравитирующих тел существуют подобные точки (около 7

точек?), однако, даже “задача трех тел” не решена до сих пор в общем виде, настолько она сложна.

Орбиты 8000 астероидов надежно определены (рассчитаны), причем более 1300 астероидов в принципе могут столкнуться с Землей и радикально повлиять на ее судьбу. Так, например, 28 октября 2028 г. к Земле максимально приблизится крупный астероид, а в случае его удара о Землю образуется 30-ти километровый кратер и пыль затмит Солнце на месяцы, либо (при падении в океан) гигантское цунами сметет все прибрежные города планеты (существует гипотеза, по которой нечто подобное погубило Атлантиду – огромный остров в Атлантическом океане, якобы, существовавший 10–12 тысяч лет назад к западу от Гибралтарского пролива). Вероятность встречи с астероидом 28 октября 2028 г. оценивается как 1/22000 (что сравнимо с вероятностью угадывания 4-х номеров в «Спортлото – 6 из 49» при заполнении только одного из двух вариантов билета).

Метеороиды – это, по сути, те же астероиды, но их поперечник менее 1 км (вплоть до нескольких сантиметров). Общая закономерность такова: численность огромного множества метеороидов резко падает с увеличением их размеров и массы (несомненно, подчиняясь тильда-распределению).

Микрометеориты – массы подавляющего большинства этих частиц измеряются десятками и тысячными долями грамма. В межпланетном пространстве их движется множество (потоки пыли, метеорные рои). Полная масса пыли в Солнечной системе около 10^{-7} массы Земли.

Пояс Койпера-Эджворта – это небесные тела, обращающиеся непосредственно за орбитой Нептуна. Первый из таких объектов был обнаружен в 1992 г. По оценкам, может существовать до 70000 подобных тел поперечником свыше 100 км и около миллиарда тел меньшего размера. В основном эти тела имеют темно-красный цвет вследствие образования органических соединений на их поверхности в результате бомбардировки замерзшего метана космическими лучами.

Кентавры – это тела из пояса Койпера-Эджворта, которые под гравитационным воздействием одной из больших планет перешли на сильно вытянутые орбиты, расположенные между орбитами Юпитера и Нептуна. Известно 7 кентавров, но по оценкам имеется около 300 кентавров с диаметром свыше 100 км. Их поведение внешне похоже на поведение комет.

Кометы – ледянистые тела (конгломерат замерзших газов и частиц пыли) с диаметром ядра от 0,5 до 20 км и массой $10^{11} \div 10^{12}$ кг, которые движутся вокруг Солнца по сильно вытянутым орбитам. При сближении с Солнцем у них появляются “голова” и “хвост» (улетучивающиеся из ядра кометы молекулы газов и частицы пыли). Источником комет в Солнечной системе служит облако Оорта, находящееся на расстоянии $10^4 \div 10^5$ а. е. от Солнца.

Облако содержит около 10^{11} (в ГТНЧ это T_{max} , см. п. 1.30) кометных ядер и является остатком первичного газопылевого облака, из которого образовалась Солнечная система около 4,54 млрд. лет назад. Возможно, источником короткопериодических комет является пояс Койпера-Эдворта. Полная масса метеоритного и кометного вещества около 10^{-9} массы Земли.

Облако Оорта служит границей, в пределах которой преобладает тяготение Солнца. За пределами облака начинается межзвездное пространство. Размер наблюдаемой части Солнечной системы превосходит 50 а. е. (свет проходит это расстояние примерно за 7 часов), но по космическим меркам это немного. Так, до ближайшей к нам звезды Толиман (α Центавра) свет будет идти 4,34 года. Среднее расстояние между звездами в окрестности Солнца от 5 до 10 световых лет. За пределы Солнечной системы космический аппарат может «вырваться» при скорости не меньше, чем $16,7 \div 72,8$ км/с (в зависимости от направления движения). Двигаясь же со скоростью 72,8 км/с аппарат достигнет звезды Толиман (её возможных планет) через 17852 земных года. Но если вне Солнечной системы скорость аппарата увеличить, скажем, в 1000 раз (разгоняя его и, увеличивая тем самым его массу в 1,031 раза), то время такого путешествия сократится до десятков лет. Таким образом, полеты к другим планетным системам далеко не фантастика.

Звезды – это самые заметные объекты Вселенной и представляют собой газовые шары, образовавшиеся в результате гравитационного сжатия облака пыли и газа. В центре звезд протекают реакции термоядерного синтеза, с выделением колоссальной энергии в виде света, тепла и ультрафиолетового излучения. Эта энергия препятствует гравитационному сжатию, и звезда достигает состояния равновесия, которое может продолжаться от 10 млрд. лет (как у Солнца) до 1 млн. лет (как у очень массивных звезд). Массы большинства звезд лежат в пределах от 0,05 до 80 масс Солнца. Если масса звезды меньше 0,08 солнечной массы, то реакции ядерного синтеза в ней протекать не могут или же они происходят лишь время от времени (такие звезды называются «коричневыми карликами»).

В ясную безлунную ночь невооруженным глазом на небе можно насчитать около 6000 звезд нашей Галактики, а она сама – это Млечный Путь, который стелется по небу светящейся полосой, образованной слабым сиянием далеких звезд (Галактику мы видим с «ребра»). Астрономические наблюдения с помощью современных оптических телескопов позволяют утверждать, что всего в нашей Галактике свыше 400 млрд. звезд (в ГТНЧ это $\sim T_{max}$, см. п. 1.30, формула (133)). Т. е. на каждого жителя Земли приходится более полусотни звезд, причем у большинства звезд могут быть свои многочисленные планетные системы, в том числе населенные разумными существами.

По крайней мере, очень трудно поверить, что жизнь на Земле – явление уникальное, случайное, когда только в нашей Галактике есть такой огромный выбор у Его Величества Случая (или у Создателя?).

Основные объекты нашей Галактики – звезды, можно разбить на 5 последовательностей – своеобразных звездных племен или звездных рас, причем в зависимости от температуры звезд (которая может быть от 2500 до 50000 К), каждой звезде ставят в соответствие показатель цвета: красные – самые “холодные” звезды, а белые – самые “горячие” (по температуре поверхности звезды подразделяют на 7 спектральных классов, еще звезды делят на 7 классов светимости). Больше всего звезд принадлежит так называемой *главной последовательности* (к ним относится и наше Солнце), очень много красных карликов, самые же редкие звезды – сверхгиганты (звезды наибольшей светимости, излучающие в десятки тысяч раз интенсивнее, чем Солнце). На одного сверхгиганта приходится: тысячи красных гигантов, около 10000 тысяч звезд главной последовательности, около 1000 тысячи белых карликов, 10 тысяч субкарликов (это тильда-распределение!).

Среди звезд есть весьма необычные, например: *переменные звезды*, которые периодически изменяют свой блеск (их различают более 40 типов, в каталоги внесено свыше 20 тысяч переменных звезд); *новые и сверхновые звезды*, которые взрываются и их светимость вдруг возрастает в миллиарды раз, превосходя по яркости целую галактику (сверхновые – это явления с самым большим энерговыделением, определяющие эволюцию галактик); *нейтронные звезды*, которые образуются из ядер сверхновых звезд (диаметр нейтронных звезд всего 10–30 км, а плотность в 10^{14} раз превышает плотность Земли); *пульсары* – быстро вращающиеся нейтронные звезды.

Если масса ядра звезды больше 3 масс Солнца, то под действием гравитации, в конце концов, такая звезда неизбежно сколлапсирует (сожмется) в одну точку. Такая чудовищная концентрация массы приводит к искажению пространства-времени вокруг звезды в пределах некоего *горизонта событий*, из которого не может вырваться даже свет этой звезды, т. е. образуется так называемая *черная дыра*. Кстати, они образуются не только из звезд. Пока обнаружено лишь 4 кандидата на роль черных дыр.

Звездные скопления – это объединения двух и более звезд под действием гравитационных сил. Многие звезды нашей Галактики объединены в различные скопления, а полное число скоплений в Галактике около 20000. Самые маленькие из них – это *двойные звезды* и *кратные звезды* (когда в группе до 10 звезд), всего зарегистрировано свыше 60 тысяч таких систем. *Звездные ассоциации* – группы из нескольких десятков или сотен молодых звезд (они связаны с областями звездообразования). Известно около 70 ассоциаций го-

рячих звезд и 25 ассоциаций переменных звезд. *Рассеянные звездные скопления* – группы из нескольких сотен или тысяч звезд, таких скоплений около 1000. *Шаровые скопления* – устойчивые образования, состоящие из 10^5 – 10^7 звезд. Открыто около 500 шаровых скоплений, которые образуют сферoidalную систему и концентрируются к центру Галактики. Что касается нашего Солнца, то оно является одиночной звездой.

Наша Галактика представляет собой светящийся диск из звезд (и их скоплений), поперечник этого диска ~ 100000 , а толщина ~ 1000 световых лет. В центре диска имеется утолщение – *балдж*, внутри которого находится компактное *ядро* Галактики. В диске выделяют плоскую составляющую – тонкий слой межзвездного газа и образующихся из него молодых звезд. Диск окружен сферoidalным *гало* из старых слабосветящихся звезд. Из динамических соображений (анализ кривой вращения и устойчивости) следует, что Галактика должна быть окружена *коронай*, содержащей основную часть (92,2%) всей массы Галактики. Непосредственно корона не наблюдается, поэтому она должна состоять из темной материи: маломассивные звезды низкой светимости, “мертвые” звездные остатки, нейтрино с нулевой массой покоя и т. д. Возраст Галактики – примерно 10^{10} лет. Суммарная плотность вещества в центральной плоскости диска (в окрестностях Солнца) около $8,8 \cdot 10^{-21}$ г/см³

Помимо звезд в Галактике существует *межзвездная среда*: 1) гигантские молекулярные облака из молекул более чем 60 разных типов и пыли, в которых содержится почти половина массы всего газа (насчитывается около 4000 облаков, они сжимаются и являются зародышами будущих звезд); 2) области нейтрального водорода (плотностью около 50 частиц на см³); 3) планетарные и диффузные туманности (остатки сверхновых звезд); 4) коридоры горячего разреженного (коронарного) газа; 5) межзвездные мазеры; 6) межзвездная пыль (пылинки на расстояниях более 100 метров друг от друга; масса пылинок – около 10^{-13} г, их размеры 10^{-5} – 10^{-4} см); 7) межзвездное магнитное поле; 8) космические лучи. Межзвездная среда находится в непрерывном движении, взаимодействуя со звездами Галактики.

Астрономы установили, что количество звезд (K) с данной массой (M) в единице объема Галактики определяется по эмпирической формуле: $K \approx \text{const} \cdot M^{-2,35}$. Распределение звезд в ближайшей к нам галактике (Большом Магеллановом Облаке) подчиняется тем же закономерностям: количество звезд-сверхгигантов K с данной массой M (на интервале от 6 до 23 масс Солнца) в единице объема галактики определяется по формуле: $K \approx 475000 \cdot M^{-3,95}$. Скорость звездообразования в Галактике оценивается в 4 Солнечных массы в год. Вновь образовавшиеся звезды распределены по массам по закону [35]: количество звезд в интервале масс $[M; dM]$ равно

$K = \text{const} \cdot M^{-3,5} \cdot dM$. Таким образом, распределение звезд по их массам явно подчиняется тильда-распределению (см. п. 1.37, формула (168)).

В центре Галактики расположен звездный сфероид массой около 10^{10} Солнечных масс, а также вращающийся со скоростью 200 км/с газовый диск, состоящий из молекулярного и атомарного водорода. Непосредственно в центре расположен радиоисточник, размер которого – менее 10^{13} м, мощность $3 \cdot 10^{26}$ Вт [35].

Ближайшие галактики (теперь это слово стало нарицательным) можно разглядеть ночью невооруженным глазом в виде трех слабых пятнышек на небе (открыты в 1944 г.). Эти галактики назвали Магеллановыми Облаками (Большим и Малым) и туманностью Андромеды. Магеллановы Облака удалены от нашей Галактики на расстоянии около 150 тыс. световых лет. В *Местной группе* (38 галактик, объединенных гравитацией) самой большой по массе является Туманность Андромеды ($3,6 \cdot 10^5 \cdot 10^6$ масс Солнца), затем идет наша Галактика, уступающая ей в 0,7 раза, а в целом имеет место тильда-распределение масс: $S = 6,73 \cdot 10^{11}$ масс Солнца (масса Местной группы); $K = 38$ (галактик); $A = 13,49$; $p = 0,566$. Наша Галактика и Туманность Андромеды сближаются и через несколько миллиардов лет они могут «столкнуться», пройдя друг через друга (незаметно для обитателей планет).

Галактики – это гигантские острова звезд во Вселенной (вне галактик звезд не существует). В типичной галактике около 10^{11} звезд (в ГТНЧ это $\sim T_{\text{max}}$, см. п. 1.30, формула (133)). Диаметр типичной галактики около 10^5 световых лет. К настоящему времени обнаружено великое множество галактик и оказалось, что мир галактик так же разнообразен, как и мир звезд в нашей Галактике. Самый большой каталог астрономов содержит более 30 тыс. галактик ярче 15-й видимой звездной величины. А сильнейшие телескопы сфотографировали уже много миллионов галактик до 23-й видимой звездной величины, которые отстоят от нас на расстоянии 4-х млрд. световых лет, то есть находятся у границы *Метагалактики* – части Вселенной, наблюдаемой человечеством в настоящее время. Количество галактик в Метагалактике $\sim 10^{11}$, что примерно равно количеству звезд в типичной галактике. Таким образом, общее количество звезд во Вселенной $\sim 10^{22}$. Астрономические исследования показывают, что в метагалактическом пространстве (в кубе со стороной 1483 световых года) галактики по численности распределяются обратно их светимости (а значит и их массе). Поэтому следует ожидать тильда-распределение масс галактик во Вселенной.

Большинство галактик состоит из двух основных звездных компонентов: массивного диска и сфероидального компонента. По внешнему виду галактики разделяют на следующие типы: *эллиптические галактики*, которые состоят практически только из сфероидального компонента (почти 25% всех

галактик); *спиральные галактики*, у которых преобладает дисковая составляющая (к ним относятся около 25% всех галактик, в том числе и наша); *галактики линзовидного типа* (около 20% всех галактик); *неправильные галактики*. Среди галактик, как и среди звезд, можно встретить галактики-карлики, галактики средней светимости, галактики-гиганты и сверхгиганты. Мы, земляне, живем в сверхгигантской галактике, такие выдающиеся по светимости, размерам и числу звезд системы попадают не более одной на тысячу галактик.

Среди галактик выделяют, так называемые, *активные галактики*, которые отличаются быстрой переменностью излучения (месяцы и дни), peculiarным внешним видом (свидетельствующим о взрыве, наличии выбросов типа струй) и т. д. К активным галактикам относят: *сейфертовские галактики* (как правило, это спиральные галактики с маленькими и аномально яркими ядрами), *квазары* (квазизвездные объекты, т. е. объекты похожие на звезды – самые мощные объекты во Вселенной), *лацертиды* (источники, подобные квазарам), *радиогалактики* (как правило, они эллиптические). Считается, что в центре неправильных галактик находятся массивные черные дыры массой до миллиарда масс Солнца. Эти черные дыры могут быть спокойными, как в нашей Галактике, или очень активными в виде квазаров, которых уже известно более 7200 по всей Вселенной.

Скопления галактик. Вещество во Вселенной имеет тенденцию сгущаться: элементарные частицы образуют атомы, атомы объединяются в молекулы; молекулы – в разнообразные объекты, включая небесные тела, которые, в свою очередь, группируются самыми разными способами, образуя всевозможные структуры вплоть до галактик. Галактики также объединяются друг с другом. Простейшие группировки состоят из двух-трех галактик. Различают также бедные скопления (Местная группа) и богатые скопления (сотни, тысячи и даже десятки тысяч галактик). Типичные массы скоплений 10^{12} – 10^{15} Солнечных масс. Скопления заполнены горячим межгалактическим газом. В еще больших масштабах наблюдаются *сверхскопления* с характерным размером $\sim 10^{24}$ м и массой $\sim 10^{16}$ масс Солнца. Типичное сверхскопление содержит два-три богатых скопления. Ученые насчитывают уже более 50 сверхскоплений. Все скопления галактик «погружены» не в пустоту, а в «океан» *нейтрино* и микроволновое фоновое излучение (*реликтовое излучение*), температура которого всего $2,7^\circ\text{K}$ (почему именно столько? – в этом одна из загадок космологии). Еще между скоплениями галактик имеется некоторое количество разреженного поглощающего или прозрачного для излучения вещества.

Реликтовое излучение имеет спектр излучения *абсолютно черного тела* при температуре 2,7 К, что свидетельствует о термодинамическом равновесии горячей плазмы и излучения в молодой Вселенной. Пик интенсивности этого излучения приходится на частоту, при которой совершается $\sim 10^{11}$ колебаний в секунду. Это излучение сохранилось до наших дней как реликт от эпохи рекомбинации и образования нейтральных атомов водорода и гелия, оно несет на себе отпечаток крупномасштабных процессов в ранней Вселенной. Кстати, считалось, что реликтовое излучение обладает изотропностью, однако в 1999 г. русские ученые открыли анизотропию этого излучения. Реликтовое излучение фактически определяет плотность энергии электромагнитного излучения во Вселенной, а также плотность числа фотонов (около 500 в 1 см³). На каждый барион (так называют тяжелые элементарные частицы, в т. ч. протоны и нейтроны) во Вселенной приходится $\sim 10^9$ фотонов реликтового излучения и это один из основных параметров нашей Вселенной, который остается неизменным, т. к. фотоны никуда не исчезают в прозрачном пространстве между галактиками Вселенной.

Если в ГТНЧ рассмотреть зависимость количества лидеров миров (K) от типа этих лидеров (T), то эта зависимость $K=f(T)$ (см. рис. 23) качественно напоминает спектр фонового (реликтового) излучения во Вселенной (где K – «интенсивность излучения», а T – «частота космического микроволнового фонового излучения»). В конце Большого отрезка большая часть (72%) всех лидеров из редких миров имеют количество делителей равное $10^6 \div 10^9$. А самый «пик» по количеству приходится на типы $T=10^7 \div 10^8$ (28% всех лидеров редких миров). Средний тип лидеров составляет: в редких мирах $TS \approx 4,5 \cdot 10^8$, а в частых мирах $TS \approx 3,6 \cdot 10^9$.

Галактики и их скопления избежали гравитационного коллапса (который постиг «малые» объекты – звезды и планеты), потому что галактики вращаются и движутся относительно друг друга. Гравитационному коллапсу противостоят мощные центробежные силы. Кроме того, падению скоплений галактик друг на друга мешает непрерывное *расширение Вселенной* (см. п. 4.2). В целом вырисовывается такая картина: Вселенная состоит из почти пустых элементарных ячеек, в стенках между которыми заключена большая часть скоплений галактик, а сверхскопления – это чаще всего области пересечения стенок. Недавно обнаружена также *цепочка сверхскоплений* длиной около $3 \cdot 10^{25}$ м. Но на больших масштабах Вселенная пока выглядит однородной, и, скорее всего, далее иерархия, в которой каждое последующее образование отделено от ему подобных все большими промежутками пустого пространства, обрывается. (См. п. 1.5 – спираль Улама.)

Самое характерное свойство Вселенной – *пустота*: почти вся она представляет собой пустое межгалактическое пространство (пустое, если пренебречь квантовыми явлениями в вакууме, некоторым количеством излучения

и отдельными атомами). *Средняя плотность вещества* (ρ), излучающего свет и входящего в *видимые* галактики принимается равной $\sim 3 \cdot 10^{-31}$ г/см³ (ее можно условно представить как один атом водорода в кубе пространства со стороной 177 см). Большая часть вещества, излучающего свет, сосредоточена в звездах, которые объединены в галактики – острова из биллионов и триллионов звезд во Вселенной. Вещество, не излучающее свет (а значит и не видимое для нас) может находиться, например, в черных дырах – космических объектах, возникающих в результате сжатия тела гравитационными силами. Возможно, в черных дырах сосредоточено так много вещества Вселенной, что ее реальная средняя плотность в сотню раз больше принятой. Однако до сих пор ни одной черной дыры не обнаружено, хотя и имеется целый ряд объектов, претендующих на эту роль.

Важнейшей характеристикой Вселенной является ее *однородность*: во-первых, *одинаковы* структурные детали далеких звезд и галактик, физические законы, которым они подчиняются; во-вторых, однородно распределение вещества во Вселенной. Вещество разбросано в виде сгустков: оно собрано в звезды, которые группируются в скопления, из скоплений звезд состоят галактики, которые образуют скопления, а те, в свою очередь, образуют сверхскопления галактик. А вот сверхскопления галактик разбросаны по Вселенной уже более или менее беспорядочно. Скопления галактик – это “атомы” космологии, поскольку процессы, происходящие в отдельных галактиках для космологии часто не существенны. Описанное распределение вещества как однородно (одинаково во всех областях), так и изотропно (одинаково во всех направлениях) – в этом состоит так называемый космологический постулат.

4.2. РАСШИРЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В 1929 г. американский астроном Эдвин Хаббл (1889–1953) установил, что все галактики разбегаются от нас, причем в “организованном порядке”: чем дальше галактика, тем быстрее она удаляется. К 1983 г. были определены скорости удаления 1500 галактик. У наиболее далеких галактик эти скорости достигают 100 000 км/с. Относительная скорость изменения расстояний называется *параметром Хаббла*:

$$H = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt}, \quad (235)$$

где R – масштабный фактор, например, расстояние между теми или иными двумя далекими объектами (скажем, галактиками); dR/dt – скорость изменения масштабного фактора во времени. В настоящее время по оценке ученых $H=50 \div 100$ км/(с·Мпк), где 1нарсек (пк) $\approx 3 \cdot 10^{16}$ м – единица расстояний в астрономии.

Например, при $H=50$ км/(с·Мпк) два скопления галактик, между которыми $R=10$ Мпс (около 30 млн. световых лет) удаляются друг от друга со скоростью $dR/dt=H \cdot R \approx 500$ км/с.

На рис. 45 показано изменение масштабного фактора R от времени t , т. е. поведение некой функции $R=f(t)$. График наглядно показывает, что в начальный момент (в сингулярности при $t \rightarrow 0$) имело место *взрывообразное начало* Вселенной, поскольку при $R \rightarrow 0$ имеем $H \rightarrow \infty$. После прохождения сингулярности скорость изменения масштабного фактора (dR/dt), которая равна тангенсу угла наклона касательной к функции $R=f(t)$ в момент времени t , начинает уменьшаться. Размерность величины H – обратна размерности времени (c^{-1}), следовательно, величина, обратная H , дает фундаментальную единицу времени (*время Хаббла*), определяющую изменение космологических параметров. Если к графику $R=f(t)$ мы проведем касательную в точке “нашего” времени t^* (на рис. 45 – это крайняя точка справа на оси времени), то эта касательная пересечет ось времени в точке $x=-t^*/2$, а время Хаббла будет равно $H^{-1}=t^*-x=(3/2) \cdot t^*$. Таким образом, время Хаббла (H^{-1}) приблизительно (с точностью до множителя 3/2) равно возрасту Вселенной t^* . Ранее мы договорились считать возраст Вселенной $t^* \approx 17$ млрд. лет или 10^{61} эви (см. «Введение»), поэтому время Хаббла принимаем равным $t_H \approx 25,5$ млрд. лет. Следует помнить, что параметр Хаббла (H) не является постоянной величиной, хотя его иногда ещё называют *постоянной Хаббла*.

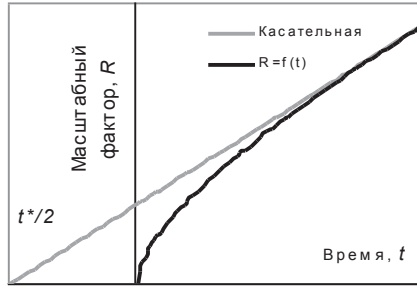


Рис. 45. Расширение Вселенной

В ГТНЧ можно получить график, аналогичный приведенному на рис. 45, если принять, что $t=\ln N$, а $R=\ln(T_{max})$, где N – правая граница отрезка $[1;N]$, а T_{max} – максимально возможное количество делителей у числа N (его максимально возможный тип). Аналогия проявляется в том, что касательная, проведенная к такому графику $R=f(t)$ в точке $t^* \approx \ln(10^{61})$ пересекает горизонтальную ось в точке $x \approx \ln(10^{-30})$, для которой выполняется условие $x \approx -t^*/2$ (в этом

и состоит аналогия). Поскольку на отрезке $[1; 10^{32}]$ с $ОП = \pm 10\%$ работает формула $T_{max} \approx \exp[0,9443(\ln N)^{0,6734}]$, то можно получить некий аналог “параметра Хаббла” для каждого натурального числа по формулам

$$V_n \equiv dR/dt \approx (R_{n+1} - R_n)/(t_{n+1} - t_n); H_n \equiv V_n/R_n; \text{ откуда } H_n \approx 0,6692/\ln N. \quad (236)$$

Таким образом, в ГТНЧ «параметр Хаббла» при $N=1$ устремляется к бесконечности, а при $N=2$ (в начале сингулярности) имеем $H_n \approx 0,6692/\ln 2 \approx 0,9655$, что примерно в 200 раз больше, чем при $N=10^{61}$ (т. е. в «настоящее время»).

Из открытия Эдвина Хаббла следовал однозначный вывод – Вселенная находится в нестационарном состоянии, в состоянии *расширения*, т. е. она постоянно изменяется, у нее есть биография, возможно даже с датами рождения и смерти, и термодинамического равновесия в космосе не существует. В настоящее время принимается, что глобальное движение космоса подчиняется тем же самым законам, которые управляют поведением его отдельных частей, причем в качестве силы, регулирующей космическое движение, признается гравитационная сила.

Гравитационное взаимодействие описывает *общая теория относительности* Альберта Эйнштейна (1879–1955). Вселенная (ее модель) у Эйнштейна наделена искривленным пространством, она имеет конечные размеры, но не имеет границ. Это можно пояснить на следующей аналогии: если бы мы были двумерными, плоскими существами (когда третье измерение недоступно в ощущениях), то нашу вселенную можно было бы представить как оболочку резинового шара с точками-сгустками в оболочке шара (скопления галактик в нашем пространстве), причем этот шар непрерывно надувается (расширяется), отчего расстояния между галактиками непрерывно увеличиваются. Подобное сферическое пространство *конечно*, но для двумерных существ нигде не имеет границ или краев. В модели Эйнштейна наше реальное трехмерное пространство также обладает топологией сферы, только, разумеется, не в двух, а в трех измерениях (если, например, послать световой сигнал в любом направлении, то он, обойдя всю Вселенную, вернется к нам с противоположной стороны). Что же находится “снаружи” конечной Вселенной? Этот вопрос столь же бессмысленен для трехмерных существ (то есть нас), как и вопрос, что находится “вне” поверхности сферы, для плоских существ, вынужденных жить (ползать) на сферической поверхности. Ни центра, ни края у нашей Вселенной попросту не существует. *Расширение Вселенной – это расширение самого пространства*, а не перемещение галактик “наружу”, в некую прежде пустую область.

Первым, кто применил общую теорию относительности для построения ряда математических моделей расширяющихся вселенных, был русский ученый Александр Фридман (1888–1925 г.). Его модели продолжают оставаться

главной теоретической базой при анализе почти всех современных космологических проблем. Исходя из космологического постулата о строго однородном распределении материи, Фридман решил уравнения общей теории относительности Эйнштейна и пришел к единственно возможному изменению пространства – это изменение его масштабов R (одинаковое повсюду расширение или сжатие). Важной чертой моделей Фридмана является постоянное уменьшение скорости расширения пространства *в настоящее время* (от рождения Вселенной прошло, вероятно, не более 20 млрд. лет). В зависимости от средней плотности всех видов материи во Вселенной (ρ) расширение пространства в будущем может происходить бесконечно либо сменится сжатием. Различают 3 модели Вселенной по Фридману:

Модель 1. Если $\rho < \rho^*$ (средняя плотность меньше так называемой критической плотности $\rho^* = 3H^2/8\pi G$), то в будущем галактики “вырываются” из плена взаимного притяжения и по существу становятся свободными. Геометрия Вселенной аналогична геометрии на поверхности Лобачевского (изогнутой наружу, подобно седловине). Это открытая модель Вселенной.

Модель 2. Если $\rho = \rho^*$, то расширение также никогда не прекратится, хотя само расширение будет происходить все медленнее и медленнее. Геометрия Вселенной евклидова (пространство – плоское в обычном понимании).

Модель 3. Если $\rho > \rho^*$, то расширение в будущем сменится сжатием: галактики станут приближаться друг к другу и все заканчивается коллапсом (в условиях, аналогичных тем, что были в начале расширения). Геометрия пространства – сферическая. Это закрытая (замкнутая) модель Вселенной, пространство искривлено внутрь и имеет конечный объем аналогично пространству в модели Эйнштейна (см. выше).

Определить плотность скрытого (невидимого) вещества во Вселенной очень трудно, поэтому неопределенность суммарной средней плотности ρ весьма велика (плотность может быть на два порядка больше ныне принятой усредненной плотности звездного вещества в видимых галактиках). Поэтому пока нельзя сделать окончательного выбора между тремя моделями Вселенной. Эта неопределенность никак не сказывается на общем характере прошлого и современного расширения, но влияет на возраст Вселенной (длительность расширения) – величину не достаточно определенную по данным наблюдений. Если бы расширение происходило с постоянной скоростью, то время, истекшее с момента изначального взрыва до настоящего времени, составляло бы $T = 1/H \approx 13$ млрд. лет (при $H = 75$ км/с/Мпк). Но расширение в моделях Фридмана идет с замедлением, поэтому время T , истекшее с момента начала расширения (возраст Вселенной), определяется более сложными зависимостями (см. п. 4.11).

Данные современных наблюдений все больше говорят в пользу малой плотности, то есть расширение Вселенной будет продолжаться вечно. При этом полное термодинамическое равновесие не может быть достигнуто никогда. Когда-то все запасы ядерного горючего должны истощиться, и тогда белые горячие звезды потухнут. Одна за другой они будут либо взрываться, как сверхновые, либо медленно остывать и меркнуть. Многие звезды, вероятно, сколлапсируют в черные дыры. Вещество потухающих галактик будет постепенно разрежаться, и они станут невидимыми. Это вещество, если оно не поглотится черными дырами, будет медленно остывать вплоть до фоновой температуры космоса (которая также будет непрерывно понижаться). Таким образом, все будет кончено.

4.3. СИНГУЛЯРНОСТЬ – ГРАНИЦА НАШИХ ЗНАНИЙ

Множитель R (см. формулу (235)) в моделях Фридмана определяет масштаб расстояний между любыми двумя галактиками и является функцией времени. В начальный момент времени масштабный фактор был, очевидно, равен нулю ($R=0$), а значит все галактики, весь наблюдаемый сейчас объем пространства в прошлом был буквально сжат в ничто, в одну-единственную математическую точку (предел, к которому стремится маленький шар, когда его радиус обращается в нуль) с бесконечной плотностью вещества! В общей теории относительности эта точка называется сингулярностью. **Сингулярность** – это место, где заканчивается действие известных нам физических законов.

Поразительно, что в начале натурального ряда также существует *сингулярность* (см. п. 1.4, 17-й закон Пирамиды), где перестают работать абсолютно все формулы теории чисел! Граница сингулярности в ГТНЧ (см. п. 1.9) нами условно принята равной 10^{12} эви (10^{-31} с или 10^{-22} м).

Сингулярность соответствует моменту, когда пространство-время и вся материя впервые возникают. Вопрос о том, что было до большого взрыва, с точки зрения современной науки – лишен всякого смысла. До начала расширения не могло быть ничего, что имело бы физическое отношение к наблюдаемой Вселенной. Если модели Фридмана понимать буквально, то не только пространство-время, но и вся материя должна начать свое существование в момент, соответствующий сингулярности. Это единственный случай, когда физики допускают рождение чистой материи. Сингулярность есть понятие, наиболее близкое к “акту творения”. В принципе, мы можем, глядя во Вселенную, видеть (т. к. свету нужно время, чтобы дойти до нас) прошлое, включая момент “творения”, но практически невозможно заглянуть в прошлое глубже 10^{12} секунды (10^{55} эви) в биографии Вселенной, так как до

этого момента (первые 100 тыс. лет) космологическое вещество было непрозрачно для излучения.

Общие законы физики надежно проверены при ядерных плотностях ($\sim 10^{14}$ г/см³), эту плотность имеет Вселенная, спустя 0,0001 секунды (10^{39} эви) от начала расширения. Следовательно, начиная с этого мгновения, физические свойства эволюционирующей Вселенной вполне поддаются изучению (в ряде случаев эту границу отодвигают непосредственно к сингулярности). Сингулярность не составляет неотъемлемую часть общей теории относительности: при бесконечной плотности вещества уравнения Эйнштейна уже не могут давать разумное описание реальности, теряют силу. На достаточно малых расстояниях (после начала расширения все содержимое Вселенной было сжато в объем, равный объему атомного ядра) в действие вступает *квантовая теория гравитационного поля*, которая пока еще весьма далека от совершенства.

Одна из важнейших загадок наблюдаемого состояния Вселенной – это причины ее удивительной однородности. Дело в том, что каждая точка в расширяющейся Вселенной окружена “горизонтом”. Сейчас такой горизонт находится от нас на расстоянии максимум 20 млрд. световых лет, т. е. скорость убегания галактик у горизонта в некотором смысле достигает скорости света. Что за этим горизонтом – нам пока не доступно, но пройдет время, и горизонт неизбежно расширится. Следовательно, на ранних стадиях расширения Вселенной, наоборот, горизонт был очень узок. Так, согласно моделям Фридмана, через 10^{-18} с (10^{25} эви) после начала расширения Вселенной ее малые области (порядка объема одного атома) были причинно разобщены друг от друга, и ни одна область не могла “знать”, что делается в другой. Но тогда каким же образом вся наблюдаемая теперь Вселенная может расширяться с одной и той же скоростью?

В некоторых моделях предполагается, что этого и не происходило (согласованности в начале не было). Возможно, Вселенная начала расширяться хаотически и беспорядочно, а затем под действием некоторого механизма диссипации (затухания) возникла определенная упорядоченность, однородность во Вселенной, наблюдаемые ныне. Такое предположение о полном первичном хаосе (при симметрии материи и антиматерии) в противовес симметрии сглаженного начального состояния Вселенной с несбалансированной материей привлекательно еще и в том отношении, что здесь не требуется “творить” Вселенную в каком-либо строго *определенном* состоянии. Но пока не удалось найти механизм разделения материи и антиматерии, который не позволял бы большей части их снова аннигилировать (такое разделение было бы возможно, например, если бы одни галактики состояли из материи,

а другие – из антиматерии, что совершенно безопасно, поскольку галактики сталкиваются редко).

Хотя модели Фридмана предсказывают постепенную эволюцию Вселенной (очевидно, от простого к сложному), тем не менее, существует ряд других космологических моделей, согласно которым поведение Вселенной вблизи сингулярности могло быть исключительно сложным. Например, согласно одной из них, предложенной голландским астрономом Виллем де Ситтер, Вселенная неограниченно расширяется, причем *масштабный множитель R всегда возрастает экспоненциально* (см. п. 2.1), т. е. пространство расширяется с все возрастающим ускорением (у Фридмана в настоящий период времени расширение замедляется), причем такая Вселенная вообще не содержит материи – это просто-напросто расширяющееся пустое пространство!

Согласно модели А. Линде радиус Вселенной быстро растет по экспоненциальному закону – «инфляционная Вселенная». Причем, все вещество во Вселенной ($\sim 10^{45}$ тонн) возникло из крохи не более 10^{-5} грамма!

Согласно другой модели (модели Эддингтона – Леметра) эволюция Вселенной начинается с расширения, в общем, так же, как в стандартных фридмановских моделях, и замедление скорости расширения обусловлено гравитационным притяжением вещества. Далее, так называемое космическое отталкивание пересиливает гравитационное притяжение и *происходит неограниченное экспоненциальное расширение*. Но в течение периода, когда оба эффекта примерно уравниваются, вселенная остается почти статической, причем этот этап может быть сколь угодно продолжительным.

4.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ (МИКРОМИР)

Предельной формой неживой материи, которую еще удается фиксировать физикам-экспериментаторам, являются *элементарные частицы (субъядерные частицы)*. Так называется большая группа мельчайших частиц материи, подчиненных условию, что они не являются атомами или атомными ядрами (кроме *протона*). Наиболее важное квантовое свойство всех элементарных частиц – способность рождаться и уничтожаться (испускаться и поглощаться) при взаимодействии с другими частицами. Все элементарные частицы являются объектами исключительно малых масс и размеров. Массы элементарных частиц лежат в интервале от нуля (у *фотона*) до 175000 масс *электрона* (см. табл. 26); у большинства частиц масса порядка $\sim 10^{-24}$ г, а размеры $\sim 10^{-13}$ см и меньше – все это обуславливает квантовую специфику их поведения. Надо заметить, что эталона массы природа явно не сотворила.

Все электроны абсолютно одинаковы, но почему это так – пока остается загадкой природы. Масса протона – это средняя масса всех элементарных частиц, а вот масса электрона – это большая флуктуация.

Всего (вместе с *античастицами*) известно 55 стабильных и квазистабильных частиц с энергиями (массами) покоя от 0,511 МэВ у электрона до 5425 МэВ у Λ -*барионов* ($1\text{МэВ}\approx 1,78\cdot 10^{-30}$ кг). Также существует более 200 короткоживущих частиц (*резонансов*), время жизни которых в 2–2000 раз больше *ядерного времени* (10^{-24} с). Таким образом, открыто более 350 видов частиц (в основном нестабильных), причем, благодаря проводимым экспериментам, их число продолжает расти и, скорее всего, *неограниченно велико*. Что касается общего количества элементарных частиц, то, например, А. Эддингтон (1882-1944) утверждал, что во Вселенной ровно $136\cdot 2^{256}$ протонов и столько же электронов, т. е. в сумме около $3,14\cdot 10^{79}$ данных частиц.

Фантазируя в своем ключе, автору трудно удержаться от предположения, что количество всех возможных миров на БО (около 807430 миров, см. п. 1.36) и количество всех видов элементарных частиц каким-то немислимым образом связаны между собой. Количество всех камней в Стволе Пирамиды на БО около 10^{91} (см. табл. 3), почему бы и Вселенной не иметь столько элементарных «кирпичиков» (которые гораздо меньше элементарных частиц).

Самыми многочисленными частицами во Вселенной являются *нейтрино*. Теория показывает, что после начала расширения на каждый протон и электрон образовалось $\sim 10^9$ нейтрино и теперь Вселенную заполняет “океан” нейтрино. Однако нейтрино чрезвычайно слабо взаимодействует с обычным веществом. Земля, например, почти полностью прозрачна для них. Колоссальное количество нейтрино делает Вселенную в целом очень чувствительной к их свойствам. Вероятно, масса покоя нейтрино может составлять $5\cdot 10^{-35}$ кг (около $5\cdot 10^{-5}$ массы электрона) и существует три типа этих частиц. Общая масса всех нейтрино может превосходить массу всех звезд Вселенной (!), а температура их фона составляет 2°К .

Каждая элементарная частица характеризуется набором свойств. Количество этих свойств пока не установлено. Одним из важных свойств является наличие электрического заряда, элементарный заряд – это заряд *электрона* (e). *Электрический заряд* любой элементарной частицы (в свободном виде) равен либо $\pm e$, либо 0, либо $+2e$. Закон сохранения электрического заряда – это один из фундаментальных строгих законов природы, состоящий в том, что алгебраическая сумма зарядов любой замкнутой (электрически изолированной) системы остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри этой системы. Доказано, что электрон не теряет своего заряда, по крайней мере, за $5\cdot 10^{21}$ лет. В настоящее время у элементарных частиц

известно 7 «зарядов», сумма которых должна оставаться неизменной в ядерном процессе (аналогично закону сохранения электрического заряда): барионный заряд; лептонный электронный заряд; мюонный лептонный заряд; тау-лептонный заряд; странность; очарование; прелесть. Многие ученые верят, что 5-ое измерение существует, но оно «свернулось в кольцо» размером $\sim 10^{-33}$ см (после первых 10^{-43} с), и теперь пятое измерение, якобы, проявляется в заряде. Возможно, мы живем во Вселенной с числом измерений не менее 11, но 8 из них сжались до точечных образований, обуславливающих свойства элементарных частиц. Нидерландский физик-теоретик П. Эренфест (1880–1933) показал, что в пространствах, где координат больше 3, устойчивые системы существовать не могут (сверхнестабильность).

Все элементарные частицы, за исключением фотона, разбиваются на два основных класса: **адроны** (более 350 частиц, но есть теоретические модели, где счет идет на тысячи) и **лептоны** (счет идет на десятки частиц). Адроны имеют сложную внутреннюю структуру и живут обычно 10^{-23} с (иногда 10^{-8} с). Вместе с тем, например, пион проходит расстояние в 10^{15} раз больше своих размеров, что недоступно современному автомобилю (10^7). Бессмертные (пока?) частицы: фотон; электрон и нейтрино (лептоны); протон (адрон). Электрону не на что распасться (у него минимально возможный заряд, если не считать фантомов-кварков, которые пока не обнаружили).

Протон состоит из 3-х кварков, поэтому (т. к. мала вероятность сближения кварков на расстояния меньше, чем размер протона) время жизни протона может составлять $10^{38\pm 2}$ секунд, т. е. тогда (ещё очень не скоро) развалится большинство протонов. Проверить гипотезу о «смертности» протона можно с помощью очень трудного и дорогого эксперимента: надо наблюдать в течение года не менее 10^{31} протонов (минимум 18 тонн, а для верности все 10 000 тонн) в специальных условиях (в туннеле глубоко под большой горой). Это эксперимент позволит заглянуть в мир расстояний 10^{-29} см (в мир векторных X- и Y-бозонов с чудовищными массами $\sim 10^{15}$ масс протона), а пока ученые заглянули в мир с размерами до 10^{-16} см.

Классификация адронов на основе **кварковой модели** достигла больших успехов. Согласно ей, любой адрон состоит из 2÷3-х кварков с дробным зарядом ($\pm 1/3$ и $\pm 2/3$ заряда электрона). Существует, вероятно, 6 типов кварков и 6 типов антикварков, взаимодействие между которыми осуществляется **глюонами**. Кварки и глюоны имеют специфический заряд, который называется цветом. Каждый тип кварка имеет по 3 цветовых разновидности, глюоны – 8. Наличие цветового заряда у глюонов резко отличает их от квантов электромагнитного взаимодействия – фотонов, которые не имеют заряда. В отличие от фотона глюон может испускать новые глюоны, что приводит к

росту эффективного заряда кварка с увеличением расстояния и, следовательно, к возрастанию энергии взаимодействия между кварками. В результате кварки не могут освободиться друг от друга и встречаются в природе только в связанном виде – в форме «белых», «бесцветных» адронов. Наоборот, на очень малых расстояниях кварки взаимодействуют относительно слабо, и их можно рассматривать как практически свободные частицы. Это обстоятельство позволяет получить ряд количественных соотношений, подтвержденных экспериментами, т. е. существование 6 кварков и глюонов доказано, хотя в свободном виде кварки в природе не обнаружены. Если свободные кварки и существуют, то концентрация их в веществе ничтожно мала: не превышает 10^{-20} (доля от общего числа протонов и нейтронов), или даже 10^{-30} . Возможно, кварки как бы обретаются в особом одномерном или двухмерном мире. В свободном состоянии их никак не обнаружить, им словно «не вырваться» в наш трехмерный мир. Надо заметить, что если кварки и лептоны признать кирпичиками мироздания, то их открыто уже подозрительно много – около 90! Не исключено, что существуют ещё более элементарные формы вещества – *пракварки (прекварки)* и *пралептоны* (кварки состоят из более мелких единиц?). Более того, возможность всё более мелких строительных блоков нескончаема и, таким образом, истинно элементарных частиц не существует вообще.

Шведы С. Фредриксон и М. Яндель открыли новую форму вещества («демоническое» вещество). Здесь в дейтроне 6 кварков соединены уже не в 2 группы по 3 кварка (как обычно), а в 3 группы по 2 кварка.

Попытки классификации всех элементарных частиц на основании теории унитарной симметрии привели к понятию *супермультиплета* – семейства (группы) из 8 частиц с близкими свойствами. Теория групп (*группы Ли*) допускает существование разных наборов частиц: из одной, из 3, из 6, из 8, из 10 и т. д., но физики наблюдают только наборы 1, 8, 10. Поэтому придумали только 3 кварка, различными комбинациями, которых и является большинство частиц. Все возможные комбинации из 3 кварков дают супермультиплет (10).

Несколько слов можно сказать о гипотетических *тахсионах*. Согласно специальной теории относительности Эйнштейна никакое физическое воздействие не может распространяться быстрее света. В частности, отсюда следует невозможность существования абсолютно твердого тела (оно всегда сомнется при околосветовых скоростях), из-за этого, например, целые звезды могут обратиться в ничто. Но не верен вывод, что движение со скоростью света (*c*) невозможно. Строго говоря, нельзя *только ускорить* материальное тело так, чтобы оно преодолело “световой барьер”. Но возможно существование тел, которые *всегда* движутся со сверхсветовыми скоростями

и которые невозможно замедлить до скорости, меньшей c . Такие тела, точнее микроскопические частицы (их назвали *тахioniами*), физики-экспериментаторы активно разыскивают, но пока безуспешно. На основании теории относительности можно показать, что тахионы способны путешествовать вспять во времени, и применение их в качестве носителей сигналов позволило бы посылать сообщения в прошлое, то есть менять местами причину и следствие. Последнее выглядит совершенно невероятным, поэтому приходится предполагать, что тахионы взаимодействуют с веществом, но неконтролируемым, недоступным нам способом.

Все элементарные частицы непрерывно взаимодействуют посредством различных сил природы, которые мы рассмотрим в следующей главе. Вопрос о том, трехчастична или четырехчастична природа элементарных взаимодействий (тройка или четверка более близка микромиру)? – пока остается открытым. Считается, что микромир управляется вероятностными законами, им правит Его Величество Случай. Но это не всем по душе, так ещё А. Эйнштейн говорил, что «... вероятности необходимы только для того, чтобы прикрыть наше невежество... законы природы причинны. Бог не играет в кости».

Возможно, некий аналог истинной ситуации дает нам структура натуральных чисел: там также можно говорить о вероятностях того или иного события, однако наличие Пирамиды «обращает» все законы ГТНЧ в строго причинные (см. п.1.4, 5-й закон Пирамиды).

4.5. СИЛЫ В ПРИРОДЕ И ИХ ОБЪЕДИНЕНИЕ

Всё многообразие явлений природы обусловлено всего четырьмя типами фундаментальных взаимодействий, которые характеризуются радиусом действия и силой. О силе взаимодействия можно судить по скорости процессов, которые оно вызывает. Обычно сравнивают между собой скорости процессов при энергиях ~ 1 ГэВ, которые характерны для физики элементарных частиц, время протекания процессов при этом указано в табл. 22.

Таблица 22. Сравнение между собой четырех сил природы (при энергиях ~ 1 Гэв)

Тип фундаментального взаимодействия	Время, с	Радиус действия, см
Сильное (ядерное) взаимодействие	$\sim 10^{-24}$	$\sim 10^{-13}$
Электромагнитное взаимодействие	$\sim 10^{-21}$	неограничен
Слабое взаимодействие	$\sim 10^{-10}$	$\sim 2 \cdot 10^{-16}$
Гравитационное (гравитация, тяготение)		неограничен

Если сильное взаимодействие (скажем, притяжение двух протонов-соседей) условно принять за 1, то тогда электромагнитные силы отталкивания

двух протонов будут равны 10^{-2} , слабые взаимодействия – 10^{-5} , а силы тяготения – 10^{-39} (гравитационное взаимодействие чрезвычайно слабое!).

Рассмотрим отдельно каждое из фундаментальных взаимодействий.

Сильная (ядерная) сила действует между элементарными частицами, принадлежащими только к классу адронов, и не зависит от электрических зарядов взаимодействующих частиц. Сильное ядерное взаимодействие значительно более сложно по своей природе, чем другие типы взаимодействия. В обычном стабильном веществе при не слишком высокой температуре сильное взаимодействие не вызывает никаких процессов и его роль сводится к созданию прочной связи, “склейки” между нуклонами (протонами и нейтронами) в ядрах. Однако при столкновении ядер или нуклонов, обладающих достаточно высокими энергиями, сильное взаимодействие приводит к многочисленным ядерным реакциям. Особенно важную роль в природе играют реакции слияния (термоядерного синтеза), в результате которого 4 нуклона объединяются в ядро гелия. Эти реакции идут, например, на Солнце и других звездах, при взрыве водородной бомбы (см. п. 4.1).

Законченная теория адронов и сильного взаимодействия между ними пока отсутствует, однако существует теория (*квантовая хромодинамика* – не закончена и не общепризнанна), которая позволяет объяснить основные свойства адронов. Согласно этой теории адроны состоят из кварков, а силы между кварками обусловлены обменом глюонами (имеется 8 разных глюонов). Все адроны состоят из кварков 6 типов (“ароматов”): *u*, *d*, *s*, *c*, *t* и *b*. Оценки массы кварков в МэВ: 4, 7, 150, 1300, 4500, ..., т. е. их масса велика и сравнима с массой покоя протона (1000 МэВ), а ведь сам протон состоит из 3 кварков. Это объясняется тем, что кварки очень сильно связаны (протон невозможно расщепить на кварки) и поэтому большая часть массы компенсируется энергией связи (согласно формуле А. Эйнштейна $E=mc^2$).

Слабая сила действует между лептонами, примером которых служат электрон, мюон, нейтрино. Действие слабой силы не зависит от электрического заряда, причем она действует также между лептонами и адронами и только между адронами. Как видно из табл. 22 в мире элементарных частиц слабые взаимодействия протекают чрезвычайно медленно. Несмотря на малую величину и короткодействие, слабое взаимодействие играет очень важную роль в природе, в эволюции звезд (например, Солнце просто погаснет, если “выключить” слабое взаимодействие). Наиболее распространенный процесс, обусловленный слабым взаимодействием, – β -распад радиоактивных атомных ядер. Недавно доказано, что слабые связи и электромагнитные силы входят как части в слабые электрические связи.

Электрическая сила действует между электрически заряженными частицами и может иметь характер, как притяжения, так и отталкивания в зависимости от вида зарядов взаимодействующих частиц. С электрической силой неразрывно связана магнитная сила, возникающая при движении электрического заряда, поэтому обе силы объединены общим названием – *электромагнитная сила*. Электромагнитное поле (в квантовой физике – γ -квант или фотон) либо излучается или поглощается при взаимодействии, либо переносит взаимодействие между телами. Это поле (на основе законов *квантовой механики*) определяет возможность устойчивого состояния атомов и молекул, свойства различных агрегатных состояний вещества, химические превращения (с точки зрения физики – химии “не существует”), электрические, магнитные и оптические явления. К электромагнитному взаимодействию сводится большинство сил, наблюдаемых в макроскопических явлениях: силы упругости, трения, поверхностного натяжения в жидкостях и др.

Электромагнитные явления, в которых участвуют слабые, медленно меняющиеся поля, управляются законами классической электродинамики, описываемой уравнениями Максвелла. Для сильных или быстро меняющихся полей определяющую роль играют квантовые явления, так, например, взаимодействия между фотонами и заряженными лептонами описываются уравнениями квантовой электродинамики.

Константой электромагнитного взаимодействия, определяющей его “силу” в квантовых явлениях, служит элементарный электрический заряд e (заряд электрона). Дальнедействующий характер электромагнитного взаимодействия связан с равенством нулю массы покоя фотона.

Тяготение (гравитация) – это универсальное взаимодействие, оно действует между всеми без исключения видами материи и имеет характер притяжения. Не смотря на то, что сила гравитационного взаимодействия в 10^{34} меньше, чем у слабого взаимодействия, мы, например, ощущаем тяготение вполне весомо, поскольку нас притягивает к себе буквально каждый атом Земли, ведь радиус действия этой силы – неограничен.

Когда гравитационное взаимодействие относительно слабое и тела движутся медленно по сравнению со скоростью света, то справедлив закон всемирного тяготения Исаака Ньютона (1643–1727). В общем же случае тяготение описывается общей теорией относительности Эйнштейна, которая является обобщением закона тяготения Ньютона на основе специальной теории относительности. По Эйнштейну материя (источник гравитационного поля) создает искривление пространства-времени, а пространство-время, в свою очередь, влияет на движение материи, создающей искривление. Этим теория тяготения резко отличается от теорий трех других видов взаимодействия.

Тяготение (искривление пространства-времени), кроме того, определяется не только массой вещества, слагающего тело и распределением массы в пространстве, но и всеми видами энергии, присутствующими в системе, то есть от движения масс, от давления и натяжений, имеющих в телах, от электромагнитного поля и всех других физических полей. Изменения гравитационного поля распространяются с конечной скоростью, которая в вакууме равна скорости света.

Поскольку гравитационное поле есть проявление искривления пространства-времени, то в трехмерном пространстве крупномасштабная геометрия Вселенной могла бы оказаться неевклидовой (например, сумма углов треугольника не равна π , отношение длины окружности к радиусу не равно 2π и т. д.), а время в разных точках будет течь по-разному (чем сильнее поле тяготения, тем медленнее течет время по сравнению с течением времени для наблюдателя вне данного поля). Какова геометрия реального пространства в целом (евклидова или сферическая) – пока не установлено.

В поле тяготения все тела движутся по так называемым геодезическим линиям в пространстве-времени, причем эти линии – не прямые (ведь пространство-время искривлено). Наблюдатель воспринимает это движение как движение по искривленным траекториям в трехмерном пространстве-времени с переменной скоростью. В заданном поле тяготения все тела независимо от их массы и формы при одинаковых начальных условиях будут двигаться по одним и тем же геодезическим линиям. Так, в поле тяготения Земли чугунное ядро и пушинка, отпущенные *одновременно* с любой высоты, на землю упадут также *одновременно* (т. е. по одной геодезической линии) – наблюдать это нам мешает только сопротивление воздуха (атмосфера Земли), из-за которого пушинка просто начинает «летать».

Среди физиков давно уже признано, что общая теория относительности дает наилучшее известное описание пространства-времени и гравитации. В значительной степени это обусловлено удивительной красотой и изяществом теории в описании природы. К сожалению, этого нельзя сказать о ее приложениях: математический аппарат теории настолько сложен, что почти все задачи, кроме самых простейших, оказываются пока неразрешимыми.

Общая теория относительности Эйнштейна становится неприменима вблизи сингулярностей поля тяготения, то есть мест, где искривления пространства-времени очень велики, где формально, согласно теории, обрывается существование частиц и полей в обычной известной нам форме. Там гравитационное поле должно подчиняться квантовым законам подобно электромагнитному полю. Применение квантовой теории к гравитации показывает, что должны существовать гравитационные волны, которые можно рассматривать как поток квантов – *гравитонов*, представляющие собой

нейтральные частицы с нулевой массой покоя (гравитационные волны в прямых экспериментах еще не открыты, но последствия их излучения системами небесных тел уже обнаружены). Квантовые эффекты в гравитации становятся определяющими, когда радиус кривизны пространства-времени (расстояние, на котором проявляются существенные отклонения от геометрии Евклида) становится равным планковской длине ($r \approx 10^{-35}$ м). Пока не ясно, удастся ли физикам так видоизменить общую теорию относительности, чтобы она объединилась с квантовой теорией, или обнаружится какая-то в корне новая доквантовая, допространственно-временная структура.

При изучении физического мира ученым всегда хочется верить, что познание его будет законченным и лаконичным в своих исходных принципах. Поэтому исследования ученых развивались в двух направлениях: с одной стороны – поиски элементарных составляющих, из которых образована материя, а с другой – разработка идей, которые позволили бы унифицировать наши представления о силах, действующих между этими элементарными составляющими. Так, последние 35 лет своей жизни Эйнштейн посвятил объединению (унификации) тяготения и электромагнетизма, но эту поистине эпическую задачу решить ему так и не удалось.

Физики допускают, что при очень высоких энергиях, например, в сингулярных состояниях, все виды фундаментальных взаимодействий проявляются как единое взаимодействие. В настоящее время существует ряд моделей (так называемое “Великое объединение”), в которых делается попытка создать единую теорию сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий. В еще более фундаментальных моделях эти взаимодействия объединяются с гравитационным (так называемое суперобъединение, суперсимметрия), а теория супергравитации пытается унифицировать не только все силы, но и вещество, состоящее из кварков и лептонов.

Любопытно, что из унификации электрослабого и сильного ядерного взаимодействия следует нестабильность протона и вытекающие отсюда возможное истощение запасов протонов во Вселенной (распад всей материи?). По современным оценкам это может произойти через $10^{31 \pm 2}$ лет после большого взрыва (пока прошло «всего-навсего» 10^{10} лет).

Одна из самых обширных и совершенных теорий унификации называется “*супергравитацией $N=8$* ”. Она содержит единый объект, описывающий и переносчики сил, и вещество как единый мультиплет возможных физических состояний. По своим спинам (собственным моментам количества движения элементарных частиц) эти состояния классифицируются согласно табл. 23 (K – количество частиц). Теория “супергравитация $N=8$ ” удивительно близка к воплощению современной версии эйнштейновской мечты

об унификации всех сил природы в рамках единого уравнения, причем фундаментальные заряды оказываются в ней проявлениями скрытых размерностей пространства! Однако эта теория не до конца срабатывает, когда физики пытаются отождествить известные сегодня элементарные частицы со спином 1 и 1/2 с частицами, содержащимися в указанной теории. Теперь перед ними стоит дилемма: либо они должны продолжить поиски правильной единой теории поля, либо им следует допустить, что некоторые из нынешних “элементарных” частиц на самом деле таковыми не являются.

Чтобы верить в теорию “супергравитации $N=8$ ” нужна большая научная смелость, так как в ней физики экстраполируют свои знания с энергии примерно 10 ГэВ до ее величины порядка 10^{19} ГэВ (энергия Планка). Такие условия имели место только в первые мгновения после большого взрыва.

Одна из последних возможных теоретических моделей на поприще «Великого Объединения» – *теория струн* (1984 г.). Основными объектами струнных теорий выступают не частицы, занимающие всего лишь точку в пространстве, а некие структуры вроде бесконечно тонких ($\sim 10^{-35}$ м) кусочков струны, не имеющих никаких измерений кроме длины. Концы этих струн могут быть либо свободны (открытые струны – *a*, рис.46), либо соединены друг с другом (замкнутые струны – *b*). И если история точки в пространстве-времени изображается линией (мировой линией), то история замкнутой струны в пространстве-времени изображается двухмерной поверхностью («мировым листом»), напоминающим трубку или цилиндр, сечением которой является замкнутая кривая, отвечающая положению струны в определенный момент времени. Две струны могут соединяться в одну струну или, наоборот, одна струна может разорваться на две струны (как две штанги в брюках – *c*). Частица в струнных теориях изображается в виде волн, бегущих по струне (подобно волнам по натянутой веревке, один конец которой приводят в движение). Испускание и поглощение одной частицы другой отвечает соединению и разделению струн (путем образования перемычки между двумя трубками – *d*).

Таблица 23. Классификация при «супергравитации $N=8$ »

Спин	K	Пояснения (наименования частиц, недостатки теории)
2	1	Один гравитон со спином 2 – это квант гравитации
3/2	8	Новые объекты со спином 3/2 (гравитино)
1	28	Нет переносчиков электрослабого взаимодействия !
1/2	56	Частицы и античастицы (но их недостаточно !)
0	70	Объекты, которые, возможно, “полезны” для теории

Согласно этой теории, Вселенная состоит из мельчайших колеблющихся струн, причем они колеблются, по-видимому, лишь в 10-ти или 26-ти мерном пространстве-времени [40]. И в этом скрыты большие трудности, поскольку человеку доступно в ощущениях только 4-х мерное измерение (три пространственных измерения и одно временное измерение).

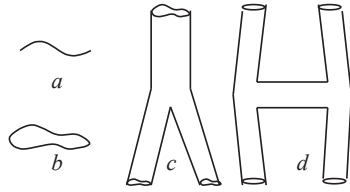


Рис. 46. «Струны» и «трубки»

Возможно другие измерения слишком «малы» и мы их просто не замечаем (по крайней мере, в этой жизни), как, например, не замечаем на экране телевизора мозаики светящихся точек всего лишь трех цветов (красного, зеленого и синего), а видим прекрасное полноцветное изображение, образованное этими тремя цветами. Различные резонансные колебания струн порождают самые разнообразные фундаментальные частицы (кварки, лептоны, электроны и т. д.). Теория струн также хорошо укладывается в релятивистские уравнения Эйнштейна. Так что этой теории удалось унифицировать отдельные аспекты современной физики. Но теория еще далеко не совершенна: для полевой теории струн существуют многие миллионы математических решений, и правильное решение все еще ждет физиков XXI века.

4.6. СЕМЬ СТАДИЙ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ

Хотя действие известных ныне физических законов и невозможно экстраполировать в прошлое до самого начального момента или даже в область, где вступает в силу *квантовая теория гравитации* (начиная с 10^{-43} секунды), тем не менее, можно построить модель Вселенной, начиная почти с первой микросекунды ее существования с достаточной уверенностью, что ее физическая сущность понимается правильно. Начиная с момента времени около 10^{-6} секунд (10^{37} эви), удастся проследить, как меняются физические свойства вещества по мере расширения Вселенной.

На первых этапах *большого взрыва* Вселенная была очень горячей, т. к. находилась в чрезвычайно сжатом состоянии. Поэтому содержимое Вселенной на первом этапе называют *первичным огненным шаром*. Он состоял из сильно взаимодействующих элементарных частиц всех типов и находился в состоянии теплового равновесия. Это была первая краткая эра бурной активности, когда большинство актов взаимодействия произошло между различными экзотическими частицами, многие из которых до сих пор так и не удалось наблюдать в лабораториях, и физика которых недостаточно ясна. Однако к концу первой микросекунды огненный шар состоял уже только из наиболее знакомых нам ныне частиц.

В развитии Вселенной принято выделять четыре главных стадии: адронная эра, лептонная эра, эра излучения (плазменная эра) и эра вещества.

Адронная эра характеризуется сосуществованием вещества и антивещества, причем количество частиц (барионов) \sim количеству фотонов.

Антивещество – это материя, построенная из античастиц, имеющих те же значения масс и прочих физических характеристик, что и их “двойники” (обычные элементарные частицы), но отличающихся от них знаком некоторых характеристик взаимодействий (например, электрического заряда, магнитного момента). Согласно теории английского физика-теоретика Поля Дирака (1902–1984), столкновение частицы и античастицы должно приводить к их аннигиляции – исчезновению этой пары, в результате чего рождаются две и более других частиц, например, фотоны. Вся *иерархия строения* вещества из частиц должна быть осуществима и для античастиц. Из античастиц могут строиться комплексы того же типа, что из частиц. Наличие полной симметрии между частицами означало бы, что если возможен какой-либо процесс между частицами, то должен существовать точно такой же процесс и между античастицами. Однако такая симметрия имеется только в сильном и электромагнитном взаимодействии, а в слабом взаимодействии наблюдается нарушение симметрии частица-античастица. Сколько-нибудь существенных скоплений антивещества во Вселенной в современную эпоху пока не обнаружено, однако важный для науки вопрос о распространенности антивещества во Вселенной остается открытым.

Редкие миры в ГТНЧ по своей структуре и “поведению” похожи на частые миры. Для редких миров “проходят” почти те же рассуждения, понятия, взаимосвязи, а главное отличие редких миров – это чрезвычайно малая вероятность встречи с их представителями при движении по натуральному ряду. Если редкие миры в какой-то мере адекватны антивеществу, то тогда можно предположить, что антивещество составляет $\sim 10^{-31}$ часть от всего вещества во Вселенной (такова доля чисел из редких миров в конце БО).

Катастрофическое самоуничтожение, аннигиляция равных количеств вещества и антивещества, ведущая к вселенской вспышке излучения, была предотвращена благодаря тому, что установилось “нужное” отношение плотностей излучения и вещества. Это произошло, когда Вселенной было 10^{-33} с (10^{10} эви), “от роду” и завершилось формирование “перекоса” в сторону частиц по сравнению с античастицами, когда сложилось равновесие между излучением и веществом. После чего все процессы пошли довольно “обычным” порядком, основанным на той физике, в которой ученые чувствуют себя достаточно уверенно (несмотря на существующие “белые пятна” и некоторые неясности, например: внутренняя структура протонов, нейтронов и других адронов; природа сильного взаимодействия).

Основной вклад в гравитацию в адронную эру давали тяжелые частицы – адроны. В конце эры адроны аннигилируют с античастицами, остается лишь небольшой избыток нуклонов, который в дальнейшем и определяет свойства нашего мира. Наблюдаемое “нужное” отношение числа барионов к числу фотонов (баланс между веществом и излучением всех длин волн) во Вселенной оценивается как $S \approx 10^{-9}$ т. е. фотоны во Вселенной более многочисленны, чем атомы. Возможно, число S характеризует асимметрию рождения барионов и антибарионов в горячей Вселенной после «инфляционной» фазы (фазы раздувания, при этом число S вообще может быть выражено с помощью постоянных величин теории элементарных частиц).

В лептонной эре главную роль играют протоны, нейтроны и электроны. Именно в это время образуется основная часть гелия, содержащегося в звездах и галактиках (см. п. 4.1). Таким образом, первичный огненный шар явился одной из главных “фабрик” по синтезу элементов.

В эру излучения (плазменную эру) основной вклад в гравитационную массу Вселенной давало излучение. В начале эры (до ~ 100 с $\sim 10^{45}$ эви) заканчивается синтез гелия (образуется 25% гелия, а 75% вещества остаются в виде водорода). Все остальные химические элементы синтезируются из этого до звездного вещества, причем намного позднее, в результате ядерных реакций в недрах звезд. При температуре $3000 \div 4000$ К (это чуть ниже температуры на поверхности Солнца) происходит “отрыв” излучения от вещества, и в дальнейшем их охлаждение происходило независимо, они больше не могли обладать одинаковой температурой. Вещество становится непрозрачным для оставшихся фотонов, и они с тех пор путешествуют, превратившись в *реликтовое излучение*. С этого момента главную роль в расширении Вселенной начинает играть не излучение, а вещество.

В эру вещества стали возникать обычные атомы. Далее возникла возможность локальной конденсации вещества под действием гравитационного притяжения. Массы газа образовали вихри, которые, скапливаясь, медленно сжимались в галактики, а затем – в звезды и планеты. Сейчас около 73% всех атомов во Вселенной – атомы водорода, 25% – атомы гелия, на долю остальных более тяжелых атомов (столь обычных на Земле) приходится ничтожно малая часть – менее 2%. Это убедительно подтверждает, что изначально все известные нам атомы формировались из водорода.

Вследствие непрерывного космологического расширения температура огненного шара продолжала падать, и в настоящее время составляет всего лишь $2,7$ К – это и есть *реликтовое излучение*, путешествующее по космосу с конца плазменной эры до наших дней, и непрерывно со всех сторон поступающее на Землю из космоса.

В табл. 24 приведены моменты времени, соответствующие семи важнейшим вехам в эволюции Вселенной, а также указаны значения температуры и плотности Вселенной (согласно теории расширяющейся Вселенной). Ниже таблицы, вплоть до конца параграфа, – ортодоксальные мысли, т. е. «полагается» мелкий шрифт, но текста много и читать его было бы трудно.

Семь стадий в эволюции Вселенной близки к тильда-распределению, где в качестве богатства (S) взят временной интервал в 10^{36} секунд: от первых мгновений Вселенной – до полного распада материи. Причем можно добиться полного совпадения тильды с настоящим моментом времени (10^{17} с) и временем 10^{-44} с (1 *эви*) – самым первым мгновением Вселенной.

Таблица 24. Семь основных стадий в эволюции Вселенной

Наименование стадии (наиболее характерное событие, произошедшее на данной стадии эволюции Вселенной)	Время, секунды	Температура, К	Плотность, г/см ³
Сильные эффекты квантовой гравитации	10^{-44}	10^{32}	10^{95}
Синтез кварков (экзотические частицы)	10^{-35}	10^{27}	10^{75}
Адронная эра (баланс вещества и излучения)	до 10^{-4}	10^{12}	10^{14}
Лептонная эра (образование гелия)	до 10	$5 \cdot 10^9$	10^3
Эра излучения (плазменная эра)	до 10^{13}	3000	10^{-21}
Эра вещества (и нашего существования)	10^{17}	2,7	10^{-31}
Распад всей материи во Вселенной (?)	$10^{38 \pm 2}$		10^{-57}

Деление Большого отрезка на пять эонов в ГТНЧ (см. п. 1.33 и 1.35) невольно ассоциируется со стадиями развития Вселенной, где планковской эпохе, физическая теория которой пока не разработана, – соответствует 1-й эон; конец эпохи великого объединения (с еще не разделившимся сильным, слабым и электромагнитным взаимодействиями) – приходится на 2-й эон; а конец эпохи слабого взаимодействия (адронной эры) почти совпадает с началом 5-го эона. Последний “провал” пауз (при $N \approx 4,9$ млрд. лет) – это период бурного зарождения звезд в молодых еще галактиках Вселенной. Самый протяженный и почти с идеальными нижними паузами 5-й эон, “вбирает” в себя три реальных космологических эры: лептонную эру (до 10-й секунды), эру излучения (до 1 млн. лет) и эру вещества (настоящее время). Образование большей части гелия (25%) и водорода (75%) во Вселенной приходится на начало эры излучения, что совпадает с началом 6-го *псевдоэона* ($N \approx 3 \cdot 10^{44}$ *эви*), который “должен был” появиться в редких мирах (это следует из динамики начала первых пяти эонов), однако в мире чисел 5-й эон странно “пронгирован”.

Когда возраст Вселенной стал измеряться всего лишь секундами, то многое и, вероятно, самое значительное уже произошло: отбурлила таинственная сингулярность; прошло еще три эона, и начался 5-й эон; появилось десятая часть ныне существующих редких миров и т. д. (см. табл. 13 и 14).

Кстати, здесь можно провести аналогию с внутриутробным развитием зародыша человека: всего через 9 месяцев после оплодотворения яйцеклетки на свет появляется уже *очень взрослый* (по биологическим меркам, см. п. 5.1, табл. 29) организм и то, что с ним происходит последующие, скажем, 840 месяцев (70 лет) – “не интересно” для биолога (а кто у нас изучает формирование души, духовного мира человека?).

Любопытно, что если считать возраст Вселенной $N \approx 13$ млрд. лет, то местная средняя пауза P_0 практически совпадает с продолжительностью последней (текущей) геологической эпохи (четвертичный период в истории Земли начался $\sim 1,5$ млн. лет назад); максимальная пауза $P_{max} \approx 20,9$ млн. лет – сравнима с длительностью последних геологических эпох; минимальная пауза $P_{min} \approx 1608$ лет – характерное время в эволюции человечества (средний промежуток времени, через который происходили эпохальные события в истории стран и народов). Если принять, что Земля образовалась при $N \approx 8$ млрд. лет, то можно говорить об увеличении виртуальных пауз к настоящему времени ($N \approx 13$ млрд. лет) в $1,60 \div 1,63$ раза, что напоминает нам о «золотом сечении» ($\Phi = 1,618 \dots$).

Наш вывод об убывании в целом скорости эволюции Вселенной (поскольку все виртуальные паузы увеличиваются), совпадает с реальностью. Правда, геохронология Земли все более ускоряется: геологические эры, периоды и эпохи проходят за все более короткие промежутки времени. Также явно ускоряется эволюция человечества в целом, да и субъективное ощущение каждого человека говорит об ускорении времени (с возрастом года бегут все быстрее). Это противоречие – глобальное убывание скорости эволюции Вселенной и локальное возрастание скорости эволюции Земли – очень напоминает ситуацию со створами редких миров (см. рис. 24), где с одной стороны происходит глобальное расширение среднего створа, а с другой стороны – локальное сужение реального створа внутри зона.

Возможно также, что *скорость течения времени*, данная человеку в его ощущениях, неким образом коррелирует с «насыщением» пауз калейдоскопом старых (ранее появившихся миров). Ведь не стоит забывать, что даже за время наименьшей паузы ($P_{min} = 1608$ лет) “промелькнуло” $\sim 9,4 \cdot 10^{53}$ эви (чисел из старых миров). Чем дольше пауза, тем больше «мельканий» старых миров в этой паузе, тем выше скорость прокрутки «ленты времени» с точки зрения человека. Во всяком случае, ГТНЧ может приблизить нас к пониманию такой сложной научной категории как *время*.

Реальные минимальные паузы частых миров в конце Большого отрезка могут составлять несколько десятков лет, и многие “интересные” промежутки времени из реального мира близки именно к этому. Например: сред-

няя продолжительность человеческой жизни (45 лет) и жизни многих других высокоорганизованных представителей фауны, средняя продолжительность цикла солнечной активности (см. п. 4.1) и т. д.

4.7. СТРУКТУРА АТОМОВ И ИХ ЯДЕР

Атом – это часть вещества микроскопических размеров и массы, наименьшая часть химического элемента, являющаяся носителем его свойств. Атом состоит из тяжелого ядра и окружающих его электронов. На долю ядра в атоме приходится только 10^{-12} часть (объема атома), где сконцентрировано 99,9% всей массы атома. Ядра атомов состоят из частиц (нуклонов) двух типов: *нейтронов* и *протонов*. Протон – основной строительный блок атомных ядер, эта частица первостепенной важности для ядерной (и в итоге атомной и химической) физики. Так, химические и большинство физических свойств данного атома определяются именно числом протонов (Z) в ядре, т. е. определяются зарядом ядра, причем он точно компенсируется числом электронов вокруг него. Поэтому атомы всех веществ обычно электрически нейтральны (атом, потерявший электроны, называется ионом и у него уже есть некий заряд). Самые тяжелые и самые сложные атомы содержат около 250 нуклонов (в составе ядра атома) и около 90 электронов (в электронном облаке вокруг ядра).

Квантовая механика дает возможность вычислить относительную вероятность нахождения электрона в заданной точке пространства и с заданной скоростью или, точнее, в заданной малой области пространства со скоростью, лежащей в некотором диапазоне скоростей. Электрон в атоме водорода в его основном состоянии с наибольшей вероятностью находится на расстоянии 10^{-8} см от ядра, и, согласно квантовой механике, распределение вероятности его положения сферически симметрично в пространстве. В то же время имеется конечная вероятность обнаружить электрон вдали от ядра. Например, электрон может оказаться в километре от «своего» ядра, но вероятность найти его в малой области на таком расстоянии примерно в 10^{1013} раз меньше, чем в такой же области с центром в ядре.

Говоря о *семи* электронных оболочках в атоме (здесь полезно вспомнить таблицу Д. И. Менделеева), мы попросту демонстрируем мизерность наших знаний об атоме, как некой структуры пространства-времени. Это аналогично рассмотрению только *семи* наиболее многочисленных миров в ГТНЧ (скажем, №8, 4, 16, 12, 2, 24, 6, см. п. 1.18), но ведь всего на Большом отрезке насчитывается около 807430 различных миров! (см. п. 1. 36)

Число протонов в ядре конкретного химического элемента совпадает с его порядковым номером Z в таблице Менделеева; число нейтронов равно $N=A-Z$, где A – массовое число элемента (число нуклонов в ядре). Ядра с

одинаковым числом протонов Z , но с различным числом нейтронов N , а значит и с различным массовым числом A , называют изотопами. Известно около 350 β -стабильных (β -нерадиоактивных) ядер, для которых

$$Z \approx A / (1,98 + 0,015 \cdot A^{2/3}) \text{ или } Z \approx 0,5772 \cdot A^{0,9347} \approx C \cdot A^{\ln(8/\pi)}, \quad (240)$$

где выражение с постоянной Эйлера (C) дает $OP = \pm 5\%$ относительно первой формулы, принятой в ядерной физике. Если в легких β -стабильных ядрах числа протонов и нейтронов в среднем одинаковы, то в тяжелых ядрах нейтронов примерно в 1,6 раза больше, чем протонов («золотое сечение»?).

Атомное ядро имеет приблизительно сферическую форму с радиусом

$$R \approx a \cdot A^{1/3}, \quad (241)$$

где константа $a \approx (1,1 \div 1,4) \cdot 10^{-15}$ м близка к радиусу действия ядерных сил. Таким образом, концентрация нуклонов в ядре постоянна и равна $A / [(4/3) \cdot \pi \cdot R^3] \approx 1,4 \cdot 10^{44} \text{ м}^{-3}$ (нуклонов в кубическом метре). Если принять, что радиус Вселенной равен $1,6 \cdot 10^{26}$ м, а количество нуклонов в сфере такого радиуса равно $2 \cdot 10^{80}$, то получим, что средняя концентрация нуклонов во Вселенной всегонавсего около 12 нуклонов в кубическом метре, т. е. в 10^{43} меньше, чем в ядре атома (см. п. 4.9). Ядерная материя (квантовая сверхтекучая жидкость) – чрезвычайно плотный вид материи (10^{14} г/см^3), причем плотность числа нуклонов в ядре почти постоянна в центральной части ядра и экспоненциально убывает на периферии.

Формула (241) напоминает 11-й закон Пирамиды: $N \approx 1,817 \cdot M^{1/3}$. Если некое натуральное число N условно принять за диаметр шара, то концентрация массы M в нем постоянна и численно равна $M / (\pi \cdot N^3 / 6) = 1/\pi$.

Удельная энергия связи для всех ядер составляет в среднем 7 МэВ (примерно в 7 раз больше массы покоя пары электрон-позитрон), т. е. для удаления одного нуклона за пределы ядра в него надо внести около 7 МэВ, а при захвате ядром нуклона столько же энергии освобождается. Удельная энергия связи является мерой устойчивости ядер, причем точные подсчеты энергии связи обнаруживают существование так называемых «магических» ядер, в которых число протонов или нейтронов равно одному из *магических чисел* (2, 8, 20, 28, 40, 50, 82, 126). Такие ядра выделяются среди других ядер повышенной устойчивостью, большей распространенностью в природе и другими особенностями. Современная оболочечная модель ядра фактически является полуэмпирической схемой, позволяющей понять некоторые закономерности в структуре ядер, но не способной последовательно количественно описать свойства ядер. В частности, не просто выяснить чисто теоретически порядок заполнения оболочек, а, следовательно, и магические числа, которые служили бы аналогами периодов таблицы Менделеева для атомов. Наблюдаемые на опыте магические числа нейтронов (2, 8, 20, 28, 40, 50, 82,

126) и протонов (2, 8, 20, 28, 50, 82) отвечают квантовым состояниям квази-частиц, движущихся в прямоугольной или осцилляторной потенциальной яме со спин-орбитальным взаимодействием.

В ГТНЧ номера орбит простых чисел, совпадающие с магическими числами, лежат исключительно в ямах спектра орбит (см. п. 1.12). Магические числа в ядерной физике – это числа вида $P \pm 1$, где P – простые числа (кроме числа 50, равного $47+3$ или $53-3$). Номера наиболее населенных орбит простых чисел (табл. 5) практически совпадают с числами 1, 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 26 – это атомные номера (Z) химических элементов, которые наиболее распространены во Вселенной.

Ряд атомных ядер из числа встречающихся в природе (радия, урана, тория и др.) обладают способностью спонтанно (самопроизвольно, случайно, без какого-либо воздействия на них) испускать α -частицы, электроны и γ -кванты. Такие ядра (и химические элементы, их изотопы) называют радиоактивными, причем процесс их распада во времени (t) описывается классической экспонентой (см. п. 2.1): $N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$, где $N(t)$ – число не распавшихся ядер к моменту времени t ; λ – постоянная распада, характеризующая скорость распада; N_0 – начальное число ядер. Величину $\tau \equiv 1/\lambda$ называют средним временем жизни радиоактивного ядра, а величину $T \equiv \ln 2 \cdot \tau \approx 0,693 \cdot \tau$ – периодом полураспада, т. к. за это время распадается половина ядер (при $t=T$ имеем $N(t) = N_0/2$). Элементы, тяжелее урана, имеют период полураспада меньше, чем возраст Земли, поэтому на Земле они редки.

Нейтроны не только входят в состав ядра, но могут находиться и в свободном состоянии, например – в результате деления ядер урана. Такие нейтроны могут самопроизвольно превратиться в три частицы – протон, электрон и антинейтрино. Причем распад свободного нейтрона также описывается выше рассмотренной экспонентой. Нейтрон – отнюдь не единственная элементарная частица, способная спонтанно превращаться в другие частицы, этим свойством (нестабильностью) обладает подавляющее большинство элементарных частиц, причем могут быть случайны сами схемы распада, т. е. у ряда частиц существуют разные способы распада. Стабильны только фотон, нейтрино, электрон и, возможно, протон.

Вероятность нестабильным микробъектам прожить некоторое время не зависит от того, сколько они уже “прожили” к моменту, от которого начинается отсчет времени (подобно тому, как выпадение единицы при игре в кости не связано с тем, что перед этим выпадала четверка). Будучи объективно случайным, самопроизвольный распад в тоже время вовсе не беспричинное событие, т. к. строго говоря, самопроизвольного распада (т. е. изолированного объекта) в природе быть не может. Ведь даже вакуум – это не пустота, а пространство, где случайным образом рождаются и уничтожаются различные

элементарные частицы (возможно, аналогично мирам в ГТНЧ, где за 1 секунду “мелькает” около 10^{44} самых разных миров), с которыми и взаимодействует рассматриваемый нами микрообъект.

После плутония ($Z=94$) все ядра становятся крайне неустойчивыми (короткоживущими), и такие элементы ученые искусственно синтезируют в ядерных реакциях. Как далеко можно продвинуться при синтезе трансурановых элементов? Исследование открытых до сих пор трансурановых элементов с $Z>93$ показало, что их периоды полураспада T относительно процесса спонтанного деления уменьшаются с ростом Z по закону

$$\lg T = a - b \cdot Z^2 / A, \quad (242)$$

где a и b – коэффициенты; A – массовое число. Если закон справедлив (а в этом есть сомнения), то при $Z=120 \div 125$ период полураспада T должен сравняться с ядерным временем, т. е. ядра с такими Z уже не могут существовать. Закономерное уменьшение периода полураспада с ростом Z , не исключает возможности существования «островов стабильности» с достаточно долгоживущими ядрами при $Z>93$. Так, в конце 1999 г. в России был открыт элемент с $Z=114$, который, действительно, живет очень долго, около минуты. Нечто подобное некоторые ученые предсказывают и при $Z=126, 164$ (если эти числа магические).

ГТНЧ, возможно, “ограничивает” дальнейший рост заряда ядра атома химических элементов (Z). Скажем, значением $Z=127$ – это 31-ое простое число, определяющее размер матрицы (МЛ) лидеров частых миров для Большого отрезка (см. п. 1.27÷1.29). Или, например, значением $Z=198$ – это наибольший показатель степени ($A1_{max}$) в каноническом разложении лидера из МЛ редких (и частых?) миров в конце БО. Вопрос только в том, с чем в ГТНЧ можно «отождествлять» заряд ядра Z (количество протонов в ядре).

Ниже мы продемонстрируем ещё более вычурную связь ГТНЧ и физики атома. Так, каждой электронной оболочке любого атома можно приписать определенный тип – пусть это будет *тип числа* (см. п.1.3), которое равно количеству электронов в данной оболочке. А сумму типов всех оболочек в атоме – будем считать *типом электронного облака (ТЭО)* данного атома. Например, у химического элемента Fe (железо, $Z=26$) имеется четыре электронных оболочки, в которых 2-14-8-2 электронов, т. е. типы этих оболочек соответственно равны $T=1, 3, 3, 1$. Поэтому для химического элемента Fe получаем $TЭО=1+3+3+1=8$. Подобным образом можно вычислить ТЭО для всех ныне известных химических элементов таблицы Менделеева.

Причем на графике (рис. 47) все вычисленные нами ТЭО окажутся в своеобразном “коридоре” от $TЭО_{min}=0,15 \cdot (\ln Z)^{\pi}$ до $TЭО_{max}=0,4 \cdot (\ln Z)^e + 1$, а весьма характерные колебания полученного графика позволяют “дорисовать” его вплоть до $Z=142$. Таким образом, можно попытаться спрогнозировать количество электронов в оболочках 37 элементов после 105-го элемента (для этого

после 118-го элемента приходится вводить восьмую электронную оболочку, см. табл. 25).

Таблица 25. Количество электронов в восьми оболочках атомов

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	$TЭО$	Z	1	2	3	4	5	6	7	8	$TЭО$
106	2	12	32	32	18	8	2		25	124	1	11	20	32	32	18	8	2	26
107	2	13	32	32	18	8	2		21	125	2	11	20	32	32	18	8	2	26
108	2	14	32	32	18	8	2		23	126	2	12	20	32	32	18	8	2	30
109	2	15	32	32	18	8	2		23	127	2	13	20	32	32	18	8	2	26
110	1	17	32	32	18	8	2		21	128	2	13	21	32	32	18	8	2	24
111	1	18	32	32	18	8	2		25	129	2	14	21	32	32	18	8	2	26
112	2	18	32	32	18	8	2		25	130	2	16	20	32	32	18	8	2	29
113	3	18	32	32	18	8	2		25	131	2	14	23	32	32	18	8	2	24
114	4	18	32	32	18	8	2		26	132	2	14	24	32	32	18	8	2	30
115	5	18	32	32	18	8	2		25	133	2	13	26	32	32	18	8	2	24
116	6	18	32	32	18	8	2		27	134	2	12	28	32	32	18	8	2	30
117	7	18	32	32	18	8	2		25	135	2	11	30	32	32	18	8	2	28
118	8	18	32	32	18	8	2		27	136	2	12	30	32	32	18	8	2	32
119	1	8	18	32	32	18	8	2	28	137	2	13	30	32	32	18	8	2	28
120	2	8	18	32	32	18	8	2	28	138	2	14	30	32	32	18	8	2	30
121	2	9	18	32	32	18	8	2	27	139	2	13	32	32	32	18	8	2	26
122	2	10	18	32	32	18	8	2	28	140	2	14	32	32	32	18	8	2	28
123	2	11	18	32	32	18	8	2	26	141	2	15	32	32	32	18	8	2	28

4.8. КВАНТОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Пространство и время – это основные формы существования материи. А сама материя – это бесконечное множество всех существующих в природе объектов и систем, веществ любых свойств, связей, отношений и форм движения. Очевидно, не может быть материальных объектов, которые не обладали бы пространственно-временными свойствами, причем, пространство

всегда выражает порядок сосуществования отдельных объектов, а время – порядок смены явлений. Пространство и время имеют решающее значение для построения физической картины мира. Наша Вселенная есть ни что иное, как пространство, время и материя.

Свойства пространства и времени делят на *метрические* (протяженность и длительность) и *топологические*, связанные только с непрерывностью пространства-времени. Наше пространство *метрическое*, т. к. в нем могут быть заданы согласованные непрерывные координаты, и оно обладает геометрической структурой (существует кратчайший путь между любыми двумя точками, могут быть определены расстояния и углы). Метрические

свойства описываются в рамках теорий Эйнштейна. Так, *специальная теория относительности* выявила зависимость пространственных и временных характеристик объектов от скорости их движения относительно определенной системы отсчета. *Общая теория относительности* показала, что наличие гравитационных масс приводит к искривлению пространства-времени, а от характера распределения масс зависят и такие фундаментальные свойства пространства-времени, как конечность и бесконечность (которые также обнаружили свою относительность).

К топологическим свойствам, например, относят: *непрерывность* (обычно предполагается, что любой интервал пространства-времени обладает беспредельной делимостью); *связность* (область Вселенной, доступная нашим наблюдениям, является односвязной, наподобие поверхности сферы, но нет никаких оснований полагать, что пространство не может состоять из множества не связанных друг с другом кусков, а это, по сути дела, другие миры, о которых мы ничего не знаем); *размерность* (реальное пространство трехмерно, но почему это так – неизвестно; время всего лишь одномерно); *ориентируемость* (не существует пока никаких свидетельств того, что наша Вселенная неориентируема наподобие, скажем, ленты Мёбиуса); *порядок и направление времени*. Исследование топологических свойств пространства и времени пока еще не вышло из стадии гипотез.

Математические описания пространства и времени оказались очень похожими и в действительности это две стороны одной единственной структуры, именуемой “*пространство-время*”. Более того, существует взаимосвязь свойств симметрии пространства-времени с законами сохранения, так закон сохранения импульса тесно связан с однородностью пространства, закон сохранения момента количества движения – с изотропностью пространства, а закон сохранения энергии – с однородностью времени.

Серьезные трудности возникли у физиков при экстраполяции макроскопических, классических понятий пространства-времени (его непрерывности) на микромир, а также в связи с попытками осмысления природы начальной сингулярности в модели расширяющейся горячей Вселенной. Поэтому учеными был выдвинут ряд предложений по модификации смысла понятия пространства-время, например, – **квантование пространства-времени**, основанное на гипотезе о существовании некоей элементарной (минимальной) длины, которая определяет пределы применимости фундаментальных физических представлений (теории относительности, квантовой теории, принципа причинности). Следует заметить, что с математической точки зрения «непрерывность» – довольно сложное понятие. Однако кажется совершенно естественным, что в непрерывной линии в определенном смысле содержится больше точек, чем в бесконечном ряду дискретных точек (так натуральные числа-точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... не содержат, например, числа 3,14...). При этом число точек, как в непрерывной линии, так и в натуральном ряду – бесконечно.

С помощью известных физике фундаментальных постоянных **G, h, c** (см. табл. 26) можно построить несколько величин с размерностью длины, но наиболее вероятная из них на роль элементарной длины – это так называемая **планковская (элементарная) длина**: $l_{pl} \equiv (Gh/2\pi c^3)^{1/2} \approx 1,6 \cdot 10^{-35}$ м.

Время, за которое фотоны света проходят элементарную длину, называется **элементарным временным интервалом**: $\varepsilon_{vi} \equiv l_{pl}/c \approx 5,4 \cdot 10^{-44}$ с.

Можно также составить величину с размерностью массы – это так называемая **планковская масса**: $m_{pl} \equiv (ch/2\pi G)^{1/2} \approx 2,2 \cdot 10^{-8}$ кг, характеризующая энергию $mc^2 \approx 10^{19}$ ГэВ, при которой должен осуществляться переход к квантовому описанию пространства-времени.

Согласно гипотезе о квантовании (дискретности) пространства-времени через элементарную длину l_{pl} выражаются масштабы областей пространства-времени, в которых можно ожидать новых явлений, не укладывающихся в рамки существующей физической картины. Если бы эта гипотеза подтвердилась, то предстояло бы еще одно радикальное преобразование физики, сопоставимое по своим последствиям с созданием теории относительности или квантовой теории. Тогда бы элементарная длина l_{pl} вошла как существенный элемент в теорию элементарных частиц, играя роль третьей фундаментальной размерной константы физики после скорости света **c** и постоянной Планка **h**.

Чтобы представить себе 1 *эви*, вспомним, что 1 секунда – это промежуток времени, за который атом цезия-133 совершает 9.192.631.770 колебаний. Пусть максимально возможный возраст Вселенной равен 20 млрд. лет ($\sim 6 \cdot 10^{17}$ с), тогда за это время атома цезия совершил бы около $6 \cdot 10^{27}$ колебаний.

Таким образом, 1 секунда вмещает в себя в 10^{15} раз больше *эви*, чем количество колебаний атома цезия, которое могло бы иметь место за все время существования Вселенной. Т. е. любые аналогии в части *эви* находятся за гранью человеческого воображения – настолько это ничтожный миг по нашим меркам. Возраст Вселенной оценивают в $10 \div 20$ млрд. лет, что равно $5,87 \cdot 10^{60} \div 1,17 \cdot 10^{61}$ *эви*, поэтому для простоты рассуждений мы приняли возраст Вселенной равным 10^{61} *эви* (около 17 млрд. лет). Один год (365 дней) примерно равен $5,84 \cdot 10^{50}$ *эви*.¹

А вот планковская масса m_{pl} “не тянет” на звание элементарной массы, т. к. она чудовищно превосходит массу покоя электрона ($\sim 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг), который является материальным носителем *почти* наименьшей массы (и наименьшего электрического заряда в природе). Ситуация с планковской массой говорит о «белых пятнах» современной науки (многое ещё неизвестно).

Следует подчеркнуть, что исследовательские возможности науки пока не позволяют выяснить *на уровне эксперимента*, что происходит в пределах расстояний меньших 10^{-18} м (времени меньше 10^{-26} с или 10^{17} *эви*). Более мелкие масштабы пространства и времени лежат далеко за пределами возможности современной экспериментальной проверки. Имеются всего лишь аргументы в пользу того, что элементарная длина не превосходит значения 10^{-22} м. Таким образом, до сих пор физики не располагают никакими экспериментальными данными, которые свидетельствовали бы о наличии квантования (“зернистости”, дискретности) пространства-времени, но и прежним, классическим понятиям о пространстве-времени нет места в теоретическом описании микромира. Наиболее радикальной попыткой преодолеть эти трудности является гипотеза о неприменимости вообще понятий пространства-времени к микромиру (с чем большинство физиков все-таки не соглашаются). Другие современные гипотезы предлагают рассматривать пространство-время как некую структуру, состоящую из *множества уровней*. Например, предполагается, что вещественные объекты на самом деле лишь малые возмущения этой фоновой структуры.

В настоящий момент большинство физиков признают необходимость существенного изменения смысла пространства-времени.

¹ Любопытно, что в славянской рукописи XVII в. упоминается система счета, последний рубеж которой равен 10^{50} . На нем “спотыкались”, и счет окончательно прерывался: “... и более сего несть человеческому уму разумевати”.

4.9. «ТОНКАЯ ПОДСТРОЙКА» МИРОЗДАНИЯ

Свойства окружающего нас мира сильно зависят от *случайной* согласованности *фундаментальных постоянных*, которые приведены в табл. 26. “Случайной” в том смысле, что будь эти постоянные чуточку иными и появление живой материи во Вселенной стало бы невозможным. Иначе говоря, многие наблюдаемые во Вселенной структурные единицы (в том числе и человек) являются следствием крайне маловероятных событий.

Таблица 26. Список фундаментальных постоянных и производных величин

Наименование величины (формула) и её обозначение	Символ	Числовое значение
Гравитационная постоянная (в законе всемирного тяготения)	G	$6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$
Скорость света в вакууме	c	$299\,792\,458 \text{ м/с}$
Постоянная Планка (для справок: h «с чертой» $\equiv h/2\pi$)	h	$6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Планковская масса $\equiv (ch/2\pi G)^{1/2}$	m_{pl}	$2,17671 \cdot 10^{-8} \text{ кг}$
Планковская длина (элементарная длина) $\equiv (Gh/2\pi c^3)^{1/2}$	l_{pl}	$1,61605 \cdot 10^{-35} \text{ м}$
Элементарный временной интервал (планковское время) $\equiv l_{pl}/c$	эви	$5,39056 \cdot 10^{-44} \text{ с}$
Масса покоя электрона	m_e	$9,1095 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона (в 1836 раз больше массы электрона)	m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Диэлектрическая постоянная вакуума	ε	$8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$
Размеры протона $\equiv h/m_p c$ (комптоновская длина волны)	l_p	$1,32 \cdot 10^{-15} \text{ м}$
Протонное (ядерное) время $\equiv l_p/c$ (свет “пересекает” протон)	t_N	$4,41 \cdot 10^{-24} \text{ с} \approx 10^{20} \text{ эви}$
Отношение числа фотонов к числу протонов во Вселенной	S	10^9
Число протонов во Вселенной (\sim число барионов и электронов)	N_p	$\sim 10^{80}$
Заряд электрона (равен заряду протона по абсолютной величине)	e	$1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Постоянная тонкой структуры (ПТС) $\equiv 2\pi e^2/(hc)$	α	$0,007297 \approx 1/137$
Постоянная слабого взаимодействия $\equiv g_w \cdot m_p^2 \cdot c/(h/2\pi)^3$	α_w	10^{-5}
Постоянная сильного взаимодействия $\equiv g_s^2/(ch/2\pi)$	α_s	15
Гравитационная ПТС $\equiv Gm_p^2/(ch/2\pi)$	α_G	$5,9 \cdot 10^{-39}$
Возраст Вселенной (точно не известен, но условно принят)	t_H	$5,4 \cdot 10^{17} \text{ с} \approx 10^{61} \text{ эви}$
Время жизни (характерное время) типичной звезды $\sim t_N/\alpha_G$	t^*	$10^{15} \text{ с} \approx 10^{38} \text{ эви}$
Число частиц (протонов) в типичной звезде $\sim \alpha_G^{-3/2}$	N^*	$\sim 10^{57}$

Ниже приводится целый ряд любопытных формул с фундаментальными постоянными, причем большинство выражений получены методом *анализа размерностей*, который позволяет приближенно определить важные свойства некой системы, минуя тщательный анализ в рамках физической теории. Простой пример – определение периода колебаний маятника, длина которого равна L (м), а масса – M (кг). Колебания маятника происходят под действием гравитационной силы, которую характеризует ускорение свободного

падения на Земле – $g \approx 9,81$ (м/с²). Поскольку нас интересует период колебаний – T (с), то нам достаточно “составить” величину с размерностью времени: $T \sim (L/g)^{1/2}$, причем масса M в данном случае нам и не понадобилась. Быстро полученный результат с точностью до порядка равен точной формуле $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$, вывод которой потребовал бы от нас полного понимания всей «физики» маятника (т. е. куда больших знаний).

Специфические свойства структурных единиц Вселенной (см. табл. 27) и их систем зависят от законов движения и различных начальных или граничных условий, которые в совокупности определяют их поведение. Однако такие параметры, как *размер, масса, время жизни* и т. д., с точностью до порядка величины часто определяются исключительно значениями малого числа фундаментальных постоянных. Вот несколько примеров этому:

- 1) «пена» пространства-времени (определяется только 3 фундаментальными постоянными: планковской длиной – l_p , временем – t_{pl} , массой – m_{pl});
- 2) ядра атомов (см. размеры протона или комптоновская длина волны – l_p);
- 3) атомы (их размеры должны быть около $a_0 \sim \varepsilon \cdot h^2 / (\pi \cdot m_e \cdot e^2) \sim 10^{-10}$ м);
- 4) твердые тела (их плотность должна быть порядка $\sim m_p / a_0^3 \sim 10^3$ кг/м³);
- 5) планеты (их типичный радиус должен быть $R \sim (\alpha / \alpha_G)^{1/2} \cdot a_0 / 50 \sim 10^7$ м);
- 6) горы на планете (их высота может достигать $H_{max} \sim 0,01 \cdot R \sim 10^5$ м);
- 7) астероиды (типичные размеры бесформенных глыб $L \leq 0,1 \cdot R \sim 10^6$ м);
- 8) звезды (их типичная масса около $M^* \sim N^* \cdot m_p \sim \alpha_G^{-3/2} \cdot m_p \sim 10^{30}$ кг).

Следует правильно понимать приведенные выражения, например, радиус Земли (6.371.030 м) действительно близок к $R \sim 10^7$ м, но вот горы высотой $H_{max} \sim 10^5$ м (100 км) на Земле нет, зато самая высокая гора на Марсе гораздо ближе к H_{max} . Т. е. речь идет о высоте гор на некой типичной планете (и не только в нашей Солнечной системе). Если на планете образуется гора высотой более H_{max} , то она будет оказывать настолько большое давление на свое основание, что расплавит подстилающий материал и непременно опустится. Поэтому небесные тела с массами, типичными для планет, автоматически стремятся принять сферическую форму, подобно Земле.

Необходимо отметить, что объяснение существования самых крупных структурных единиц Вселенной – галактик и их скоплений основывается не на фундаментальных постоянных, а на *начальных условиях* во Вселенной. Если бы эти условия (после выхода из сингулярности) хотя бы самую малость отличались от требуемых по характерному размеру или амплитуде неоднородности, то крупномасштабная Вселенная была бы радикально иной (и, наверняка, без живой материи).

Далее приведем три интересных примера, поясняющих тезис о случайной согласованности фундаментальных постоянных в природе.

1) *Химический состав Вселенной* существенно зависит от случайной согласованности численных значений семи фундаментальных постоянных и весьма чувствителен к особенностям слабого ядерного взаимодействия. Имеет место удивительное совпадение: во-первых, разность масс нейтрона и протона лишь немного больше массы электрона (в 2,52 раза); во-вторых, постоянная слабого взаимодействия, по-видимому, случайно связана с постоянной гравитации G соотношением: $[Gm_e^2/(ch/2\pi)]^{1/4} \approx g_w \cdot m_e^2 \cdot c/(h/2\pi)^3 \sim 10^{-11}$. Можно доказать, что из этих двух случайностей вытекает равенство, так называемого, «фактора Больцмана» – величине достаточно далекой от единицы ($\exp(-1) \approx 0,3679$) и это весьма важно. Дело в том, что при термодинамическом равновесии относительное содержание двух типов частиц определяется статистической теоремой Больцмана, причем «фактор Больцмана» *оказывает предпочтение частицам меньших масс*. Поэтому содержание нейтронов будет составлять значительную (~10%), но не подавляющую часть общего числа барионов, и во Вселенной будет достаточное количество протонов (~90%). Причем подчеркнем, что отношение числа нейтронов к числу протонов отражает условия в течение первой секунды после начала расширения Вселенной.

«Фактор Больцмана» проявляется в том, что природа отдает явное предпочтение малым числам перед большими: существуют только *два* вида зарядов (+ и –); *трехмерно* пространство; существует не более *четырёх* фундаментальных сил в природе; в физике очень часто фигурирует «магическое число» 7 ± 2 ; имеет место обратная пропорциональность *квадрату* расстояния величин гравитационного и электрического взаимодействия и т. д. Вообще в природе *малые* особи (в самом широком понимании, а не только живые существа) более распространены, чем крупные, и часто «фактором Больцмана» можно объяснить многие *тыльда-распределения* (см. п. 5.6.).

Протоны преобладают во Вселенной, главным образом в виде атомов водорода, который играет очень важную роль в химии Вселенной. Без водорода не было бы ни планет, ни воды, ни органических веществ. Без водорода не было бы устойчивых звезд, таких, как наше Солнце (звезды, скажем, из гелия слишком быстро бы сгорали или взрывались, не давая ни одного шанса для зарождения жизни). В недрах звезд синтезируются другие, более тяжелые элементы, необходимые для возникновения планетных систем и живой материи. Тяжелые элементы выбрасывают в галактики, так называемые, *сверхновые звезды* в конце своей эволюции при колоссальных взрывах, которые происходят в среднем около 3-х раз за столетие на одну галактику. Таким образом, мы в полном смысле слова состоим из «праха умерших звезд» нашей Галактики.

Химический состав Вселенной весьма чувствителен также к особенностям сильного ядерного взаимодействия (в т. ч. к его постоянной g_s). Если

бы g_s была в два раза меньше, то такие ядра, как ядро железа или углерода, едва ли просуществовали бы долго. А будь g_s всего лишь на 2% больше, то было бы возможно объединение двух протонов в “дипротон”, что превратило бы обычный водород в катастрофически взрывоопасный, и вся Вселенная почти полностью состояла бы из гелия.

2) *Типичная масса звезды* попадает в узкий интервал между двумя крайностями в мире звезд – между массами голубых гигантов и красных карликов. Можно доказать, что столь точное попадание типичной массы «в самую десятку» (звезды только такой массы порождают живую материю) является результатом случайного соотношения между фундаментальными постоянными: $\alpha_G \geq \alpha^{12} \cdot (m_e/m_p)^4$. Это соотношение сопоставляет «силу» гравитации (слева) с «силой» электромагнетизма и отношением масс электрона и протона. Кроме того, неравенство очень чувствительно к величине заряда электрона (протона), т. к. α возведено в 12-ю степень. Подставляя численные значения, получим $5,9 \cdot 10^{-39} \geq 2,0 \cdot 10^{-39}$. Очевидно, природа выбрала значения фундаментальных постоянных такими, чтобы типичные звезды лежали очень близко к границе конвективной неустойчивости, а конвекция в приповерхностном слое звезды играет важную роль в образовании планетной системы.

3) *Максимальная масса галактики* равна $M_g \sim \alpha^5 \cdot \alpha_G^{-2} \cdot (m_p/m_e)^{1/2} \cdot m_p$ откуда получаем $M_g \sim \alpha^5 \cdot \alpha_G^{-1/2} \cdot (m_p/m_e)^{1/2} \cdot M^*$ или около $10^{11} \div 10^{12}$ типичных масс звезды (масса нашей гигантской Галактики около 10^{11} масс Солнца). Учитывая, что число протонов во Вселенной равно $N \sim \alpha_G^{-2} \sim 10^{80}$, и приняв массу типичной галактики равной $\sim (m_p/m_e)^{1/2} \cdot M^*$, получим, что число типичных галактик во Вселенной составляет $N_g \sim \alpha^{-5} \sim 10^{10}$. Таким образом, благодаря *случайному* совпадению фундаментальных постоянных ($\alpha_G \sim \alpha^{20}$), количество звезд в типичной галактике приблизительно равно количеству галактик во Вселенной и равно $\sim 10^{10} \div 10^{11}$.

Согласно ГТНЧ в конце Большого отрезка максимально возможное количество делителей (T_{max}) у чисел из редких миров – $7,8 \cdot 10^{10}$, из частых миров – $7,2 \cdot 10^{11}$ (см. п. 1.36.). Судя по всему, это *очень важные числа*, характеризующие структуру пространства-времени в настоящую эпоху.

Итак, вышеприведенные факты (и им подобные) заставляют ученых говорить о некой «тонкой подстройке» начальных условий и значений фундаментальных постоянных. Такой взгляд на мироздание подкрепляет ещё, так называемая, *проблема больших чисел*, состоящая в том, что во многих фундаментальных постоянных и их соотношениях можно обнаружить большое число $\sim 10^{40}$ (как некое «магическое число»). Приведем ряд примеров:

$N_p \sim 10^{80} \sim (10^{40})^2$ – число протонов (всех частиц) во Вселенной;

$N^* \sim 10^{57} \sim (10^{40})^{3/2}$ – число протонов (всех частиц) в типичной Звезде;

$t_H/t_N \approx 10^{41} \sim 10^{40}$ – отношение: возраст Вселенной/ядерное время;
 $t_H/\varepsilon_{\text{ВУ}} \approx 10^{61} \sim (10^{40})^{3/2}$ – возраст Вселенной/планковское время;
 $t^*/t_N \approx 10^{38} \sim 10^{40}$ – время жизни типичной звезды/ядерное время;
 $t_N/\varepsilon_{\text{ВУ}} \approx 10^{20} \sim (10^{40})^{1/2}$ – отношение: ядерное время/планковское время;
 $t^*/\varepsilon_{\text{ВУ}} \approx 10^{58} \sim (10^{40})^{3/2}$ – время жизни звезды/планковское время;
 $M^*/m_p \approx 10^{57} \sim (10^{40})^{3/2}$ – масса типичной звезды/масса протона;
 $t_p/\varepsilon_{\text{ВУ}} \approx 10^{82 \pm 2} \sim (10^{40})^2$ – время жизни протона/планковское время;
 $\rho_V/\rho \sim 10^{30} \sim (10^{40})^{3/4}$ – плотность планет/средняя плотность Вселенной.

В физических теориях числа типа 4π или 2π появляются часто, и это не вызывает удивления. Однако число 10^{40} (которое полностью составлено из фундаментальных постоянных и поэтому, вероятно, имеет фундаментальный смысл) неимоверно велико по сравнению с привычными коэффициентами (4π , 2π и т. п.). Например, колоссальное значение $\alpha_G^{-1} \sim 10^{40}$ выражает чрезвычайную слабость гравитации. Физики давно пытаются выяснить, почему гравитация так слаба по сравнению с другими силами природы, например с электромагнетизмом, для которого $\alpha^{-1} \approx 137$. Сила гравитации в атоме водорода примерно в 10^{40} раз слабее электромагнитных сил, и это соотношение, например, прямо влияет на время жизни типичной звезды. Так, если бы гравитация была сильнее, то звезды быстрее сгорели бы дотла. Увеличение G в 10 раз полностью изменило бы строение Солнечной системы, и жизнь была бы невозможна. Иначе говоря, чрезвычайно большое характерное время, необходимое, чтобы во Вселенной произошли заметные изменения, обусловлено слабостью гравитационного взаимодействия.

Необычный подход к космологии предложил в 1937 г. великий английский физик-теоретик Поль Дирак (1902–1984), на которого большое впечатление произвел тот факт, что размеры Вселенной больше, чем размеры электрона, во столько же раз, во сколько электрическое взаимодействие сильнее гравитационного. Размеры же Вселенной непрерывно увеличиваются, и такое совпадение представляется связанным с тем, что мы случайно живем именно в *этой*, а не в другой период времени. Но Дирак предположил, что так должно быть всегда! Это, в частности, возможно, если допустить, что гравитационная “постоянная” G уменьшается пропорционально $1/t$, так чтобы во все эпохи выполнялось соотношение: $t_H/t_N \sim \alpha_G^{-1} \sim 10^{40}$. Для проверки неизменности G (и других постоянных) был выполнен целый ряд физических экспериментов, однако это не дало никаких *бесспорных* свидетельств изменений фундаментальных постоянных. Правда, некоторые физики утверждают, будто G едва уловимо изменяется, но эти данные допускают и альтернативные объяснения.

Одно из возможных объяснений совпадений больших чисел сводится к предположению, что жизнь во Вселенной может существовать только в эпоху от t^* до, скажем, $10t^*$, где t^* – время жизни типичной звезды (типа Солнца) равное $t^* \sim \alpha_G^{-1} t_N \sim 10^{40} t_N$. Т. е. выраженное в единицах ядерного времени (t_N) “наше время” (t^*) близко к числу 10^{40} . Исходя из того, что разумные существа (состоящие из соединений углерода) могут познавать Вселенную только в течение эпохи от t^* до $10t^*$, то “случайное совпадение” перестает быть таковым, превращаясь всего лишь в прямое следствие физики и биологии. Однако не исключено, что существуют иные формы химической жизни (не на углероде), для которой приведенная оценка эпохи t^* (а значит и объяснение числа 10^{40}) теряет смысл.

Комбинаторная матрица редких миров в ГТНЧ (см. п. 1.22), построенная для Большого отрезка, содержит около $1,5 \cdot 10^{42}$ различных натуральных чисел N . А если взять количество столбцов матрицы $j=20$ (т. к. только у единственного лидера в 21-м столбце МЛ будет отличный от нуля показатель), то тогда высота комбинаторной матрицы уменьшится до $1,5 \cdot 10^{40}$ чисел. В любом случае – мы приближаемся к фундаментальному большому числу 10^{40} .

Можно также отметить, что на Большом отрезке количество различных миров (120000 редких и около 687500 частых мира) близко к числу $1/\alpha_w \approx 10^5$, т. е. близко к постоянной слабого взаимодействия.

Есть теории, в которых структуру Вселенной определяет всего несколько чисел. Например, согласно И. Розенталю (1982 г.) таких чисел *семь*: четыре силы; масса протона, и масса нейтрона (деленных на массу электрона); размерность пространства (оно трехмерно). Семерка мировых чисел подогнана друг к другу очень тщательно (т. к. общие корни и совместная эволюция), малейшие отклонения – и полная катастрофа картины мира.

Пытаясь понять «тонкую подстройку» мироздания, совпадения больших чисел, некоторые ученые пришли даже к предположению, что в физике, а также в химии и биологии, экспериментировал «сверхинтеллект». Такое направление вызвало живейший интерес религии, которая привлекает в свои ряды ученых для адаптации научной мысли в далеко не бескорыстных целях (см. п. 4. 10). Независимо от того, могут ли законы природы привести к «тонкой подстройке», к совпадениям больших чисел или нет, тот факт, что «тонкая подстройка» мироздания необходима для существования человека (познающего это мироздание), несомненно, одно из самых красивых открытий современной науки.

В рамках ГТНЧ мы выявили множество различных параметров, которые не менее «тонко» (сверхсложно) увязаны между собой, причем единственная причина «тонкой подстройки» в мире чисел – простейшая архитектура Пирамиды (см. рис. 2). Причем в конце Большого отрезка многие соотношения в

ГТНЧ могут содержать число 10^{61} , и, кстати, именно его можно принять за «магическое число» в космологии, поскольку $(10^{61})^{2/3} \sim 10^{40}$.

В ГТНЧ всё «богатство красок» и удивительных хитросплетений структуры чисел имеет в своей основе элементарное «расширение» натуральных чисел $(1+1+1+1+1+\dots)$. А не может ли нечто подобное (и элементарное) служить причиной «тонкой подстройки» пространства-времени? Возможно, говорить о подстройке в физике даже бессмысленно (как, например, в ГТНЧ). Просто мы пока не знаем «архитектуру Пирамиды» мироздания.

В заключение главы рассмотрим *постоянную тонкой структуры*, равную $\alpha = 2\pi e^2 / (hc) \approx 0,0072973506$ или $\alpha^{-1} \approx 137,035987$. Она входит в описание всех процессов, включающих взаимодействие вещества и излучения, поэтому её роль в физике невозможно переоценить. Постоянные слабого и сильного взаимодействия α_w и α_s (см. табл. 26), а также гравитационная постоянная тонкой структуры α_G менее фундаментальны по своему значению, чем α . Постоянная тонкой структуры определяет тонкое расщепление уровней энергии атома (а, следовательно, и спектральных линий). Величина тонкого расщепления пропорциональна α^2 . Расщепление сильно возрастает с увеличением заряда ядра атома (Z) и для уровней энергии тяжелых атомов уже перестает быть «тонким». В квантовой электродинамике α – естественный параметр, характеризующий «силу» электромагнитного взаимодействия (поэтому α ещё называют *константой электромагнитного взаимодействия*). Именно это взаимодействие определяет структуру атомов, а, следовательно, описывает всю картину явлений в химии и физике (за исключением ядерных процессов).

Существует ли в ГТНЧ некий «аналог» постоянной тонкой структуры? Приведем только два наиболее любопытных «совпадения» (условно считаем, что до конца параграфа идет мелкий шрифт).

1) Будем считать, что средняя орбита n простых чисел (начиная с первого простого числа $P=2$, у которого $n=1$) равна $H_s = \ln n$ (см. п. 1.10). Тогда *средняя орбита простых чисел* будет численно равна постоянной тонкой структуры ($H_s \approx \alpha^{-1} \approx 137,035987\dots$) при $n \approx 3,26567400 \cdot 10^{59}$. Но, с другой стороны, используя формулу Чебышева $n \approx N / \ln N$, можно определить правую границу отрезка $[1; N]$, на котором появилось $n = 3,26567400 \cdot 10^{59}$ простых чисел. И эта граница примерно равна $N \approx 4,64 \cdot 10^{61}$ (*эви*), т. е. мы получили почти правую границу Большого отрезка (около 79,4 млрд. лет, т. е. всего в $4 \div 8$ раз больше возраста Вселенной). Таким образом, в ГТНЧ постоянная тонкой структуры (α^{-1}) «возникает» в конце Большого отрезка в лице параметра H_s . Некую «связь» постоянной тонкой структуры α и средней орбиты H_s подтверждает и тот факт, что *величина* тонкого расщепления в физике пропорциональна

α^2 , а максимально возможная *величина* орбиты в ГТНЧ также пропорциональна квадрату средней орбиты – Hs^2 . Но, если средняя орбита простых чисел, действительно, как-то “коррелирует” с постоянной тонкой структуры, то придется признать, что последняя вовсе не константа! Кстати, в таком случае проверить рост α^{-1} (или убывание α) очень трудно, так как *шестая цифра* после запятой в современном значении постоянной тонкой структуры (α^{-1}) увеличится на единицу примерно через 138000 лет.

2) Более «изошрённый» аналог постоянной тонкой структуры ($\alpha \approx 0,007$) в ГТНЧ – это отношение количества *лидеров орбит простых чисел* – Z к количеству *лидеров всех миров* – K (подробно об отношении Z/K см. в п. 1.11). В конце Большого отрезка, вероятно, имеем $Z/K \approx 0,006 \div 0,011$. Причем седьмая цифра после запятой в числовом значении параметра Z/K в конце Большого отрезка уменьшится на единицу, когда правая граница отрезка $[1; N]$ увеличится на $7 \div 17$ млн. лет (для наглядности мы перевели увеличение числа N из *эви* в количество лет), а шестая цифра после запятой уменьшится на единицу, когда N увеличится на $51 \div 68$ млн. лет. Т. е. по человеческим меркам параметр Z/K вполне можно считать константой. Кстати, в сингулярности параметр Z/K был гораздо больше (см. рис. 7): при $N=2$ он был равен 0,5; при $N=3$ подскочил до 0,8; потом уменьшился до 0,435 при $N=89$; после чего стал расти (не переставая совершать небольшие колебания) до значения 0,614 при $N=44293$ и уже после этого (второго) максимума параметр Z/K , очевидно, окончательно начинает неизменно убывать вплоть до “современного” своего значения (в конце Большого отрезка).

Существует гипотеза, согласно которой гравитационная постоянная G не является таковой, а *изменяется* менее чем на одну десятиллиардную в год и это близко к темпу изменения α , полученному нами в рамках ГТНЧ.

4.10. АНТРОПНЫЙ ПРИНЦИП В КОСМОЛОГИИ

Суть принципа достаточно проста. Физика устанавливает ряд фундаментальных констант (см. табл. 26). Известные физики Поль Дирак, Артур Эддингтон и другие заметили, что мировые константы как будто специально «подобраны» так, чтобы во Вселенной могли возникнуть условия, необходимые для существования живых организмов и человека. Речь идет об отклонениях порядка одной миллиардной от известных значений мировых констант. О точности оценок можно спорить, но важен несомненный факт «тонкой подстройки» Вселенной на «волну жизни». Причем эта подстройка проявляется на всех уровнях строения материи, от космического мегауровня до микроуровня. Но кто или что играет роль «настройщика»?

Многие физики пытаются опровергнуть этот принцип. И появились две формулировки. **«Слабый» антропный принцип** утверждает: сложные структуры образуются «самопроизвольно» – таковы внутренние свойства материи. Жизнь – это великая галактическая случайность... А **«сильный» антропный принцип** строже: Вселенная устроена так, что должны появиться не только живые существа, но и «наблюдатели», разумные существа (иначе Вселенная бессмысленна). Если «слабый» антропный принцип говорит о том, что человек возможен, то «сильный» – о том, что человек необходим Космосу! Какой из двух вариантов более обоснован? По сути дела, здесь проявляются две различные философские позиции. В «слабом» – слегка завуалированный материализм. В «сильном» – то, что вернее назвать не идеализмом, а духовным пониманием мира. Сторонники последнего («духовники») заявляют, что на самом деле, естественные науки не открывают настоящий «смысл вещей», мол, такой смысл нельзя найти без философского мышления. Еще в XIX веке русский мыслитель-духовник Николай Страхов (естественник по образованию) заметил: «Человек – величайшая загадка и величайшее чудо мироздания. Природа стремиться к нему как к своему пределу». А это и есть «сильный» антропный принцип.

«Сильный» антропный принцип подразумевает (но не доказывает) Бога, как «настройщика» Вселенной. Но ученые-духовники не видят в этом ничего страшного, заявляя, что область знания состоит не только из науки. При этом они ссылаются на немецкого ученого и философа Иммануила Канта (1724–1804), который считал, что для человека существует три предмета познания – Бог, природа, человек; и, соответственно, три области знания – богословие, естествознание и философия. Вот так антропный принцип, выйдя из недр естествознания, стараниями ученых-духовников оказался на стыке трех областей.

Пути господние неисповедимы.... Так, однажды молодой человек (наш современник), будучи уже кандидатом физико-математических наук, становится кандидатом богословия, Секретарем *Ученого* (!?) совета Санкт-Петербургской духовной академии и семинарии, а заодно – настоятелем храма Святых Апостолов Петра и Павла при Санкт-Петербургском госуниверситете. Рассуждения процветающего отца Кирилла о науке и антропном принципе весьма изощренные, но в этом и вся их прелесть [48]:

«Принятый наукой метод познания основывается на предположении, что сами свойства измеряемых объектов не зависят от наблюдателя. Но недавно выяснилось, что это не так. Эксперименты по проверке неравенств Белла в конце 70-х – начале 80-х годов показали, что некоторые параметры микроскопических объектов (скажем, координата и импульс) не существуют вне

измерений и это можно проверить в эксперименте (как результат взаимодействия наблюдателя с исследуемой реальностью). Т. е. наука подошла к опровержению своих исходных предпосылок. Квантовая механика и теория относительности показывают, что «элементами» картины мира являются не «объективные» факты, но события, эффекты события и мира.

Это позволило Джону Арчибальду Уилеру, одному из крупнейших физиков XX века, выдвинуть гипотезу: само наблюдение делает мир таким, каким мы его видим. Возможно, именно миллиарды наблюдений порождают совокупный образ мироздания! Наблюдатель в определенном смысле участвует в творении Вселенной, оказывается со-творцом Творца, со-работником Божиим. Человек вовсе не песчинка, не микро-, а макрокосм. Как говорится в книге Экклезиаста, Бог «вложил мир в сердце человека» (мир – как полноту бытия, сверхмирность человека). Человек в определенном смысле включает в себя всю Вселенную. Именно об этом свидетельствует «антропный принцип». Отсюда следует, что каждый человек может изменить этот мир. О том же сказал Серафим Саровский: «Спасись сам – и вокруг тебя спасутся тысячи...». Т. е. когда меняется человек, изменяется структура мироздания! (то, что мы видим, – результат статистического воздействия людей, поэтому отклонения незаметны). И факт Боговоплощения свидетельствует, что в человеке есть та глубина, которая позволяет вместить не только все сотворенное, но и Творца. Но это огромная редкость – чтобы человек переменялся до самой глубины (как святые).»

4.11. ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ ЕДИНИЦЫ ВСЕЛЕННОЙ

Границы познания структуры материи простираются от 10^{-16} м до 10^{26} м, но и внутри этого диапазона может существовать множество еще неизвестных видов материи. Самые малые единицы длины и времени (планковская длина – l_p и планковское время – t_p , см. табл. 26), а также самые большие (размеры и возраст Вселенной) определяются *гравитацией* (G). Между этими предельными значениями лежат структуры, обусловленные действием ядерных и электромагнитных сил. Последние ответственны за все структуры от атомов до окружающих нас предметов.

В настоящее время во Вселенной можно выделить целый ряд основных структурных единиц (типов материальных систем, уровней материи), которые приведены в табл. 27 с указанием их *характерных* размеров и массы. Слово «характерные» говорит о том, что числа даны только по порядку величины, отражая размеры и массы наиболее типичных представителей. Гипотетические (и самые спорные) величины, предложенные автором, помещены в скобки.

Таблица 27. Основные структурные единицы Вселенной

J	Наименование структурных единиц	Размер, м	Масса, кг
1	Пенистая структура пространства-времени	10^{-35}	(10^{-68})
2	Элементарные бесструктурные частицы (?)	(10^{-32})	(10^{-62})
3	Элементарные частицы первого уровня (?)	(10^{-29})	(10^{-56})
4	Элементарные частицы второго уровня (?)	(10^{-26})	(10^{-50})
5	Элементарные частицы третьего уровня (прекварки?)	(10^{-23})	(10^{-44})
6	Кварки, лептоны (объединения прекварков?)	10^{-18}	(10^{-38})
7	Нуклоны (протоны и нейтроны – объединения кварков)	10^{-15}	10^{-27}
8	Ядра атомов (многообразные объединения нуклонов)	10^{-14}	10^{-25}
9	Атомы (структуры, состоящие из ядра и электронов)	10^{-10}	10^{-25}
10	Органические молекулы (различные соединения атомов)	10^{-7}	10^{-20}
11	Живые клетки (сложные упорядоченные структуры)	10^{-5}	10^{-10}
12	Головной мозг разумных существ (его ядро, «душа»)	0,06	0,06
13	Сообщества разумных существ (социальные структуры)	66	60000
14	Астероиды, кентавры, кометы (неправильная форма)	10^5	10^{12}
15	Планеты (массивные тела сфероидальной формы)	10^7	10^{24}
16	Звезды (газовые шары с термоядерными реакциями)	10^{10}	10^{30}
17	Планетные системы вокруг звезд (центров этих систем)	10^{13}	10^{30}
18	Звездные скопления (звезды, связанные гравитацией)	10^{18}	10^{35}
19	Галактики (гигантские «острова» звездных скоплений)	10^{21}	10^{41}
20	Скопления галактик (наибольшие из известных структур)	10^{23}	10^{46}
21	Наблюдаемая Вселенная (Метагалактика)	10^{26}	10^{53}

Комментарий к табл. 27 (идущий ниже до конца параграфа) «заслуживает» мелкого шрифта, но текста довольно много, поэтому шрифт не меняю.

Количество основных структурных единиц Вселенной в точности равно количеству столбцов матрицы лидеров редких миров (см. п. 1.23), построенной для Большого отрезка. Как не удивительно, но именно такое количество шагов наилучшим образом «связывает» *элементарную длину* (10^{-35} м) и размеры Метагалактики (10^{26} метров, которые фотоны света преодолели за 10^{17} секунд или 10^{61} эви). Причем характерный размер (L , м) структурной единицы и её порядковый номер ($J=1, 2, 3, \dots, 21$) связаны классической *экспонентой* (см. п. 2.1), интенсивность которой равна 7:

$$L \approx 2 \cdot 10^{-38} \cdot \exp(7 \cdot J) \quad , \quad (243)$$

т. е. скорость изменения характерного размера L прямо пропорциональна наличному значению L , а коэффициент пропорциональности равен 7 ($dL/dJ=7 \cdot L$). Данная экспонента дает размеры, которые не более чем на порядок отличаются от указанных в табл. 27, за исключением кварков и нуклонов, размеры которых экспонента «уменьшает» на два порядка, а также «требует» существования четырех гипотетических уровней между пенистой структурой пространства-времени и кварками. Для макромира формула

(243) дает более или менее правдоподобные величины, только характерный размер звезд, вероятно, больше, чем диаметр Солнца.

Характерные массы (M , кг) основных структурных единиц Вселенной также удастся описать, причем очень похожей экспонентой

$$M \approx 2 \cdot 10^{-74} \cdot \exp(13,9 \cdot J) , \quad (244)$$

однако здесь уже отклонения от табл. 27 могут достигать нескольких порядков. Так, формула (244) говорит о том, что во Вселенной (в т. ч. на других планетах) атомы и органические молекулы могут быть гораздо тяжелее, а звезды и планеты могут быть гораздо легче, чем в табл. 27.

В приведенной таблице некие сомнения вызывает позиция, имеющая отношение к “разуму”. В качестве характерного размера здесь напрашивалась величина 1,6 м (рост человека), однако формула (243) при $J=12$ выдает значение $L \approx 0,06$ м (что близко к толщине слоя нервных тканей в полушариях мозга человека – 4,5 см), и формула (244) выдает $M \approx 0,06$ кг, хотя средний вес человека около 62 кг, а его головного мозга – 1,325 кг. Примечательно, что обе формулы явно проигнорировали тело человека, указывая скорее на его “душу” (величиной с куриное яйцо?). Кстати, есть данные, говорящие о том, что в момент смерти человека его масса скачком уменьшается на некую величину и что-то вполне материальное, но не видимое простым глазом, покидает брэнное тело.

Еще больше вопросов вызывает строка таблицы с условным наименованием “Сообщества разумных существ», где значения L и M также взяты по формулами (243) и (244) при $J=13$. Легко убедиться, что такое “сообщество” состоит примерно из миллиона членов с “параметрами разума” $L \approx 0,06$ м и $M \approx 0,06$ кг, т. е. это условно соответствует населению города с миллионом жителей.

Заслуживает внимания и тот факт, что “разум” и живая материя заняли центральное место среди остальных структурных единиц Вселенной. Ситуация такова, словно мы имеем дело с неким фундаментальным *тильда-распределением* (см. п. 1.37, формула 168): чем меньше или больше номер структурной единицы (J) уходит от значения $J=12$, тем меньше существует разновидностей данной структурной единицы, а максимум различных вариаций (“богатства красок”) приходится именно на центр ($J=12$). Так, в настоящее время только на нашей планете насчитывается свыше 3 млн. видов живой материи (качественно обособленных друг от друга форм фауны). А всего на Земле в ходе эволюции было около 500 млн. различных видов фауны. О богатстве видов живой материи на планетах вокруг других звезд нашей Галактики, в других галактиках – об этом можно только догадываться, но, скорее всего, их количество чудовищно велико.

Но стоит нам «погрузиться» в микромир (перейдя в табл. 27 на строчку $J=9$), как среди атомов мы обнаружим куда меньше разнообразия, ведь науке известно немногим более сто химических элементов. А количество типов кварков ($J=6$) доходит только до шести. По-настоящему элементарных бесструктурных частиц ($J=2$), очевидно, не более трех (что-то вроде натуральных чисел $N=1, 2, 3$ в ГТНЧ). С другой стороны обращение к макромиру также приводит к заметному снижению многообразия. Например, звезды ($J=16$) делятся всего на семь спектральных классов (они связаны с температурой их поверхности), или звезды также делят на семь классов светимости (они связаны с физическими параметрами звезд). Классификация галактик ($J=19$) по их внешнему виду сводится только к четырем основным видам: эллиптические, линзовидные, спиральные и неправильные галактики. С точки зрения активности ядра галактики можно разделить на три типа: галактики с незначительной активностью ядра; со слабоактивными ядрами (радиогалактики); с активными ядрами (N-галактики, квазары). Скопления галактик ($J=20$) бывают четырех видов: бедные скопления, богатые, сверхскопления (их более 50, содержащих в среднем по 10 богатых скоплений), цепочка сверхскоплений (пока обнаружена только одна).

Таким образом, именно на уровне $J=12$ *комбинаторика природы* приводит к наибольшей вероятности появления «разума» – самой сложной структуры пространства-времени, способной понять самую себя, а значит и окружающий мир. В принципе «разумом» могли бы обладать, например, атомы или звезды, но, очевидно, вероятность этого исчезающе мала, как мала вероятность и того, что сгоревшая спичка превратится в целую. В части числа 12 любопытно заметить, что условие существования планет (в т. ч. с разумными существами) во Вселенной можно свести к выражению

$$\ln[\alpha_G / (m_e / m_p)^4] / \ln \alpha \geq 12, \quad (245)$$

где α – постоянная тонкой структуры; α_G – постоянная гравитационной «тонкой структуры»; m_e и m_p – масса электрона и протона, т. е. все величины в данном выражении имеют фундаментальнейшее значение в природе.

В заключение параграфа несколько слов о плотности основных структурных единиц, поскольку, зная L и M , трудно удержаться от соблазна вычислить плотность $\rho^* = M / (\pi \cdot L^3 / 6)$. Так вот, в ряде случаев реальная плотность (ρ) структурной единицы почти совпадает со значением ρ^* : для ядерной плотности; для головного мозга человека; для галактик. Если принять, что критическая плотность во Вселенной равна $\rho \approx 5 \cdot 10^{-30}$ г/см³, то получаем $\rho^* / \rho \approx 17$, т. е. расширение Вселенной со временем вполне может смениться сжатием (закрытая или замкнутая модель Вселенной).

Для пенистой структуры пространства-времени (при $J=1$) получаем $\rho^* \sim 10^{33}$ г/см³, что меньше плотности материи в сингулярности (не менее 10^{93} г/см³), но больше плотности, которая была при возрасте Вселенной 0,01 секунды ($\sim 10^{10}$ г/см³). Таким образом, гипотетические уровни с $J=2 \div 5$ – вполне могут (или могли) существовать.

4.12. ОТ НУЛЯ ДО БЕСКОНЕЧНОСТИ – ОДИН ШАГ

Вглядываясь все глубже в микромир (молекулы, атомы, ядра атомов, нуклоны, кварки и лептоны), мы наблюдаем такую картину: в области, на два-три порядка меньшей, перед нами раскрывается новый мир физических объектов с новыми, до сих пор неизвестными закономерностями. Происходит непрерывный переход количества в качество. Причем на определенном этапе становятся не пригодными слова «состоит из», так свободный нейтрон распадается на протон, электрон и антинейтрино, но нельзя говорить, что нейтрон *состоит из* этих частиц. Привычные представления о простом и сложном, о целом и части в микромире совершенно непригодны.

В микромире, возможно, ВСЁ состоит из ВСЕГО. Неверно искать в микромире «последнюю» элементарную частицу, её просто нет. Каждая частица оказывается бесконечно сложной. Все зависит от всего, и нет малых параметров. Такие воззрения получили название «*ядерной демократии*», а механизм её обуславливающий обозначают словом «*бутстрап*» (от английского «зашнуровка», ведь каждая частица как бы связана единым «шнурком», как отверстия в ботинке). Бутстрап – это очень сложное понятие, его еще не удалось сформулировать на строго математическом языке. Понятия ядерной демократии, бутстрапа идут вразрез с доктриной кварков, ведь при демократии не может быть частиц-аристократов, какими являются кварки – «кирпичики» мироздания. Кстати, ученым никак не удается обнаружить кварки в свободном состоянии.

Быть может, кварки не более реальны, чем, скажем, параметры выпуклых многогранников в стереометрии: количество граней (G), вершин (B) и ребер (P) у которых всегда подчиняется простому правилу $G+B-P=2$. Это установил в 1620 г. Рене Декарт (1596 – 1650), а в 1752 г. Л. Эйлер перетоткрыл эту формулу, и она стала носить его имя. Подобно тому, как в рамках стереометрии невозможно увидеть грани, вершины и ребра в «свободном состоянии» (хотя их можно описывать красивыми формулами), так и свободных кварков нам не дано наблюдать.

В микромире массивное не может складываться из легчайшего. Так, например, считается, что протон состоит из 3-х кварков, но есть подозрения, что кварк раз в десять может быть тяжелее протона. Тогда можно говорить о дефекте масс: скажем, при слиянии 3-х свободных кварков 95% их массы

переходит в энергию (не в этом ли причины взрывающихся галактик?). Основное вещество протона сконцентрировано в его центральной части – ядре (его радиус около $5 \cdot 10^{-16}$ м, что всего в несколько раз меньше размеров протона). Остальная часть протона – мезонная оболочка, или «шуба». Примерно так же устроен нейтрон. Строение ядра – загадка, возможно, он сложен из плотных сгустков очень тяжелых частиц.

Из «соотношения неопределенностей» Гейзенберга следует, что чем меньше размеры области, где заключен исследуемый объект, тем больше его скорость или энергия, или, что то же самое – масса. Поэтому, чем в большие глубины микромира мы забираемся, тем с большими массами будем иметь дело. Но как далеко при этом будет происходить рост массы? В 1965 г. академик М. А. Марков (1908–1994) предложил назвать частицу с предельно большой массой «максимоном», а её значение принять равной *планковской массе* ($m \approx 2,18 \cdot 10^{-8}$ кг, см. табл. 26). Согласно теории Маркова, нет элементарных частиц с массой больше, чем у максимона. Планковская масса – это колоссальная величина для микромира (такая масса у капельки воды диаметром 0,27 мм), ведь она в 10^{19} раз больше массы протона, причем при близких с ним размерах. На Земле такую тяжелую частицу не обнаружить, она мгновенно провалится к центру планеты.

Еще Александр Фридман (1888–1925) обнаружил, что уравнение Эйнштейна имеет решения, которые описывают *замкнутый мир*, когда под действием гравитации материя может «схлопнуться», образовав замкнувшееся пространство. Радиус такого замкнутого мира зависит от его массы. Так, размер замкнутого мира с массой близкой к массе наблюдаемой нами Вселенной составляет около $3,1 \cdot 10^{25} \div 1,8 \cdot 10^{26}$ км. При таких огромных размерах свойства замкнутого мира практически не отличаются от свойств «плоского» мира (с Евклидовой геометрией). Помимо нашей Вселенной может существовать множество других замкнутых миров, причем все эти миры полностью отделены друг от друга. Связь между мирами пока вызывает очень большие сомнения. По отношению ко всем остальным, каждый из миров является «абсолютным ничто», точкой, лишенной размеров, массы и всех других мыслимых физических свойств. Но для живущих в этом замкнутом мире существ их собственный мир – это бескрайняя вселенная.

Поэт Валерий Брюсов (1873–1924) выразил идею о самоподобии миров в коротком и удивительно красивом стихотворении:

Быть может, эти электроны –
Миры, где пять материков,
Искусства, знания, войны, троны
И память сорока веков!

Их меры малы, но все та же
Их бесконечность, как и здесь;
Там скорбь и страсть, как здесь, и даже
Там та же мировая спесь.

Еще, быть может, каждый атом –
Вселенная, где сто планет;
Там – все, что здесь, в объеме сжатом,

Их мудрецы, свой мир бескрайний
Поставив центром бытия,
Спешат проникнуть в искры тайны

К идее самоподобия малого в большом, в принципе, прийти несложно, достаточно быть наблюдательным, думающим человеком. Самоподобными, например, являются правильный треугольник и квадрат, т. к. их можно разрезать на конечное число одинаковых фигур, подобных исходной. Свойства самоподобия обнаруживают многие объекты в природе: линии трещин в земной коре, ветвления деревьев, очертания гор, облаков и коралловых рифов. Так, рельеф гор как бы не зависит от масштаба: рассматривая горный хребет из космоса, из самолета, или непосредственно с горной вершины мы каждый раз будем обнаруживать все новые и новые подробности, искривления и изломы (горы в горах). Объекты, обладающие таким свойством, современный американский математик Бенуа Мандельброт предложил называть *фракталами* (от лат. frangere – «ломать», «разбивать», см. п. 3.6).

Академик М. Марков высказал идею о том, что если замкнутую систему «подпортить» внесением электрического заряда, то она «откажется» быть полностью замкнутой. Возникнут «полузамкнутые» миры, которые связаны с «внешним» пространством тонкой «горловиной». Внутри горловины поле тяготения настолько велико, что даже свет не в состоянии вырваться наружу. Снаружи полузамкнутый мир должен казаться элементарной частицей точечных размеров. Подобные частицы Марков назвал «*фридмонами*» в честь Фридмана (еще их называют «планксонами» в честь Планка). Таким образом, наша Вселенная может оказаться фридмоном (с радиусом горловины всего 10^{-35} м, фотон пролетает её за 1 *эви*). Теория предсказывает очень сложную структуру материи, окружающей фридмон. Вокруг «голового» фридмона нарастают слои («шуба») из виртуальных частиц, которые самопроизвольно рождаются и тут же исчезают. Эти фантомы имеют слоистую структуру. Ближе к фридмону находится «кern» – слои из более тяжелых виртуальных частиц. На периферии фридмона (ближе к людям) – рыхлые мезонные «облака», а внутри глубоко и надежно запрятан сам фридмон. Возможно, он и является как бы затравочным ядром для образования элементарных частиц, которые наблюдают физики в своих опытах. А в ядре-фридмоне открывается... вселенная! (связь с которой невозможна?).

Средняя плотность наблюдаемого вещества во Вселенной оценивается как $\rho \approx 10^{-31}$ г/см³, причем полагают, что это несколько меньше *критической плотности* (ρ_c), при которой Вселенная оказывается замкнутой (наш мир

оказывается фридмоном, а его размеры как целого – микроскопические). Пока достоверно известен только диапазон, в котором находится соотношение указанных плотностей – *параметр плотности* $\Omega \equiv \rho/\rho_k$:

$$0,01 \leq \Omega \leq 10, \text{ причем } \rho_k \approx 4,7 \cdot 10^{-30} \cdot (H/50)^2, \text{ г/см}^3. \quad (246)$$

Совместно с *параметром Хаббла* (см. п. 4.2), у которого известен также только диапазон возможных значений ($50 \leq H \leq 100$ км/с/Мпк), параметр плотности Ω определяет возраст Вселенной (T , в годах):

$$T \approx (1,96 \cdot 50/H) \cdot f(\Omega) \cdot 10^{10}, \text{ где} \quad (247)$$

$$f(\Omega) \approx -0,0113 \cdot (\ln \Omega)^2 - 0,1181 \cdot \ln \Omega + 0,6665. \quad (248)$$

Таким образом, возраст Вселенной в принципе может составлять от $T \approx 3,3$ млрд. лет или $1,9 \cdot 10^{60}$ *эви* (при $H=100$ и $\Omega=10$), до $T \approx 19$ млрд. лет или $1,1 \cdot 10^{61}$ *эви* (при $H=50$ и $\Omega=0,01$). При этом размер Вселенной логично определять как $R \approx c \cdot T$, где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Тогда масса всех видов материи во Вселенной будет равна $M \approx \rho \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot R^3$.

Разделив массу Вселенной на массу одного фридмона, мы получим максимально возможное количество фридмонов во Вселенной ($K \approx M/m$), а если теперь возраст Вселенной (T , *эви*) разделить на это количество, то мы получим оценку минимально возможного времени, которое прошло до появления очередного фридмона $t_{\phi} \approx T/K$ (время ожидания фридмона). Из приведенных выше формул следует, что это время находится в диапазоне:

$$1,8 < t_{\phi} < 211,4 \text{ (эви)}. \quad (249)$$

Причем это время зависит исключительно от параметра плотности Ω :

$$t_{\phi} \approx e^{\pi \cdot 2} \cdot \Omega^{-\sqrt{1:\pi}} \cdot \exp[(\ln \Omega)^2 \cdot \lg(\ln \pi)]. \quad (250)$$

Формулы (246)÷(248) позволяют уточнить понятие «Большой отрезок» из ГТНЧ. Очевидно, за Большим отрезком «скрываются» следующие основные параметры Вселенной (при $H=50$ км/с/Мпк и $\Omega=0,1$):

- средняя плотность наблюдаемого вещества – $\rho \approx 4,7 \cdot 10^{-31}$ г/см³;
- критическая плотность – $\rho_k \approx 4,7 \cdot 10^{-30}$ г/см³ (т. е. Вселенная не фридмон);
- возраст Вселенной – $T \approx 17,219$ млрд. лет $\approx 5,4 \cdot 10^{17}$ сек $\approx 1,01 \cdot 10^{61}$ *эви*;
- размер Вселенной (путь, пройденный фотонами света) – $R \approx 1,6 \cdot 10^{26}$ м;
- масса наблюдаемого вещества во Вселенной – $M \approx 8,5 \cdot 10^{51}$ кг;
- среднее время ожидания очередного фридмона – $t_{\phi} \approx 25,8$ (*эви*).

Гипотеза Маркова о том, что исчезающе малый фридмон (почти ничто, нуль) может заключать в себе бесконечно большую вселенную – яркий пример возможной близости *нуля и бесконечности*, когда бесконечно большое охватывается бесконечно малым. Любопытно, что ГТНЧ также демонстрирует аналог этой фантастической ситуации: единица (почти нуль) оказывается чрезвычайно близка к бесконечности! (см. п. 1.8).

Если пространство-время бесконечно и одновременно замкнуто само на себя, то остается ли в нем место Богу? Как-то Наполеон Бонапарт (1769–1821) заметил гениальному П. Лапласу (1749–1827): «Я не нашел в вашей

“Небесной механике” бога, сударь”. Ответ ученого был однозначен: “*Я не нуждаюсь в этой гипотезе*”. К подобной мысли близок Кассандра¹ современности – Стивен Хокинг: “...*Вселенная без края в пространстве, без начала и конца во времени, без каких-либо дел для Создателя*” [40]. (Со студенческих лет Стивен Хокинг (род. в 1941 г.) прикован к инвалидной коляске. В возрасте 41 года он лишился также возможности говорить, подвижность сохранили только два пальца на одной руке. Этот мужественный человек общается с людьми посредством компьютера и синтезатора речи. Его признают гением, а его научные работы неизменно становятся сенсацией. Бестселлером стала его книга “Краткая история Времени” (1988 г.). Хокинг занимает кафедру прикладной математики в Кембридже, которой до него руководил Исаак Ньютон и Поль Дирак. Основной предмет его исследований – физика черных дыр.)

Парадоксальное утверждение о том, что ноль (единица) и бесконечность стоят рядом, не оставляя место Богу, – не должно огорчать читателя, т. к., появляются куда более реальные альтернативы, в отличие от тех, что предлагает религия. Например, переход души человека из бренного тела в мир лучший может иметь место, подобно тому, как один замкнутый мир (фридмон) переходит в другой посредством тончайшей «горловины» (см. выше). Как известно, есть немало людей, побывавших в коме, в угрожающих жизни состояниях (на грани жизни и смерти), которые потом рассказывали о неизвестном «туннеле», «трубе», «горловине» и т. п. вещах. Если это всё не просто последние «глюки» мозга, облегчающие нам уход из пространства-времени *в никуда и навсегда*, то тогда можно допустить, что эволюция *чего-то* (души?) продолжается и после смерти человека (который был неким «инкубатором» непонятой нами до сих пор формы материи).

В заключении заметим, что, вероятно, именно близкое «соседство» нуля и бесконечности в структуре пространства-времени приводит к любопытным закономерностям даже на житейском уровне. Вспомните многочисленные поговорки типа: «От великого до смешного – один шаг», «От любви до ненависти – один шаг», и т. п. Вспомните неоспоримые удивительные факты, например: самые тонкие ароматы духов – закрепляют на... амбре (т. е. на экскрементах кашалота); самые светлые и гуманные идеи капитализма (коммунизма и прочих «...измов») – неизбежно требуют крови и страданий миллионов людей для своего воплощения и т. д., и т. п.

Уместно также упомянуть о законе единства и борьбы противоположностей – «ядре» материалистической *диалектики*, науки о наиболее общих законах развития природы, общества и мышления. В бесконечном частоколе слов диалектики – можно найти и интересные мысли, в т. ч. почти совпадающие с нашими физическими гипотезами. Судите сами. При диалектическом подходе каждый объект заключает в себе *противоположность*, под которой

¹ Прорицания Кассандры – мрачные предсказания, вызывающие недоверие окружающих.

понимаются такие моменты, «стороны» и т. п., которые: (1) находятся в неразрывном единстве, (2) взаимоисключают друг друга, причем не только в разных, но и в одном и том же отношении, т. е. (3) взаимопроникают. Нет противоположностей без их единства, нет единства без противоположностей. Единство противоположностей относительно, временно, а борьба противоположностей абсолютна. Этот закон, якобы, помогает объяснить внутренний «источник» всякого движения, не прибегая ни к каким посторонним силам, позволяет понять движение как самодвижение.

4.13. СУПЕРПОЗИЦИЯ МИРОВ (ВИРТУАЛЬНЫЕ МИРЫ)

Мелкомасштабные свойства физического мира во многих отношениях более глубоки и далеки от нашего повседневного опыта, чем специальная теория относительности и общая теория относительности. Внутренняя структура атома не имеет никакого сходства с привычным для нас из обычной жизни макромиром. Краеугольным камнем физики элементарных частиц (микрокосма) является *квантовая механика*, которая достигла высочайшего расцвета. К сожалению, квантовая механика – более трудная для понимания и более абстрактная наука, чем теория относительности, и люди, не имеющие соответствующей математической подготовки, лишены возможности познать ее красоту и изящество.

Как уже говорилось, в настоящее время открыты сотни новых типов субатомных (элементарных) частиц, многие из которых живут ничтожную долю мгновения. Хаос в этом множестве новых микрообъектов отчасти удалось упорядочить после того, как были обнаружены некоторые неожиданные симметрии, однако до сих пор нет полной уверенности в том, состоят ли все эти частицы из одних и тех же элементарных частей или их число и разнообразие безгранично. Причем каждой элементарной частице при ее “рождении” из энергии (при переходе части массы покоя в эквивалентную ей кинетическую энергию и наоборот согласно формуле Эйнштейна $E=mc^2$) соответствует своя “зеркальная” частица (античастица). Например, протону соответствует антипротон, электрону – позитрон, а вместе антипротон и позитрон могут образовать атом антиводорода. О материи в этой ее зеркальной форме говорят как об антиматерии. Встречаясь, материя и антиматерия (вещество и антивещество) немедленно аннигилируют и вновь превращаются в энергию, скажем, в виде фотонов гамма-излучения.

В основе квантовой механики лежит отрицание возможности абсолютной предсказуемости всего происходящего во Вселенной независимо от объема доступной нам информации. Квантовая механика допускает множество возможных прошлых и будущих состояний, причем будущее состояние фи-

зической системы должно рассматриваться как *суперпозиция* всех возможных вариантов. Имеется не один, а колоссально много будущих миров, и каждый из них может реализоваться или нет с достаточно хорошо определенной вероятностью (любое предсказание имеет статистический характер). Вопрос о том, нужно ли считать, что все возможные миры существуют параллельно или в каждый момент некоторым случайным образом выбирается только один из них, представляет собой глубокую философскую проблему.

Когда мы рассматриваем пространство-время в достаточно малых масштабах, многие возможные типы миров появляются и исчезают словно тени. Такие эфемерные кратковременные образования называют иногда *виртуальными мирами*. Даже если начать с полного вакуума (пустого пространства), то и там на достаточно короткие промежутки времени будут возникать, а затем исчезать частицы всех типов. Продолжительность существования таких виртуальных частиц-фантомов в вакууме невероятно мала, и, тем не менее, мы не можем теперь считать вакуум “пустым”. Напротив, он заполнен тысячами разных типов частиц, возникающих, взаимодействующих и исчезающих с неослабевающей активностью. Такова квантовая картина пространства-времени – картина бурных флуктуаций и взаимодействий. Эта концепция – результат синтеза представлений квантовой механики и специальной теории относительности (с плоским характером пространства-времени).

Объединение квантовой механики и общей теории относительности, как можно ожидать, приведет к столь же радикальному изменению картины пространства-времени. Физики-теоретики тратят немало усилий, чтобы понять природу элементарных частиц в искривленном пространстве-времени общей теории относительности, которые, в данном случае, могут сильно влиять на крупномасштабные свойства Вселенной (например, это должно приводить к полному испарению черных дыр).

На еще более фундаментальном уровне квантовую механику можно применить и к самому гравитационному полю, т. е. проквантовать пространство-время. Эта проблема чрезвычайно сложна и глубока как с точки зрения математических методов, так и в принципиальном отношении. Гравитация проявляется через геометрию пространства-времени, поэтому квантовая теория гравитации должна иметь дело с суперпозицией миров, обладающих разными геометриями. Наблюдаемая геометрия, как это обычно для квантовой механики, будет определяться с помощью теории вероятностей. Вакуум опять-таки, по-видимому, “заполнится” флуктуациями, но теперь флуктуировать будет уже геометрическая структура. В мини-микроскопических масштабах будут с непрекращающейся активностью появляться и исчезать, сме-

няя друг друга, виртуальные миры с фантастически искривленными и перекошенными геометриями. В невообразимо малых масштабах порядка *элементарной длины* (то есть на 20 порядков меньше атомного ядра) следует ожидать весьма сильных флуктуаций, способных приводить к *топологическим* изменениям. В этих непостижимых уму виртуальных мирах все наши интуитивные соображения насчет гравитационного коллапса и сингулярности теряют всякий смысл. Истинной теории пока не существует, уже сейчас можно сказать лишь одно – представление о непрерывном пространстве-времени, вероятно, не может быть распространено на подобные чрезвычайно малые масштабы.

Эту квантовую “геометродинамику” пропагандирует американский физик Джон А. Уилер (род. в 1911 г.). Он указал, что энергия названных флуктуаций настолько велика, что присутствие в таком флуктуирующем пространстве реальной частицы остается лишь ничтожным возмущением на фоне динамической активности. Таким образом, на смену классическим построениям пространства и времени из материи в современной квантовой теории пространству и времени отводится центральная роль, а вещество рассматривается не более как возмущение этой основной структуры.

Итак, в настоящий момент теория относительности и квантовая теория являют собой отражение объективной действительности, рассматриваемой с двух из многочисленных ее сторон.

Интересную гипотезу высказал петербургский физик Б. М. Левин о существовании пространственно-подобных структур, занимающих ограниченный «объем» пространства-времени. Геометрическими методами общей теории относительности можно показать, что эти структуры представляют собой проявление обменных взаимодействий с *зеркальной Вселенной*, а вырожденное пространство-время (нуль-пространство) является областью обитания виртуальных частиц. Левин дает объяснение *аномалий ортопозитрония* «на фоне» расширения риманова пространства. Такой подход позволяет сформулировать постановку вопроса о возможности сближения реальной и иррациональной сфер наблюдателя, т. е. сознания и подсознания (сверхсознания) человека. Причем возможность такого сближения, а, по сути, контакт с зеркальной Вселенной, предлагается проверить *в реальном эксперименте* (в условиях космической невесомости на орбите Земли) ¹.

¹ Левин Б. М., Борисова Л. Б., Рабунский Д. Д. Ортопозитроний и пространственно-временные эффекты. Москва – Санкт-Петербург: Мастерская им М. В. Ломоносова, 1999.

Левин Б. М. Проблема ортопозитрония и экспериментальная «локальная» футурология. Санкт-Петербург: Мастерская им М. В. Ломоносова, 1999.

Левин Б. М. Физика и сознание (новый аспект). Санкт-Петербург: ЛИСС, 2002.

4.14. ВРЕМЯ – НЕПОСТИЖИМАЯ ЗАГАДКА ФИЗИКИ

Одна из наиболее непостижимых загадок физики состоит в том, что элементарное восприятие человеком времени как потока, непрерывной смены событий (или как перемещения момента “теперь”) – не имеет места в физическом описании объективного мира. Т. е. в ходе развития теоретической физики никогда не возникала необходимость вводить текущее, подвижное время; никогда не было физических опытов, которые позволили бы установить течение времени. Физика делает различия только между прошлым и будущим, но наш ум помимо прошлого (которое мы вспоминаем) и будущего (которое мы планируем), различает еще и *настоящее* (когда мы действуем, момент “доступа” к Вселенной). Более того, всеобщего “теперь” не существует, есть только сугубо индивидуальное – “здесь и теперь” (у каждого человека свое). “Существует” только настоящее. Все время происходит некое непрерывное умственное творение – мир в каждое мгновение обновляется. Взаимосвязь этих последовательных миров создает впечатление, что один “превращается” или “переходит” в другой, “последующий”. Субъективно течение времени ускоряется, когда человек занимается чем-то доставляющим ему удовольствие, и замедляется в противном случае. Обусловлено ли это недостатками самой физики, которая игнорирует сознательное “я” во Вселенной, или же течение времени представляет собой психологическую иллюзию, совершенно не ясно. Гипотезы о времени, касаясь таких вопросов как свобода воли и смерть, глубоко затрагивают философские проблемы и парадоксы. Взаимодействие физического мира ученого и метафизического мира нашего “я” приводит к некоторым странным и весьма сложным противоречиям.

Весьма необычную идею о понятии “ряда” времени выдвинул Дж. У. Данн. Исходя из соображения, что движущееся время может иметь смысл, если его измерять относительно другого времени (в смысле вопроса: с какой скоростью течет время?), Данн предложил ввести бесконечный ряд временных измерений, каждое из которых “течет” с точки зрения последующего. В поддержку своего необычайного предложения Данн приводил примеры явно предсказательного характера, связанные с состоянием сна. У физиков эта идея не получила всеобщего признания, впрочем, последние всегда проявляют большую осторожность в отрицании реальности движущегося настоящего. В любом случае, если только явление движущегося “теперь” не будет полностью дискредитировано физиками, придется признать, что мы чего-то не понимаем в отношении времени и нашего разума.

В самом элементарном представлении время – это однонаправленное действие, в котором имеет место различие между прошлым и будущим. Симметричные во времени процессы (периодические и прочие) – это те, которые мы без всякого удивления можем наблюдать протекающими в обратном порядке. Так, например, если “запустить” комету вокруг Солнца вдоль той же траектории в обратном направлении, то она пройдет точно по ней в полном согласии с законами физики. *Асимметричные процессы* характеризуются тем, что они не могут протекать в обратном порядке (например, сгоревшая спичка никогда сама по себе не превратится в целую). Именно поэтому время, всегда текущее из прошлого в будущее, – асимметрично, но объяснение этому следует искать не в структуре самого времени, а в структуре Вселенной, которая и обуславливает асимметричные последовательности событий при неизменном порядке времени.

Множество однонаправленных изменений по своей природе диссипативны, всевозможные возмущения имеют тенденцию распространяться во все стороны и затухать. Например, теплота покидает горячие тела и передается холодным; газы диффундируют, растворяясь в воздухе; возмущения воды в пруду волнами распространяются вокруг и исчезают; ветер теряет свою энергию; теплота и свет распространяются от Солнца в окружающее космическое пространство и т. д. Таким образом, любому макроскопическому процессу свойственна асимметричность во времени. Замечателен тот факт, что сущность большинства подобных изменений можно в общем и целом понять, опираясь всего лишь на один конкретный раздел физики – *термодинамику* (исключение составляют волновые процессы, где асимметрия не обладает непосредственно термодинамической природой).

В термодинамике существует величина, называемая *энтропией*, физическое толкование которой – мера беспорядка системы. Если система имеет четко выраженную структуру и в ней царит порядок, то ее энтропия мала. Напротив, системы с высокой энтропией беспорядочны и хаотичны. Энтропию можно также связать с *информацией*: *когда энтропия растет, информация утрачивается* (если беспорядочно перемешать все буквы на данной странице, то информация, полученная читателем, устремляется к нулю). Второе начало термодинамики гласит, что *энтропия Вселенной не может уменьшаться*, т. е. порядок всегда стремится уступить место беспорядку. Этот принцип хорошо знаком нам из повседневной практики: много труднее добиться высокой степени порядка, чем разрушить его.

Порядок уступает место беспорядку в силу статистического характера физических процессов. Так, непосредственное выражение закона возрастания энтропии на атомном уровне было получено Людвигом Больцманом (1844–1906) при рассмотрении поведения идеального газа в изолирующем

яшке. Больцман выдвинул гипотезу о статистическом характере молекулярных столкновений (*постулат молекулярного хаоса*): движение молекул заранее не скоррелировано (не упорядочено), так как они “не знают” о предстоящем столкновении. Конечно, после столкновения характер движения уже зависит от того факта, что столкновение произошло. При хаотическом движении частицы вскоре утрачивают свою упорядоченную конфигурацию. Больцман строго математически показал, каково должно быть поведение газа в рассмотренной им модели. В ходе доказательства он ввел некую H -функцию и установил, что со временем функция H может только возрастать. Более глубокий анализ показал, что ее следует отождествить именно с энтропией. Подобным образом эволюционирует предоставленная самой себе система из произвольного начального состояния до состояния равновесия. Этот однонаправленный во времени процесс лежит в основе временной асимметрии физического мира.

Чем более упорядочено состояние системы, тем меньше разных возможностей выбора. Состояния с высокой степенью беспорядка (высокой энтропией) реализуются гораздо большим числом способов. Здесь можно провести аналогию с колодой карт, которую начинают беспорядочно тасовать, после чего шансы увидеть карты разложенными по старшинству мастей становятся безнадежно малы. Таким образом, система, предоставленная самой себе из произвольного начального состояния, устремляется к состоянию, при котором царит наибольший беспорядок (энтропия максимальна) – просто это наиболее вероятная ситуация.

Строго говоря, в принципе энтропия может убывать, а хаотическое распределение молекул газа может самопроизвольно приобрести некоторую структуру, упорядочиться. Это следует из удивительной теоремы Ж. А. Пуанкаре (1854–1912), одно из следствий которой можно перефразировать так: ***все что может произойти в полностью изолированной системе, произойдет и притом бесконечное число раз!*** Например, сгоревшая спичка в принципе может сама по себе превратиться в целую. Правда, так называемый период возврата Пуанкаре по весьма заниженной оценке равен 10^N , где N – число частиц, из которых составлена данная система. Мир, окружающий человека, можно оценить как $N \sim 10^{26}$ атомов (а если взять все звезды, доступные современным оптическим телескопам, то количество атомов в них оценивается как $N \sim 10^{80}$), поэтому, хотя у Пуанкаре чудеса (как своего рода крупные флуктуации) возможны, но они более редки, чем мы в состоянии себе представить, на практике такие события крайне невероятны, а рост энтропии практически гарантирован.

Итак, теорема Больцмана объясняет механизм перехода системы из состояния с низкой энтропией в равновесное (с высокой энтропией), однако,

не объясняет, почему это всегда случается лишь в одном направлении во времени – из прошлого в будущее, т. е. не объясняет асимметрию времени.

Окружающий нас мир часто легче понимать через призму точных наук. Так, вывод из теоремы Пуанкаре (всё, что может произойти ...– рано или поздно произойдет!) позволяет осознать *неизбежность катастроф: техногенных* (взрыв на Чернобыльской АЭС, взрыв на АПЛ «Курск», ...), *политических* (Перестройка в СССР, война в Чечне, события в Нью-Йорке 11 сентября 2001 г., ...), *духовных* (старые и новые религии, «Черный квадрат» Казимира Малевича – см. п. 5.4, ...), *человеческих* (кровавые преступления отдельных людей-«отморозков») и т. д. Все катаклизмы в истории человечества и в судьбе каждого человека – это своего рода флуктуации, границы которых вполне просматриваются. Так, флуктуация человеческого разума происходит в диапазоне от гениального ума физиков и математиков до почти животного мышления «отморозков». Причем подобные флуктуации всегда были, есть и будут в обществе любой формации. Другое дело, что ныне *прибыльное* для СМИ «смакование» всякой гадости разрушает спасительное «табу» (систему запретов) у большинства неокрепших душ, повышая вероятность «низких» проявлений человека. Кстати, неудачные попытки построения упорядоченных суперсознательных обществ (скажем, коммунистического типа, у которых низкая «энтропия») можно объяснить довольно просто «по Больцману»: *общество, как всякая физическая система, устремляется к состоянию, при котором царит наибольший беспорядок*. Таким образом, построение капитализма (при котором «энтропия» максимальна) – это наиболее вероятное развитие событий в человеческом обществе, так как оно подразумевает минимальные *духовные* затраты от индивидуума (при капитализме человеку часто достаточно почти животных инстинктов).

В жизни нам часто приходится сталкиваться также с *законом Мэрфи*: «Если какая-нибудь неприятность может случиться, то она случается» (или иначе – с *законом подлости*: «В условиях неопределенности наиболее вероятно – наименее желаемое»). И это не просто удачная шутка остроумного человека, поскольку математик Б. Волк (Монитоба, США) обнаружил разновидность удивительной аномалии. Она имеет отношение к так называемому времени ожидания и в длинной серии испытаний возможно следующее: *менее частое событие с большей вероятностью происходит раньше, чем более частое событие* (вероятность того, что менее вероятное событие происходит чаще более вероятного, больше 0,5).

1.15. ВЕТВЯЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ ВО ВСЕЛЕННОЙ

В реальных физических системах упорядоченность возникает не вследствие “чудесных” флуктуаций (согласно теореме Пуанкаре), а при внешнем воздействии, при вмешательстве извне. Очевидно, в реальном мире все системы (например, кубик льда, брошенный в воду) на каком-то этапе должны были формироваться под действием окружающей Среды (лед образуется в

холодильнике, который, в свою очередь, питается от электроэнергии, а она вырабатывается при сжигании угля на электростанции и т. д.). Все реальные системы представляют собой того или иного рода случайно возникающие *“ветвящиеся структуры”* – квазиизолированные области Вселенной, которые в неравновесных условиях отделены от окружающего их мира. Причем, имеет место иерархия ветвления, и все ветви исходят от общего ствола – Большого взрыва (зарождение Вселенной). Ветвящаяся структура сразу после своего образования ведет себя асимметрично во времени ввиду именно скрытого воздействия извне. Но *в каком направлении* действует асимметрия остается под вопросом, ясно лишь, что она существует.

В основе почти всех проявлений асимметрии времени на Земле (жизнь и смерть животных, таяние снегов, выветривание скал, океанические течения и т. д.), лежит неравновесие солнечного света. Неравновесие (распад) радиоактивных веществ на Земле приводит к выводу, что так или иначе, но в основном неравновесие вокруг нас, которое дает возможность окружающему нас миру изменяться со временем, связано с образованием и эволюцией Солнца и других звезд. Вся Вселенная находится в термодинамическом неравновесии: очень горячие звезды стремятся нагреть гигантские пространства очень холодного вакуума, чтобы восстановить тепловое равновесие.

Но каким образом Вселенная первоначально приобрела такую неустойчивость? Ведь в данном случае уже нельзя сослаться на воздействие извне, нельзя уже указать никакую ветвящуюся структуру. Кроме того, космическое фоновое (реликтовое) излучение свидетельствует о том, что когда-то в прошлом Вселенная находилась в состоянии теплового равновесия (был максимум энтропии, максимум беспорядка). Как же хаотичная, беспорядочная, стационарная Вселенная может превратиться в структурную, упорядоченную, нестационарную Вселенную?

Очевидно, в первые мгновения Вселенной вещество представляло собой отдельные частицы, которые хаотично двигались с релятивистскими скоростями. В первичном огненном шаре вещество было настолько плотным, что почти мгновенно “приспосабливалось” к изменяющимся условиям (быстрому расширению и остыванию), оставаясь в локальном термодинамическом равновесии. Спустя несколько сотен секунд из-за падения температуры начался ядерный синтез, и примерно четверть всех протонов соединилась в ядра гелия. А затем, буквально в следующее мгновение, вступил в действие электрический барьер и “выключил” ядерный синтез, так что протоны “застыли” в метастабильном состоянии и со временем превратились в атомы водорода. Поэтому Вселенная состоит именно из водорода. При слиянии легких ядер водорода в недрах звезд происходит излучение энергии в кос-

мос. Такой процесс сопровождается ростом энтропии, так как при этом энергия, прежде заключенная в ядре, распространяется в пространстве, что приводит к увеличению беспорядка. Вообще принцип достижения устойчивости ядер путем потери энергии (избавления от избыточной энергии) в действительности имеет всеобщий характер. Таким образом, термодинамическая неустойчивость Вселенной в настоящее время в значительной мере сводится к неустойчивости водорода, и если бы Вселенная осталась огненным шаром с равновесной формой материи, то не возникла бы асимметрия во времени, существующая ныне в реальном мире, поэтому *корни неравновесности следует искать именно в расширении Вселенной (пространства-времени)*. (Подобно тому, как корни сложнейшей природы натуральных чисел лежат в их тривиальном «расширении»: $1+1+1+\dots$?)

Итак, Вселенная стала нестационарной, потому что мы живем в движущемся космосе. В некотором смысле глобальное движение Вселенной можно рассматривать как вид воздействия “извне” на локальные термодинамические системы, состоящие из вещества и излучения. Такое воздействие необходимо для создания асимметрии во времени, но оно не определяет направление этой асимметрии. Требуется также ввести дополнительное предположение о беспорядочных микроскопических движениях (о молекулярном хаосе). Если рассматривать Вселенную как целое в качестве гигантской ветвящейся структуры, то возникает увлекательная задача найти космическое объяснение молекулярного хаоса.

Одно такое объяснение сводится к тому, что *существует не одна вселенная, а целый ансамбль – возможно, бесконечное число вселенных*. Такой вариант можно получить, например, привлекая квантовомеханическое рассмотрение (предложенное Эвереттом и Уилером), при котором все возможные альтернативные квантовые миры сосуществуют как колоссальное множество различных вселенных, в которых реализуются все возможные начальные условия микроскопических движений. И лишь в ничтожно малом числе вселенных из этого ансамбля будут происходить “чудесные” явления (вспомним, сгоревшую спичку, которая сама по себе превращается в целую), а наша Вселенная – типичный, наиболее распространенный член ансамбля, в котором подобных “чудес” не происходит.

В любом случае, какое бы объяснение мы не приняли, очевидно, для возникновения асимметричной во времени вселенной начальные условия на микроскопическом уровне носили весьма общий и беспорядочный характер. Именно такой первоначальный беспорядок можно ожидать при выходе из сингулярности, которая совершенно непредсказуема.

Совершенно иная концепция порядка и беспорядка во Вселенной (выдвинутая космологами Томасом Голдом и Джоном Уилером) допускает, что

среди первичного хаоса был заложен некий план – тонкая организация движений. Возможно, огненный шар Вселенной лишь предстает нашему взгляду как беспорядок микроскопических движений – мы просто неспособны различить скрытую согласованность поведения бесчисленного множества частиц. Возможно, во Вселенной существует скрытый порядок, “замаскированный” среди, казалось бы, беспорядочно движущихся ее составных частей. (Подобно тому, как бесчисленные хитросплетения теории чисел и ГТНЧ скрывают за собой элементарную архитектуру Пирамиды?)

5. КОРОТКО О МНОГОМ (ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ Г Т Н Ч)

5.1. ЧЕЛОВЕК – ВЫСШАЯ ФОРМА МАТЕРИИ НА ЗЕМЛЕ

Происхождение человека (антропогенез), становление его как вида кроется среди первых примитивных приматов раннего третичного периода ($T \sim 65$ млн. лет назад) – это первая стадия эволюции человека ($J=1$). Вторая стадия ($J=2$) – появление первых гоминид ($T \sim 18 \div 20$ млн. лет назад). Около 4,5 млн. лет назад ($J=3$) появились австралопитеки – человеко-обезьяны или лесные обезьяны, которые широко распространились по Африке. Человек прямоходящий (*Homo erectus*), овладевший огнем, появился около 1,2 млн. лет назад ($J=4$), и вскоре стал единственным представителем гоминид на Земле. Человек современного типа (*Homo sapiens*) появился примерно 400 тыс. лет назад ($J=5$), а затем около 100 тыс. лет назад ($J=6$) разделился на две ветви: неандертальского человека и современного человека (*Homo sapiens sapiens*). Около 30 тыс. лет назад ($J=7$) неандертальцы исчезают, и появляется кроманьонский человек. Антропогенез неплохо накладывается на экспоненту: $T \approx 268 \cdot \exp(-1,359 \cdot J) \approx 0,5 \cdot e^{2\pi \cdot J} \cdot \exp(-0,5 \cdot e \cdot J)$, где $J=1, 2, 3, \dots$, – стадия антропогенеза; T – условное начало стадии (млн. лет назад). Из этой формулы следует, что эволюция человека всё более ускорялась: чем больше стадия антропогенеза, тем она короче (чем больше J , тем меньше T). Восьмая стадия ($J=8$) антропогенеза началась около 5000 лет назад, но далее антропогенез быстро вырождается ($T \rightarrow 0$), будто «отбирая» у нас надежду на дальнейшую эволюцию человечества (у которого нет будущего?, см. п.5.3).

Любопытно, что при описании хронологии и длительности мировых цивилизаций (табл. 28) также обнаруживается ускорение хода исторического процесса. Так, если каждой цивилизации присвоить порядковый номер $n=1, 2, 3, \dots, 7$, то длительность существования n -ой цивилизации (T , количество веков) уменьшается почти по экспоненте: $T=106,36 \exp(-0,624 n)$.

Таблица 28. Продолжительность семи мировых цивилизаций

<i>n</i>	Наименование цивилизации	Начало (<i>H</i>)	Конец (<i>K</i>)	<i>K – H</i> (веков)	<i>T</i> (веков)
7	Постиндустриальная	1973 г.	2130 г.	1,6	1,3
6	Индустриальная	1731 г.	1972 г.	2,4	2,5
5	Преиндустриальная	сер. XIV в.	1730 г.	3,8	4,7
4	Средневековая	сер. V века	сер. XIV в.	9,0	8,8
3	Античная	XII в. до н.э.	сер. V в. н.э.	16,5	16,4
2	Раннеклассовая	IV тыс. до н.э.	II тыс. до н.э.	29–33	30,5
1	Неолитическая	X тыс. до н.э.	V тыс. до н.э.	55–65	57,0

Что представляет из себя человек в настоящую эпоху? Отвечая на этот вопрос, мы будем акцентировать внимание на *числовые* характеристики (параметры) организма человека и основные принципы его «устройства». При этом возникает ощущение, что многие числа, их соотношения и сами принципы организации структур живой материи уже встречались нам в ГТНЧ или в физике. Недавно учеными создана *математическая модель* системы пищеварения человека (она учитывает 67 факторов и около 400 взаимосвязей между ними), т. е. точные науки уже приступили к штурму чудовищно сложных тайн живой материи. Это стало главным в XXI веке.

Человек – это высшая форма живой материи на Земле. Организм человека – это сложная целостная, саморегулирующаяся и самообновляющаяся система, которая прошла длительный путь эволюционного развития. В теле человека различают 7 основных частей: голова, шея, туловище, две руки и две ноги. Голова взрослого человека составляет 1/7 часть длины тела (у новорожденных – 1/4). Ещё Леонардо да Винчи полагал, что идеальные пропорции человеческого тела связаны с «золотым сечением» (с рядом Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, см. п. 2.3), и если за единицу измерения выбрать голову, то размеры гармоничного тела, якобы, должны соотноситься как: 1:2 (плечи, грудь, бедро, голень); 1:3 (пояс – колени, размах руки); 1:5 (пояс – щиколотки); 1:8 (размах рук, макушка головы – ступня).

В организме человека можно выделить 7 *структурных уровней* вещества: атомный, молекулярный, клеточный, тканевый, отдельные органы, системы органов, целостный организм. *Орган* – это часть организма, имеющая свою форму, строение, положение и свою функцию. К органам относятся: кости, мышцы, железы, желудок и т. д. *Системы органов* – это органы, сходные по строению, развитию и функциональным отправлениям (костная, мышечная, кровеносная, нервная система и т. д.). Рассмотрим некоторые структурные уровни организма человека более подробно.

Молекулярный уровень во многом характеризуется молекулой ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты) – самой главной молекулой в живой материи [38]. Основная масса ДНК сосредоточена в ядре клетки, причем всегонавсего $6 \cdot 10^{-12}$ г ДНК яйцеклетки (10^{-16} часть веса всего организма) кодирует

свойства *всех* белков человека, таким образом, ДНК – это носитель генетической информации. ДНК состоит из двух полимерных цепочек. Каждая цепочка построена из нуклеотидных звеньев 4-х сортов: адениновое, гуаниновое, тиминное, цитозинное (сокращенно – А, Г, Т, Ц). В процессе порождения генома нового белка принимает участие молекула рибонуклеиновой кислоты (РНК), которая представляет собой одиночную полимерную цепочку, построенную из нуклеотидов А, Г, Ц, У (уридиновый, похожий на Т). По своему строению нуклеотиды объединяются в 2 класса – пиримидиновый (У и Ц) и пуриновый (А и Г). При делении клеток (их удвоении) происходит и удвоение ДНК, поэтому почти каждая клетка несет в себе информацию о строении всего организма. У близнецов совершенно одинаковые молекулы ДНК, поэтому они так похожи. Перед удвоением молекула ДНК почему-то непременно закручивается в *сверхспираль* (возможно, с целью «проверки» на целостность цепи), при этом вероятность образования крестообразной структуры (*креста*) оказывается порядка единицы (в 10^{15} раз больше, чем в линейной молекуле). О роли крестов в ДНК пока ничего не известно. Также пока не известно бывает ли ДНК в форме *узла* в естественном состоянии (в опытах удалось получить заузленные ДНК).

Каковы главные размеры ДНК? Диаметр двойной спирали $D=2 \cdot 10^{-9}$ м; расстояние между соседними парами оснований вдоль спирали – $0,34 \cdot 10^{-9}$ м; шаг спирали $S=3,4 \cdot 10^{-9}$ м (через 10 пар); т. е. отношение $S/D=1,7$ близко к “золотому сечению”. Длина спирали ДНК у простейших вирусов содержит всего несколько тысяч звеньев, у бактерий – несколько миллионов, а у человека – миллиарды звеньев. Суммарная длина всех молекул ДНК в одной клетке человека около 2 м, т. е. в 10^9 раз больше диаметра ДНК. Промежутки между кусками генов бывают разными – от 10 до 20000 пар оснований. ДНК существует как минимум в двух формах: в виде правой плавной винтовой спирали (В-форма, в целом ДНК находится именно в этой форме) и в виде зигзагообразной ломанной левой спирали (Z-форма), в которой на виток приходится не 10, а 12 пар оснований.

Молекула ДНК стремится вытянуться в одну прямую линию, т. к. это отвечает минимуму её энергии. Но тепловое движение «портит» все дело. Молекулу ДНК «бомбардируют» окружающие молекулы воды, и она начинает извиваться, скрючивается в полимерный клубок, постоянно меняющий форму. Характер *изгибных колебаний* в ДНК напоминает путь человека в лесу или броуновской частицы в среде (см. п. 3.3), причем размеры клубка ДНК описываются все той же формулой $i=(N \cdot S)^{1/2}$, где N – длина молекулы, а $S \approx 10^{-7}$ м – определяется тем, насколько молекула ДНК сможет выпрямиться (т. е. жесткость двуспиральной ДНК). Тот факт, что двойная спираль ДНК способна изгибаться, имеет огромное биологическое значение. Ведь в

клетке, особенно у высших организмов, содержится очень много ДНК, причем сосредоточена она главным образом в ядре клетки. Так, если принять, что вся ДНК в клетке человека – это одна молекула, то ее длина N составит около 2 м, что в 10^6 раз больше диаметра ядра. Кстати, легко убедиться, что одного теплового движения недостаточно, чтобы ДНК была втиснута в ядро, т. к. размер клубка равен $i=(2 \cdot 10^{-7})^{1/2} \approx 0,0005$ м, что в тысячу раз больше диаметра ядра. Поэтому природа придумала еще целый ряд хитростей (нуклеосомы, набор из 46 хромосом), чтобы в итоге запихнуть полимерный клубок диаметром 0,5 м в ядро с диаметром менее 0,001 м.

Помимо изгибных колебаний оси спирали в ДНК происходят весьма заметные колебания в угле закрутки соседних пар оснований. Этот угол равен в среднем 36° , а амплитуда его колебаний составляет 6° . Частота колебаний порядка 10^9 раз в секунду. Тепловое движение приводит к тому, что время от времени отдельные участки ДНК переходят в самые разные состояния (в т. ч. в Z-форму). Значительная подвижность структуры ДНК говорит о том, что, возможно, она может изменяться при связывании с белком.

Всеми химическими превращениями в клетке ведают *белки-ферменты*. Почти весь строительный материал клетки также белковой природы, т. е. работа клетки определяется набором белков в ней. Если взять все белки клетки и расчленить их на отдельные звенья, то наберется всего 20 сортов аминокислот. Вообще-то аминокислот может быть бесчисленное множество, но живая природа использует только 20 вполне определенных *канонических аминокислот*. Этот набор абсолютно одинаков, универсален для всей живой природы на Земле. По сути дела, самая ничтожная букашка отличается от гениального ученого только последовательностью аминокислотных остатков в белках. Причем замена одной аминокислоты в одном белке может полностью нарушить его функцию и, как следствие, привести к гибели всего организма. Последовательность аминокислотных остатков записана в гене ДНК (в части ДНКового текста) в виде последовательности нуклеотидов 4-х сортов. Генетический код триплетный, т. е. одной аминокислоте соответствует последовательность из 3-х нуклеотидов, называемая *кодоном*. Ясно, что всего существует $4^3=64$ различных кодона, поэтому код является вырожденным ($64 \text{ кодона} > 20 \text{ аминокислот}$). *Правило вырожденности кода* гласит: если два кодона имеют два одинаковых первых нуклеотида и их третьи нуклеотиды принадлежат к одному классу (пуриновому или пиримидиновому), то они кодируют одну и ту же аминокислоту (например, два кодона ГЦГ и ГЦА кодируют одну аминокислоту). Но из этого правила есть 2 исключения: АУА ≠ АУГ и УГА – это стоп-сигнал при синтезе белка.

Генетический код, судя по всему, эволюционировал (или эволюционирует?), это следует из открытия у митохондрий своего собственного генетического кода. *Митохондрии* – это тельца, плавающие в цитоплазме клеток, имеющих ядра (клеток-эукариот), это «энергетические станции» клеток. Таким образом, в одной человеческой клетке существует два разных генетических кода! Здесь пока много неясного и таятся важные открытия.

Организм человека в ходе развития вырабатывает свой, совершенно уникальный набор генов (иммуноглобулинов и др.), т. е. происходит перетасовка, перестройка генов, образуются новые, причем это ещё сопровождается интенсивным мутационным процессом. Собственно, это и есть один из тех факторов, которые определяют индивидуальность, своё «я» каждого человека. Любопытно, что за мутацию (а значит и эволюцию) несут ответственность только мужчины, на женщинах природа не ставит экспериментов. У человека 30–35 тысяч генов (а в ГТНЧ на Центральном отрезке насчитывается около 40 тыс. различных миров, в т. ч. 34 тыс. частых миров).

В природе в ходе эволюции выработался запрет на межвидовое скрещивание: нельзя скрестить собаку с кошкой, а мул (помесь осла и лошади) хотя и жизнеспособен, но бесплоден. Однако молекулярная биология преодолела этот запрет природы. В пробирке можно создать какие угодно комбинации генов и геномной инженерии остается только научиться делать такие молекулы ДНК биологически активными. Однако, если с устройством «чистой», изолированной ДНК ученые более или менее разобрались, то уже с *белками* (важнейший компонент живой клетки) все обстоит гораздо сложнее. Вопрос о связи между строением и функциями, свойствами вещества – это узловая проблема (и не только в биологии), которую предстоит решить.

Клеточный уровень. Здесь главным объектом выступает *клетка* – структурная и функциональная единица всех живых организмов, элементарная ячейка жизни. Клетка может существовать как отдельный организм (бактерии, простейшие, некоторые водоросли и грибы) или в составе тканей многоклеточных животных, растений, грибов. Лишь вирусы представляют собой неклеточные формы жизни. Размеры клеток от 0,1–0,25 мкм (бактерии) до 155 мкм (яйцо страуса в скорлупе).

В организме человека около 10^{14} клеток (*планковская масса* больше средней массы одной клетки примерно в $3 \cdot 10^4$ раз). Форма клеток разнообразна (около 7 видов). Размеры клеток от 4 до 60–120 мкм (1 мкм = 10^{-3} мм). Минимальная продолжительность жизни (1–2 дня) – у клеток кишечного эпителия, $7 \cdot 10^{10}$ этих клеток ежедневно погибает. В состав клетки входят почти все известные химические элементы из таблицы Менделеева. Они образуют органические вещества (белки, жиры, углеводы) и неорганические (вода, соли натрия и калия и др.). Основными частями клетки являются цитоплазма

и ядро (живая «микрoгалактика»!). Цитоплазма состоит из 4 структур: цитолемма (оболочка клетки); гиалоплазма (заполняет полость оболочки); оргanelлы (11 различных «органов» клетки, плавающих в гиалоплазме); включения (непостоянные структуры). Ядро – важнейшая структура клетки, центр её управления. Чаще всего в клетке одно ядро, расположенное обычно в центре. Ядро имеет оболочку (с отверстиями и гранулами), ядрышко, хроматиновые структуры (при делении клеток из них образуются хромосомы с генами) и ядерный сок (кариоплазму). Размеры ядра от 4 до 40 мкм. Без ядра и цитоплазмы клетка быстро погибает. У клетки насчитывается 7 основных жизненных проявлений: обмен веществ, раздражимость, движение, рост, развитие (приобретение специализированных функций), способность к размножению (в четыре фазы при непрямом делении), гибель клетки. В организме человека есть и *неклеточные структуры* (симпласт, межклеточное вещество) – одна из форм существования живой материи, ответственная за обмен веществ в организме.

Тканевый уровень. Здесь объектом исследования выступает *ткань* – комплексы специализированных клеток, характеризующиеся общностью происхождения и сходством, как структуры, так и выполняемых функций. Различают 4 основных типа тканей: эпителиальную (выполняет 5 функций), соединительную (рыхлую, жировую, фиброзную, эластическую, лимфоидную, хрящевую, костную, а также кровь), мышечную и нервную.

Кровь выполняет 5 функций, а состоит из плазмы (до 60% всего объема) и форменных элементов: эритроцитов (их $2,4 \cdot 10^{13}$ и $2 \cdot 10^9$ из них ежедневно заменяются новыми); лейкоцитов ($\sim 10^{10}$); тромбоцитов ($\sim 10^{12}$). В среднем у взрослого мужчины около 5 л крови. В лимфе около 10^{11} лимфоцитов.

Упругость кости равна упругости дуба, а её прочность приравнивается к прочности чугуна. Мышечное волокно бывает 3 видов и имеет диаметр 12–80 мкм, а длина волокон в 100–10000 раз больше их диаметра.

Из нервной ткани построены головной и спинной мозг, спинномозговые и черепные нервы, нервные узлы и окончания. Нервная ткань состоит из нервных клеток (нейронов) и клеток нейроглии. Скорость проведения импульса в нервном волокне достигает 120 м/с.

Основы анатомии человека раскрывает, например, «Атлас нормальной анатомии человека» [22] (Атлас), предназначенный для медицинских училищ. В Атласе около 1810 наименований на 201 рисунке (введем обозначение <1810/201>), причем большая их часть (93%) распределяется по 7 разделам: скелет человека <550/59>; мышцы <220/22>; пищеварительная система <211/23>; дыхательная система <53/7>; мочеполовая система (женщины) <128/14>; сердечно-сосудистая система <267/33>; нервная система

<251/26>. Ещё есть разделы: ткани, кожа, железы и органы чувств. Для многих органов и их систем описание сводится к 7 ± 2 структурным составляющим (которые, в свою очередь, также «удобно» расчленять на 7 ± 2 составляющих? и т. д. «вглубь», но на сколько уровней?).

Скелет человека «оцифровать» легче всего. Приведем некоторые цифры, «перекликающиеся» с ГТНЧ (см. п. 3.14). У детей имеется 300 костей, но по мере созревания часть из них срастается между собой, поэтому в теле взрослого человека всего **206** костей (85 парных и 36 непарных). Масса скелета в среднем возрасте составляет 16–18% массы тела (мышц всего 400–600, их масса – 35–45% массы тела). В микроскопическом строении кости выделяют 7 основных структурных единиц. Насчитывается 9 видов непрерывных соединений костей. В составе позвоночного столба **33–34** позвонка. Длина позвоночного столба составляет около 40% длины тела («золотое сечение»). Ребер 12 пар, из них только 7 пар достигают грудины. В мозговой отдел черепа входит **8** костей (2 парные). В лицевой отдел черепа входит 15 костей (6 парных). За весь период роста мозговой череп увеличивается в **1,5** раза, а лицевой в 3 раза. У человека **32** зуба. В скелете верхней и нижней конечностей (руки и ноги) условно выделяют по **8** основных структурных единиц. В кисти руки **27** костей, а в стопе ноги **26** костей.

Сенсорные системы человека – это 7 сложнейших систем: зрительная, слуховая, вестибулярная, кожная (тактильная, температурная, болевая), двигательная, обонятельная и вкусовая. Интенсивность психофизических ощущений человека от различных раздражителей (света, звука, и т. д.), действующих на какой-либо орган чувств (точнее на его сенсорные системы) зависит только от относительного прироста силы раздражителя, иначе говоря, человек воспринимает геометрические отношения раздражителей как арифметические. Например, если в люстре последовательно зажигается 1, 3, 9, 27, 81, ... и т. д. одинаковых лампочек (геометрическая прогрессия), то нам кажется, что освещенность в комнате все время увеличивается *на* одну и ту же величину. Если же зажигать последовательно 1, 3, 5, 7, 9, ... и т. д. лампочек (арифметическая прогрессия), то нам кажется, что прибавка освещенности комнаты все время уменьшается. Этот основной психофизический закон имеет вид: $J = a \cdot \ln F + b$ (закон Вебера-Фехнера), где J – интенсивность ощущения; F – сила раздражителя; a , b – некие постоянные. Закон работает только при средних интенсивностях раздражителя, сильно искажаясь при пороговых или очень больших интенсивностях, но именно этот закон показывает *подчиненность психических явлений числу и мере*.

Мозг человека, его возможности просто поражают (см. п. 5.2), но с другой стороны его параметры подчиняются общим закономерностям, характерным для всех млекопитающих (зверей). Например, существует связь

между массой головного мозга (m^* , в граммах) и массой тела (M , в килограммах): $m^* \approx 9,8696 \cdot M^{0,7389}$. Причем реальная средняя масса мозга (m) у конкретного млекопитающегося будет отличаться от ожидаемой массы m^* в большую или меньшую сторону. Так, средняя масса тела человека около 62 кг (взрослые мужчины-европеиды весят 65–68 кг, а женщины – 55–58 кг), поэтому ожидаемая масса мозга равна $m^* \approx 208$ г, а на самом деле средняя масса мозга человека составляет $m \approx 1325$ г (у мужчин в среднем – 1375 г, у женщин – 1275 г; индивидуальные колебания могут быть значительными – от 900 до 2012 г). Мозг человека, очевидно, содержит около 10^{11} – 10^{12} клеток (что близко к максимально возможному количеству делителей на БО, см. п. 1.30). Отношение m/m^* называют *коэффициентом энцефализации* (EQ), чем он больше, тем сложнее формы поведения у животного, т. е. EQ является грубым показателем интеллекта (его не следует путать с IQ – “коэффициентом интеллектуальности”). Для пассивно обороняющихся животных, таких как еж и дикобраз, надеющихся на свои иголки, EQ=0,5–0,7; для лисицы, которая пытается убежать от опасности EQ=1,89; у человека самый большой EQ \approx 7, и ближайший его соперник в этом отношении – дельфин (EQ=4,9), а не человекообразные обезьяны.

Не только относительные размеры мозга (EQ) связаны с умом, но и его абсолютные размеры. Чем больше клеток имеется в мозгу, тем большим «интеллектом» может обладать животное, так крупные крысы гораздо умнее мышей. Однако в пределах одного вида не размеры и не вес мозга определяют “интеллект”, а организация мозга. Например, у человека даже небольшая часть мозговой ткани может успешно выполнять все функции, как это было у одного преуспевающего английского студента университета после гидроцефалии (водянки мозга): масса мозга у него уменьшилась до 50–150 г, а толщина слоя нервных тканей – до миллиметра вместо нормальных 4,5 см. Таким образом, “высокий” лоб человека совсем не является признаком большого интеллекта.

Физики говорят о флуктуации пространства-времени... Но мозг человека, его разум – это всего лишь одна из структур пространства-времени, которая подчиняется фундаментальным единым закономерностям (до сих пор неизвестным). Согласно ГТНЧ типы чисел также совершают гигантские флуктуации: «в настоящее время» от $T=2$ до $T \approx 10^{12}$ (см. п. 1.30). А не является ли это числовой мерой флуктуации и человеческого разума? «Покопайтесь» в себе и вы, наверняка, вспомните эпизоды с весьма низкими мыслями и поступками (скажем, в районе $T=2$). И когда человек говорит, что он *не понимает* воровства, предательства, убийства и т. п. фактов ($c T=2$) – он просто лукавит, либо афиширует некую ограниченность своего воображения. А вот признаваясь в непонимании, скажем, высшей математики ($T \approx 10^{12}$) – человек, наверняка, говорит правду, поскольку *средний интеллект в обществе* явно ближе к $T=2$,

чем к $T \approx 10^{12}$ (ведь средний тип чисел в конце БО всего лишь $T \approx 140$). Флуктуация разума каждого человека проявляется и в том, что даже «умный» неизбежно допускает ошибки и откровенные глупости; «благородный» – совершает и низкие поступки; «талантливый» – бывает бездарен и т. д. Более того, флуктуация наших мыслей (в диапазоне $2 \div 10^{12}$) происходит с колоссальной скоростью (как калейдоскоп миров в ГТНЧ?): мысли «мелькают» настолько быстро, что, выражая их вслух, а тем более на бумаге – мы чудовищно «искажаем» то, что имело место в нашей голове. В этом отношении язык математики (язык формул), вероятно, наиболее точен, но вот вызвать эмоциональные переживания (и даже целую драму страстей!, см. п. 3.4) он, увы, может далеко не у всех людей.

Развитие организма человека начинается из зиготы, образующейся в результате слияния яйцеклетки и сперматозоида. Сперматозоид (его длина 0,05 мм) содержит **23** хромосомы, несущие генетическую информацию. В развитии организма разделяют два периода: внутри утробный (40 недель=0,75 года) и внеутробный (скажем, 105 лет, т. к. в США верхушка среднего класса теперь гарантированно доживает до 100 лет).

Соотношение этих периодов ($105/0,75=140$) близко к среднему типу чисел в конце БО или к постоянной тонкой структуры ($1/\alpha \approx 137$, см. п. 4.9). Количество хромосом (23) – это почти «ширина» МЛ редких миров (21).

Отношение зародышевого периода к плодному периоду равно $2/7$ (в месяцах). После оплодотворения яйцеклетка делится на 2, 4, 8, 16 и т. д. клеток. К концу первой недели ($t \approx 160$ часов) уже насчитывается $K \approx 10^5$ клеток, которые образуют комочек (морулу). Образование морулы, очевидно, происходит по экспоненте $K \approx 2 \cdot \exp(0,07 \cdot t)$. Процесс развития организма человека складывается из возрастных периодов – сроков, необходимых для завершения определенного этапа морфологического и функционального развития отдельных тканей, органов и организма в целом. В табл. 29 приведено 14 возрастных периодов в жизни каждого мужчины, где T – начало каждого периода (отсчет ведется в годах от момента зачатия). Причем этот временной ряд можно описать тильдой ($S=424,2$; $K=14$; $A=5,05$; $p=0,51$) или экспонентой $T \approx 0,18 \cdot \exp(0,49n)$, у которой постоянная затухания неким образом связана с «золотым сечением»: $0,49 \approx \ln(\sqrt{e})$ или $0,49 \approx \ln(\Phi)$.

Психосексуальное развитие человека насчитывает 7 возрастных периодов, сроки окончания которых соответствуют 1, 7, 12, 18, 26, 55, 70 годам.

Психологи выделяют 7 типов людей: доминирующий, аналитический, эстетический, независимый, инертный, стабильный, спутниковый. По отношению к нововведениям (изменениям) в жизни людей разделяют на 7 следующих типов: новаторы, энтузиасты, рационалисты, нейтралы, скептики, консерваторы, ретрограды. Деловые качества человека различают по 7 шкалам: креативность (склонного изменять все вокруг себя), исполнительность, созерцательность, консервативность, авантюренность, деловитость, надежность. Насчитывают 7 линий психологической “обороны” человеком своего внутреннего мира от вторжения извне: биографические данные; качества личности (достоинства и недостатки); личностные ориентации; побудители действий и деятельности; область личных отношений с людьми; отношение к миру в целом и составляющим его системам; сопротивление, связанное с отношением к тому, кто намеревается раскрыть его особенности и возможности.

Продолжительность жизни человека, вероятно, может достигать 150-ти и более лет. Ещё великий русский биолог и патолог И. И. Мечников (1845–1916) считал, что старость и смерть у человека наступают преждевременно, в результате самоотравления организма микробными и иными ядами (поэтому, якобы, стерилизация пищи, ограничение потребления мяса, питание молочнокислыми продуктами – должны существенно продлевать жизнь). Мечников верил в “ортобиоз” – достижение “полного и счастливого цикла жизни, заканчивающегося спокойной естественной смертью”. Кстати, в совсем неподходящей для долгожительства России в 1996 г. проживало 6998 людей, перешагнувших 100-летний рубеж (70% из них – женщины). В 1999 г. в сирийской деревне аль-Мусейфара умер простой крестьянин Хусейн аль-Шазли. Ему было 148 лет, и он до конца своих дней сохранял прекрасную память, читал без очков и редко обращался к врачам.

Биологическое значение смерти очевидно: без смены поколений эволюция была бы невозможна. Американский философ Менкен остроумно заметил: “Пожары и похороны – главные двигатели прогресса”. Это, однако, не

Таблица 29. Периоды жизни человека

n	Наименование периода	T, лет	Тильда
1	Эмбриональный	0,1	0,1
2	Перинатальный	0,5	0,4
3	Новорожденность	0,79	0,8
4	Грудной период	0,84	1,5
5	Ясельный период	1,8	2,5
6	Преддошкольный	3,8	4,1
7	Младший школьный	6,8	6,4
8	Средний школьный	11,8	9,9
9	Старший школьный	14,8	15,2
10	Детородный период	18,8	23,4
11	Пожилой возраст	56,8	36,8
12	Старческий период	66,8	60,6
13	Долгожительство	90,8	111,1
14	Предельный возраст	150,0	151,4

объясняет, почему смерть неизбежна. Почему жизнь конечна и чем определяется ее продолжительность – наука пока не знает. Ясных ответов все еще нет, лишь совсем недавно биологи стали серьезно изучать эту проблему. Очевидно, старение можно определить как увеличение вероятности смерти со временем. Так, с увеличением возраста мужчин (после 35 лет) вероятность смерти от гипертрофии простаты, рака, туберкулеза, болезней сердца увеличивается, причем экспоненциально. Можно выделить 8 главных причин, от которых умирают 99,96% россиян (см. табл. 30). Болезни кровообращения уносят больше всего жизней, а в целом имеем тильда-распределение: $S=1$ (8 причин принимаем за 100%); $K=8$; $A=3,94$; $p=0,25$.

Таблица 30. Причины смерти в 2000 г. [47]

n	Причина смерти	Кол-во	Человек
1	Утонули	0,9%	15866
2	Туберкулез	1,7%	29585
3	Отравлен. алкоголем	2,0%	33979
4	Автокатастрофы	2,3%	39341
5	Убийства	2,3%	40532
6	Самоубийства	3,3%	56568
7	Раковые опухоли	17,1%	296858
8	Бол. кровообращения	70,4%	1222711

Количество самоубийств, наверняка, будет расти, хотя бы из-за быстро наступающего СПИДа. Так, в Санкт-Петербурге рост количества ВИЧ-инфицированных (K , человек) в течение 12 лет происходил примерно по закону $K \approx \exp[0,957 \cdot \exp(0,1842 \cdot T)]$, где T – количество лет, прошедших с 1 января 1989 г. К началу 2001 г. было выявлено 6259 ВИЧ-инфицированных, из них в 2000 г. заразилось 5500 человек [45], а экстраполяция указанной формулы дает чудовищные цифры: январь 2002 г. – $K \approx 36$ тыс. человек; январь 2003 г. – $K \approx 306$ тыс.; январь 2004 г. – $K \approx 3,9$ млн. (83% горожан будет инфицировано?!). Очевидно, в 2002–2003 гг. закон роста $K=f(T)$ радикально изменится (страх смерти остановит многих людей от опасных контактов).

Феномен жизни – это до сих пор одна из самых загадочных тайн для ученых. Является ли жизнь редкостью и уникалом или же это обычное и необходимое свойство Вселенной – пока не известно. В самом общем смысле жизнь можно определить как активное поддержание и самовоспроизведение специфической структуры, идущее с затратой энергии (полученной извне). Для живого организма необходима постоянная связь с окружающей средой, осуществляемая путем обмена веществом и энергией. Вопросы о происхождении жизни из неживой материи относятся к одной из наиболее сложных и загадочных проблем, которая во многом не решена современной наукой до настоящего времени. Кстати, вещества, необходимые для появления жизни, могли образоваться в глубоком космосе еще до формирования планет, а, попав позже с метеоритом или кометой на планету, именно они могли вызвать бурное развитие жизни. Это следует из работ американских ученых, которым недавно удалось в условиях имитации открытого космоса создать то, что они назвали «прото-клетками». Это аналог мембранных

структур, присутствующих во всей живой материи. В настоящее время есть основания думать, что следы жизни обнаружат и на Марсе.

В ходе эволюции за всю историю Земли на ней насчитывалось, по некоторым оценкам, около 500 миллионов (!) видов живых существ. Напомним, что под видом понимается основная структурная единица в системе живых организмов, качественный этап их эволюции. Вид – это основная категория в *биологической систематике*, простейшая схема соподчинения которой образует следующий ряд: виды объединяются в род, роды – в семейство, семейства – в отряд, отряды – в класс, классы – в тип. Так, человек (*Homo sapiens*) относится к отряду приматов, входящему в класс млекопитающих (зверей), который, в свою очередь, относится к типу позвоночных. Кстати, ближе всего к человеку в отряде стоит *шимпанзе*. Жизнь этого примата во многом сходна с жизнью наших предков (до австралопитеков) и являет собой пример весьма высокого уровня развития млекопитающих.

В настоящее время на Земле насчитывается чуть более 3 млн. различных видов живых организмов, причем почти 86% из них относятся к классу насекомых. Примечательно, что при рассмотрении количества видов внутри каждого из 77 классов – мы приходим к тильда-распределению: $S=3316019$ (общее количество видов); $K=77$; $A=9,5291$; $p=0,2627$. Подсчет количества видов в каждом из 21 типа – также приводит нас к тильда-распределению, но уже с другими параметрами: $S=3316019$; $K=21$; $A=8,585$; $p=0,330$. Человека, как одного из Земных видов, отличает огромная *избыточность разума*, поскольку для сохранения вида в эволюционной борьбе хватило бы и разума неандертальца. Это напоминает чудовищно избыточные защитные средства гигантских хищных рептилий мезозоя, которые, в конце концов, и погубили этих рептилий как вид. А что ожидает человечество? (см. п. 5.3).

5.2. ЧУДО-ВЫЧИСЛИТЕЛИ (ЛЮДИ И УСТРОЙСТВА)

Всегда были, есть и будут люди, наделенные выдающимися способностями к *устному* счету. Причем, как правило, эти уникалы вовсе не являются математиками, часто среди них попадались совершенно неграмотные люди (при вычислениях они пользовались правилами собственного изобретения, а не общеизвестными правилами арифметики), и во всем остальном они отличались невысокими умственными способностями. За несколько секунд люди-счетчики *в уме* перемножают большие числа, извлекают корни разных степеней, раскладывают числа на простые множители, находят сложные проценты, рассчитывают даты любых календарей, решают уравнения и многие другие задачи, на которые опытный математик, пользуясь каранда-

шом и бумагой, тратит куда больше времени. Скрытые возможности человеческого мозга, которые демонстрируют «самородки» просто поражают: вычисление корня квадратного из 100-значного числа (за 52 минуты); возведение в квадрат 18-значного числа (за 2 минуты); нахождение множителей у 6-значных чисел; перемножение 9-значных чисел; вычитание одного 21-значного числа из другого; сложение 6-значных чисел и т. д.

Когда некоторым чудо-вычислителям разрешали пользоваться карандашом и бумагой, то они выполняли любые вычисления неправдоподобно быстро и всегда безошибочно (при расчете в уме ошибки иногда случались, например, когда болела голова). Так, 16-ти летний Иоганн Дазе (1824–1861), пользуясь формулой (188), через два месяца выдал приближенное значение числа π до 200-го знака после запятой. Другим достижением уже взрослого Дазе было: вычисление 7-значных натуральных логарифмов первых 1005000 чисел; составление таблицы гиперболических функций (для военных расчетов); разложение на множители первых 5 миллионов натуральных чисел (с одобрения великого немецкого математика Карла Гаусса). Кстати, сам К. Гаусс (1777–1855) также обладал с раннего детства подобной одаренностью к сложнейшим вычислениям.

Главный секрет всех чудо-вычислителей кроется в их *феноменальной памяти, ориентированной на числовую информацию*, т. к. многие из этих людей не могли также хорошо запоминать, скажем, тексты, мелодии, изображения. Вот признания некоторых уникалов: они лучше всего воспринимали вопросы-задачи на слух; они в уме создавали некие зрительные образы (оперировали “изображениями” чисел); результаты у них иногда появлялись “сами собой” (угадывались интуитивно? – объяснить невозможно); они могли прерывать вычисления на несколько часов, отвлекаясь на иные дела, а потом возобновлять их далее (промежуточные результаты в виде огромных чисел хорошо сохранялись в памяти).

Итак, вообще говоря, именно своей *особой памяти* обязаны чудо-вычислители, поскольку умение быстро считать может развить у себя каждый нормальный человек. Дело в том, что существуют удивительно простые приемы для ускорения работы с большими числами, и после определенной тренировки любой человек может производить должное впечатление на окружающих, которым не известны секреты такого счета.

Одним из самых выдающихся чудо-вычислителей и при этом первоклассным математиком был Александр Крэйге Айткене (1895–1967). Он автор четырех книг и около 70 статей, кроме того, он был одаренным музыкантом – играл на скрипке и альте, сочинял песни, фортепьянные пьесы и даже оркестровые произведения. Был добрым и терпеливым человеком в общении. Память его была феноменальна, причем не только к числам (по памяти мог

написать на доске 1000 знаков числа π), но и к любым текстам (мучился от того, что долго не мог забыть даже случайно прочитанную развлекательную “литературу”). Айткен часто производил свои вычисления подсознательно. Он говорил, что некоторые результаты “выплывают из мрака”; например, о каком-то конкретном числе он мог сказать, что “по ощущению оно простое”, – и оно на самом деле оказывалось простым. Айткен обнаружил, в частности, что число 163 формирует *почти целое число* (см. п. 2.10). Как он однажды сказал, “близкое знакомство с числами, приобретенное по врожденной склонности и отточенное благодаря упорным тренировкам, действительно позволяет проникнуть в самые глубокие теоремы алгебры и анализа”.

Возможности человеческого мозга поражают. Эти возможности косвенно проявляются в устройствах, которые человек создал. В конце XX века, возможно, самым значительным достижением стало создание быстродействующих электронных вычислительных устройств – компьютеров.

Быстродействие компьютеров (B , которое измеряется в специальных единицах – МИПС) росло почти по экспоненте $B \approx 0,0895 \cdot \exp(0,23 \cdot T)$, где T – количество лет, начиная с 1960 г. В 2001 г. фирма IBM в США создала самый «быстрый» компьютер – до $1,2 \cdot 10^{10}$ операций в секунду. В России в 2001 г. создан третий по быстродействию (после США и Японии) компьютер – около 10^9 операций в секунду. На вид такой компьютер – это множество «шкафов» в комнате. Через 5–10 лет должны появиться *квантовые, молекулярные, биологические* и другие, весьма экзотические компьютеры, которые, вероятно, приблизят науку к постижению самого Сознания.

Кстати, автор использовал ПК *Pentium-III*, мощность которого просто ничтожна для исследования ряда натуральных чисел “в лоб”, т. е. путем тривиального перебора всех чисел. Это хорошо видно на отдельных примерах в ГТНЧ (в тексте иногда говорилось о затраченном машинном времени). Ряд длиной в 10^{61} чисел – это пока не по силам никакому компьютеру.

Ещё в 1965 г. Гордон Мур сформулировал эмпирический закон, согласно которому плотность транзисторов на микросхеме компьютера удваивается за 1,5 года. По оценке автора этот закон можно представить в виде следующей экспоненты: $ПЗ \approx 0,7979 \cdot \exp(0,4343 \cdot T) \approx (2/\pi)^{1/2} \cdot \exp(T \cdot \lg e)$, где T – количество лет, прошедших с 1970 г.; $ПЗ$ – плотность записи информации в оперативной памяти компьютера (Килобит на микросхему). Например, в 2005 г. ($T=2005-1970=35$) примерно будет $ПЗ \approx 3 \cdot 10^9 \cdot \text{Кб} \approx 3 \text{ Гб}$. Однако уже сегодня миниатюризация полупроводниковых устройств близка к своему физическому пределу – 10^{-7} м (0,1 мкм). Кстати, минимальный размер этих устройств уменьшался также по экспоненте (начиная с 1970 г.).

Несмотря на поразительную изобретательность человека, уже сегодня можно задать вопрос о том, каков же будет самый мощный, физически «пределный» компьютер (ФПК)? Дальше всех в своих прогнозах ушел американский физик Сет Ллойд, который утверждает, что ФПК будет чем-то вроде *огненного шара* или даже *черной дыры*!

Ллойд рассматривает любое вычисление, как некий физический процесс, как переключение битов между условными значениями «0» и «1», которым отвечают два устойчивых физических состояния: сопротивление в транзисторе; та или иная структура молекулы (молекулярный компьютер); значения спина в атоме (квантовый компьютер) и т.д. Минимальное время переключения бита равно $t=(h/E)/4$, где h – постоянная Планка (см. табл. 26), E – энергия компьютера, используемая им для вычислений (полная энергия). Это положение доказано теоретически в 1998 г. американскими физиками Н. Марголусом и Л. Левитиным. По мнению Ллойда у ФПК из 1 бита и массой, скажем, $m=1$ кг вся энергия будет расходоваться только на вычислительный процесс, поэтому получаем $t=(h/E)/4=0,25 \cdot h/(m \cdot c^2) \approx 10^{-51}$ секунды (меньше 1 *эви*!). Но, очевидно, ФПК не может быть из 1 бита, и, например, при 10^9 бит время переключения каждого из них будет уже больше планковского времени $t \approx 10^{-51} \cdot 10^9 \text{ бит} \approx 10^{-42}$ с (больше 1 *эви* $\approx 10^{-44}$ с). Но важно то, что общее число переключений всех битов за 1 секунду у ФПК остается равным 10^{51} . А если массу ФПК увеличить в 1000 раз, то его быстродействие также возрастет в 1000 раз!

Как избавиться от «бесполезной» массы нынешних компьютеров? На пределе физических понятий надо превратить все «железо» гипотетического компьютера в кванты (фотоны, у которых масса покоя равна нулю), тогда вся энергия, запасенная в массе, перейдет в энергию излучения. Вот почему ФПК превращается в подобие огненного шара, а его вычислительная мощность лежит далеко за пределами человеческого воображения (как и технологические детали ФПК, которые для нас не принципиальны).

Память компьютера ограничена его *энтропией*, т. е. степенью беспорядка, случайностью в системе. В теории информации понятие энтропии – аналог понятия количества информации. Величина энтропии (S) равна $S=k \cdot \ln N$, где k – постоянная Больцмана, N – число различных состояний системы. Таким образом, чем больший объем информации надо сохранить, тем больше различных состояний необходимо для этого. Пусть объем ФПК равен 1 литру. Поскольку речь идет о светящемся шаре, то Ллойд использовал расчеты Макса Планка по *абсолютно черному телу*, и получил, что 1 литр квантов света может хранить около 10^{31} (!) битов информации.

Итак, по мнению Ллойда, в ФПК информация хранилась бы в положениях и траекториях гамма-фотонов и обрабатывалась за счет их столкновений друг с другом (а также с электронами и позитронами). Для считывания информации достаточно открыть «окошко» в стенке «ящика» (с температурой в миллиард градусов!) и выпустить фотоны, которые попадают в детектор гамма-излучения, где и будет считано их состояние. При размере «литрового» ФПК около 10 см скорость вывода информации (со скоростью света) составит $10^{31}/(3 \cdot 10^{-10}) \approx 10^{41}$ бит в секунду, т. е. в $10^{51}/10^{41} = 10^{10}$ раз медленнее, чем скорость обработки информации внутри ФПК. Это явно ухудшает свойства ФПК в целом. Чтобы повысить скорость ввода-вывода надо уменьшить размер ФПК. Но сжатие «сгустка» гамма-квантов до некоторого предельного значения превращает его... в *черную дыру*! Один килограмм «литрового» ФПК «схлопнется» в объеме менее чем 10^{-27} м в поперечнике. Ещё в 1970 г. С. Хокинг показал, что черные дыры должны испаряться – испускать кванты света и элементарные частицы *за горизонт событий*. Но такое излучение означает, что черные дыры имеют энтропию, а значит, могут запасать в себе информацию. Согласно расчетам Я. Бекенштейна (1972 г.) черная дыра массой 1 кг может хранить примерно 10^{18} бит. Причем, с точки зрения *теории струн* (см. п. 4.5), можно добыть информацию о том, как такая черная дыра формировалась (по теории Гордона Кейна). Сам Ллойд считает, что она осталась записанной на горизонте событий в форме сжатых струн. И если это действительно так, то черная дыра – и есть *оптимальный* ФПК, но представить его работу ещё сложнее, чем в случае раскаленного шара. Очевидно, это будет сверхмощное, но одноразовое устройство: решив задачу, чернотырный ФПК исчезнет от нас.

5.3. КРИТИЧЕСКИЙ ГОД ДЛЯ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА (2030 г.)

Рост населения нашей планеты является весьма важной и интересной проблемой. Многие другие глобальные проблемы – состояние окружающей среды, истощение ресурсов и производство энергии, глобальная безопасность, да и вообще суммарный результат всей экономической, социальной и культурной деятельности, составляющей историю человечества, возникают в связи с увеличением людей на планете. Быть может, первым, кто обратился к математическому моделированию для объяснения основных факторов, управляющих ростом населения, был английский экономист и священник Т. Р. Мальтус (1766–1834). В своем труде “Опыт о законе народонаселения” (1798) он объяснял бедственное положение народа и безработицу “абсолютным избытком людей”, действием “естественного закона народонаселе-

ния”: в силу биологических особенностей людей население имеет тенденцию размножаться в геометрической прогрессии (т. е. по экспоненте), в то время как средства существования могут увеличиваться лишь в арифметической прогрессии – это противоречие время от времени “снимается” эпидемиями, голодом, войнами и политическими катаклизмами, которые истребляют огромные массы “лишних” людей (бедных и слабых).

В СССР после 1950 г. рост населения шел по экспоненте, а в 1992 г. Б. Н. Ельцин (р.1931) начинает свои радикальные реформы, одно из “достижений” которых – уменьшение численности населения (истребление «лишних» людей?). Так, за первые 6 месяцев 1999 г. в России умерло на 528 тысяч человек больше, чем родилось (убыль населения больше, чем за весь 1998 г.) – прецедентов подобного в мире в *невоенное время* не существует. Сейчас в России в среднем мужчины живут 58 лет, а женщины – 69 (средняя продолжительность жизни в США – 78 лет, а в отсталой Мексике – 74).

Естественность закона народонаселения проявляется в том, что на относительно коротких промежутках времени рост населения идет по экспоненте. Так, например, с $T=1930$ г. по $T=1990$ г. население Земли увеличивалось по закону $N \approx 4 \cdot 10^{-5} \exp(0,0164 \cdot T)$ (в млн. человек), что, кстати, в свою очередь приводило к экспоненциальному потреблению энергии человечеством $E \approx 2 \cdot 10^{-17} \exp(0,031 \cdot T)$ (в условных тоннах угля).

Проблема народонаселения интересует многих современных ученых, так, С. П. Капица выделяет четыре периода в истории человечества [18]:

1) *Эпоха линейного роста* (от 4,5 до 1,6 млн. лет тому назад), когда численность *Ното Habilis* (в юж. и вост. Африке) достигла $\sim 10^5$ особей.

2) *Эпоха гиперболического роста*, когда численность населения (N) изменялась по закону $N=186000/(2025-T)$, где T – любой конкретный год на промежутке времени от -1600000 года (со знаком “минус”) до 1960 года.

3) *Эпоха демографического перехода* (с 1960 по 2050 год), когда численный рост прекращается, и население стабилизируется, причем в критическом 2005 г. скорость роста населения достигает своего максимума (90 млн. человек в год). Т. е. человечество сейчас проходит критическую эпоху смены форм и параметров своего развития, никогда прежде не переживавшуюся.

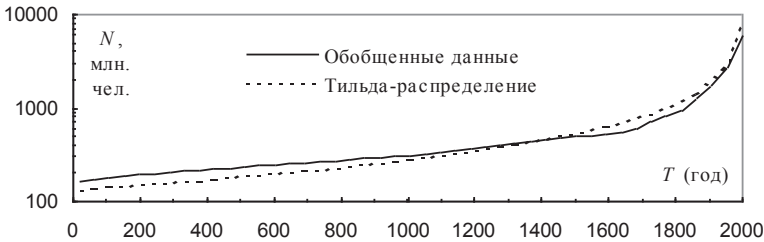


Рис. 48. Рост населения Земли от Рождества Христова до 2000 г.

Некоторые историки даже провозгласили конец истории; другие – переход к постиндустриальному развитию (в очень короткие сроки).

4) *Эпоха перехода к стабилизированному пределу* в 12–13 млрд. человек, достигаемому к 2200 г. Т. е. 185–200 человек на 1км² земли, пригодной для сельскохозяйственной обработки, что представляется разумным.

Описанная модель роста численности населения приводит, в частности, к следующей оценке: в течение всего времени роста (от 4,5 млн. лет тому назад до 2005 года) на Земле прожило примерно 90 млрд. человек. В отличие от Мальтуса, утверждавшего, что именно внешние условия и ресурсы определяют скорость роста населения и его придел, Капица приходит к парадоксальному выводу – темп роста населения зависит только *от внутренних свойств системы*. Обобщенные данные по росту населения в мире приведены на рис. 48 (усредненные данные для последних 2000 лет).

Рост населения за последние 2000 лет неплохо описывает *тьльда-распределение* (см. п. 1.37) с параметрами: $S=40000$; $K=47000$; $A=23$; $p=0,2$. Значение тильды при $x=1$ – это предполагаемое количество наших предков за 2.112.955 лет до нашей эры, при $x=2$ – количество предков через 45 лет и т. д. (при $x=47000$ – это численность населения Земли в 2000 г.). 45 лет – это так называемое *характерное время*, определяемое из анализа глобального демографического развития и дающее масштаб времени, к которому следует относить процессы, происходящие в системе человечества. Характерное время практически совпадает с современным значением среднего возраста человека на планете. Первая четверть всех значений тильды стремительно растет (быстрее экспоненты – ведь это тильда!), оставаясь, тем не менее, меньше единицы, т. е. и австралопитеки и первые *Homo Habilis*, возможно, не являлись нашими предками, и лишь только около 1.570.000 лет до нашей эры ($x \approx 12066$) линия

человека отделилась от общего с обезьянами ствола (значения тильды “перевалили” за единицу и стали расти по экспоненте). Таким образом, динамичный процесс зарождения человечества по тильда-распределению существенно отличается от эпохи гиперболического роста и тем более от эпохи линейного роста в рамках модели С. П. Капицы. Количество всех людей, когда-либо живших на Земле, очевидно, также существенно отличается от 90 млрд.¹ (составляет «только» около 40 млрд. человек).

Конец эпохи демографического перехода у Капицы (2050 г.) практически совпадает с катастрофическим периодом в жизни человечества, предсказанным ещё «Римским клубом» (создан в 1968 г., объединяет около 100 ученых и самых компетентных специалистов из разных стран). В его *стандартной математической модели* развития человечества (отвечающей на вопрос: «Что произойдет, если ничего не предпринимать?») после 2030 г. очень быстро наступает катастрофа: природные ресурсы на планете, количество пищи на человека, удельное промышленное производство начинают резко снижаться, причем это происходит на фоне всё большего загрязнения окружающей среды и бурного роста численности населения (после 2050 г. оно начнет катастрофически вымирать). Если вспомнить ещё прогноз о скором похолодании (малом оледенении) на Земле и о возможном ударе крупного астероида в нашу планету в 2028 г. (см. п. 4.1), то картина, прямо скажем, складывается нерадостная.

Панацея от экологической катастрофы – это полная остановка роста производительных сил и их точная регулировка («равновесная» цивилизация), контроль рождаемости населения, регенерация природных ресурсов, повсеместная борьба с загрязнением среды (с лавиной долей в бюджетах всех стран) и т. д. Однако, в конце XX века человечество так и не предприняло радикальных мер по *всеобщему* спасению, поэтому в течение ближайших 50 лет цивилизация, скорее всего, прекратит свое существование (произойдет «коллапс» всех её параметров), а вместе с ней исчезнет и... загрязнение! Правда, это будет радовать только горстку избранных, в число которых с наибольшей вероятностью попадают кланы людей, сумевшие «сделать» огромные финансовые состояния. Надо полагать, что природу таким сценарием мы «не удивим», т. к. происходит очередной (сотый или тысячный?) крутой виток в ходе эволюционной борьбы живой материи на одной из 10¹¹ (как минимум?) планет, пригодной для её существования.

¹ Если такое количество человек можно было бы поставить с плотностью 4 чел./м², то потребовалась бы площадь 150×150 км (в 22 раза больше Москвы). Самое большое скопление людей (до 70 млн. человек) было зарегистрировано в 2001 г. на берегу реки Ганг в 15 км от города Аллахабад (Индия). При этом даже из космоса было видно темное пятно толпы паломников на берегу Ганга. Этот религиозный праздник (Кумбх Мела) проводится раз в 12 лет.

Неодушевленная природа всегда отдает предпочтение процветанию немногих объектов (особей) за счёт *тильдаобразного* “обездоливания” подавляющего большинства. Похоже, и человечество не так уж далеко ушло от этих законов (см. п. 5.5–5.7). Банальные библейские истины, вполне здравые идеалы коммунизма и т. п. достижения разума, вообще говоря, бессильны ускорить тяжелый и “непослушный” маховик эволюционного развития. Причем неизбежное обогащение элиты любого общества – это лучшая гарантия для её выживания во всевозможных катастрофах. Так, фантастический финансовый «взлет» русской элиты (всего за 10 лет!), очевидно, обезопасит их кланы от экологических и прочих потрясений в начале XXI века.

Английский историк Эдуард Гиббон (1737–1794) проанализировал упадок Римской империи в 7 полновесных томах и выделил 7 основных причин её краха: 1) борьба между имущими и неимущими; 2) огромные расходы на политические компании (подкупы лиц, расхищение денег); 3) бремя внешних обязательств Рима (по романизации); 4) отвращение к военной службе у солдат из обеспеченных семей; 5) отсутствие творческого руководства; 6) гибель римских принципов добродетели, чистоты, простоты; 7) высокий процент разводов. Падение Рима происходило 1700–1900 лет назад, но причины печального финала выглядят актуально и в наши дни.

Так что же изменилось за 2000 лет? Не вызывает сомнений только единственный факт – *сумма знаний, добытых человечеством, выросла на несколько порядков!* Возможно, именно в *бесконечном познании* и состоит смысл существования разума, а все катаклизмы истории (все перестройки) и личные драмы людей носят «вспомогательный», второстепенный характер, всего лишь «питательная среда» для успешной экспансии разума. Например, кто из нас помнит, сколько жизней и судеб загубил Пётр I (1672–1725) ради постройки Санкт-Петербурга и перестройки уклада жизни всей России? Скорее всего, наши потомки будут благодарны и Горбачеву и Ельцину, как сейчас мы «благодарны» Петру I, поскольку, честно говоря, нам неважно какой ценной достигнуто наше благополучие (особенно для тех, у кого это благополучие измеряется тысячами и миллионами долларов).

Для большинства ныне живущих актуально только настоящее, а из прошлого времени *реальную ценность* имеет только одно – *сумма точных (абсолютных) знаний*, накопленных человечеством (неважно какими способами). И ни история, ни философия, ни археология и т. п. науки, а тем более искусство, увы, значения практически не имеют. В конечном счете, именно *точные науки* создали телевизор, холодильник, стиральную машину и прочие атрибуты благополучия, доступные теперь каждому за его в принципе рабский (почти как 2000 лет назад?) труд. Да, когда-нибудь “красота спасет мир”, но это будет красота математических формул и абсолютных знаний, открытых и накопленных разумом в его неизбежном стремлении к Истине.

5.4. ИСКУССТВО – КАК СПОСОБ ПОЗНАНИЯ

Термин «искусство» – довольно емкое понятие. Так, в эпоху средневековья в школах изучали 7 учебных предметов, под общим названием “свободные искусства”: грамматика, риторика, диалектика, арифметика, геометрия, астрономия, музыка. В современном понимании искусство – это составная часть духовной культуры человечества, специфический вид познания окружающего мира, в котором выделяют 7 областей человеческой деятельности: пластические искусства, музыка, художественная литература, кинематограф (телеискусство), театр, хореография, эстрадно-цирковое искусство (в т. ч. некоторые виды спорта). В недрах искусства «спрятано» множество чисел и их соотношений, причем многие из них перекликаются с ГТНЧ, что является некой гарантией подлинной гармонии и совершенства. Рассмотрим вкратце только несколько примеров, подтверждающих это.

Живопись. Различают 7 видов пластических искусств: скульптура, живопись, графика, архитектура, декоративно-прикладное искусство, художественное конструирование, фотоискусство. Количество основных стилей в пластических искусствах близко к 21 (искусство возрождения, классицизм, романтизм, и т. д.). В каждом виде искусств можно выделить около 7 подразделов, например в живописи: монументальную живопись, декорационную, декоративную, станковую (картины), иконопись, миниатюру, дизайн.

В живописи можно насчитать 7 жанров: пейзаж, портрет, натюрморт, интерьер, батальный жанр, исторический, бытовой. В классической живописи можно выделить 7 основных видов: масляная живопись (масло), акварель, темпера, пастель, гуашь, соус (сангина), карандаш (перо, уголь).

Живописец в своей работе использует 7 основных предметов: мольберт (этюдник, планшет); холст (картон, бумагу); палитру; краски; кисти (обычно 7–8 размеров или мастихин); растворитель (масло); лак (фиксативы).

Техника масляной живописи включает 7 основных понятий (приемов):

- использование фактуры холста (от крупнозернистой до мелкозернистой);
- подмалевок (предварительная моделировка формы всего 1–2 красками);
- рельефный подмалевок (почти скульптурная лепка формы мазком);
- техника алла-прима (работа «по сырому», как правило за один сеанс);
- характер мазка (от «зализанной» техники до нагромождения красок);
- многослойная живопись (каждый слой краски при этом просушивается);
- лессировка (тонкие, прозрачные слои красок по уже засохшим краскам).

Глаз обычного человека различает тысячи оттенков цветов, а глаз художника острее в десятки раз. Между тем старые мастера живописи пользовались всего 7–8 красками, создавая шедевры колорита. Обычно художнику

достаточно иметь на своей палитре около 21 краски, хотя перечень всех красок может дойти до 200. На палитре рекомендуется смешивать не более 3-х красок (не считая белил, у которых совершенно особая роль), иначе получаются грязные «замесы». Вполне нормальная палитра содержит 8 красок: белила, стронциевая желтая, охра светлая, английская красная, краплак, изумрудная зеленая, ультрамарин, кость жженная. Кстати, в небесной радуге насчитывают 7 основных цветов: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый. (Их порядок легко запомнить по фразе: «*Каждый охотник желает знать, где сидят фазаны*»). На экране цветного телевизора полноцветное изображение формируется всего из 3-х цветов: красного, синего и зеленого – таковы законы физики и биологии.)

Размеры полотна (холста или рамы картины) чаще всего близки к «золотому сечению», т. е. отношение большей стороны (A) к меньшей стороне (a) в среднем близко к значению $A/a \approx 1,618$. Такая же закономерность у рисунков и графических работ (скажем, высотой A и шириной a). Более того, последние обычно наклеивают на паспарту (высотой B и шириной b) так, что нижнее поле паспарту шире верхнего примерно в 1,6 раза (боковые поля всегда равны). Дело в том, что соотношение полей (W) паспарту по канонам искусства по сути дела сводится к выражению $W = (3 \cdot b/a - 1) / (b/a + 1)$, поэтому $W \approx 1,618$, когда $b/a \approx 1,894 \approx 2$, а это довольно типичное отношение ширины паспарту к ширине рисунка (графической работы, фотографии).

Самое дорогое в мире произведение – «Мона Лиза» Леонардо да Винчи, в 1962 г. ее оценили в 100 млн. долларов (10^{10} центов, что близко к максимально возможному типу чисел на БО). В апреле 2002 г. Государственный Эрмитаж в Санкт-Петербурге приобрел «Чёрный квадрат» Казимира Малевича (1878–1935) за *один миллион* долларов, что явилось рекордной суммой для картины проданной в России чуть ли не с 1913 г.



Рис. 49

Уменьшенная «копия» этого шедевра приведена на рис. 49. Отношение площадей белого и черного квадратов равно 1,67, т. е. близко к «золотому сечению», возможно, только эта скрытая гармония и завораживает наш взгляд в данном случае. В 1913 г. Малевич, очевидно, шутя, создал целых четыре «Черных квадрата» (размер картины – примерно полметра). В настоящее время Эрмитаж купил картину у разорившегося «Инкомбанка» (вспомните его рекламу по ТВ о «вечных ценностях»), поэтому, надо полагать, финансовое положение вполне конкретных лиц заметно поправилось.

История с «Чёрным квадратом» – яркое подтверждение того, что многие впадают в *фетишизм* (слепое поклонение какому-либо неодушевленному предмету), а само искусство давно стало разменной монетой большого бизнеса. «Чёрный квадрат» можно считать символом человеческой глупости.

В математике невозможно привести пример *фетиша*, что говорит об интеллектуальной и нравственной чистоте этой сферы человеческой мысли. Попытки автора связать ГТНЧ с реальным физическим миром также своего рода фетишизм (слепое поклонения числам). Но подобные фантазии могут быть легко опровергнуты с помощью точных наук (её разделов, недоступных автору). А вот поиски Истины в искусстве, в истории, в политике – почти безнадежное занятие (хотя это может доставлять человеку массу удовольствий). В этом кроется некая ущербность гуманитарных знаний, искусства.

Музыка – это “язык души” человека. В весьма тонком (но не переводимом на язык слов) выражении эмоций музыка не знает себе равных. Каждый человек, наверняка, слышал про 7-нотные диатонические гаммы: до, ре, ми, фа, соль, ля, си. Изучавшие музыку, знают 7 музыкальных символов: скрипичный ключ, басовый ключ, бемоль, диез, бекар, знак повторения, длительность нот; а также *шесть* названий нот: целая нота, половинная, 4-я, 8-я, 16-я, 32-я. Для указания темпов в музыке служат около 33 терминов: адажио, аллегро, пиано, форте, и т. д. Стандартный состав симфонического оркестра включает 21 группу инструментов: скрипки, альты, виолончели, и т. д. Количество наименований музыкальных инструментов близко к 200, их все можно разделить на 5–7 основных групп: струнные, клавишные, деревянные духовые, медные духовые, ударные, Количество музыкальных форм (симфония, сюита, увертюра, менуэт, и т. д.) также приближается к числу 200. Кульминация многих музыкальных произведений приходится на точку «золотого сечения» их общей продолжительности. Список самых известных композиторов в мире ограничивается примерно 200 именами.

Фундаментальное соотношение между гармонией в музыке и гармонией чисел (их простых отношений) открыл еще Пифагор. Дело в том, что свободно колеблющаяся струна издает основной тон. Если точно посередине струны создать узел колебания (прикоснуться пальцем к струне), то издаваемая струной нота станет на октаву выше, и будет гармонировать с исходной нотой. Другие гармоники мы получим, перемещая узел в другие положения, соответствующие простым дробям (трети, четвертой, пятой части и т. д.). от полной длины струны. Гармония звуков (для нашего слуха) при ударах молотов о наковальню в кузнице возникает только тогда, когда массы молотов образуют друг с другом простые отношения или дроби.

Языки человеческого общения. В основе художественной литературы лежит слово, а точнее язык, как главное средство общения людей. Поскольку воздействие литературы на умы упало до критически низкой отметки (мы перестаем читать), то будем рассматривать сам язык как таковой.

Предполагается, что развитие речи началось не позже 20 тыс. лет назад. Уже неандертальцы имели голосовые связки пригодные для простейшей речи. В настоящее время человечество использует для общения не менее

4000 языков (точно не известно), которые разделяют на 8 основных языковых семей: индоевропейская (самая большая по количеству говорящих на ней людей, включает русский язык), китайско-тибетская, нигеро-конголезская, австронезийская, америндская, алтайская, дравидская, урало-алтайская. Еще выделяют 9 малых языковых семей, а также изолированные языки, т. е. без всяких связей с другими языками, например: японский, корейский, шумерский (самый старейший из них), и т.д. Начиная с XVII в. придумано несколько сотен искусственных языков для облегчения международного общения. Самый популярный из них – *эсперанто* (1887 г.) имеет только 16 грамматических правил (и ни одного исключения), а язык *солресол* (начало XIX в.) основан на 7-нотных гаммах: до, ре, ми, фа, соль, ля, си, поэтому на солресоле можно не только сказать, но и спеть или просвистеть. К искусственным языкам относят также языки программирования для написания сложнейших компьютерных программ. Кстати, один из самых богатых людей планеты – Билл Гейтс (род. 1955 г.) начал с того, что в 19 лет разработал язык «*Бейсик*», который надолго стал самым популярным языком любительского программирования (простой и «мощный» язык).

Больше всего в мире носителей разговорного китайского языка (гуойо) – 810 млн. человек, затем идет язык хинди (364 млн.) и английский язык (335 млн., хотя говорят на нем в мире больше всего), русский язык стоит на восьмом месте (156 млн.). Всего же можно выделить 33 основных языка мира, носителями которых являются 66,1% населения Земли, причем количества носителей этих языков близки к *тильда-распределению* ($OP=\pm 20\%$) с параметрами: $S=4096$ (млн. человек); $K=33$ (языка); $A=4,22$; $p=0,164$.

Первые системы письма возникли около 5500 лет назад и в настоящее время различают 4 основные письменные системы: 1) *Пиктографические* – с символами похожими на предметы, которые они обозначают, т. е. по типу дорожных знаков, компьютерных пиктограмм. 2) *Идеографические* – с символами мало похожими на предметы, которые они обозначают (клинопись, египетские иероглифы). 3) *Логографические* – с символами (графемами), представляющими целые слова, как в китайском языке. Считается, что для повседневной информации достаточно запомнить около 200 графем (иероглифов). 4) *Алфавиты* – самая удобная и экономная система письма, причем большинство алфавитов мира содержат от 21 до 33 символов (букв). Так, в греческом языке – 24 буквы; в английском – 26; в арабском – 28; в русском,

Таблица. 31

<i>n</i>	<i>P</i>	<i>n</i>	<i>P</i>
1	Ф, 0,002	17	У, 0,021
2	Э, 0,002	18	П, 0,023
3	Щ, 0,003	19	Д, 0,025
4	Ц, 0,004	20	М, 0,026
5	Ш, 0,006	21	К, 0,028
6	Ю, 0,006	22	Л, 0,035
7	Ж, 0,007	23	В, 0,038
8	Х, 0,009	24	Р, 0,040
9	Й, 0,010	25	С, 0,045
10	Ч, 0,012	26	Н, 0,053
11	Г, 0,013	27	Т, 0,053
12	Б, 0,014	28	А, 0,062
13	Ь, 0,014	29	И, 0,062
14	З, 0,016	30	Е, 0,072
15	Ы, 0,016	31	О, 0,090
16	Я, 0,018	32	–, 0,175

белорусском, украинском – 33 буквы и 7 групп знаков препинания. Для слепых людей существует специальный шрифт Брайля. Он состоит из маленьких клеточек с 6 рельефными точками, каждая из которых может быть большой или маленькой, а их всевозможные комбинации образуют 63 различных символа (буквы, цифры, знаки и др.). Опытный читатель может быстро “читать” рукой такой шрифт, причем скорость чтения всего в два раза меньше, чем у зрячего человека.

Пословицы и поговорки – это образные, устойчивые в речи изречения народа. Они есть абсолютно у каждого народа, например, только в русском языке В. И. Даль (1801–1872 г) собрал свыше 30 тысяч (~10⁵) пословиц и поговорок. Причем там немало семерок, например: “Семь раз отмерь, один отрежь”; “Семеро одного не ждут”; “Семь пятниц на неделе”; “Семи пядей во лбу”; “Седьмая вода на киселе”; “За семь верст киселя хлебать”; “Семь бед – один ответ» («Семь бед – один “Reset” – в современной тракторке) и т. д. Семерка также нередко встречается в сказках, былинах, легендах, мифах. Кстати, в знаменитом «Толковом словаре живого великорусского языка» В. И. Даля содержится около 2·10⁵ слов. Целый ряд слов (“семья”, “семя”, “всеми”, “в сём” и т. д.) порождены числом 7.

В любом фрагменте произвольного литературного текста *вероятности (P) появления букв* русского алфавита (включая пробелы между словами), будучи расположенными по возрастанию, образуют тильда-распределение с параметрами: $S=1$; $K=32$; $A=4,482$; $p=0,229$. Реальные вероятности P приведены в табл.31. Таким образом, в среднем из 1000 наугад выбранных в тексте промежутков и букв, например, на 2-х местах будет стоять буква “ф”, на 28-ми – буква “к”, на 62-х – буква “а” и на 175-ти местах окажутся промежутки между словами (пробелы). Эти вероятности используют, например, при расшифровке закодированных текстов, при формировании типографских касс. Очевидно, тильдаобразии характерно для любого из 2,5 тысяч языков, существующих на планете.

В русском языке (по предварительной оценке автора) средняя длина слова составляет 5,7÷7,0 букв. В обычном орфографическом словаре больше всего слов на букву: П – 18%, С – 9%, О – 8%, В – 7%, Н – 6%, К – 6%, Р – 5% (с этих 7 букв начинаются почти 60% всех слов данного словаря).

Религия, по мнению автора, стоит в одном ряду с искусством. Это тем более правдоподобно, если учесть всё великолепие религиозного антуража. А главное, несмотря на многовековую эволюцию, как искусство, так и религия мало чего достигли в познании *сути бытия* и в росте *социального благополучия человечества*. И в этой беспомощности их главное отличие от естественных (точных) наук. Ещё Ф. Энгельс (1820–1895) дал глубокое определение: «...Всякая религия является не чем иным, как фантастическим

отражением в головах людей тех внешних сил, которые господствуют над ними в их повседневной жизни...» [23].

Религия возникла, по-видимому, в каменном веке около 40–50 тыс. лет назад. На сегодняшний день в мире можно выделить 7 основных религий: католицизм, протестантство, православие, ислам, индуизм, буддизм, иудаизм. Если вникать более детально, то, например, внутри одного христианства можно насчитать не менее 15 религий, кроме того, возникают «новые» религии (сайентологи, кришнаиты и др.), и тогда общее количество всех религий составит около 33. Главная движущая сила, поддерживающая религию – это страстные желания человека найти окончательный *смысл и цель в жизни*. Однако интеллект подавляющего большинства просто не способен приобщиться к красоте и богатству сложных *научных* знаний, а для самутверждения в религии вполне достаточно совсем слабого разума – в этом главная причина процветания религии (вернее, церковной элиты).

Религия в наши дни – это весьма надежный источник доходов, своеобразный бизнес немногих «избранных». Но самое главное – религия всегда помогала богачам управлять нищими массами, регулировать их поведение, поэтому властимущие всячески поддерживают религию. Сегодня, в псевдокапиталистической России религия как никогда пришлась «ко двору».

Даже беглый просмотр *Библии* (которая состоит из Ветхого завета и Нового завета, признаваемого лишь христианством) показывает, что она не отличается особой оригинальностью в части числительных и многие сюжеты содержат всё то же магическое число 7. Так, *Ветхий завет* разделяется на 7 составляющих: пять книг Учения (по-еврейски Тора – Бытие, Исход, Левит, Числа, Второзаконие), Пророки и Писания. О 7 днях творения рассказывает нам книга Бытия и о 7 тучных и 7 тощих коровах, которые увидел во сне фараон. По еврейскому мифу Всемирный потоп истребил “все сущее с лица земли”, за исключением праведника Ноя с его семьей и пары “от всякой плоти” – 7 пар чистых животных, 7 пар нечистых и 7 пар птиц (все они, якобы, спасаются на ковчеге, построенным Ноем по велению Божию). *Новый завет* также разделяется на 7 составляющих: четыре Евангелия (от Матфея, от Марка, от Луки, от Иоанна), Деяния святых Апостолов, Послания (их 21) и Апокалипсис (Откровение Иоанна Богослова). В притчах Нового завета число 7 упоминается более чем в 25-ти случаях (исключая повторы). Например, 7 хлебов, которыми Иисус накормил народ; 7 заповедей (не убивай, не прелюбодействуй, не кради, не лжесвидетельствуй, почитай отца и мать, люби ближнего, раздай свое богатство нищим); 7 признаков мудрости, сходящей свыше (она чиста, мирна, скромна, послушлива, милосердна, беспристрастна, нелицемерна).

5.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ

Распределение денежных доходов населения – это, пожалуй, до сих пор наиболее важный показатель социального “здоровья” в обществе любой формации. Принято считать, что распределение доходов населения описывается *степенным законом* – “законом Парето”. Итальянский экономист и социолог В. Парето (1848–1923) был ярким представителем математической школы в политической экономии. Он, в частности, считал, что движущая сила общества – это творческая сила немногочисленных *элит*, их яростная борьба и смена с помощью насилия одних элит на другие.

По мнению автора, распределение доходов населения лучше всего описывает не закон Парето, а *тильда-функция*. Попробуем обосновать это на конкретном примере. Обратимся к табл. 32, где приведены данные по средним доходам на душу населения (в условных международных долларах).

Таблица 32. Средние доходы на душу населения в 1995 г. [18]

Группа стран (отдельная страна) с точки зрения доходов на душу населения	Средний доход на душу населения, \$/год	Доля взрослого населения (старше 15 лет)	Средний доход взрослого человека, \$/мес	Коэфф-т расслоения, K_{10} (10%)	Коэфф-т расслоения, K_{20} (20%)
Мир в целом	6070	64 %	790	14,4	7,9
Развитые страны	17300	76 %	1897	15,0	7,2
Развивающ. страны	3050	60 %	424	14,2	8,2
США	27000	76 %	2961	15,9	8,9
Япония	22000	76 %	2412	–	4,3
Германия	20000	76 %	2193	8,4	5,8
Россия	4500	76 %	493	32,0	11,5
Китай	2920	60 %	406	10,0	7,1
Индия	1400	60 %	194	7,7	5,0

Данные в табл. 32 несколько устарели, но они позволяют показать как строится тильда. Распределение доходов населения внутри конкретной страны (или группы стран) принято характеризовать *коэффициентами расслоения*: K_{10} – равным отношению доходов 10% самого богатого населения к 10% самого бедного населения, и K_{20} – равным отношению доходов 20% самого богатого населения к 20% самого бедного.

Рассмотрим ситуацию по России. Будем считать, что доход – это денежные средства (заработная плата, всевозможные выплаты, пенсии), которые получает всё *взрослое население* страны (старше 15 лет). В 1995 г. взрослое население России составляло около 112,4 млн. человек (76% от всего населения, равного 147,9 млн. человек). Суммарный доход всего взрослого населения страны за один месяц был, очевидно, равен $S=4500 \cdot 147,9 \cdot 10^6 / 12=5,55 \cdot 10^{10}$ (\$/мес). Чтобы построить тильду этого суммарного дохода, разобьем все взрослое население, скажем, на $K=4000$ групп по 28100 человек

в каждой ($112,4 \cdot 10^6 / 4000 = 28100$). Пусть $n=1, 2, 3, \dots, 4000$ – порядковый номер группы, а далее воспользуемся тильда-функцией (см. также п. 1.37):

$$D_n = S \cdot \exp\left[-A \cdot \left(\ln \frac{K}{n}\right)^p\right], \quad (251)$$

где D_n – доход n -й группы (\$/месяц); $A=9,27$ и $p=0,077$ – параметры, найденные из условия, что $K_{10}=32$; $K_{20}=16$, причем не удается построить тильду с коэффициентами расслоения общества, указанными в табл.32 (при $K_{20}=11,5$ получаем $K_{10}=21$), которые, скорее всего, не верны.

Определяя по формуле (251) доход n -й группы, легко найти средний доход в n -й группе на 1 человека, равный $D_n/28100$ (рис. 50). Так, в первой и самой бедной группе средний доход на человека равен 36 \$/мес., а в последней и самой богатой группе – 327312 \$/мес., т. е. доходы богачей в 9092 раза превышают доходы бедняков. Средний годовой доход одного богача (из группы $n=4000$) составлял около 4 млн. \$. Построенное нами тильда-распределение не только дает вполне реальную картину распределения доходов в обществе, но и разоблачает всю обманчивость понятия “средний доход”, который, будучи равным 493 \$/месяц ($5,55 \cdot 10^{10} / 112,4 \cdot 10^6 = 493$), оставался не-

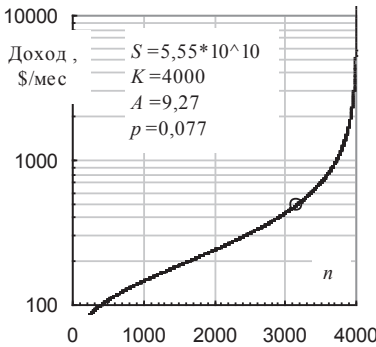


Рис. 50. Средний доход у одного человека в каждой из 4000 групп

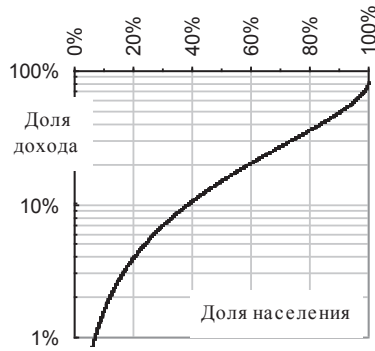


Рис. 51. Динамика роста доли суммарного дохода (нарастающим итогом)

доступным для 79% россиян (на рис. 50 средний доход указан кружочком, он достигается только у 3157-й группы населения). Таким образом, при чудовищном расслоении общества, характерном для России, “средний доход” всего лишь фикция, весьма удобная властямущим.

На рис. 51 показано то же тильда-распределение, но представленное в процентном выражении. Этот график наглядно показывает, что суммарные доходы 20% богачей составляли 64% всех доходов россиян (по самым

скромным подсчетам), а суммарные доходы 10% самых богатых – 51% всех доходов. (Существует шуточное правило «20/80»: *20% людей выпивают 80% пива*. В переносном смысле это означает, что примерно такое же соотношение концентрации усилий наблюдается и во всех остальных областях человеческой деятельности, в т. ч. и при распределении доходов. Правило «20/80» реализуется во многих тильда-распределениях, см. п.5.6, 5.7.).

Тильда показала, что в самой богатой группе (при $n=4000$) средний доход составил 327312 \$/мес., но, разумеется, внутри этой группы (28100 человек!) есть люди с ещё большими доходами. Например, зарплата одного «бензинового короля» Санкт-Петербурга в середине 2001 г. составляла 450000 \$/мес. (ему было 33 года, когда он скончался, якобы, от сердечной недостаточности) [46]. В среднем по России богатый – это человек, получающий более 5000 \$/мес., и наша тильда говорит, что таких людей в стране ~ 394 тыс. человек. Однако, только в Санкт-Петербурге у 69 тыс. человек доход составил более 35000 \$/мес. (по данным налоговой службы за 1999 г.). Вообще наша оценка (построенная нами тильда) чересчур скромная, и реальный коэффициент расслоения K_{10} гораздо больше. Т. е. тильда-распределение позволяет проверить подлинность экономических оценок!

Уместно также напомнить, что подавляющая часть (75÷90%) состояния российских богачей представлена вовсе не в денежных знаках и личном имуществе, а в виде неконтролируемых счетов и бизнеса за границей, в виде акций, облигаций и других ценных бумаг, которые служат титулами собственности. Кстати, у «среднего» российского олигарха капитал оценивается в несколько *миллиардов* долларов. Очевидно, всё это быстро приведет нас к экономическим «вершинам», достигнутым в США, где 0,25% населения сосредотачивают в своих руках 82% совокупного капитала всей страны.

По данным Всероссийского центра уровня жизни (ВЦУЖ) за годы реформ у *большой части* россиян уровень жизни заметно упал, но примерно у 25% – изменился незначительно, а у 15% – вырос, в том числе 3÷5% – стали просто сверхбогатыми. Причем, благодаря кризису 17 августа 1998 года, число состоятельных и богатых людей в России за последующий год *увеличилось* (!) почти вдвое. Между тем за чертой бедности у нас живут до 58% населения (они не имеют даже прожиточного минимума). Как известно, существует общепринятый критерий бедности: ***бедный тот, кто тратит на еду больше 1/3 своих доходов***, исходя из чего можно смело утверждать, что 82% населения России – это бедные. Средний класс в России после августовского кризиса почти уничтожен, а ведь именно он является показателем стабильности в обществе. Теперь россияне опять раскиданы по разным полюсам: либо бедность, либо богатство.

Что касается тильда-распределения доходов в обществе, то можно смело утверждать, что оно реализовывалось всякий раз в любой стране, причем независимо от общественно-экономических отношений, господствующих в обществе. Так, согласно данным Госкомстата, в 1989 г. расслоение населения в СССР (в обществе «развитого социализма») по доходам характеризовалось следующими коэффициентами: $K_{10}=5$ и $K_{25}=2$ (для сравнения в США в том же году: $K_{10}=14$ и $K_{25}=6$, а в Китае – $K_{10}=3$).

В обществе, построенном на деньгах, тильда-распределение доходов граждан выглядит вполне естественным, именно неравенство доходов регулирует «мирное» распределение *ограниченных* материальных благ. Например, сейчас в России около 1200 здравниц на побережье Чёрного моря (в Краснодарском крае), которые могут принять одновременно около 225 тыс. человек. Таким образом, за июнь–сентябрь в них смогут отдохнуть не более 1 млн. россиян (по 2 недели каждый), что составляет только 1% взрослого населения страны. Но примерно столько богатых людей в России, и «правильная» стоимость отдыха на Чёрном море «пропустит» туда только их. Рыночный механизм распределения тривиален как дважды два, а вот попробуйте организовать достойный отдых «всех слоев» населения (скажем, в условиях реального социализма) – эта задача кого угодно поставит в тупик, она требует колоссальных умственных и финансовых затрат от общества.

В тривиальном обществе (которое «отторгает» даже зачатки некой разумности, скажем, постулаты *коммунизма*) тильда-распределение доходов – это некая гарантия его эволюционного движения (к своей гибели?, см. п.5.3 о прогнозах Римского клуба). Однако, многострадальный и бесценный советский опыт 1917–1992 гг. по созданию *человека новой формации* (его морали) не столь печален, как теперь представляют СМИ, и позволяет надеяться, что существуют не только тупиковые пути эволюции человечества.

Тильдаобразное распределение доходов в обществе (разумеется, со своими параметрами S , K , A , p) наблюдается на самых разных уровнях, например, среди вкладчиков одного банка, среди жителей города, региона, страны, и даже всей планеты. Так, валовой национальный продукт (ВНП) 20% богатейших стран составляет около 95% суммарного ВНП, а ВНП 10% самых богатых стран – около 85% суммарного ВНП [19]. Таким образом, распределение доходов на уровне разных стран еще более “несправедливое”, чем на уровне населения отдельно взятой страны.

В настоящее время учеными достоверно установлено, что ***в мире все больше становится разрыв между богатыми и бедными, между знающими и незнающими***. При этом не следует отождествлять размер богатства

с умом человека (по крайней мере, в России), т. к. чаще всего огромное богатство *коррелирует*¹ с наиболее дьявольскими сторонами человеческой души. Кстати, это научный факт, что только 5–7% активного населения обладают склонностью к предпринимательству, и у 50% предпринимателей к концу 3-го года бизнес разваливается (он чужд им по своей природе).

Увеличение разрыва между знающими и незнающими – это пропасть, растущая между достижениями научной мысли и примитивным образом мышления обывателя, который формируется средствами массовой информации (СМИ). Не вызывает сомнения, что интеллект в обществе распределен также крайне “несправедливо”, *тильдаобразно* (логнормально), т. е. очень умных людей (сильнейших физиков-теоретиков, математиков) исчезающе мало, а подавляющее большинство людей – весьма посредственны.

Наш интеллект, вероятно, на 10^9 порядков «слабее», чем у продвинутых ученых (т. к. $10^{11}/140 \approx 10^9$, см. ГТНЧ, п. 1.25, 1.30). Радует только то, что откровенных идиотов, согласно тильда-распределению, также должно быть очень мало. Поскольку около 80% населения интеллектом «не блещут», то вполне закономерно, что в ходе демократических выборов большинство симпатий отдаются весьма заурядным личностям (например, новый президент США Дж. Буш – обаятельный человек, но среди 260 млн. американцев могла бы найтись и более умудренная личность). Более того, ещё Пифагор (576–496 до н. э.) подметил: “Жизнь подобна театру: в ней часто весьма дурные люди занимают наилучшие места”. Вспомните поименно тех, кто управлял нашей страной в XX веке, разве эти люди воплощают понятие «мозг нации»? Из них только В. И. Ульянов (Ленин) (1870–1924) обладал по-настоящему незаурядным гуманитарным умом. Его имя после 1985 г. осквернили, так, конъюнктурщик от кино А. Сокуров в картине «Телец» откровенно глумится над последними днями этого великого человека (а кому из нас *после тяжелой болезни* повезет достойно уйти из жизни?).

Древнегреческий философ Платон (428–347 до н. э.) пророчески утверждал: “Человеческий род не избавится от зла до тех пор, пока *истинные и правильно мыслящие философы* не займут государственные должности...”. Но, если раньше, скажем, в Древней Греции, философ действительно мог быть на острие человеческих знаний, то в начале XXI века люди, занимающиеся философией (политическими, социальными, экономическими, т. е. гуманитарными проблемами) чаще всего обсуждают... *проблемы родного языка* или вроде этого. Их банальные “истины” просто несопоставимы с глубиной постижения сути бытия точными (естественными) науками.

¹ *Корреляция* – вероятностная зависимость, не имеющая, вообще говоря, строго функционального характера, т. е. она возникает тогда, когда один из признаков зависит не только от данного второго признака, но и от целого ряда случайных факторов.

В начале Перестройки многие из нас уповали на *демократические выборы*, но, оказывается, и в них изначально присутствуют изъяны. Существует так называемый *нетразитивный парадокс* с голосованием на выборах или *парадокс Арроу*, названный в честь К. Дж. Арроу, сыгравшего решающую роль в доказательстве “*теоремы о невозможности идеальной избирательной системы*”, за которую ему в числе других в 1972 г. была присуждена Нобелевская премия. Арроу выделил 5 условий, которые, по всеобщему мнению, существенны для демократии, при которой социальные решения принимаются путем голосований отдельных индивидуумов. Арроу доказал, что эти 5 условий логически противоречивы: не существует избирательной системы, которая бы не нарушала, по крайней мере, одно из 5 условий, т. е. идеальная демократическая избирательная система невозможна в принципе. В *математической* политологии открытие Арроу занимает такое же место, какое занимает в математической логике теорема Курта Гёделя (1906–1978) о невозможности построения непротиворечивой математической теории, содержащей аксиомы арифметики. (Например, когда человек говорит: “Я лжец!”, возникает парадокс – истинно или ложно это утверждение? Гёдель доказал, что в математике также существуют утверждения, которые истинны, но истинность их не может быть доказана.)

Парадоксы с голосованием возникают в ситуациях, когда решение принимается на основе выбора из двух альтернатив, выбираемых из множества трех и более элементов. Исследование подобных парадоксов выходит за рамки нашей книги, поэтому приведем пример только *дефекта* избирательной системы (парадоксы куда “хитрее”). Пусть Ельцина активно поддерживало всего лишь 40% избирателей, но голоса его противников разделились между Зюгановым (30%) и Явлинским (30%), а в результате на выборах победил Ельцин (хотя 60% россиян были настроены против него), и с Россией случилось то, что случилось... Кстати, когда на реальных выборах возникает тупиковая ситуация, то население обычно избирает “диктатора”, который просто ломает сложившуюся ситуацию.

5.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН В ПРИРОДЕ

Как правило, справочная литература (энциклопедии, справочники, словари и т. д.), содержит массу числовых величин. При их рассмотрении мы часто будем сталкиваться с *экспоненциальными* или *логнормальными* распределениями (*тильда-распределениями*, см. п. 1.37), а также с магическим числом 7 ± 2 (обычно при классификациях всякого рода). Приведем несколько разнообразных примеров, иллюстрирующих данное утверждение:

1) Земной шар разделяют на 5 главных зон: мантию, ядро, кору, океан, атмосферу (кора обладает наибольшей жесткостью, мантия характеризуется высокой вязкостью, а ядро находится в состоянии, близком к жидкому). Массы пяти зон (в долях от массы Земли) близки к тильде: $S=1$; $K=5$; $A=9,05$; $p=1,2565$. По агрегатному состоянию и физическим свойствам Землю подразделяют на 5 оболочек (геосфер), начало геосфер (глубины их залегания в км) также близки к тильде: $S=15340$ (км); $K=5$; $A=3,561$; $p=0,904$.

2) Распространенность химических элементов в земной коре (в процентах) носит тильдаобразный характер: $S=100$ (массовое содержание 83-х химических элементов принято за 100%); $K=83$; $A=13,31$; $p=0,43$. В земной коре больше всего кислорода (49%) и кремния (26%), а также алюминия (7,5%), железа, кальция, натрия, калия, магния и водорода (1%); суммарная масса 9 указанных элементов составляет 98,13% массы земной коры.

3) Распределение запасов воды на поверхности Земли (океаны и моря, полярный лед, озера, подземные озера, реки, болота, снежный покров) – это тильда-распределение: $S=1,3 \cdot 10^9$ (км³); $K=7$; $A=11,489$; $p=0,3522$.

4) Важнейшей характеристикой водных объектов выступает площадь их поверхности. У 60-ти самых больших морей и заливов площади образуют тильду: $S=53740$ (тысяч кв. км); $K=60$; $A=5,104$; $p=0,196$. Длины крупнейших 43-х проливов также тильда: $S=13142$ (км); $K=43$; $A=4,759$; $p=0,212$.

5) Сила ветрового волнения на море (максимальная высота волн в метрах) отражается в специальной 9-ти балльной шкале, которая неплохо «накладывается» на тильду: $S=33,26$; $K=9$ (градации); $A=4,0249$; $p=0,5794$.

6) В шкале землетрясений максимально возможные ускорения (V , мм/с²), возникающие при колебаниях Земли, классифицируют при помощи соответствующих баллов: от $B=1$ (микросейсмы) до $B=12$ (изменения рельефа в больших размерах, сильная катастрофа), причем: $V \approx 1,09 \cdot \exp(0,77 \cdot B)$. Статистика землетрясений за 1918–1964 годы близка к тильда-распределению: $S=2854$ (суммарное количество толчков за 10 лет); $K=6$ (количество видов землетрясений с точки зрения энергии их очага); $A=5,14$; $p=0,64$.

7) Запасы 17-ти видов важнейшего минерального сырья в промышленно развитых и развивающихся странах мира образуют тильда-распределение: $S=985508$ (млн. т); $K=17$ (видов сырья); $A=9,39$; $p=0,5$. Наибольшие запасы приходятся на уголь (79%) и железные руды (13%).

8) В настоящее время существует 8 основных источников энергии: нефть, уголь, природный газ, сжигание дерева, гидроэнергия, ядерная энергия, отходы злаков, и даже... навоз. Мировое использование энергии в 1992 г. по указанным источникам – это тильда-распределение: $S=13$ (в млрд. тонн угля); $K=8$ (источников энергии); $A=3,11$; $p=0,39$.

9) Нашу планету населяет около 2000 народов, в т. ч. 280 народов, численность которых свыше 1 млн. человек. Если принять, что в 1982 г. население Земли составляло около 4,5 млрд. человек (каждый пятый из них – был китайцем!), то получаем тильда-распределение: $S=4537000$ (тыс. человек); $K=2000$ (народов и народностей); $A=11,646$; $p=0,189$.

10) По переписи постоянного населения в СССР в 1979 г. проживало около 262 млн. человек. Если принять, что общее количество всех наций и народностей в СССР было равно 120, то получаем тильда-распределение: $S=262086$ (тыс. человек); $K=120$ (наций и народностей); $A=9,488$; $p=0,308$.

11) Население планеты в 1986 г. «выстраивалось» в тильду: $S=4887950$ (тыс. человек); $K=224$ (количество стран на планете); $A=7,768$; $p=0,214$. Площади этих стран также образовывали тильда-распределение: $S=135805$ (суммарная площадь 224 стран, тыс. км²); $K=224$; $A=7,768$; $p=0,2246$.

12) В 1982 г. в СССР насчитывалось 176 административно-территориальных единиц (АТЕ). Всё население в них распределялось по тильде: $S=271149$ (тыс. человек); $K=176$; $A=5,5845$; $p=0,08$. Удивительно «гармоничны» были АТЕ в части своих площадей, которые выстраивались строго по тильде: $S=22275$ (тыс. км²); $K=176$; $A=6,5535$; $p=0,1724$.

13) На 1 января 1983 г. в СССР был 281 город с населением свыше 100 тыс. человек. Население этих городов образовывало почти идеальное тильда-распределение: $S=104894$ (тыс. человек); $K=281$; $A=6,424$; $p=0,1124$.

Тильда-функция не только удобна при числовом анализе явлений и объектов, но она также **позволяет прогнозировать распределение неизвестных величин** (самых разных по своей природе). То есть, зная: 1) алгоритм построения тильда-распределения (п. 1.37); 2) величины хотя бы нескольких наибольших или наименьших членов распределения; 3) «богатство» (S) всей системы – часто удастся построить правдоподобное распределение величин для остальных членов системы (подобрать K, A, p).

Например, пусть мы хотим оценить количество населенных пунктов (хуторов, сел, деревень, поселков, городков и т. п.), где проживает более 10 человек (специалисты условно считают, что менее населенные места – это убежища бомжей, которых в мире порядка 2%). Для планеты в целом такие данные найти непросто. Пусть население всей планеты в 1985 г. составляло $S=4.856.000.000$ человек, а население крупнейших городов берём из любой энциклопедии, и начинаем строить тильду: подбираем K, A, p так, чтобы выйти на реальную численность населения крупнейших городов (у них порядковые номера x в тильда-распределении – наибольшие). Можно остановиться на варианте: $A=34,857$; $p=0,1015$; $K=289.484.000$ – примерное количество мест на планете, где вообще проживают люди ($D^*>1$ человека). Из построенного тильда-распределения находим, что искомое количество мест,

где проживает более 10 человек примерно равно **1,2** миллиона (населенных пунктов). Причем, для пяти крупнейших городов (Токио, Мехико, Сан-Паулу, Нью-Йорка и Шанхая) наша тильда дает численность, завышенную в 1,3–2,2 раза, но учет населения пригородов этих мегаполисов – устраняет данные расхождения. В части прогнозирования см. также п. 5.5.

Итак, очень многие величины в природе «любят» выстраиваться в распределения близкие к тильде. Примечательно, что в качестве величин могут выступать *интервалы времени*. Покажем это на примере геохронологии.

Основными критериями для разделения на периоды геологической истории Земли (геохронологии) являются процессы и события, приведшие к качественным изменениям состава и структуры литосферы, биосферы, гидросферы и атмосферы Земли (главным образом – интенсивное проявление магнетизма, движения земной коры, возникновение и расселение организмов и т. д.). Сегодня известно, что наша планета образовалась около 4,6 млрд. лет назад. О первом миллиарде лет ее жизни почти полностью отсутствуют какие-либо фактические данные. Предполагается, что она в то время была довольно однородной по составу и относительно холодной. Ее ландшафт был подобен ландшафту современной Луны. Земная поверхность находилась под непрерывным “обстрелом” астероидоподобных объектов, образованных в результате слипания комков межзвездной пыли. За счет соударения крупных объектов о Землю ее температура постепенно возрастала. В первые 500 млн. лет никакой атмосферы еще не было. На Земную поверхность обрушивались потоки заряженных частиц от Солнца. Так называемый, догеологический этап развития Земли завершился в тот момент, когда произошло перераспределение масс вещества в теле планеты с образованием ядра. Этот процесс сопровождался бурным выделением тепла. Мощные конвективные потоки взломали и переработали холодную кору Земли. Через многочисленные жерла вулканов из глубин было выброшено огромное количество газов и водяного пара, которые и образовали первичную атмосферу. Это случилось около 4 млрд. лет назад.

Документированные следы жизни на Земле имеют возраст свыше 3,2 млрд. лет, а самые древние осадочные породы – около 3,8 млрд. лет. Общая *геохронологическая шкала* приведена в табл. 33, причем начало каждой эры указано в миллионах лет назад от настоящей эпохи. Приведенные временные веки в хронологии Земли близки к тильда-распределению ($S=8921$; $K=6$; $A=3,39$; $p=0,62$), причем налицо изменение временного масштаба, и если для

Таблица 33. Начало шести эратем

<i>n</i>	Эра (эратема)	Млн. лет назад	Тильда
1	Кайнозой	66 ± 3	69
2	Мезозой	235 ± 10	245
3	Палеозой	570 ± 20	599
4	Протерозой II	1650	1286
5	Протерозой I	2600	2741
6	Архей	> 3500	3981

характеристики *сжатия времени* ввести коэффициент ускорения, равный отношению времени начала предыдущей эры к последующей, то полученные коэффициенты будут расти от значения 1,5 до 3,6. Таким образом, *геохронология все более ускоряется* (стремясь закончиться?!).

Говоря о распределении величин, можно коснуться ещё одного любопытного распределения... материков на нашей планете. Материк – это суша (земля) среди океана воды. Причем на поверхности земного шара 7 материков распределены не равномерно. Если посмотреть на Землю (на глобус) из точки, расположенной над Великобританией, то взгляду откроется около 80% всей суши, и, наоборот, при взгляде на острова Туамоту – вы увидите практически один Тихий океан. Математик Эдгар Н. Гильберт заменил континенты Земли небольшими не перекрывающимися круглыми шапочками и предположил, что N таких шапочек случайным образом распределены на сфере. Какова вероятность (P) того, что центры всех N окружностей-шапочек лежат в одном полушарии? Гильберт показал, что $P=(N^2-N+2)\cdot 2^{-N}$. Из формулы Гильберта при $N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ соответственно получаем $P=1; 1; 1; 0,88; 0,69; 0,50; 0,34, \dots$ Таким образом, в неравномерности распределения континентов на Земле нет ничего удивительного, ведь «кривобокость» при $N=7$ вполне вероятна ($P\approx 0,34$ и это – немало). Другие неведомые нам планеты с океанами воды (у других звезд типа Солнца), на которых континентов больше, чем на Земле, наверняка, имеют и более равномерное их распределение по поверхности, но, увы, нам в этом не дано убедиться...

5.7. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОГАТСТВА

Выше мы убедились, что тильда-распределения встречаются в природе повсеместно. И, вероятно, не стоит даже объяснять, почему в тильде параметр S назван «богатством», интуитивно ясно, что сумма всех частей некой системы вполне адекватна понятию «богатство системы». Поэтому тильда-функцию можно назвать *законом распределения богатства* в широком смысле этого слова. В узком смысле богатство – это капитал, и в данной главе мы убедимся, что закон его распределения также тильда-функция.

Капитал всегда распределен крайне неравномерно среди членов общества. Это считается банальной истиной ещё с трудов Карла Маркса (1818–1883), согласно которым, *капитал* – это стоимость, приносящая прибавочную стоимость в результате эксплуатации наемных рабочих капиталистами. Тильда-функция, как правило, дает наилучшие результаты, когда речь заходит о крайне неравномерном распределении (например, распределение доходов населения, см. п. 5.5) и капитал здесь не является исключением. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

Рассмотрим распределение уставных капиталов 1120 крупнейших предприятий-эмитентов в России (согласно данным фирмы “АК&М”) летом 1994 г., т. е. накануне краха финансовой пирамиды АО ”МММ” и наибольшего расцвета “фондового рынка” в стране. После сортировки уставных капиталов по возрастанию, каждому эмитенту можно было присвоить порядковый номер $n=1, 2, 3, \dots, 1120$ ($n=1120$ – у самого богатого концерна “Газпром”), а сумма капиталов всех предприятий-эмитентов была равна $S=1758108$ млн. руб. Чтобы увидеть, как распределялись уставные капиталы российских эмитентов – достаточно построить тильду с параметрами $S=1758108$; $K=1120$; $A=10,523$; $p=0,1919$. Очевидно, и в настоящее время уставные капиталы предприятий образуют подобное тильда-распределение.

Собственные капиталы 1000 крупнейших банков мира, по состоянию на 1989 г., также образуют тильда-распределение с параметрами: $S=813$ (млрд. долларов США); $K=1000$ (банков); $A=8,166$; $p=0,1256$.

Также был рассмотрен список-рейтинг сорока самых богатых американцев за всю историю США, в котором соотнесены размеры капиталов этих мультимиллиардеров с уровнем развития экономики США их времен (т. е. размеры капиталов были даны в современной единой оценке). Удивительно стройное тильда-распределение образуют указанные капиталы, где $S=1489$ млрд. долларов – суммарный капитал 40 богачей ($K=40$; $A=4,168$; $p=0,12025$). Самым богатым среди них был Джон Д. Рокфеллер – старший (1839–1937), которому принадлежала почти вся нефтеперерабатывающая промышленность США, и современная оценка капитала которого – 189,6 млрд. \$. Самый богатый наш современник – Билл Гейтс (род. 1955), чья корпорация Microsoft поставляет на компьютерный рынок различные программные продукты (его капитал в сентябре 1998 г. – 61,7 млрд. \$).

Косвенное отношение к глобальному распределению капитала на уровне разных стран имеет распределение денежных единиц (валют) этих стран. Так, на конец 1994 года в мире насчитывалось более 200 различных денежных единиц, и если рассмотреть их котировки по отношению к 1 доллару США (кроме денежных единиц 12 стран, в основном, бывших союзных республик СССР), то для этих котировок удастся построить тильда-распределение с параметрами: $S=762608$ (сумма котировок денежных единиц всех стран мира); $K=205$ (количество рассматриваемых валют); $A=11,628$; $p=0,264$. Самой “легкой” валютой была ангольская кванза ($1\$=506879$ кванз), а самым “тяжелым” был бахрейнский динар ($1\$=0,3$ динара).

Таким образом, можно утверждать, что закон распределения богатства – это, как правило, тильда-распределение (логнормальное распределение), которое всегда крайне неравномерно, и, разумеется, “несправедливо” с точки зрения обездоленного большинства. Остается только сожалеть, что в части

распределения материальных благ человечество до сих пор остается на одном уровне с неодушевленной, «неразумной» материей – кругом логнормальные распределения Его Величества Случая.

5.8. ЗАРПЛАТА, КУРС ДОЛЛАРА И МД-ФУНКЦИЯ

Если верить Госкомстату, средняя зарплата в Российской Федерации в 1960 г. составляла 73,1 руб. Последующие 27 лет она стабильно увеличивалась примерно на 5,23 руб. ежегодно, и в 1987 г. достигла уровня 214,4 руб. По курсу Госбанка СССР в 1981 г. один доллар США приравнялся к 0,713 руб., таким образом, в лучшие “застойные” годы средняя зарплата россиянина условно приравнялась к 250 долларам. Тогда на 214 рублей в месяц можно было бы прилично жить, но хронический дефицит товаров и продуктов «мудрое» руководство страны так и не смогло преодолеть.

Начиная с 1987 г. медленный *линейный рост* средней зарплаты сменяется на быстрый *экспоненциальный рост* (см. п. 2.1), причем в период с 1991 по 1995 гг. зарплата (в рублях) увеличивалась наиболее стремительно. Однако в пересчёте на доллары США этот рост вовсе не был столь быстрым: с середины 1992 г. по середину 1998 г. зарплата в долларах росла почти по линейному закону с 70 до 150 \$/мес. После дефолта, «блестяще» реализованного С. Кириенко 17 августа 1998 г., средняя зарплата россиян рухнула до 45 \$/мес (в 3,3 раза!). По прогнозам Министерства экономики, к уровню зарплат 1998 г. мы придем не раньше, чем к 2009 г.

Любопытно проследить за курсом доллара в России с начала 1992 г. (см. рис. 52). Десятилетний период его изменений можно описать функцией вида $D \approx \exp(1,675 \cdot T^{0,223})/1000$, где T – количество дней, прошедших с 01.01.92 г., причем для $T < 2192$ курс необходимо умножить на 1000. Например, в так называемый «чёрный вторник» (11.10.94 г.) имеем $T=1014$ дней, поэтому наша формула дает $D \approx 2,542 \cdot 1000 \approx 2542$ руб., а реально курс доллара тогда «прыгнул» до 3926 руб. (в 1,27 раза). Как видно из графика, с середины 1995 г. началась трехлетняя «стабилизация» курса доллара *по-Черномырденски* (несуразно), приведшая к полной катастрофе экономики и «взлету» курса доллара в 3,25 раза, т. е. к дефолту. График также показывает, что в мае 2002 г. доллар «должен был» стоить 36,8 руб., а не 31,2 руб., т. е. наметилось очередное «плато» для курса доллара (возможно, опять «лев готовится к прыжку»? , причем в логарифмической шкале).

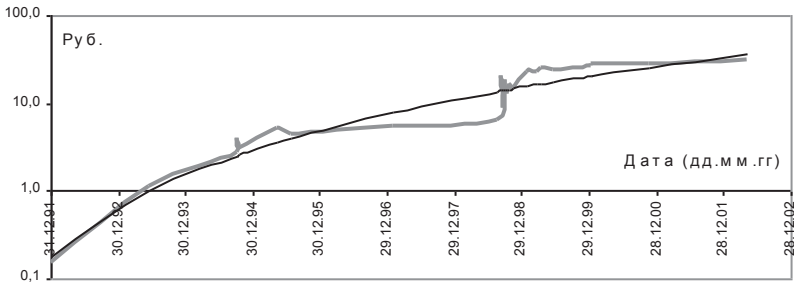


Рис. 52. Изменение курса доллара США (до 1.01.98 г. умножить на 1000)

Функция вида $D \approx \exp(M \cdot x^m)$ подошла не только для описания курса доллара в перестроечной России. Напомним, что в ГТНЧ эта же функция описывает распределение малых делителей у произвольного натурального числа N (см. п. 1.37), поэтому назовем её функцией *малых делителей* или МД-функция. Приведем еще несколько примеров её применения.

Если под величиной D понимать квартплату в не деноминированных рублях, то её рост неплохо описывается МД-функцией $D \approx \exp(2,45 \cdot x^{0,48})$, где $x=1, 2, 3, \dots, 30$ – порядковый номер очередного изменения квартплаты в течение 1987÷1999 гг. (речь идет о типичной 3-х комнатной квартире в блочном доме Санкт-Петербурга, где проживает три человек).

МД-функция описывает *инфляционные процессы* в экономически развитых странах, т. е. когда увеличение количества денег в экономике страны идет быстрее, чем увеличение количества товаров и услуг, предназначенных для продажи в этой экономике, что приводит к росту среднего уровня цен, росту стоимости жизни. Если под величиной D понимать количество денег в расчете на единицу выпускаемой продукции, то рост этого показателя в процентном выражении за период $T=1890 \div 1990$ гг. [43] описывается формулой $D \approx \exp(4,5 \cdot 10^{-41} \cdot T^{12,455})$ – для США, а для Великобритании рост количества денег был еще более быстрым: $D \approx \exp(9 \cdot 10^{-58} \cdot T^{17,532})$.

МД-функция (меняются только параметры M и m) неплохо описывает самые разнообразные физические процессы: зонную плавку веществ, электродиффузию, термодиффузию, кинетику роста человеческого зародыша, переваривание пищи, рост объема опухоли, диффузию газов из раствора, экстракцию в химических технологиях, обратимые и необратимые химические реакции и т. д. [26].

5.9. МАГИЯ ЧИСЛА 7 ± 2

“Повсюду меня преследует один знак... – писал американский психолог Дж. Миллер. – Это число буквально следует за мной по пятам, я непрерывно сталкиваюсь с ним в своих делах, оно встает передо мной со страниц самых распространенных наших журналов. Оно принимает множество обликов, иногда оно немного больше, иногда меньше, но оно никогда не меняется настолько, чтобы его нельзя было узнать.” Этими словами Миллер начал свою известную статью “Магия числа семь ± 2 ”. Он пришел к выводу, что человек способен с одного раза удержать в оперативной памяти в среднем семь “кусков” информации: семь букв алфавита; пять (7–2) односложных слов; восемь (7+1) десятичных цифр; девять (7+2) двоичных цифр и т. д. «В кошельке этой памяти, – говорил Миллер, – помещается всего семь монет. Доллары это или центы, ей безразлично. Она интересуется не смыслом информации, а её чисто внешними характеристиками – цветом, формой, объемом. Смыслом интересуется долговременная память. Она определяет и оценивает содержимое кошелька». Миллер наткнулся на семерку в опытах со зрительным восприятием. (Правда, в течение нескольких миллионных долей секунды наш зрительный анализатор способен удерживать гораздо больше “кусков” информации, чем позволяет *миллеровский кошелёк*. В эти мгновения на периферии зрительной системы хранится *вся* предъявляемая человеку информация, сколько бы ее там ни было.) Потом 7 всплыла при исследованиях слухового восприятия: например, трудно схватить всю фразу целиком, если она содержит более 7 лингвистических ветвей.

Магию числа семь психологи и биологи объясняют тем, что в процессе эволюции наряду со многими психофизическими константами, вроде скорости распространения нервного импульса по нервному волокну ($0,2\div 180$ м/с), у человека выработалась и такая постоянная величина, как объем оперативной памяти. Тысячелетиями эта константа оказывала свое влияние на выработку житейского уклада, культурных традиций, религиозных и этических воззрений. Человеку было удобнее всего думать об одновременных вещах, если число их не превышало семи. Но почему эта константа равна именно 7? По мнению автора (с учетом результатов ГТНЧ) число 7 неким образом отражает фундаментальные особенности структуры пространства-времени (возможно, характерные только для современной эпохи).

В нашей книге содержится немало примеров чисел 7 ± 2 . Ниже приводятся ещё некоторые примеры, взятые из самых разных областей, и подтверждающие исключительность чисел 7 ± 2 . Кстати, все эти примеры могут составить начало своеобразной и полезной *коллекции магического числа 7*.

Семь богов и богинь распоряжались судьбами шумеров, каждый ороцкий охотник знал, что основателей его рода было семеро. Семерку почитали все племена, и чем дальше в глубь веков, тем больше мы встречаем семерок, в том числе в узорах и наскальных фресках. Семь чудес света знал эллинский мир, из которых целиком сохранились только пирамиды. Семь мудрецов было у древних греков. Семь суток содержит наша неделя (впервые появилась на Древнем Востоке). Семь периодов чаще всего мы выделяем в сутках: сумерки, утро, полдень, день, вечер, полночь, ночь.

Средняя длина слов во многих языках, вероятно, около 7 букв (в русском 6÷7). Длина слова в информатике – 8 бит. Ещё не расшифрованный *фестский диск*¹ (ок. 1600 до н. э., найден в Фесте в начале XX века) содержит до 7 символов-изображений в каждом слове (или предложении?).

Семилетняя школа существовала в СССР в 1920–50-е. Сейчас в России 3 млн. бездомных детей (средний уровень образования не более 7 классов?).

Семь основных уровней насчитывалось в организационном строении КПСС в эпоху “развитого” социализма (от Съезда КПСС до первичных партийных организаций). “Семибоярщина” – правительство России в 1610–12-е гг., состоящее из 7 членов Боярской думы. “Семибанкирщина” и 7 олигархов было в России в августе 1998 г. Семь стран “Большой Семерки” – богатейшие державы нашего времени (“Большая Восьмерка” с Россией – пока фикция). На 7 федеральных округов делится Россия (весна 2002 г.).

Семь видов приемов насчитывает современный этикет: “бокал вина” (или шампанского), “завтрак”, “а ля фуршет” (“коктейль”), “обед”, “обед-фуршет” (“шведский стол”), “ужин”, встреча за чайным или за кофейным столом. 7 типов виноградных вин придумал человек: сухие, полусладкие, крепкие, десертные, ароматизированные, игристые и газированные.

Каждый седьмой француз содержит кошку или собаку (на 60 млн. населения Франции приходится 8,9 млн. домашних кошек и 8,2 млн. собак).

Семь правил насчитывает метод *мозговой атаки*, предложенный в 1965 г. американским психологом А. Осборном для эффективной генерации идей при решении научных, технических, управленческих и других задач (при мозговой атаке, шесть человек за полчаса могут выдвинуть 150 идей!). Более семи переменных в задаче – она неразрешима (шутливое утверждение).

Семь основных классов звезд различают астрономы (в части различия их спектров). 7 основных компонент в Солнечной системе: Солнце, 9 планет, астероиды (метеороиды), микрометеороиды (потоки пыли), тела Койпера-Эдварта (Кентавры, кометы), магнитные поля, космические лучи. 7 колец

¹ Займитесь его расшифровкой сами. Прекрасная фотография этого диска содержится в замечательной книге Дж. Хокинса «Кроме Стоунхенджа» (издательство «Мир» Москва 1977).

у Сатурна (у Плутона – 9). 7 слоев выделяют в атмосфере Земли и 7 составляющих (оболочек) выделяют во внутреннем строении Земли и Солнца.

Семь периодов (строк) и 8 групп (столбцов) в таблице Д. И. Менделеева. Максимальное количество электронных оболочек в атомах достигает 7.

Семерка фигурирует во многих играх, например в танграмах. *Танграммы* – плоские фигуры, составленные из 7 частей исходного квадрата, которые называются *танами*. Эти таны (рис. 53) имеют простейшую форму, но позволяют составлять бесконечно много разнообразнейших *фигурок-танграмов* (вырежьте их из картона и убедитесь). Игра возникла, вероятно, в Китае на рубеже 18–19 веков. Очарование танграма таится в простоте материала и в кажущейся непригодности его для создания фигурок, обладающих эстетической привлекательностью.

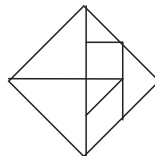


Рис.53. 7 танов

Кроме того, танграм является нетривиальной математической забавой, так как в связи с 7 танами возникают непростые комбинаторные задачи [10]. Существует не одна сотня головоломок, аналогичных танграму, но с иным разбиением квадрата (прямоугольников, кругов и других фигур).

Семь цифр в номерах телефонов – достаточно для большинства городов. Например, телефон автора 302-36-94, т. е. в Санкт-Петербурге может быть 10^7 абонентов. Городов-миллионеров свыше 220 во всём мире, но даже им чаще всего хватает 10 млн. телефонных номеров (т. е. семи цифр в номере).

Семь групп образуют дорожные знаки (согласно ГОСТам) в России.

Не более 7 категорий должна содержать любая по-настоящему *полезная классификация* и это относится абсолютно к любым областям знаний.

5.10. КРИСТАЛЛОГРАФИЯ И ГТНЧ

Кристаллография – наука об атомно-молекулярном строении, симметрии, физических свойствах, образовании и росте кристаллов. Возможно, для многих это будет неожиданностью, но кристаллы окружают нас на каждом шагу в буквальном смысле: любой бесформенный камушек или булыжник состоят из... кристаллов. Самые разнообразные кристаллы, вообще говоря, образуются тремя путями: *из расплава* (например, образование льда из воды, образование вулканических пород), *из раствора* (сотни миллионов тонн соли, выпавшей из морской воды), *из паров* (так образуются снежинки). Вообще, кристаллы – это весьма распространенная форма существования материи, которая объясняется тем, что равновесие сил притяжения и отталкивания между атомами (соответствующее минимуму потенциальной энергии системы) достигается при условиях трехмерной периодичности.

Основные понятия, законы и числовые соотношения кристаллографии отражают структуру пространства-времени в нашу эпоху (структуру натуральных чисел на Большом отрезке?). Многим числам кристаллографии, можно найти некие «аналоги» и в рамках ГТНЧ (см. также п.3.14).

Кристалл представляет собой правильную трехмерную решетку, составленную из атомов или молекул. К кристаллам, построенным из шаровых атомов или ионов, относятся металлы, сплавы, многие неорганические соединения (соли, щелочи). Из молекул построены *биологические кристаллы* и некоторые неорганические, например сулема. Самые большие молекулы имеют размеры в десятые доли миллиметра (каучук, целлюлоза, полимеры, некоторые биологические молекулы). Для мира атомов и молекул это колоссальная цифра, ведь длина такой молекулы больше её поперечного сечения в несколько сотен тысяч раз. Поэтому *биологические кристаллы* (из белков, нуклеиновых кислот, вирусных частиц, содержащих 10^3 – 10^4 атомов) имеют очень большие размеры по сравнению с обычными кристаллами. Для органических молекул при упаковке их в кристалл «пустого» пространства может образовываться не более 40%, иначе мы получаем аморфные твердые вещества. Последние следует рассматривать как отклонения от нормы, ибо кристаллическое состояние является *естественным* для вещества при низкой температуре.

Структура кристалла – это пространственное расположение его атомов (или молекул). Геометрия такого расположения подобна рисунку на обоях, в которых основной элемент рисунка повторяется многократно. Одинаковые точки можно расположить на плоскости 5-ю разными способами, допускающими бесконечное повторение. Для пространства же имеется **14** способов расположения одинаковых точек, удовлетворяющих требованию, чтобы у каждой из них было одно и то же окружение (14 *решеток Браве*).

Требование того, чтобы каждый узел решетки имел одинаковое атомное окружение, применительно к кристаллам налагает ограничения на сам основной элемент рисунка. При повторении он должен заполнять все пространство, не оставляя пустых узлов. Было установлено, что существует лишь **32** варианта расположения объектов вокруг некоторой точки (например, атомов вокруг узла решетки), удовлетворяющих этому требованию. В сочетании с 14 пространственными решетками они дают **230** возможных вариантов расположения объектов в пространстве (пространственные или *фёдоровские группы*). Эта сложная *математическая задача* была решена основателем *структурной кристаллографии* Е. С. Федоровым (1853–1919). Его открытие трудно переоценить, и до сих пор не найдено ни одного кристалла, который не принадлежал бы к той или иной фёдоровской группе. Причем для молекулярных кристаллов возможны лишь определенные виды симметрии (всего 8–10 фёдоровских групп).

Итак, повторяющиеся группы атомов (или отдельные атомы) укладываются одна по отношению к другой внутри элементарной ячейки кристалла одним из 230 способов. Вершины ячейки называют *узлами*, обычно их связывают с положениями центров атомов кристалла. Размеры ячейки могут быть весьма различными. Наименьшие расстояния в 0,2–0,3 нм (1 нанометр = 10^{-9} м) между соседними узлами встречаются у простейших кристаллов, построенных из атомов одного сорта, наибольшие (до нескольких десятков нанометра) – у сложных кристаллов белка, которые уже видимы в электронный микроскоп. Опыт показывает, что кристалл ограничен плоскостями, которые гуще всего усеяны узлами, а эти плоскости пересекаются по ребрам, в свою очередь наиболее густо заселенными узлами. (Узлы кристалла – как скопления галактик в космологии, см. п. 4.1.)

Размеры «шаров»-атомов колеблются в небольших пределах, примерно от 0,05 до 0,2 нм. Представление об атомах как о шарах, правильно отражает одно важное свойство атомов – свойство укладываться в плотные кристаллические упаковки. Доля свободного пространства в плотнейших упаковках составляет около 26% (см. п. 3.2). Однако не следует думать, что атомы – просто твердые шарики. Просто вокруг ядра атома, как центра, мы мысленно проводим сферу такого радиуса, что основная часть электронов данного атома попадает внутрь этой сферы (см. п. 4.7). Некоторая доля электронов атома «обобществляется» – начинает принадлежать всему кристаллу в целом. Свободные электроны «бродят» по кристаллу, образуя своего рода «цемент», скрепляющий ионы атомов в плотно упакованную решетку. При этом основы атомов (ионы кристаллической решетки) совершают лишь малые колебания около положений равновесия, в отличие от хаотически движущихся атомов жидкости или газа. То обстоятельство, что упаковки могут быть построены из разного числа слоев и «узор» заполнения пустот малыми шарами (между большими шарами-атомами) может быть также различен, ведет к величайшему многообразию структур.

Общими для всех кристаллов являются 14 пространственных решеток (наименьших формообразующих ячеек). Элементарная ячейка любого кристалла подобна одной из них, но ее размеры определяются размерами, числом и расположением атомов. Элементарные ячейки очень малы и имеют порядок нанометра. Таким образом, в крохотной крупинке обычной поваренной соли содержится примерно миллион элементарных ячеек, уложенных одна к другой.

Кристаллы имеют некую внутреннюю симметрию, которая не обнаруживается в бесформенной крупинке. Симметрия кристаллов получает наружное выражение только тогда, когда они имеют возможность свободно расти без каких-либо помех. Но даже хорошо организованные кристаллы редко

имеют совершенную форму, и нет двух кристаллов, которые были бы совершенно одинаковы. Форма кристалла зависит от многих факторов, один из которых – форма элементарной ячейки. Если такой «кирпичик» повторить одинаковое число раз параллельно каждой из его сторон, то получится кристалл, форма и относительные размеры которого точно такие же, как у элементарной ячейки. Близкая к этому картина характерна для многих кристаллических веществ. Но на форму оказывают влияние и такие факторы, как температура, давление, чистота, концентрация и направление движения раствора. Поэтому кристаллы одного и того же вещества могут обнаруживать большое разнообразие форм. Различие форм связано с тем, как именно укладываются одинаковые «кирпичики». Почти каждый химический элемент или любое вещество (в т. ч. органическое) в кристаллическом состоянии имеет *несколько разновидностей*: 6 для льда, 9 для серы, 4 для железа и т. д. (в среднем получаем магическое число 7?).

Аналогия между элементарными ячейками и кирпичами очень полезна. Укладывая кирпичи так, чтобы их соответствующие стороны были параллельны, можно построить стену, длина, высота и толщина которой будут зависеть только от числа кирпичей, уложенных в данном направлении. Если же в определенном порядке удалять кирпичи, то можно получить миниатюрные лестничные марши с наклоном, зависящим от соотношения чисел кирпичей в подступеньке и наступи ступеньки лестницы. Если на такую лестницу наложить линейку, то она образует угол, определяемый размерами кирпича и способом укладки.

Точно так же и кристалл может принимать ту или иную форму, если в строго определенном порядке пропускаются некоторые ряды или группы элементарных ячеек. Косые грани кристалла подобны лестницам, сложенным из кирпичей, но «кирпичики» здесь столь малы, что грани кристалла выглядят, как гладкие поверхности. Форма кристалла зависит от размеров и формы элементарной ячейки, а углы между соответствующими гранями кристаллов одного и того же вещества постоянны (*закон Стенсена*).

Размеры и форма граней изменяются от кристалла к кристаллу. Тем не менее, имеется некая внешняя симметрия, присущая всем хорошо ограненным кристаллам. Она обнаруживается в повторении углов и похожести граней, одинаковых в смысле внешнего вида, дефектов травления и особенностей роста. Если кристалл имеет почти совершенную форму, то его симметричные грани тоже подобны по размерам и форме.

Элементы симметрии. На основании вида и расположения граней, а также углов между ними кристаллы приписывались одному из 32 кристаллографических классов. Поэтому пространственные группы и кристаллографические классы – это как бы синонимы, и существуют 3 основных элемента

симметрии: 1) *Плоскость симметрии* (она делит кристалл на две части, каждая из которых является зеркальным отображением другой).

2) *Ось симметрии* – это воображаемая прямая, поворотом вокруг которой на часть полного оборота можно привести объект к совпадению с самим собой. В кристаллах возможны только **5** видов осевой симметрии: эквивалентная отсутствию вращения, повторение через 180° , 120° , 90° и 60° .

3) *Центр симметрии*. Кристалл имеет центр симметрии, если любая прямая, мысленно проведенная через него, на противоположных сторонах поверхности кристалла проходит через одинаковые точки. Таким образом, на противоположных сторонах кристалла находятся одинаковые грани, ребра и углы.

Имеются **32** возможные комбинации плоскостей, осей и центров симметрии в кристаллах; каждой такой комбинацией определяется кристаллографический класс. Один класс не имеет симметрии; говорят, что он имеет одну ось вращения 1-го порядка.

Кристаллографические системы. Существует **7** базисных ячеек решеток разной формы, причем ромбоэдрическая и гексагональная решетки определяются одними и теми же осями. Таким образом, при наличии 32 симметрий точечных групп имеются только 6 основных форм элементарных ячеек. Соответственно форме основной «строительной» единицы 32 кристаллографических класса разделяются на 6 кристаллографических систем: триклинная, моноклинная, орторомбическая, тетрагональная, гексагональная, кубическая (изометрическая).

«Дальний порядок» – этот термин с полным правом применяется к расположению атомов в кристалле (на 1 мм встречается повторяющееся расположение атомов сотни тысяч и миллионы раз). Большей частью периодичность дальнего порядка бывает равна **2** или **3** или **4** слоям атомов (молекул). Однако, иногда структура начинает повторяться через десятки и даже сотни слоев (в карбиде кремния – через **243** слоя). Величины периодов повторяемости: в металлах 0,3–0,7 нм; в большинстве кристаллов 2–3 нм; в ряде белковых вещества до 100 нм.

Кристаллическая решетка – это простейший пример так называемой *правильной системы* (множество точек, отвечающее определенным условиям или *множество Делоне*). В 1976 г. было доказано, что если во множестве Делоне все точки имеют одинаковые окружения в пределах сферы радиусом $8 \cdot R$, то система является правильной (R – радиус пустого наибольшего шара в системе точек). Иначе говоря, дальний периодический порядок в кристаллах выводится из идентичности локальных окружений атомов.

В 1984 г. была открыта 5-кратная симметрия в реальном веществе, что явилось настоящей сенсацией, поскольку ось 5-го порядка в кристаллах невозможна. По-видимому, структура полученного быстро охлаждённого сплава алюминия и магния обладает новым видом симметрии (структура с квазикристаллографическим дальним порядком). Причем открытый в сплаве порядок соответствует дальнему порядку мозаике Р. Пенроуза (п. 3.10).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реальный мир есть не то, о чем говорят наши органы чувств с их ограниченным восприятием внешнего мира, а скорее то, что говорят нам созданные человеком математические теории, охватывающие достаточно широкий круг явлений. Но какова физическая реальность, лежащая за пределами математики? Здесь мы не располагаем даже воображаемыми физическими картинками. Трудно, если вообще возможно, избежать вывода: математическим знанием исчерпываются все современные знания относительно различных аспектов физической реальности. Созданная человеком математическая теория физического мира – это не описание явлений в том виде, в каком мы их воспринимаем, а некая символическая конструкция, предназначенная для объяснения, вычисления и предсказания. При этом не следует забывать, что *математические истины открывают, а не изобретают*. В математических свойствах уравнения можно находить закономерности, скрытые от нас до появления данного уравнения. И в этом самая непостижимая и поразительная сторона математики, которая всегда оказывается неправдоподобно эффективна в познании реалий, окружающего нас мира. Суть сводится к следующему: природе внутренне присуща скрытая гармония, которая отображается в наших умах в виде *простых* математических законов. Альберт Эйнштейн как-то сказал: «Наш опыт убеждает нас, что природа – это сочетание самых простых математических идей», об этом говорит и латинская поговорка «*Simplex sigillum veri*» («Простота – это признак истинности»).

Тот факт, что самые разные величины в природе образуют логнормальные распределения (тильда-распределения), экспоненциальные распределения, очевидно, следует рассматривать как проявление статистических свойств процессов, как признак статистического хаоса. Скорее всего, мы живем в мире, где всем управляет не Господь Бог, а “Его Величество Случай”. В наше время многие ученые исповедуют воззрение, утверждающее, что все есть Хаос. Для этого есть много оснований. Но с другой стороны Пирамида натуральных чисел, исключая всякий Хаос, порождает распределения, соотношения, закономерности, которые чем-то похожи на реалии физического мира. Является ли это поводом подвергать сомнению гипотезу о Хаосе?

Натуральные числа – это «вещь в себе» или нечто большее? Возможно *структура натуральных чисел* (в т. ч. её «бледная тень» – ГТНЧ) тесно связывает часто почти неуловимыми нитями самые разные математические объекты (разделы, задачи, вопросы), выступая в качестве некой «тонкой настройки» всего того, что мы называем Математикой, и что наиболее достоверно описывает реальное пространство-время.

Примечательно, что один из краеугольных камней философии начала века – сама идея познаваемости мира, по-видимому, разрушена. Во всяком случае, принципиальная неразрешимость проблемы “разрешимости всех проблем” была установлена в 30-е годы австрийским математиком Куртом Гёделем (1906–1978). Он доказал, что всякая непротиворечивая формализация арифметики неполна в том смысле, что всегда можно указать истинное арифметическое предложение, которое не доказуемо средствами данной формальной системы. Кроме того, если формальная система арифметики непротиворечива, то, хотя утверждение о её непротиворечивости выразимо на языке арифметики, его нельзя доказать средствами этой же системы. Проще говоря, есть положения, которые не могут быть «извлечены» из основных аксиом (надо привлекать все новые аксиомы-допущения). Нельзя дедуктивным путем получить все свойства целых чисел, тем более нельзя надеяться охватить все свойства решений дифференциальных уравнений. *Значительное количество законов природы нельзя ограничить никакими рамками.* Так полагают сейчас многие ученые. Исходя из аналогий с ГТНЧ (скажем, в связи с появлением все новых и новых миров, см. п. 1.16, 1.33) можно предположить, что количество фундаментальных законов природы продолжает увеличиваться со временем, но темп этого, едва уловимого «миротворящего» процесса, вероятно, замедляется.

Хочется верить, что когда-нибудь аббревиатуру ГТНЧ расшифруют как *глобальная теория натуральных чисел*, которая будет прекрасна и гармонична сама по себе. Ну а если структура натуральных чисел окажется действительно в какой-то мере адекватна (изоморфна) реальному пространству-времени, то тогда Пифагор будет прав в том, что «Бог – это число».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернатосян С. Г.* Воровство и обман в науке. Санкт-Петербург: Эрудит, 1998.
2. Биологический энциклопедический словарь. М.: Бол. рос. энциклопедия, 1995.
3. *Болл У., Коксетер Г.* Математические эссе и развлечения. М.: Мир, 1986.
4. Большая Советская Энциклопедия. (В 30 томах). М.: Сов. энциклопедия, 1978.
5. Большой энциклопедический словарь. Санкт-Петербург: Норинт, 1997.
6. *Винер Н. Я* – математик. М.: Наука, 1967.
7. *Вронский В. А.* Прикладная экология. Ростов-на-Дону: Феникс, 1996.

8. *Галочкин А. И. и др.* Введение в теорию чисел. М.: Издательство МГУ, 1995.
9. *Гарднер Мартин.* Математические досуги. М.: Мир, 1972.
10. *Гарднер Мартин.* Путешествие во времени. М.: Мир, 1990.
11. Гиннесс. Большая книга знаний. Назрань: Издательство АСТ, 1999.
12. *Дагаев М. М. и др.* Астрономия. М.: Просвещение, 1983.
13. *Даль В. И.* Пословицы русского народа. М.: Астрель, 2000.
14. *Девис П.* Случайная вселенная. М.: Мир, 1985.
15. *Исаев А. В.* Закон распределения богатства. Санкт-Петербург: ЛИСС, 1998.
16. *Исаев А. В.* Параллельные миры С-Петербург.: Всемир. литература, 2001.
17. *Ичас М.* О природе живого: механизмы и смысл. М.: Мир, 1994.
18. *Капица С. П.* Общая теория роста человечества. М.: Наука, 1999.
19. *Кеннеди П.* Вступая в двадцать первый век. М.: Весь мир, 1997.
20. *Крылов А. Н.* Мои воспоминания. Ленинград: Судостроение, 1984.
21. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001.
22. *Липченко В. Я.* Атлас нормальной анатомии человека. М.: Медицина, 1984.
23. *Маркс К. и Энгельс Ф.* Соч., 2 изд., т. 20, стр. 328.
24. Математика. Энциклопедия для детей. Т. 11. М.: Аванта+, 1999.
25. Математический энциклопедический словарь. М.: Б. росс. энциклопедия, 1995.
26. *Николаев Д. А., Холтанов Л. П.* Закон эволюции. М.: Наука, 1999.
27. *Пашкус Ю. В.* Введение в бизнес. Ленинград: Северо-Запад, 1991.
28. Политехнический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1977.
29. *Привалов Д.* Счастье – в девятку. Газета «Труд», №7, 2002.
30. *Силк Дж.* Большой взрыв (рождение и эволюция Вселенной). М.: Мир, 1982.
31. *Сингх С.* Великая теорема Ферма. М.: МЦНМО, 2000.
32. *Sloane N.J.A.* A Handbook of Integer Sequences. – Academic Press, 1973.
33. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984.
34. *Таранов П. С.* 120 философов (жизнь, судьба, учение). Симфероп.: Таврия, 1996.
35. Физические величины. Справочное издание. М.: Энергоатомиздат, 1991.
36. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1984.
37. *Фолсом К.* Происхождение жизни. М.: Мир, 1982.
38. *Франк-Каменецкий М. Д.* Самая главная молекула. М.: Наука, 1983.
39. Фундаментальная структура материи. М.: Мир, 1984.
40. *Хокинг С.* Краткая история времени. Санкт-Петербург: Амфора, 2001.
41. *Чирков Ю. Г.* Охота за кварками. М.: Мол. гвардия, 1985.
42. *Шкловский И. С.* Звезды: их рождение, жизнь и смерть. М.: Наука, 1984.
43. *ШО Джон М.* Как мы живем. М.: Дело, 1998.
44. *Эмсли Дж.* Элементы. М.: Мир, 1993.
45. Газета «Аргументы и факты–Петербург» №9, 2001.
46. Газета «Аргументы и факты–Петербург» №34, 2001.
47. Газета «Аргументы и факты» №37, 2001.
48. Газета «Аргументы и факты–Петербург» №11, 2002.
49. Газета «Аргументы и факты» №16, 2002.