# Леонард Эйлер и космология чисел
# (Leonard Euler and the cosmology of numbers)

Александр Васильевич Исаев
(Alexander Vasilievich Isaev)

Abstract

В данной книге автором впервые употреблен термин "космология чисел" (позже он переродился в "числофизику"). Разумеется, что гениальный Леонард Эйлер стоит у истоков "космологии чисел" – это показано на примере удивительного мемуара Эйлера.

In this book, the author first used the term "cosmology of numbers" (later it was reborn into "number physics"). It goes without saying that the genius Leonard Euler stands at the origins of the "cosmology of numbers" - this is shown by the example of Euler's amazing memoir.

Портрет, выполненный Я. Э. Хандманном (1756)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg

**ББК 22.1**
**И 85**

**И 85** **Исаев А.В.**
**Леонард Эйлер и космология чисел**.
СПб., «ЛИСС», 2003. – 79 с.

ISBN 5-87050-203-9

Эту книгу автор посвящает Леонарду Эйлеру (1707–1783) – гениальному математику, никем в мире не превзойденному по количеству научных работ (около 900 наименований!), по глубине и широте охвата всех решенных задач. В год 300-летия Санкт-Петербурга исполняется 220 лет со дня смерти Эйлера (7 сентября), который 31 год жил и плодотворно трудился в нашем городе, и прах которого покоится в Некрополе XVIII века в Александро-Невской лавре. Главная гордость Петербурга – великие люди, разделившие с ним свою судьбу, и в первых рядах здесь должно стоять имя Эйлера. К сожалению, это далеко не так, имя Леонарда Эйлера ни о чем не говорит большинству из нас, вот почему автор посчитал своим долгом сделать первый шаг на пути исправления одной из самых очевидных исторических несправедливостей.

Проницательный Эйлер, помимо всего прочего, заложил прочный фундамент современной *теории чисел* – одного из самых таинственных разделов математики. Как это не парадоксально, но «внутренняя» структура бесконечного ряда натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,… невероятно сложна (?!), гармонична, интригующе интересна. Более того, очень может быть, что виртуальный мир чисел скрывает некие Абсолютные Истины реального физического мира – именно данный феномен впервые обозначен здесь термином «***космология чисел***». И если столь парадоксальная теория имеет право на существование, то, несомненно, этим мы обязаны целому ряду выдающихся математиков, среди которых сверкающим бриллиантом выделяется математический гений Леонарда Эйлера.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие………………………………………………………. 4

*Часть первая*. ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

1.1. Швейцарский Базель – родина Эйлера…………………….. 5
1.2. Первый петербургский период (14 лет)…………………….. 9
1.3. Пребывание в Берлине (25 лет)……………………………… 15
1.4. Второй петербургский период (17 лет)…………………... 20
1.5. Прах Эйлера покоится в Петербурге………………………. 22
1.6. Краткий перечень работ Эйлера……………………………. 25

*Часть вторая*. КОСМОЛОГИЯ ЧИСЕЛ

2.1. Обозначения и некоторые определения…………………… 30
2.2. Простые числа – базис натуральных чисел……………….. 33
2.3. Пять классов натуральных чисел………………………….. 35
2.4. Типы чисел, миры чисел……………………………………. 39
2.5. Пирамида делителей………………………………………… 45
2.6. Закон распределения богатства…………………………….. 48
2.7. Богатство натуральных чисел………………………………. 51
2.8. Удивительный мемуар Эйлера……………………………… 57
2.9. Структура богатства Пирамиды……………………………. 62
2.10. Поправка Эйлера…………………………………………….. 65
2.11. Исследование суммы Эйлера……………………………….. 68
2.12. Исследование I-суммы………………………………………. 75
2.13. Ещё раз о простом числе……………………………………. 77
2.14. «Всё есть Число» (вместо заключения)……………………. 79

Приложение. Закон излучения Планка………………………. 82
Литература…………………………………………………… 86

«*Тот, кто порицает высшую точность математики, кормится за счет путаницы и никогда не отступится от уловок софистских наук, порождающих бесконечную болтовню*». ... «*Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой*».

**Леонардо да Винчи** (1452–1519)

*«… для чего нужна математика? …Я должен установить различие между людьми, задающими подобные вопросы. Люди практические требуют от нас только способов наживы денег. Эти люди не заслуживают ответа. Скорее следовало бы их спросить, для чего накапливают они богатства и нужно ли тратить время на их приобретение и пренебрегать искусством и наукой, которые только и делают наш дух способным наслаждаться»*.

**Анри Пуанкаре** (1854–1912)

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Имя Леонарда Эйлера, наверняка, каждый из нас слышал ещё в школе на уроках математики. Однако далеко не все помнят, что это был один из самых гениальных людей на земле. Математический гений Эйлера не ведал страха и упрека в мучительном и таинственном деле – создании математики. Он остается человеком, решившим больше задач, чем кто-либо другой за всю историю науки, а его фантастическую продуктивность (почти 900 работ!) до сих пор никто из ученых-математиков так и не превзошел.

В подтверждение этому можно привести хотя бы два следующих факта.

1). В солидном «*Математическом энциклопедическом словаре*» (МЭС, см. [24], 847 страниц, а точнее – в его биографическом словаре из 111 страниц в конце МЭС) содержатся биографии около 900 самых известных ученых-математиков всех времен и народов, чьё творчество сыграло первостепенную роль в развитии «королевы всех наук» – математики. Так вот, самая большая статья посвящена именно Леонарду Эйлеру (она в 20 раз больше «средней» статьи биографического словаря МЭС).

2). В «*Кратком очерке истории математики*» (см. [16], 284 стр.) известного американского математика Д. Я. Стройка (р. 1894, его исследования по истории математики также общепризнаны) из 750 фамилий, упомянутых Стройком, чаще всего называется именно Леонард Эйлер.

К сожалению, мало кто знает, что Эйлер, швейцарец по национальности, 31 год жил и трудился в Петербурге, и здесь же был похоронен в 1783 г. В 2003 г. Петербургу исполняется 300 лет, причем очевидно, что всемирную славу городу принесли люди, когда-либо жившие в нём. И среди них имя Леонарда Эйлера должно стоять в первых рядах. В книжке сказано достаточно много, чтобы проникнуться важностью предстоящей даты – 220-летия со дня смерти гениального математика (7 сентября 2003 г.).

Имя Эйлера неразрывно связана с «королевой математики» – ***теорией чисел***, которая является, пожалуй, самым таинственным разделом математики. «Внутренняя» структура бесконечного ряда натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …(т. е. количество их делителей, сумма делителей, их соотношения и т. д.), как ни парадоксально, – один самых сложных (?!) и интересных объектов в математике. В данной книге в простой общедоступной форме приводится несколько примеров, подтверждающих это интригующее обстоятельство. Более того, автор приводит целый ряд любопытных фактов, позволяющих применить термин «космология» к миру чисел. Греческое слово *kosmos* означает «мир», «Вселенная», т. е. космология – это учение о физическом мире как едином целом, а ***космология чисел*** – это учение о виртуальном мире чисел как едином целом. Возможно, именно данный термин лучше всего отражает некую *таинственную связь* «внутренней» структуры чисел со структурой реального пространства-времени (то есть с Вселенной). Такой взгляд на мир чисел – «ноу-хау» автора, важнейшая цель которого – популяризация *теории чисел* и людей, её создавших. И если вообще правомочно говорить о космологии чисел, то, безусловно, в ряду прочих у её истоков следует поставить имя гениального Эйлера.

# 1. ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

## 1.1. ШВЕЙЦАРСКИЙ БАЗЕЛЬ – РОДИНА ЭЙЛЕРА

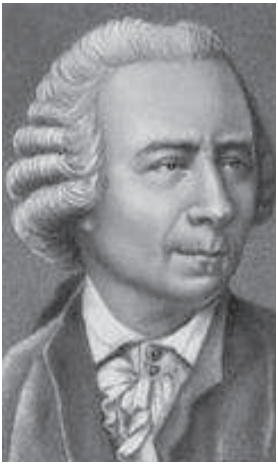
Рис. 1. Леонард Эйлер

Первое упоминание о Базеле – римском военном поселении Базилиа – историки относят к 374 г. Расположенный у начала судоходного пути на Рейне город быстро рос и развивался. Постепенно он подчинил своему влиянию всю округу. В средние века Базель стал одним из крупнейших европейских центров торговли, ремесла, культуры и … ростовщичества.

Базель был свободным имперским городом ещё с 1263 г., долгое время он оставался средоточением Европейской науки, отчасти и потому, что был расположен на севере Швейцарии в самом центре Европы (буквально «на стыке» с Францией и Германией). Базельский университет, основанный ещё в 1460 г., – был один из старейших в Европе.

В конце XVI века из Линдау на Боденском озере (отделяющем Швейцарию от Германии) в Базель переехал неприметный ремесленник Ганс -Георг Эйлер. В 1594 г. он стал гражданином города Базеля и открыл гребеночную мастерскую. Ганс-Георг имел прозвище “Scholpin” («кривой», «косоглазый»), у него было четыре сына – и все они стали гребенщиками. В следующем – третьем – поколении было четыре гребенщика и три пастора, а в четвертом поколении – только два гребенщика и уже пять пасторов. В числе последних находился и Пауль Эйлер (1670–1745), отец Леонарда.

В 1693 г. 23-летний Пауль окончил курс теологии[1] в Базельском университете. Причем математику ему преподавал знаменитый ученый Яков Бернулли[2], и в дальнейшем Пауль всегда испытывал к математике и талантливой семье Бернулли самое глубокое почтение. Однако ученых-теологов было в те годы больше, чем требовалось, и лишь в 1701 г. Пауль получил официальную должность священника сиротского приюта в Базеле. В 1704 г. он стал проповедником в соборе св. Якова. 19 апреля 1706 г. 37-летний пастор Пауль Эйлер женился на 29-летней Маргарите Брукнер, которая также была дочерью госпитального пастора (священника).

Через год 15 апреля (4 апреля по новому стилю) 1707 г. у них родился первый ребенок – сын, названный Леонардом (Leonhard Euler).

В июне 1708 г. Пауль Эйлер был избран церковным советом на должность священника в небольшое селение Риэн (Рихен), насчитывающее около тысячи жителей и расположенное в 5 км к северо-востоку от Базеля на правом берегу Рейна. И хотя состав семьи пастора вскоре вырос до шести душ, семья располагала лишь одной жилой комнатой (а вторую комнату небольшого домика занимал больной предшественник Пауля со своими девятью детьми). Таким образом, семья Пауля жила более чем скромно.

Благодаря мягкому климату члены семьи б***о***льшую часть времени проводили под открытым небом. Сохранился следующий рассказ из жизни маленького Леонарда в ту эпоху. Однажды родители заметили, что 4-летний малыш исчез. После долгих поисков его обнаружили в углу курятника, где он стоял, не шевелясь. На вопросы удивленных родителей Леонард ответил, что забрался в курятник, чтобы … снести яйца и высидеть цыплят.

Начальное обучение Леонард прошел дома под руководством отца, мировоззрение которого было близко к *кальвинизму*[1]. Добрый пастор готовил старшего сына к духовной карьере, причем занимался с ним и любимой математикой – как в качестве развлечения, так и для развития логического мышления ребенка. Однако не сохранилось никаких свидетельств о выдающихся математических способностях Леонарда в раннем детстве.

Когда у Леонарда появился интерес к учебе, его направили в базельскую латинскую гимназию – под надзор бабушки, вдовы госпитального священ-

---

[1] *Теология* (богословие) – совокупность религиозных доктрин и учений о сущности и действии Бога. Предполагает концепцию абсолютного Бога, сообщающего человеку знание о себе в откровении. Теперь и в Санкт-Петербурге есть Теологическая академия (пр. Стачек, 92/3).

[2] *Бернулли*, пожалуй, самый математический род во всей истории науки: 8 его представителей принадлежали к числу самых выдающихся умов Европы на протяжении всего лишь трех поколений. Родоначальниками этой блестящей династии были два брата-математика: Якоб (1654–1705) и Иоганн Бернулли (1667–1748). Сыновья последнего – Николай (1695–1726, умер в Петербурге) и Даниил (1700–1782, умер в Базеле) стали близкими друзьями Эйлера.

[1] *Кальвин**и**зм* – протестантское вероучение, основанное в XVI веке Ж. Кальвином. В своей основе оно отвечало «…требованиям самой смелой части тогдашней буржуазии» (Энгельс Ф.). Согласно этому учению человек якобы должен быть уверен в том, что он является «божьим избранником» и должен доказать это своей жизнью и деятельностью. Кстати, у Леонарда Эйлера это получилось в полной мере – он, безусловно, настоящий «божий избранник»!

ника. Гимназия якобы «готовила» будущих лавочников, нотариусов, банковских служащих и была в те годы в плачевном состоянии: грубые и малоквалифицированные учителя, с одной стороны, и запущенные ученики – с другой, портили жизнь друг другу. Не говоря уже о постоянных драках между учениками, случалось, что и учителя избивали учеников (а потом бывало, что и возмущенный отец на глазах у всего класса таскал за волосы учителя). Разумеется, что серьезных знаний эта гимназия дать не могла. Поэтому у Леонарда вскоре появился репетитор – студент Иоганн Буркгардт, впоследствии небезызвестный математик и теолог, который сразу же предсказал своему ученику блестящее будущее.

Хотя юный Эйлер уже проявил недюжинный математический талант, его отец решил, что сын должен изучать теологию, и готовил ему церковную карьеру. Повинуясь отцовской воле, осенью 1720 г. 13-летний Эйлер поступил в Базельский университет на философский факультет, который давал общую подготовку (для того, чтобы стать пастором затем следовало окончить ещё богословский факультет). В то время в Базельском университете было всего 19 профессоров, которые обучали лишь чуть больше сотни студентов. В целом университет находился тогда в «удивительной летаргии» (по словам известного французского математика Пьера Мопертюи, друга семьи Бернулли). Однако среди других предметов там изучались элементарная математика и астрономия, которые преподавал Иоганн Бернулли. Благодаря ему жизнь на кафедре математики била ключом и «гремела» на всю Европу. Профессор Бернулли был разносторонне образованный человек, он любил и понимал литературу, был доктором медицины (!) и, главное – блестящим педагогом и математиком. Великий Лейбниц (1646 –1716) к этому времени умер, а знаменитый Ньютон (1643–1727) был очень стар – и Иоганн Бернулли по праву считался первым математиком мира.

Эйлер благодаря своей блестящей памяти легко усваивал учебные предметы, отдавая основное время математике. И. Бернулли быстро оценил талант своего юного ученика и даже стал заниматься с ним отдельно: юноша читал математические мемуары[2], а по субботам в течение нескольких лет приходил к Бернулли домой, чтобы совместно разбирать непонятное. Эти беседы имели огромное значение для пытливого молодого ума. «Несомненно, это лучший способ делать успехи в математических науках, – писал Эйлер в автобиографии. – После разъяснения одной трудности десятки других исчезали». Тогда же Эйлер подружился с сыновьями Бернулли – Николаем и Даниилом, которые также увлеченно занимались математикой.

Занятия в университете шли хорошо. В июне 1722 г. 15-летний Эйлер окончил философский факультет и получил звание бакалавра.

[2] *Мемуары* – воспоминания, а также научные труды по отдельным проблемам, научные статьи. Тогда (всего 300 лет назад) учебников по математике ещё просто не существовало!

В октябре 1723 г. Эйлер записался на богословский факультет. Кроме богословских наук, Эйлер изучал также древние языки (греческий, латинский, еврейский). До глубокой старости сохранил он любовь к классической литературе, правда, почему-то своих современников, например, французских энциклопедистов, он не признавал. Память Эйлера была такова, что он знал наизусть не просто всю «Энеиду», но мог вспомнить, скажем, и первый, и последний стихи на каждой странице той книги, по которой в свое время учил «Энеиду» (т. е. у него была необыкновенная память).

В 1724 г. 17-летний Эйлер успешно сдал испытание в виде великолепной речи (на латинском языке), посвященной сравнению философии Р. Декарта и И. Ньютона. За это Эйлер был удостоен ученой степени магистра искусств (только в XIX веке в большинстве университетов Западной Европы ученая степень магистра была заменена степенью доктора философии).

В конце концов под давлением авторитета семьи Бернулли отец Эйлера вынужден был признать, что его сын рождён не для молитв, а для вычислений (однако религиозность своему сыну он все-таки привил на всю жизнь).

Небольшая по численности населения Швейцария готовила гораздо больше образованных людей, чем могла содержать и обеспечить службой. Да и во всей Западной Европе спрос на ученых был невелик. Поэтому ни юный Эйлер, ни его старшие друзья (братья Бернулли были уже достаточно известные ученые) не могли найти приложения своим силам. В 1725 году Николай и Даниил Бернулли были приглашены в члены только что организованной Петербургской Академии наук[1]. Тогда же и Эйлер, по его словам, «преисполнился невыразимым желанием поехать вместе с ними», но осуществить это сразу ему не удалось.

В 1726–27 гг. Эйлер выступает в печати с первыми исследованиями по дифференциальной геометрии и приложением анализа к механике. В 1728 г. было опубликовано его первое серьезное научное сочинение о наилучшем расположении мачт на корабле (написанное для конкурса, объявленного Парижской Академией наук). Любопытно, что Эйлер тогда ещё даже не видел моря, а тем более, больших кораблей, но французские академики дали его работе почетный отзыв, которого удостаивались немногие. Более того, Па-

[1] Основана указом Петра I от 28 января 1724 г., открылась в конце 1725 г. Ещё в начале 1718 г. было начато строительство Кунсткамеры (в переводе с немецкого – «музей редкостей»). По преданию её построили на берегу Большой Невы, где стояли две причудливые сосны с сросшими в ствол сучьями, причем якобы один из кусков сосны сохранился в музее до сих пор. В 1724 г. Кунсткамера была передана в ведение Академии наук. В Кунсткамере и сейчас ещё стоит огромный стол, за которым заседали первые академики. Среди них сначала преобладали приглашаемые иностранные ученые. Только в 1783–89 гг. рядом с Кунсткамерой было построено специальное здание для Академии, которая до 1803 г. называлась Академией наук и художеств. В этом здании над высокой парадной лестницей находится прекрасная большая мозаика – «Полтавская битва» М. В. Ломоносова. Сам Ломоносов работал в здании Кунсткамеры в 1741–65 гг. В 1830 г. Академия была выделена из здания Кунсткамеры.

рижская Академия премировала работу Эйлера. К слову сказать, эта Академия впоследствии 14 раз удостаивала премией его конкурсные работы, и большего числа премий не получил ни один ученый (за Эйлером следует его друг – Даниил Бернулли, получивший 10 премий). Позже (к 1749 г.) у Эйлера наберется работ по «Морской науке» на 2 больших тома.

Так с первых шагов своей научной деятельности Эйлер проявил интерес и к теоретическим проблемам математики, и к её практическому использованию. Однако молодой Эйлер так и не нашел применения своим силам в Швейцарии, его попытка определиться на открывшуюся вакансию по кафедре физики в Базельском университете закончилась неудачно: 19-летнего Эйлера сочли слишком юным, чтобы включить в число кандидатов на профессорскую кафедру (окончательный выбор там решал жребий).

В начале зимы 1726 г. братья Бернулли помогли наконец Эйлеру получить приглашение Петербургской Академии, правда, на должность адъюнкта по физиологии. Если Эйлер пожелает отправиться в далекое путешествие лишь летом, советовал Даниил Бернулли, то следовало бы использовать оставшееся время для занятий физиологией. И Эйлер действительно начинает систематически слушать лекции на медицинском факультете.

Путь в далекий Петербург представлялся Эйлеру чуть ли не путешествием на край света. Но Иоганн Бернулли рассеял все сомнения любимого ученика: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Поэтому 5 апреля 1727 года 20-летний Леонард Эйлер покидает Швейцарию (чтобы уже, увы, никогда больше не возвращаться на свою родину).

## 1.2. ПЕРВЫЙ ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПЕРИОД (14 ЛЕТ)

«По указу Ее Императорского величества велено Эйлеру быть при Академии и оному надлежит послать денег на проезд 130 рублей векселем… Санкт-Питербурх. 1726 года декабря 17 дня». Это распоряжение президента Академии Лаврентия Блюментроста было незамедлительно выполнено.

До Петербурга Эйлер добирался полтора месяца, при этом он впервые в своей жизни совершил морское путешествие: из Травемюнда в Ревель (Таллин) парусный корабль шел целый месяц, и Эйлер сильно страдал от морской болезни. 21 мая он добрался до Кронштадта, а 24 мая 1727 г. 20-й летний Эйлер вступил наконец на набережную российской столицы. Здесь его тепло встретили академики-соотечественники – друг детства Даниил Бернулли, известный физик Якоб Германн (1678–1733), который был дальним родственником Эйлера и сподвижником великого Г. В. Лейбница.

В то время еще не было ни города-красавца Петербурга, ни шедевров архитектуры. «Во всем городе не было ничего великолепного, кроме Невы, не украшенной ещё гранитною рамою», – пишет Пушкин в «Арапе Петра Великого» (описываемое там время совпадает с приездом Эйлера). «Обнаженные плотины, каналы без набережной, деревянные мосты повсюду являли недавнюю победу человеческой воли над супротивлением стихий».

В день приезда Эйлера в Петербург умерла Екатерина I и царем был провозглашен мальчик Петр II. К этому моменту уже второй год фактическим правителем России являлся А. Д. Меншиков (а не Екатерина I) – сын придворного конюха, в 13 лет ставший денщиком и другом 12-летнего Петра I (1672–1725). Лакейская преданность царю, непомерное корыстолюбие и тщеславие сделали из него графа (1702) и светлейшего князя (1707), а в 1727 г. он, по сути дела, сам себе присвоил звание генералиссимуса. Но главное достижение Меншикова – чудовищное *казнокрадство*, размеры которого были сопоставимы с казной всего государства российского. Только 8 сентября 1727 г. (Эйлер уже прибыл в Петербург) Меншиков наконец-то был обвинен в государственной измене и хищении казны и был сослан в далекий Берёзов (Тюменская область, там он и умер через 2 года). При этом было конфисковано всё имущество главного казнокрада: 90 тыс. крепостных, 6 городов, имения в России, Польше, Пруссии и Австрии, 5 млн. рублей золотом наличными и 9 млн. рублей в банках Англии и Голландии (деньги по тем временам просто колоссальные!).

В Петербурге не стали настаивать, чтобы талантливый молодой швейцарец занимался непременно физиологией, и по его личной просьбе назначили Эйлера адъюнктом (то есть младшим по рангу академиком) высшей математики с окладом 300 рублей в год. Таким образом, Эйлер нашёл весьма благоприятные условия для научной деятельности: материальная обеспеченность, возможность заниматься любимым делом, наличие ежегодного журнала для публикации трудов. В Петербурге работала самая большая тогда в мире группа специалистов в области математических наук: из 22 профессоров и адъюнктов, приглашенных в первые годы, оказалось 8 математиков, которые, впрочем, занимались также механикой, физикой, астрономией, картографией. В Академии собралось много блестящих ученых с общими интересами – Даниил Бернулли, Якоб Герман, разносторонне эрудированный Христиан Гольдбах и др. Научное общение с коллегами, возможность публикации работ в изданиях Академии наук создавали хорошую основу для плодотворной деятельности Эйлера. Всё это позволило Эйлеру сразу же приступить к занятиям математикой и механикой. Причем буквально с первых дней пребывания в Петербурге проявилась главная черта характера Эйлера: работать при любых обстоятельствах и в любой обстановке. Уже в первые годы диапазон его интересов становится чрезвычайно широким. Он докладывает о таутохронах в пустоте и в сопротивляющейся среде, о дифференциальных уравнениях, об упругих телах, о прогрессиях и т. д. Его статьи на латинском языке появились в печатном органе Академии, который назывался «Комментарии Петербургской Академии наук» (начиная со 2-го тома за 1727 г., статьи Эйлера публиковались в этом журнале без перерыва до самой его смерти и ещё 43 года спустя!).

С первых лет своего существования Петербургская Академия занялась и подготовкой русских ученых. Позднее при Академии были созданы университет и гимназия. Пройдя академический университет и стажировку в Германии, академиком стал М. В. Ломоносов; из числа учеников Эйлера в русской науке успешно работали В. Адодуров, С. Котельников, С. Разумовский, М. Софронов, М. Головин, а позднее А. Лексель, Ф. Шуберт и др.

Ученые Европы тогда изъяснялись между собой по-латыни; на этом же языке писались научные работы, велись протоколы. В Петербургской Академии широкое употребление имел также немецкий язык, которым владели приглашенные ученные. Многие из них так до конца жизни и не научились говорить по-русски. Но Эйлер стал бегло говорить по-русски уже через несколько месяцев после приезда в Россию. Позднее он владел русским почти свободно и даже писал по-русски некоторые из своих писем.

За последующие 14 лет (первый петербургский период) Эйлер подготовил к печати около 80 трудов по вопросам геометрии, теории чисел, механики: свыше 50 из них – были изданы. Это совершенно фантастическая продуктивность для ученого-математика, особенно учитывая всю глубину и значимость трудов Эйлера (подробней об этом см. гл. 1.6). Уже в 1731 году 24-летний Эйлер стал профессором физики, т. е. действительным членом Академии (с окладом 400 рублей в год, в 1734 г. его оклад был увеличен до 600 рублей). В 1733 году после отъезда Даниила Бернулли в Швейцарию Эйлер получил кафедру высшей математики, где оставался до своего отъезда в Германию (в 1741 г., см. ниже).

Как-то позже (в 1749 г.) прусский король Фридрих II спросил Эйлера о том, где он изучал то, что знает, и ученый ответил, что «всем обязан своему пребыванию в Петербургской Академии». Впрочем, это свидетельствует также и о личной скромности Эйлера, поскольку главная причина исключительной плодотворности его работы заключалась прежде всего в том, что Эйлер обладал ***невероятной интуицией*** и ***феноменальной памятью***, позволяющей держать в голове колоссальный объем знаний и производить сложнейшие вычисления, буквально не прикасаясь пером к бумаге[1]. Эйлер был прирожденный аналитик, он вычислял без видимых усилий, как орлы

[1] *Люди-уникумы* (*чудо-вычислители*, см. [6]) были во все времена и всюду, причем, как правило, они не являлись математиками, и часто среди них попадались совершенно неграмотные люди. В чем секрет необычных способностей и феноменальной памяти таких людей – науке пока неизвестно. Но когда *Его Величество Случай* наделял этим таинственным даром талантливых ученых, то миру являлись редкие *гении* наподобие Эйлера. Похожей феноменальной памятью обладал, например, выдающийся советский физик Л. Д. Ландау (1908–1968).

парят в поднебесье. В научных кругах России и Европы Эйлер быстро заслужил репутацию человека, способного решить любую поставленную ему задачу[2], причем не только математическую.

В 1733 г. в возрасте 26 лет Леонард Эйлер, только что ставший академиком, женился на ровеснице Екатерине Гзелль (1707–1773) – дочери академического живописца, привезенного Петром I из Амстердама (швейцарца по происхождению). Свадьба состоялась в Новый год – два праздника сразу! Вся Академия сердечно поздравляла счастливых молодоженов, в том числе им преподнесли стихи, в которых были такие строчки: «…В том усомниться мог ли кто-то, что Эйлер удивит весь мир…» (т. е. современники, а тем более, коллеги вполне осознавали гениальность Эйлера).

Мы скажем здесь несколько слов о семье Эйлера, чтобы потом к этому не возвращаться. После женитьбы Эйлер приобрел небольшой деревянный дом на Васильевском острове, на берегу Невы. Бог, как говорится, благословил этот брак: у Эйлера было 13 детей (но выросло только пять, что весьма характерно для далекого от нас XVIII века). В Петербурге родились два его сына: Иоганн Альбрехт (1734–1800) – ставший впоследствии известным математиком, физиком и астрономом; Карл (1740–1790) – ставший талантливым врачом (был придворным врачом в Петербурге). Третий сын Христофор (1743–1812) родился позже в Берлине (где Эйлер жил одно время, об этом – рассказано ниже), но потом приехал к отцу в Россию и занимался с ним точными науками. Христофор был участником астрономической экспедиции Академии 1769 г., служа в русской армии, достиг чина генерал-лейтенанта и был директором оружейного завода в Сестрорецке.

В 1773 г. после 40 лет счастливого брака, Эйлер овдовел. Всё его потомство, более 30 человек (!), жило с родоначальником. Громадная семья нуждалась в хозяйке (кроме того, 66-летний Эйлер к тому времени, фактически, ослеп). Поэтому в 1776 г. 69-летний Эйлер женился во второй раз, теперь уже на Саломее Гзелль – сводной сестре своей первой жены.

Бесконечные практические задачи (инженерные и другие), решение которых требовала молодая, бурно развивающаяся Россия, отнюдь не притупили феноменальные математические способности Эйлера. Наоборот, для решения каждой новой проблемы он изобретал новый остроумный математический подход. Столь «односторонняя» направленность его ума приводила к тому, что иной день Эйлеру случалось писать по несколько работ.

Говорить о жизни Эйлера – значит говорить о том, как он трудился, потому что невозможно представить его не работающим. «Эйлер вычислял, как другие дышат», – отозвался о нем Араго. «Ребенок на коленях, кошка на спине – так писал он свои бессмертные произведения», – рассказывает Тибо.

[2] Эйлеру «не сдались» буквально считанные «неприступные крепости», например, *Великая теорема Ферма* (хотя Эйлер и здесь совершил крупнейший прорыв на сто лет вперед), *греко-латинские магические квадраты* (6-го, 10-го, 14-го и т. д. порядков, которые якобы невозможно построить – это заблуждение Эйлера не могли опровергнуть в течение 177 лет) [6].

Одним словом, Эйлер бодрствует – значит, он работает, или что то же – вычисляет. Ну, а если Эйлер лежит в постели? Если Эйлера томит бессонница, он… вычисляет. Рассказывают, что однажды во время бессонницы он вычислил шестую степень первых ста чисел, а таблицу результатов ($n^6$, где $n$=1, 2, 3, …, 100) он повторил на память через много дней. В другой раз Эйлер вычислил в течение часа первые 20 цифр числа $\boldsymbol{\pi}$, чтобы испытать, насколько удобен для вычислений один полученный им ряд.

В 1733 г. у Эйлера уже было не менее 36 работ (из них только 11 напечатанных). В эти годы Эйлер работал над своей «Механикой». Это был первый труд, в котором механика излагалась последовательно и систематически на языке высшего анализа. Книга имела тысячу больших страниц.

В 1735 г. произошёл роковой для Эйлера случай: Парижская Академия наук предложила премию за расчет траектории кометы. Причем эта проблема была столь трудна, что академики Европы просили дать на её решение 3 месяца. Каково же было удивление ученых мужей, когда Эйлер взялся выполнить расчеты за… 3 дня (!) и исполнил работу. Правда, вследствие[1] этого рекордного достижения Эйлер заболел нервною горячкою с воспалением правого глаза, которого и лишился (в возрасте 31 года или даже раньше). Сам Эйлер и в этом нашел некий «плюс», заметив, что «теперь он меньше будет отвлекаться от занятий математикой».

Двухтомная «Механика», изданная в 1736 г., принесла 30-летнему Эйлеру мировую славу. К сожалению, обстановка в России к тому времени изменилась в худшую сторону. В 1730 г. на российский престол была возведена Анна Иоанновна, племянница Петра I, но страной, фактически, правил её фаворит граф Э. И. Бирон, который разграблял Россию, жестоко преследовал недовольных и т. д. Позже (после переезда Эйлера в Берлин) мать прусского короля как-то обратила внимание на то, что Эйлер отвечает ей односложными «да», «нет». «Почему же вы не хотите со мной разговаривать?» – спросила она Эйлера. «Сударыня, – ответил он, – я приехал из страны, где тех, кто говорит, *вешают*». Ответ наглядно показывает, как себя чувствовал Эйлер в атмосфере бироновского террора. Бирон видел в Академии учреждение, которое требовало много денег и не приносило ощутимой пользы. Ходили даже слухи о скором закрытии Академии.

После переезда президента Академии вместе с двором в Москву делами Петербургской Академии стал распоряжаться… её библиотекарь – немец И.

[1] Специалист по трудам Эйлера швед Г. Энештром утверждает, что приступая к этим вычислениям, Эйлер предварительно вывел формулы, позволяющие ему работать всего по 8 часов в течение 3-х дней. Т. е. потеря правого глаза якобы не связана с перенапряжением Эйлера. В связи с этим заметим, что все общедоступные книги с биографией Эйлера – это *компиляции*. Более того, вся История – это компиляция, т. е. неизбежное «ограбление» некогда существовавшей реальности. Некоторых людей «наука» история может привести даже в ярость из-за своей неоднозначности и противоречивости. По самому большому счету, какое-то значение могут иметь только *математические идеи* (законы), только они абсолютны и вечны! Потомки всегда «переврут» историю и биографии, а зерна Истины – лишь в формулах (в т. ч. у Эйлера).

Д. Шумахер (1690–1761). Это был аккуратный исполнитель распоряжений, но по характеру – беспринципный карьерист, он высказывал презрительное отношение ко всем русским, а, например, талантливого Ломоносова, можно сказать, вообще терпеть не мог. Отношения большинства академиков со своенравным Шумахером оставляли желать лучшего (правда, лично к Эйлеру он относился с большим уважением; очевидно, гениальность математика покорила даже такого завистника, как Шумахер). Многие ученые, не чувствуя больше поддержки, стали покидать Россию. Немалую роль играли и финансовые затруднения: если на увеселение двора расходовалось ежегодно до 2 миллионов рублей, то на Академию наук и Адмиралтейскую академию вместе отпускалось лишь 47 тысяч рублей[1].

До 1741 г. Эйлер продолжал работать по-прежнему, т. е. с той энергией и продуктивностью, которые кажутся всем загадочным явлением природы. В 1734–41 г. он прибавил к 36 работам ещё 75, из которых тогда были напечатаны 46, в том числе 37 в «Комментариях Петербургской Академии наук». К слову сказать, «Комментарии» стали авторитетным научным органом главным образом потому, что в каждом номере были работы Эйлера.

В 1740 г. умерла императрица Анна Иоанновна. Произошел дворцовый переворот, Бирон был арестован и сослан (он умер в 1777). Трон перешел к младенцу Иоанну Антоновичу (род. 1740), а страной стала править его мать – Анна Леопольдовна. В 1741 г. при её регентстве в Петербурге сложилась совсем тревожная обстановка (её свергли в ноябре 1741 г., умерла в ссылке). 16 декабря 1741 г. на престол была возведена Елизавета Петровна[2]. Во всем царила неуверенность и неопределенность. Положение Академии очередной раз пошатнулось. Кроме того, некоторые российские нравы, деятельность Тайной канцелярии давно удручали скромного чинного швейцарца, выросшего в стране, где со времен легендарного Вильгельма Телля (XIV век) был безвозвратно свергнут деспотизм. Эйлер, уже переживший подобную ситуацию в начале 30-х годов, решил уехать из России.

Вот почему уже знаменитый на весь мир Эйлер принял предложение прусского короля Фридриха II, который приглашал его в Берлинскую Академию на весьма выгодных условиях (Фридрих не признавал ни немецкой науки, ни искусства; он был немцем только по рождению, а по вкусам преклонялся перед французами, на худой конец – перед швейцарцами).

---

[1] Описанная ситуация с Академией наук и учеными поразительно напоминает реалии сегодняшнего времени в России. Это наглядный пример развития общества по спирали. Восхищает «стабильность» деяний и нравов власти предержащих, которые живут по одним и тем же законам: что при крепостном праве, что при «развитом» социализме, что при капитализме.

[2] Эйлер был невольным свидетелем *обычной* для российского престола «чехарды»: Екатерина I (1725–1727); Пётр II (1727–1730); Анна Иоанновна (1730–1740); Иоанн Антонович (1740–1741); Елисавета Петровна (1741–1761); Пётр III (1761–1762); Екатерина II (1762–1796). Однако можно не сомневаться, что только имена великих математиков (в т. ч. Эйлера) сохранятся ***в вечности***, а всякие там «правители» и катаклизмы истории (перевороты, революции, войны, перестройки, реформы и т. д.) – это, своего рода, некие «дрожжи» для неудержимого подъема общечеловеческого Разума к бесконечным вершинам *Абсолютных Истин*.

В соответствии с поданным Эйлером прошением он «был отпущен от Академии в 1741 году» и утвержден её почетным академиком (ему была определена ежегодная пенсия из Петербурга). Он обещал по мере своих сил помогать Петербургской Академии – и действительно помогал очень существенно долгие 25 лет, пока не вернулся обратно в Россию. В июне 1741 г. Леонард Эйлер с женой, двумя сыновьями и четырьмя племянниками благополучно добрался морем до Вольгаста и вскоре прибыл в Берлин.

## 1.3. ПРЕБЫВАНИЕ В БЕРЛИНЕ (25 ЛЕТ)

В 1740 г. на прусский престол вступил Фридрих II, получивший у вечно раболепных историков наименование Великий[1]. Помимо формирования прусской армии и ведения многочисленных войн, он, фактически, создал Берлинскую Академию наук (для него это был вопрос престижа!).

По рекомендации великого Вольтера президентом Академии с 1745 г. стал видный французский ученый Мопертюи (математик, физик, астроном, геодезист). Однако к обязанностям своим он относился формально, часто уезжал из Берлина во Францию, оставляя вместо себя Эйлера. Академия тогда состояла из четырех классов (отделений): *физического* (физика, химия, медицина, ботаника), *математического* (включающего и технические науки), *литературного* (языки, история, археология) и класса *умозрительной философии*. В каждом классе предусматривался директор. Сам Фридрих II числился шефом Академии и членом литературного отделения; впрочем, он писал сочинения, но не участвовал в заседаниях. Эйлер занимал пост директора класса математики и члена правления, а после смерти Мопертюи (с 1759 г.) фактически руководил Берлинской Академией.

После своего отъезда из Базеля все эти годы Эйлер оставался гражданином Швейцарии; в 1752 г. его жена и дети также получили швейцарское подданство, а за участие в одном юридическом споре Эйлер получил от Базельского магистрата золотую медаль.

В 1745 г. в Базеле скончался отец Эйлера, а несколько лет спустя умер младший брат Генрих; оставшаяся в одиночестве мать, по настоянию Эйлера, переехала к нему в Берлин (где и прожила до своей смерти в 1761 г.).

[1] Фридрих II (Великий) был прусским королем 46 лет (1740–1786)! В России, так долго не правил ни кто: Иоанн III (Васильевич) – 43 года; Пётр I (Великий) – 36 лет; Екатерина II (Великая) – 34 года; Сталин (Великая Дрянь) – 29 лет. Всего за 672 года от Калиты (1328 г.) до Ельцина (2000 г.) было около 45 «правителей», то есть средний «срок» у них был – 15 лет престола. Эти люди, *как правило*, были не только весьма посредственными личностями, но и ещё самыми настоящими мерзавцами, идущими на любые преступления из-за своей личной выгоды (к их числу следует отнести и Ельцина [7]). Причина здесь в том, что политика – удивительно простое и «грязное» дело. А вот *точные науки* сложны и «кристально чисты», поэтому негодяи среди великих ученых – исключение из правила (но, увы, и такое случается [7]).

Эйлер встречал мать во Франкфурте. Почему-то он не пожелал воспользоваться случаем и навестить родину, которую покинул более 25 лет назад.

Живя в Берлине, Эйлер не переставал интенсивно работать для Петербургской Академии, сохраняя звание её почётного члена. Он деятельно участвовал в подготовке русских математиков; в Берлин командировались для занятий под его руководством молодые русские ученые, которые годами жили при нем, а иной раз и у него на квартире, на полном пансионе (разумеется, за соответствующую оплату, которую канцелярия Шумахера присылала с большим запозданием). И как Эйлер некогда подружился в доме своего учителя И. Бернулли с его сыновьями, так и у Степана Румовского (1734–1812) навсегда установились дружеские отношения с Иоганном Альбрехтом (старшим сыном Эйлера).

Эйлер вообще всегда оказывал поддержку талантливым людям. В 1747 г. Шумахер направил ему для отзыва работы М. В. Ломоносова в надежде на то, что Эйлер их резко раскритикует. Эйлер разочаровал интригана-Шумахера. «Все сии сочинения, – гласил его отзыв, – не токмо хороши, но и превосходны... ибо он изъясняет физические и химические материи самые нужные и трудные, кои совсем неизвестны и невозможны были к истолкованию самым остроумным ученым людям ...».

Кстати сказать, далеко не все великие ученые столь доброжелательно (как Эйлер) относились к талантам других людей. Например, Иоганн Бернулли, при всей своей гениальности, скептически относился к уму и способностям других, в том числе и собственных детей. Так, когда Даниил, будучи профессором и академиком, создал в 1738 году свою знаменитую «Гидродинамику», Иоганн Бернулли не мог допустить даже мысли, что сын оказался талантливее его самого – пусть даже в какой-то специальной области. Он публично заявил, что вынашивал те же идеи чуть ли не десять лет, сформулировал их по-своему и, ничтоже сумняшеся, включил в собрание своих сочинений. Даниил оказался в глазах ученого мира лишь как бы распространителем идей своего знаменитого отца. «Бильфингер упрекнул меня, – писал Даниил Эйлеру, – что я-де все списал у отца. Но ведь я не взял у него ни единого слова!».

Однако тщеславный и завистливый Иоганн Бернулли, который не терпел превосходства более талантливого, но рано умершего брата Якоба и который боялся соперничества собственного сына Даниила, – великий Иоганн Бернулли преклоняется перед математическим гением своего ученика Леонарда Эйлера! Свидетельство тому – 20-летняя переписка Бернулли с Эйлером. Вот как, например, меняется стиль первых строк посланий Бернулли: «Высокоученому и изобретательному юному мужу…» (1728 г.); «Широко известному ученому…» (1729 г.); «Широко известному и весьма проницательному математику…» (1737 г., после того как Эйлер «играючи» получил результаты, над которыми тщетно бился Бернулли, скажем, нашел сумму бесконечного ряда $\Sigma n^{-2} = \pi^2/6 = 1{,}6449\ldots$); "Несравненному Л. Эйлеру, главе математиков…" (1745 г.).

В 1742 г. вышло 4-х томное собрание сочинений Иоганна Бернулли. Посылая его из Базеля Эйлеру в Берлин, старый ученый писал своему ученику: «Я посвятил себя детству высшей математики. Ты, мой друг, продолжишь её становление в зрелости». И Эйлер, безусловно, оправдал надежды своего учителя (см. краткий перечень его работ в гл. 1.6). Причем Эйлер «выдавал» в среднем 800 страниц формата «ин-кварто» в год. Это было бы немало даже для создателя романов; для математика же такой объем *научных* трудов, очень четко изложенных, включающих механику и теорию чисел, анализ и музыку, астрономию и физику, теорию вероятностей и оптику… – просто не укладывается в сознании!

Безусловно, Эйлер был гениальным человеком. Но у него имелись свои «странности» (как и у всех прочих людей, разумеется, у каждого они – свои) . Так, Эйлер совершенно не интересовался современной ему изящной литературой, причем лучшую её разновидность – литературу французских энциклопедистов (во главе с Д. Дидро они создали 35-томный словарь наук, искусств и ремёсел), – попросту игнорировал. Театром Эйлер также не интересовался, не смотрел пьес, правда, «за исключением глупейших сценок с марионетками, которым отдавал свое внимание в течение часов и захлебывался от смеха» (по свидетельству Формей – секретаря Берлинской Академии). Очевидно, организм Эйлера сам искал путей к полной разгрузке мозга от серьезной работы. В разговоре Эйлер был всегда ровен и благожелателен. Если ему указывали ошибку, он без ложной гордости её исправлял; мог вспыхнуть, особенно от возражения, но очень быстро успокаивался. К молодым математикам, к своим ученикам относился внимательно и доброжелательно. Один его современник писал: «Окружающие видели в нем не только великого математика, но и большого человека».

В Берлине Эйлер редактировал математический отдел русского академического научного органа, где опубликовал за это время почти столько же статей, сколько в «Мемуарах» Берлинской Академии наук. Большую помощь Эйлер оказывал Петербургской Академии, приобретая для неё научную литературу и оборудование, ведя переговоры с кандидатами на должности в академии и т. д. Эйлер также вёл обширную научную и научно-организационную переписку, в частности переписывался с Ломоносовым, которого высоко ценил. Ломоносов был старше Эйлера на 4 года и стал первым российским ученым-естествоиспытателем известным в просвещенной Европе. Эйлер вряд ли был лично знаком с Ломоносовым – разве что встречался с ним в 1736 г., когда тот был студентом академического университета. Потом Ломоносов уехал стажироваться в Марбург и вернулся в Петербург… через несколько дней после отъезда Эйлера в Берлин. А когда Эйлер возвратился обратно в Петербург, Ломоносова уже не было в живых (он умер в возрасте 54 лет и был похоронен в Петербурге, см. гл. 1.5).

За 25 лет жизни в Берлине Эйлер подготовил около 300 работ, среди них ряд больших монографий. В 40–50-е гг. Эйлер участвовал в нескольких научных и философских дискуссиях с позиций *картезианского* механического материализма, который сочетался у него с *глубокой личной религиозностью*[2]. Этот спор имел большое значение в развитии европейской науки.

Как уже сказано, после смерти Мопертюи Эйлер фактически руководил Берлинской Академией, но он не мог решать важнейших вопросов о привлечении новых членов Академии и об установлении их окладов. А однажды, после напоминания Фридриху II о нуждах Академии, Эйлер получил весьма резкий ответ (иными словами: не суй носа, куда не просят). Все это шло вразрез с привычным для швейцарского гражданина свободомыслием. Эйлер весьма болезненно воспринимал деспотическое вмешательство короля во внутренние дела Академии. К тому же из России продолжали поступать приглашения одно другого лестнее. В годы берлинской жизни Эйлера почти половина его научных трудов издавалась в Петербурге.

Во время *Семилетней войны* (1757–1761) русская армия взяла столицу Пруссии, разорила ее окрестности, в том числе сожгли мызу Эйлера (небольшое именьице под Берлином). Но, поскольку его в России помнили и уважали, то фельдмаршал Салтыков приказал возместить все понесенные им убытки, а императрица Елизавета, узнав о случившемся, приказала добавить к этому огромную сумму – тысячу флоринов (4 тыс. рублей). При Елизавете Петровне (1741–61) Эйлера приглашали вернуться в Петербург на весьма выгодных условиях, но ученого не прельщала перспектива оказаться в административном подчинении у недалекого К. Г. Разумовского (младшего брата фаворита Елизаветы) и, особенно, в подчинении у Шумахера (которого Разумовский назначил академиком-секретарем!)

В 1762 г. на русский престол вступила Екатерина II, которая осуществляла политику «просвещенного абсолютизма», хорошо понимая значение науки как для процветания государства, так и для собственного престижа. Она ассигновала свыше 60 тысяч рублей в год на нужды Академии (Фридрих II «отпускал» суммы куда м***е***ньшие). Императрица приказала предложить Эйлеру управление математическим классом (отделением), звание конференц-секретаря Академии и оклад 1800 рублей в год; его сыну Иоганну Альбрехту – звание академика и 600 рублей в год. «А, если не понравится, – говорилось в письме, – благоволит сообщить свои условия, лишь бы не медлил приездом в Петербург». Эйлер поставил такие условия: он занимает пост

---

[2] *Картезианство* предельно четко разделяет мир на две независимые субстанции – *протяжённую* (телесную, т. е. пустое пространство отрицалось) и *мыслящую* (самодостоверную: «мыслю, следовательно, существую»), при этом проблема их взаимодействия в мыслящем существе оказывалась в принципе не разрешимой. Что касается *религиозности* Эйлера, то в этом, очевидно, сказалось влияние его отца и общей атмосферы далекого от нас XVIII века.

директора Академии с окладом 3000 рублей в год; в случае его смерти жене назначают пенсию 1000 рублей; три его сына занимают в Петербурге приличное положение. Эти условия были приняты Екатериной.

Однако «коронованный философ» Фридрих II упорно не хотел отпускать Эйлера (его отъезд наносил удар по престижу короля), но и назначить его президентом Берлинской Академии он также не горел желанием. В итоге Эйлер просто перестает работать для Академии и даже больше не ходит в академические собрания. Наконец, 30 апреля 1766 г. он пишет королю резкое письмо, в котором ссылается на предложение Екатерины и напоминает о своих правах свободного гражданина Швейцарии. И король задумался: как-никак, швейцарский гражданин, а за спиной его – Екатерина Великая. С этим нельзя не считаться… И тогда Фридрих II «вдруг» разрешает Эйлеру уехать в Россию. Правда король не удержался от мелкой, мещанской пакости: во-первых, он не отпустил сразу с военной службы младшего сына Эйлера (Христофора позже «вызволила» сама Екатерина II), а во-вторых, Фридрих послал Д’Аламберу («кандидату» в президенты Берлинской Академии наук) весьма «остроумное» письмо, красноречиво подтверждающее скудоумие королей. Вот выдержка из него: «Г-н Эйлер, влюбленный в Большую и Малую медведицы, приблизился к Северу, чтобы было удобнее их наблюдать. Корабль, который вез его, потерпел крушение, и всё утонуло [хорош юмор!]: это очень жаль, так как было достаточно материала, чтобы наполнить шесть томов in-folio от корки до корки цифрами, а Европа лишилась теперь удовольствия получить это интересное чтение».

Фридрих II, как и большинство из «сильных мира сего», был весьма заурядной личностью, не понимал существа математики, не видел пользы от точных наук вообще. И, тем не менее, истории было угодно, чтобы президенты «его» Академии были именно математики[1]: Мопертюи, Эйлер (и. о. президента), Д’Аламбер, Лагранж (20 лет был президентом, до 1787 г.).

После того как француз Ж. Д’Аламбер (1717–1783) – «третий» математик в мире после Эйлера и Лагранжа (по словам самого Д’Аламбера, не страдавшего «ложной» скромностью), отказался перейти на службу к Фридриху, в мире оставался лишь одни человек, достойный заменить Эйлера в Берлине. Это был французский ученый Ж. Л. Лагранж (1736–1813), «второй» математик мира, по классификации Д’Аламбера. Лагранж, если можно так выразиться, как бы поднялся на плечах Эйлера. И как некогда старый Иоганн Бернулли справедливо отдал пальму первенства более молодому Эйлеру, так и Эйлер несколько лет спустя писал, что «вступивший в апогей своей славы Лагранж является весьма достойным моим преемником и самым знаменитым геометром века» (ему было всего 30 лет!).

[1] Академию наук в СССР также нередко возглавляли математики: М. В. Келдыш (1911–78) – с 1961 по 1975 г.; А. П. Александров (1903–94) – с 1975 по 1986 г.; Г. И. Марчук (р. 1925) – с 1986 по 1991 г.; Ю. С. Осипов (р. 1936) – с 1991 г. Всего за 74 года (с 1917 по 1991) сменилось 8 президентов АН СССР, средний «срок правления» которых составил 10–11 лет.

## 1.4. ВТОРОЙ ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПЕРИОД (17 ЛЕТ)

17 (28)[2] июля 1766 г. Эйлер вместе с семьей вернулся в Петербург.

Императрица сдержала свои обещания: сразу же предоставила Эйлеру 8000 рублей на покупку дома на Васильевском острове и на приобретение обстановки. Более того, Екатерина предоставила на первое время одного из своих поваров и поручила Эйлеру подготовить соображения о реорганизации Академии (что было весьма лестно для ученого, но этот проект Эйлера по реорганизации, увы, так потом и не был осуществлен). Старший из его сыновей Иоганн Альбрехт получил кафедру физики и вскоре стал академиком, Карл занял высокую должность в медицинском ведомстве.

К несчастью, осенью 1766 (в возрасте 59 лет) Эйлер почти ослеп (из-за катаракты теперь уже левого глаза), но, несмотря на это, опираясь на силу ума, феноменальную память, а также на помощь своих способных молодых учеников-секретарей (старшего сына, В. Л. Крафта, А. И. Лекселя, М. Е. Головина, Н. И. Фусса), гений продуктивно работал до конца жизни.

В 1769–71 гг. выходят три тома «Диоптрики» – в них было объединено всё, написанное Эйлером за три десятилетия об оптических инструментах. Этим сочинением была создана новая по тем временам наука об оптических инструментах, описывающая законы прохождения и преломления световых лучей, правила расчета телескопов и микроскопов, вычисление аберрации – все, что может дать оптике математика. Будучи слепым, Эйлер, блестяще изложил законы распространения света!

В 1768–72 гг. хороший друг старшего сына Эйлера – С. Я. Румовский (ставший в 1800 г. вице-президентом Академии) переводит на русский язык «Письма к немецкой принцессе», написанные Эйлером по-французски ещё в Берлине. Это единственное (кроме «Универсальной арифметики») популярное сочинение Эйлера, ставшее *настольной книгой* всех культурных людей Европы. «Письма» содержат изложение почти всей физики и философии того времени, причем они и по сей день не утратили своего познавательного и философского значения[1]. Всего же «Письма» издавались не менее чем на 10 языках, выдержав больше 40 (!) изданий.

Несмотря на то, что Эйлер был верующим человеком, свою веру он строго отделял от научной деятельности и в своей философии стоял на позициях вульгарного материализма, не пытаясь примирить эти противоположные точки зрения. «Чем меньше вмешивать бога и божественные силы в дела мирские, в том числе в науку, тем лучше и для науки, и для авторитета бога», – считал Эйлер. А в вопросах познаваемости мира и его закономерностей он явно придерживался материалистических взглядов.

[2] Дата в скобках – по старому стилю (здесь и далее по тексту).

[1] Сейчас в наших книжных магазинах продается новый перевод «Писем» Эйлера на русский язык (толстая книга в зеленых «корочках»). Но, увы, там нет биографии Эйлера!

В 1771 г. лучший окулист Петербурга взялся сделать операцию Эйлеру (снять катаракту на левом глазу). Операция прошла удачно. Радость в доме была всеобщая. К несчастью, Эйлер пренебрег предостережениями хирурга и немедленно погрузился в работу. Глаз не выдержал, и через несколько дней Эйлер ослеп окончательно и навсегда (по другой версии после операции в глаз была занесена инфекция).

В том же 1771 г. в Петербурге случился большой пожар. Погибло 550 зданий, в их числе домик Эйлера[2]. Но его рукописи удалось спасти!

Подобные несчастья и преклонные годы – все это, казалось бы, могло лишить человека работоспособности. Но не таким был Эйлер. Его деятельность не ослабевает. Он диктует свои работы сыновьям и ученикам. Правнук великого ученого, Павел Фусс, рассказывает, как Эйлер работал. Посреди его кабинета стоял большой стол, покрытый каменными плитами. На этих плитах Эйлер писал мелом большими буквами (такие буквы он видел, хотя прочесть написанное не мог) основные выражения новой работы. После этого он диктовал план статьи, главные пункты изложения, наиболее значительные места. Остальное делали его помощники. Диктуя, Эйлер ходил вокруг стола, скользя вдоль его края пальцем. От этого кра***я*** стола стали отполированными и блестели.

В 1773 г. Даниил Бернулли присылает ослепшему другу из далекого Базеля Николая Фусса, ставшего для Эйлера если не добрым гением, то, несомненно, его правой рукой. С 1773 по 1783 г. Николай написал и выпустил 355 работ Эйлера – в среднем по 35 в год. Например, только за один 1777 г. Эйлер вместе с Фуссом подготовил почти 100 статей (!).

В последние годы жизни престарелый ученый не переживал ни больших несчастий, ни крупных неприятностей в Академии, ни горестных потерь. А немалые годы никак не отражались на остроте его ума, на феноменальной работоспособности. Он продолжал работать с прежней производительностью. Об этом можно судить по тому, что в 1766–83 гг. (во второй петербургский период) им написано 416 работ (по 25 в год), в том числе несколько больших книг. Жизнь текла спокойно и внешне однообразно вплоть до последнего дня. 7 (18) сентября 1783 г. он встречался со своим учеником Лекселем[1], они беседовали о новой, недавно открытой планете Уран, а вечером во время игры с внуком 76-летний

Рис. 2. Мемориальная доска

---

[2] На рис. 2 изображена мемориальная доска, установленная в 1957 г. на доме 15 по наб. лейтенанта Шмидта («дом академиков»). Надпись гласит: «Здесь жил с 1766 по 1783 г. ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР член Петербургской Академии наук крупнейший математик, механик и физик". (Дом, где проживал Эйлер – это ныне школа №27 на Васильевском острове С-Петербурга.)

[1] А. И. Лексель (1740–1784) – русский астроном, академик (с 1771). В своей статье «Исследование о новой планете, открытой Гершелем» (речь идет о планете Уран) он высказал предположение о существовании ещё более далекоё планеты (в XIX в. там открыли Нептун).

Эйлер вдруг почувствовал себя плохо и с возгласом: «Я умираю…» потерял сознание. В тот же вечер он скончался (от кровоизлияния в мозг), или, по выражению Кондорсе[2], «перестал жить и вычислять».

## 1.5. ПРАХ ЭЙЛЕРА ПОКОИТСЯ В ПЕТЕРБУРГЕ

Посмертные почести, оказанные Эйлеру в России при Екатерине Великой, не остались незамеченными в странах Европы. Так, Кондорсе в речи, произнесенной в Парижской Академии наук сказал: «Народ, который мы в начале этого [т. е. XVIII в.] века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе – как чествовать великих людей при жизни и уважать их память после смерти…»[3].

Заслуги Эйлера как крупнейшего учёного и организатора научных исследований получили высокую оценку ещё при его жизни. Помимо Петербургской и Берлинской академий, он состоял членом восьми крупнейших научных учреждений мира: Парижской Академии наук, Лондонского королевского общества и других.

Наиболее способным из детей Эйлера оказался старший сын – Иоганн Альбрехт – однако и он главным образом лишь разрабатывал идеи отца. *Учеными секретарями* Петербургской Академии наук в течение целого века были потомки и родственники Эйлера. С 1769 г. этот пост занимал Иоганн Альбрехт; после его смерти в 1800 г. – Николай Фусс (1755–1826), который был женат на внучке Эйлера; после смерти Николая Фусса – его сын Павел Николаевич Фусс (1798–1853), правнук Эйлера.

Эйлер был похоронен на Смоленском лютеранском кладбище (в конце 16-й линии Васильевского острова, ныне остров Декабристов). Причем так неудачно, что вскоре могила затерялась. Его друг и почитатель Николай Фусс часто ходил с сыном Павлом гулять на это кладбище, но могилы Эйлера найти не мог. Через много лет, когда похоронили невестку Эйлера, случайно была отрыта плита с именем Эйлера. Тогда нашли и его могилу.

Спустя 54 года после смерти великого ученого Петербургская Академия наук сделала на его могиле надгробие из красного гранита (в 1837 г., когда исполнилось 130 лет со дня рождения Эйлера) с немногословной надписью

---

[2] Кондорсе (1743–1794) – известный французский философ-просветитель, математик и политический деятель. Был иностранным почётным членом Петербургской Академии наук.

[3] В начале XXI века *таких* слов мы, к сожалению, не заслуживаем (собственно говоря, этому и посвящена гл. 1.5). К 200-летию со дня смерти гениального математика в СССР в серии «Люди науки» вышла скромная книжка (79 страниц): Яковлев А. Я. «*Леонард Эйлер: Пособие для учащихся*». М.: Просвещение, 1983 г. (биография Эйлера заняла там 29 страниц). Правда, тираж книжки (170000 экз.) сейчас выглядит просто фантастическим, а для советской эпохи он был самым заурядным. Кстати, рецензентом книжки был профессор ЛИИЖТа А. А. Эйлер (потомок Л. Эйлера?). Данная же брошюра, по сути, – «Самиздат» одинокого автора…

на *латинском языке* (см. рис. 3 и 4). Поэтому далеко не каждый русский человек мог прочитать, чей прах покоится под надгробием (в переводе на русский надпись гласит: «Леонарду Эйлеру Петербургская Академия»).

И только в советскую эпоху (в 1956 г.) прах Эйлера был наконец-то перенесен на мемориальное кладбище «избранных» граждан Петербурга – в ***некрополь***[1] XVIII века. Таким образом, скромное надгробие Эйлера оказалось всего в десятке метров от величественного монумента Ломоносову.

Эйлер сам, наверняка, бывал на *этом* месте – на самой окраине тогдашнего Петербурга на левом берегу Невы (почти напротив Охты). Ещё в 1713 г. там осветили первую деревянную монастырскую церковь в городе (которая простояла до 1780). Рядом с ней в 1717 г. соорудили небольшую каменную церковь Праведного Лазаря, у стен которой образовалось Лазаревское кладбище. Именно здесь был похоронен М. В. Ломоносов (1711–1765), причем на этом кладбище ему первому был поставлен монументальный надгробный памятник – мраморная стела с высеченной золотом эпитафией на *русском* и латинском языках и украшенная рельефом, символизирующим заслуги ученого перед Россией. Высокая стела из белого мрамора была ещё обнесена красивой чугунной оградой. Этот величественный монумент был изготовлен в Италии и доставлен в Петербург на деньги влиятельнейшего графа М. И. Воронцова (разумеется, почетного члена Петербургской Академии наук), и если бы не слепота, то Эйлер мог бы лицезреть это произведение искусства во всём его великолепии. Во всяком случае, у Эйлера было 17 лет, чтобы иногда посещать могилу Ломоносова. И Эйлер, долго живший в России, наверняка, понимал, что его (швейцарца-иностранца, да к тому же *никем не превзойденного в математике*) ожидает более скромное надгробие от российских коллег и властей.

[1] Ещё в 1935–37 гг. Лазаревское кладбище стало называться некрополем (после того, как там было проведено благоустройство). *Некрополь* (по-гречески «город мертвых») – синоним русского слова «кладбище», но оно теперь имеет торжественно-архаический оттенок. Это единственное кладбище в России, ставшее музеем под открытым небом ещё в 1920-е годы. Находится некрополь в Александро-Невской лавре (станция метро – «Площадь А. Невского»), причем он делится на две неравные части: «Некрополь XVIII века» (меньшая часть некрополя, где около 90 надгробных памятников, в т. ч. Ломоносову и Эйлеру) и «Некрополь мастеров искусств». Всего же в некрополе свыше тысячи надгробных памятников (XVIII и XIX века). Работает некрополь с 11 до 17 часов (кроме четверга), телефон 166–23–83.

Рис. 3. Надгробие Леонарду Эйлеру в «Некрополе XVIII века»

Надгробие Эйлера в некрополе (рис. 3) – это прямоугольный блок из некогда красного гранита (за 166 лет он сильно потемнел), на котором только *латинскими* буквами сделаны надписи с двух сторон[1] (рис. 4). Как не печально это слышать, но работники некрополя сказали, что к Эйлеру иногда приходят «какие-то немцы», а «наши» про него и не спрашивали. Ваш покорный слуга не берется сравнивать заслуги русского ученого Ломоносова и математика-швейцарца Эйлера, однако не стоит забывать, что Эйлер – это исключительный ***Гений***. Такие люди принадлежат всему человечеству, и Петербург должен гордиться им *не меньше*, чем Ломоносовым (которому в 1990 г. был установлен большой прекрасный памятник у здания Академии наук на Васильевском острове).

LEONHARDO EULERO
ACADEMIA PETROPOLITANA
MDCCCXXXVII

NAT BASILEAE $\frac{\text{IV}}{\text{XV}}$ APRIL MDCCVII
MORT PETROPOLIᴅ $\frac{\text{VII}}{\text{XVIII}}$ SEPTEMBR MDCCLXXXIII

Рис. 4. Надписи на восточной и западной сторонах надгробия Леонарда Эйлера

7 сентября 2003 г. исполняется 220 лет со дня смерти Эйлера. Любой «цивилизованный» город, а тем более, претендующий на звание «культурной столицы» России, гордился бы тем, что такой ***гений человечества*** разделял с ним свою судьбу 31 год и похоронен на его земле. Однако в честь 300-летия города в его центре (у Меншикова дворца, рядом с Академией наук) *первый*

[1] «Золотая» краска стерлась и латинские буквы плохо читаются. Юные математики (скажем, из математических школ) могли бы взять обыкновение подкрашивать эти буквы каждую весну (4 апреля в день рождения Эйлера), отдавая дань уважения гениальному Учителю.

*постсоветский губернатор* (Яковлев, Собчак был мэром) ставит *первому губернатору-казнокраду* Меншикову *бронзовый бюст*[1].

И это весьма символично, поскольку является лейтмотивом всей «обновленной» России эпохи Ельцина. Сам Ельцин (вернее, его так называемая «Семья»), вероятно, превзошел «светлейшего князя» Меншикова в части ограбления России (подробней об этом см. [7]). Это тем более очевидно, если учесть, что украденное Меншиковым в конце концов было возвращено в государственную казну (см. гл. 1.2), а украденное Семьёй, судя по всему, будут восполнять своим рабским трудом миллионы глубоко одураченных россиян. Причем, помимо личного обогащения Ельцин, безусловно, рассчитывает и на почетное место в новейшей истории, в т. ч. на бронзовые бюсты «себе любимому» (инициатива Яковлева дает хороший повод для таких надежд, подтверждая, что «народная память» также имеет конкретную цену). Впрочем, власти предержащие и богатая элита общества во все времена имели схожие привычки и нравы [7]. Куда печальней другое удивительное постоянство: невежество, бесправие и мучения «народных масс»; продажность б**о**льшей части «творческой интеллигенции»; почти полная апатия «технической интеллигенции» и т. д.

Сейчас наши главные «деятели культуры» всерьёз обсуждают вопрос о постановке на Васильевском острове памятника поэту Иосифу Бродскому (1940–1996), который в своё время сделал всё возможное, чтобы в 32 года навсегда перенестись из Ленинграда в заветный для него Нью-Йорк. Подобные факты объясняются очень просто (подробней см. [7]): подавляющему большинству весьма посредственных людей гораздо проще понять «красоту» слов, красок, музыки (с вечно ускользающим смыслом), чем постичь гармонию «скучных» математических формул (всегда заключающих в себе некие Абсолютные Истины). Именно в этом кроется причина *общественного забвения* таких гениальных людей как Леонард Эйлер.

## 1.6. КРАТКИЙ ПЕРЕЧЕНЬ РАБОТ ЭЙЛЕРА

Главная особенность творчества Эйлера – его исключительная ***продуктивность***. Даже после его смерти «Комментарии Петербургской Академии наук» издавали работы Эйлера еще в течение 43 лет! Долгое время продолжалось также открытие потомками Эйлера «залежей» все новых и новых сочинений, записей и других документов, в т. ч. бумаг, собственноручно написанных Эйлером. Наконец в 1910–1913 гг. швед Густав Энештром издал в Лейпциге «Опись произведений Леонарда Эйлера», чем в значительной мере

[1] Это внушительный (и дорогущий) монумент высотой 3 метра. Особенно восхищают благородные, одухотворенные черты лица ***казнокрада*** №1 (почти 40 лет пр**о**жил в царской роскоши, а лицо прямо-таки святое и… опечаленное). Пресловутый «социалистический реализм» теперь просто «отдыхает», т. к. «лепить» национальных героев из *государственных преступников* за большие деньги куда «веселей», чем за абстрактную (и малооплачиваемую) идею.

облегчил труд всех исследователей, так или иначе соприкасающихся с творчеством Эйлера.

Только при жизни Эйлера было опубликовано около 550 его книг и статей, а полный список его трудов (статей и мемуаров) содержит 866 названий (не считая писем и разного рода документов). Полное собрание сочинений Эйлера (Швейцария, 1909–75 гг.) состоит из 72 томов (!). Большой интерес представляет и колоссальная научная переписка Эйлера (около 3000 писем). Статьи Эйлера распределяются по темам следующим образом: высшая алгебра, анализ, теория чисел – 40% (всех статей); механика и физика – 28%; геометрия – 18%; астрономия – 11%; артиллерия, архитектура, морские науки – 2%; прочее – 1%.

Необыкновенно широк был круг занятий Эйлера. В целом около $^3/_5$ его работ относится к математике, остальные $^2/_5$ преимущественно к её приложениям. Эйлер решил множество задач из самых разных областей – от навигации до финансов, от акустики до ирригации. По артиллерии он разработал учение о движении круглого снаряда в воздухе. Он написал «Морскую науку» – фундаментальный труд по теории кораблестроения (внёс ценный вклад в теорию устойчивости) и кораблевождения. У Эйлера есть книги по гидравлике, он консультировал работы по проведению большого водного канала, по водоснабжению дворца Сан-Суси. Он изучил вопрос по организации лотерей (элементы теории вероятностей). Многие годы Эйлер успешно работал над составлением карт России. Он создал новую теорию музыки, о которой говорили, что она слишком музыкальна для математиков и слишком математична для музыкантов. Эйлер был блестящим популяризатором, что проявилось, например, в философском изложении проблем естествознания в его «Письмах к немецкой принцессе» (они выдержали свыше 40 изданий на 10 языках).

Но, безусловно, Леонард Эйлер прежде всего был гениальным ***математиком***. Главным делом Эйлера как математика явилась разработка ***математического анализа*** (ему посвящено большая часть его работ). Свои результаты и результаты, полученные другими, Эйлер систематизировал в ряде классических монографий, написанных с поразительной ясностью и снабженных ценными примерами. Таковы, например, «Механика», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Теория движения твёрдого тела», «Универсальная арифметика» (выдержавшая около 30 изданий на 6 языках), «Интегральное исчисление» и др. Большая часть содержания монографий Эйлера вошла затем в учебные руководства для высшей и частично средней школы. Невозможно перечислить все доныне употребляемые теоремы, методы и формулы Эйлера, из которых только немногие фигурируют в литературе под его именем (например, Эйлера метод ломаных, Эйлера подстановки, Эйлера постоянная, Эйлера уравнение, Эйлера уравнение в гидромеханике, Эйлера формулы, Эйлера функция, Эйлера числа в математике, Эйлера число, Эйлера-Маклорена формула, Эйлера-Фурье формулы, Эйлерова характеристика, Эйлеровы интегралы, Эйлеровы углы и т. д., в том числе во второй части нашей книжки).

В «***Механике***» Эйлер впервые изложил динамику точки при помощи математического анализа: свободное движение точки под действием различных сил как в пустоте, так и в среде, обладающей сопротивлением; движение точки по данной линии или по данной поверхности; движении точки под действием центральных сил (что имело неоценимое значение для развития небесной механики). Он впервые корректно сформулировал механический принцип наименьшего действия и показал его первые применения. Заложил основы теории турбин (изучая сегнерово колесо). Изыскивал целесообразную форму зубцов зубчатых колес. Изучал устройство ветряных мельниц и т. д. Ценный вклад внес в учение о сопротивлении материалов (формула для критической нагрузки колонн и др.). В «***Теории движения твёрдого тела***» Эйлер разработал кинематику и динамику твёрдого тела и дал уравнения его вращения вокруг неподвижной точки, положив начало теории *гироскопов* (они управляют самолетами, ракетами, кораблями). Значительны открытия Эйлера в ***небесной механике*** (например, в теории движения Луны, теории движения планет и комет), ***механике сплошных сред*** (основные уравнения движения идеальной жидкости в форме Эйлера и в переменных Лагранжа, колебания газа в трубах и пр.).

В ***оптике*** Эйлер дал формулу двояковыпуклой линзы, предложил метод расчёта показателя преломления среды. Эйлер придерживался волновой теории света (различным цветам соответствуют разные длины волн света). Предложил способы устранения хроматических аберрации линз в сложных объективах и дал методы расчёта оптических узлов микроскопа. Усовершенствовал волшебный фонарь.

Обширный цикл работ Эйлер посвятил ***математической физике***: задачам о колебании струны, пластинки, мембраны и др. Все эти исследования стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений, приближённых методов математического анализа, специальных функций, дифференциальной геометрии и т.д.

Эйлер заложил основы нескольких математических дисциплин, которые только в зачаточном виде имелись или вовсе отсутствовали в исчислении бесконечно малых И. Ньютона, Г. В. Лейбница, Я. и И. Бернулли. Так, Эйлер первый ввёл функции комплексного аргумента и исследовал свойства основных элементарных функций комплексного переменного (показательные, логарифмические и тригонометрические функций); в частности, он вывел формулы, связывающие тригонометрические функции с показательной. Работы Эйлера в этом направлении положили начало ***теории функций комплексного переменного***. Эйлер явился создателем ***вариационного исчисления*** (новой главы анализа). Метод, с помощью которого он вывел необходимое условие экстремума функционала – уравнение Эйлера, явился прообразом прямых методов вариационного исчисления XX в. Эйлер создал как самостоятельную дисциплину ***теорию обыкновенных дифференциальных уравнений*** и заложил основы *теории уравнений с частными производными*. Здесь ему принадлежит огромное число открытий: классический способ решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, метод вариации произвольных постоянных, выяснение основных свойств уравнения Риккати, интегрирование линейных уравнений с переменными коэффициентами с помощью бесконечных рядов, критерии особых решений, учение об интегрирующем множителе, различные приближённые методы и ряд приёмов решения уравнений с частными производными.

Эйлер обогатил также ***дифференциальное*** и ***интегральное исчисление*** в узком смысле слова (например, учение о замене переменных, теорема об однородных функциях, понятие двойного интеграла и вычисление многих специальных интегралов). В «Дифференциальном исчислении» он высказал и подкрепил примерами убеждение в целесообразности применения расходящихся рядов и предложил методы обобщённого суммирования рядов, предвосхитив идеи современной строгой теории расходящихся рядов, созданной на рубеже XIX и XX вв. В ***теории рядов*** он получил множество конкретных результатов. Он открыл т. н. формулу суммирования Эйлера-Маклорена, предложил преобразование рядов, носящее его имя, определил суммы громадного количества рядов и ввёл в математику новые важные типы рядов (например, тригонометрические ряды). Сюда же примыкают исследования Эйлера по теории непрерывных дробей и других бесконечных процессов.

Эйлер является основоположником ***теории специальных функций***. Он первым начал рассматривать синус и косинус как функции, а не как отрезки в круге. Им получены почти все классического разложения элементарных функций в бесконечные ряды и произведения. В его трудах создана теория гамма-функции. Он исследовал свойства эллиптических интегралов, гиперболических и цилиндрических функций, дзета-функции, некоторых тета-функций, интегрального логарифма и важных классов специальных многочленов.

Велики заслуги Эйлера и в других областях математики. В ***алгебре*** ему принадлежат работы о решении в радикалах уравнений высших степеней и об уравнениях с двумя неизвестными, а также т. н. тождество Эйлера о четырёх квадратах. Он значительно продвинул ***аналитическую геометрию***, особенно учение о поверхностях 2-го порядка. В ***дифференциальной геометрии*** он детально исследовал свойства геодезических линий, впервые применил натуральные уравнения кривых, а главное, заложил основы *теории поверхностей*. Он ввёл понятие главных направлений в точке поверхности, доказал их ортогональность, вывел формулу для кривизны любого нормального сечения, начал изучение развёртывающихся поверхностей и т.д.; в одной посмертно опубликованной работе он частично предварил исследования К. Ф. Гаусса по внутренней геометрии поверхностей. Эйлер занимался и отдельными вопросами ***топологии*** и доказал, например, важную теорему о выпуклых многогранниках [сумма числа вершин ($B$) и граней ($Г$) *в любом* многограннике равна числу ребер ($P$) плюс два, то есть $B+Г=P+2$]. Эйлера-математика нередко характеризуют как гениального «вычислителя». Действительно, он был непревзойдённым мастером формальных выкладок и преобразований, в его трудах многие математические формулы и символика получили современный вид (например, Эйлеру принадлежат обозначения для чисел $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{\pi}$). Однако Эйлер был не только исключительной силы «вычислителем». Он внёс в науку ряд глубоких идей, которые ныне строго обоснованы и служат образцом глубины проникновения в предмет исследования.

По выражению П. С. Лапласа, Эйлер явился учителем математиков 2-й половины XVIII в. От его работ непосредственно отправлялись в разнообразных исследованиях П. С. Лаплас, Ж. Л. Лагранж, Г. Монж, А. М. Лежандр, К. Ф. Гаусс, позднее О. Коши, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев и др. Русские математики высоко ценили творчество Эйлера, а деятели *чебышевской школы* видели в Эйлере своего идейного предшественника в его постоянном чувстве конкретности, в интересе к конкретным трудным задачам, требующим развития новых методов, в стремлении получать решения задач в форме законченных алгоритмов, позволяющих находить ответ с любой требуемой степенью точности.

По замечанию великого русского математика П. Л. Чебышева, Эйлер положил начало всем изысканиям, составляющим общую часть ***теории чисел***, к которой относится свыше 100 мемуаров Эйлера. Так, он доказал ряд утверждений, высказанных П. Ферма (например, малая теорема Ферма), разработал основы теории степенных вычетов и теории квадратичных форм, обнаружил квадратичный закон взаимности (квадратичный вычет) и исследовал ряд задач диофантова анализа. В работах о разбиении чисел на слагаемые и по теории простых чисел Эйлер впервые использовал методы анализа, явившись тем самым создателем *аналитической теории чисел*. В частности, он ввёл *дзета-функцию* и доказал так называемое тождество Эйлера, связывающее простые числа со всеми натуральными (см. гл. 2.2).

Весьма авторитетный историк математики Д. Я. Стройк подчеркивает, что «*одни лишь результаты Эйлера в области* ***теории чисел*** *дали бы ему место в пантеоне славы*» [16].

Таков самый *краткий* перечень работ гениального Леонарда Эйлера. Разве такой человек не заслуживает достойного памятника у здания Академии наук в Санкт-Петербурге и благодарной памяти русского народа?

# 2. КОСМОЛОГИЯ ЧИСЕЛ

## 2.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

+, –, · , /, ^ – знаки арифметических операций: “сложение”, “вычитание”, “умножение” (точка), “деление” (дробь), “возведение в степень” (крышка).

2·E+8 – вариант обозначения числа $2\cdot10^8$ (в книге встречается на графиках).

$N \to \infty$ – запись, означающая “величина $N$ стремиться к бесконечности”.

$\sum$, $\prod$, $\surd$, $\int$ – знаки: суммы, произведения, корня квадратного, интеграла.

<, >, ≤, ≥ – “меньше (больше)”, “меньше (больше) или равно”.

≡ – символ, означающий “по определению”, например, $n!\equiv1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\cdot n$.

$n!$ – факториал, то есть $n!\equiv1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\cdot n$ (формула из комбинаторики).

≈ – символ приближенного равенства. Применяется к величинам, равным с точностью до множителя два или около этого, например, $\pi^2\approx3{,}14^2\approx10$.

~ (*тильда*) символ, означающий, равенство порядков у величин, например, $7\cdot10^8 \sim 5\cdot10^9$. Стоящий перед одиночным символом знак ~ означает «по порядку величины». Например, $N\sim10^3$ может означать как $N$=630, так и $N$=2050, то есть это весьма неточное указание величины $N$.

$\pi$=3,141593… – фундаментальная математическая константа (ФМК).

$e$ = 2,718282… – ФМК, основание натуральных логарифмов.

$C$ = 0,577215… – постоянная Эйлера (Эйлера – Маскерони), ФМК.

4,669201… – число Фейгенбаума (ФМК, была открыта в 1977 г.).

1,618034… – число Фидия (характеризует собой “золотое сечение”).

***const*** – числовая константа (когда её значение для нас не существенно).

$N = f(X)$ – величина $N$ является некой функцией ($f$) величины $X$.

**ln**, **lg** – логарифм натуральный, логарифм десятичный (две функции).

**exp(*x*)** или иначе $e^x$ – показательная функция, то есть $\exp(x)\equiv e^x$.

**A(*x*)** – функция “антье”, выделяет целую часть числа, например, A(7,4)=7.

**abs(*N*)** – абсолютная величина (модуль) $N$, т. е. число $N$ без знака.

***max***, ***min*** – максимум, минимум (некой величины, например, $T_{max}$, $T_{min}$).

***Текст с мелким шрифтом*** (как данный абзац) скептически настроенному читателю будет удобно пропускать. Именно так оформлены главные аргументы автора, «доказывающие», что структура мира чисел (его космология) таинственным образом «перекликается» со структурой реального пространства-времени. Однако здесь не существует целостной картины, более того, аналогии порой просто противоречат друг другу. Если *космология чисел* не только игра воображения одинокого разума, то, безусловно, мы находимся в самом начале бесконечно долгого пути в мир Абсолютных Истин.

“***Вообще говоря***” – это выражение на строгом языке математики означает, что “*бывают случаи, когда это не так*”. Указанные два слова весьма удобны для краткой формулировки многих утверждений. Например, можно предположить, что люди с гуманитарным образованием, *вообще говоря*, не станут читать данную книжку, хотя, как сказал английский философ Роджер Бэкон (ок. 1214–1292): "Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего *невежества*".

***Пространство-время*** – это основные формы существования материи, которые имеют решающее значение для построения физической картины мира, нашей Вселенной. *Математические описания* пространства и времени оказались очень похожими и в действительности это две стороны одной единственной структуры, именуемой "пространство-время". В современной *квантовой теории* пространству и времени отводится центральная роль, существуют даже гипотезы, где вещество рассматривается не более как возмущение этой основной структуры. Средняя плотность *видимого* вещества во Вселенной оценивается как один атом вещества на 2-метровый куб пространства, то есть наша Вселенная – это, грубо говоря, одна «пустота из пространства-времени» [2, 3, 14,]. (здесь и далее ссылка на литературу).

***Элементарный временной интервал*** (***эви***) – понятие из квантовой физики: 1***эви***$\approx 5{,}4\cdot 10^{-44}$ секунды [26]. Это минимальный временной интервал, который требуется для протекания любого мыслимого физического события, причем, некоторые теории утверждают, что на этом уровне время уже квантуется, носит дискретный характер, хотя в обыденной жизни время представляется нам чем-то непрерывным ("река времени"). Только даже и не пытайтесь представить себе 1 ***эви***. Чрезвычайная мизерность ***эви*** проявляется, например, в следующем факте: от момента зарождения нашей Вселенной (от так называемого *Большого взрыва*) прошло 13±2 млрд. лет, или примерно 100.000.000.000.000.000=$10^{17}$ секунд и это, безусловно, колоссальное количество секунд, однако каждая секунда, в свою очередь, содержит около $10^{44}$ ***эви***, что в $10^{27}$ раз больше, чем всех секунд в возрасте Вселенной (и это уже лежит далеко за пределами нашего воображения).

В физике любой промежуток времени всегда можно перевести в отрезок длины, который проходят фотоны света за данное время (со скоростью, равной $3\cdot 10^{8}$ м/с, то есть со скоростью света в вакууме). Так, один *эви* эквивалентен $1{,}6\cdot 10^{-35}$ м (*элементарной длине, планковской длине*), так как именно такой путь проходит свет за время, равное 1 *эви*.

***Возраст Вселенной*** точно не известен и, скорее всего, он находится в диапазоне 11÷15 млрд. лет. Для краткости изложения *космологии чисел* мы будем условно считать, что возраст Вселенной равен $10^{61}$ ***эви*** (это соответствует $5{,}4\cdot 10^{17}$ секундам или 17,2 млрд. лет). Очевидно, что так называемый *характерный размер* Вселенной в этом случае будет равен $1{,}6\cdot 10^{26}$ метров.

***Ядерное время***. Для ядерной физики элементарной частицей первостепенной важности является *протон* (например, он входит в состав ядра любого атома). Если принять размер протона равным $3\cdot 10^{-15}$ м (на самом деле это довольно тонкое понятие), то можно ввести удобную для микромира характеристику – *ядерное время*, которое равно $10^{-23}$ секунды или $10^{20}$ *эви* – за это время свет пересечет протон. Физически это наименьший интервал времени, который требуется, чтобы протон наблюдался как единое целое.

***Отрезок*** натурального ряда, например, $[1;N]$ – это натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …, $N$ (включительно). Разумеется, отрезок может начинаться с любого числа, но в рамках наших исследований он чаще всего совпадает именно с единицей. Мы также будем пользоваться термином "***рабочий отрезок***", и он, вообще говоря, для каждого случая – имеет свою *длину*.

***Большой отрезок*** (БО) натурального ряда это числа $N$=1, 2, 3, …, $10^{61}$. Данный отрезок из $10^{61}$ чисел настолько колоссален, что если каждое натуральное число воспринимать как один *эви*, то мы получим возраст Вселенной (см. выше). Таким образом, БО можно мысленно отождествлять с возрастом Вселенной (с её характерным размером), причем именно в пределах БО обнаруживаются удивительные аналогии мира чисел с реальным пространством-временем. Возможно, это происходит потому, что оба упомянутых «объекта» *дискретны* и *расширяются* (1+1+1+…). Даже если наши «построения» в части *космологии чисел* не выдерживают критики и рассыпаются как карточный домик, то всё равно отождествление натурального ряда со временем (единица ≡ 1***эви***) имеет смысл с точки зрения наглядного восприятия мира чисел (его начала – Большого отрезка). При таком подходе общепризнанная, но «скучная» *теория чисел* (великий Карл Гаусс назвал её «королевой математики» [16]) словно оживает и становится привлекательной для самой широкой публики, что представляется весьма важным.

***Эви-конвертация***. Очевидно, что подобно БО любой отрезок натурального ряда (любой длины) с помощью *эви* можно перевести в промежутки времени (в секунды, минуты, часы, и т. д.) или, используя понятие «элементарная длина», в отрезки длины (сантиметры, метры и т. д.) – этот перевод мы и будем называть *эви-конвертацией*. Примеры приведены ниже.

***Малый отрезок*** (МО) – это числа $N$=1, 2, 3, …, $10^{20}$. Если каждое натуральное число воспринимать как один *эви*, то данный отрезок окажется чрезвычайно малым, его длина будет эквивалентна $5{,}4\cdot10^{-44}\cdot10^{20}\approx10^{-23}$ секунды, т. е. МО после *эви*-конвертации можно отождествлять в своем воображении с *ядерным временем* (или с характерным размером протона).

***Центральный отрезок*** (ЦО) – это числа $N$=1, 2, 3, …, $10^{35}$. Если каждое натуральное число воспринимать как один *эви*, то ЦО после *эви*-конвертации эквивалентен 1,616 м, что почти соответствует среднему росту человека на планете и может являться характерным размером мира «человеческих» масштабов. Отрезок условно назван «центральным», т. к. в логарифмической шкале число $10^{35}$ находится почти в центре БО. Нетрудно убедиться, что отрезку в 1,616 м соответствует характерное время, равное $\boldsymbol{t}=5{,}4\cdot10^{-9}$ секунды (мгновение!). Любопытно, что время $\boldsymbol{t}$ для человека является чем-то вроде секунды для Вселенной, поскольку $5{,}4\cdot 10^{17}\cdot \boldsymbol{t} \approx 92$ года (средняя продолжительность жизни человека содержит столько же мгновений $\boldsymbol{t}$, сколько секунд содержится в возрасте Вселенной, см. выше).

***Предельный отрезок*** (ПО) – это числа $N$=1, 2, 3, …, $10^{308}$. После *эви*-конвертации ПО можно трактовать как $10^{257}$ лет – для нас это самая настоящая *вечность* (космологии чисел вполне «достаточно» Большого отрезка). Числа, превосходящие $10^{308}$, просто выходят за диапазон допустимых значений, с которыми работает персональный компьютер: дойдя до $10^{308}$, он прекращает счет и выдает специальное сообщение, например, «#ЧИСЛО!».

***Относительная погрешность*** (*ОП*) приближения $N^*$– так называется отношение $ОП \equiv (N - N^*)/N^*$, где $N^*$ – найденное нами приближенное значение величины, точное значение которой равно $N$. Величину *ОП* будем часто выражать в процентах (%). Как правило, величина $N$ является неизвестной нам функцией от $X$ (возможно, очень сложной $f$ функцией), т. е. $N=f(X)$, а нам удается найти другую (относительно простую) функцию $N^*=\psi(X)$, после чего мы оцениваем *ОП* и принимаем решение о пригодности найденной функции для наших оценок в рамках космологии чисел. Такой *инженерный подход* абсолютно неприемлем с точки зрения классической математики, но не следует забывать, что *космология чисел – это не строгая математическая теория*, а лишь некий взгляд на мир чисел под новым углом зрения, некий *симбиоз* знаний из точных наук XXI века.

## 2.2. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА – БАЗИС НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Все натуральные числа ($N$) математики разделяют на две группы: к первой группе относятся числа, имеющие ровно два делителя (1 и само число $N$) – эти числа называют ***простыми*** (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47…). Ко второй группе относятся все остальные числа, которые называют ***составными***. Есть основания считать число $N$=1 – совершенно особым числом (ни простым, ни составным, но об этом чуть ниже).

Свойства простых чисел и их связь со всеми натуральными числами изучалась еще древнегреческим математиком Евклидом (конец IV–III века до н. э.). *Множество простых чисел бесконечно* – доказательство этого утверждения содержалось в IX книге «Начал» Евклида (это первый из дошедших до нас теоретических трактатов по математике) [1, 16, 23].

***Основная теорема арифметики*** утверждает, что всякое натуральное число $N$, кроме единицы, единственным образом разлагается в произведение простых чисел (порядок сомножителей при этом не принимается во внимание), иначе говоря, с помощью умножения только простых чисел $P_1 < P_2 < P_3 < \ldots < P_n$ можно получить любое натуральное число $N$:

$$N = P_1^{\,a} \cdot P_2^{\,b} \cdot P_3^{\,c} \cdot \ldots \cdot P_n^{\,m} \qquad (1)$$

Представление числа $N$ в виде (1) называется его ***каноническим разложением*** (*факторизацией*). Например, $261360=2^4\cdot3^3\cdot5^1\cdot11^2$ и всякий другой набор простых чисел никогда не даст нам числа 261360. Таким образом, простые числа образуют своеобразный ***базис натуральных чисел***. Легко объяснить, почему единицу математики не считают простым числом, ведь, сколько не умножай на единицу, ничего в формуле (1) не изменится. Единственность факторизации была обнаружена в IV в. до н. э. Евклидом и доказана им в книге IX своих "Начал" для всех натуральных чисел.

В 1737 г. основная теорема арифметики была представлена Л. Эйлером в следующей изящной форме: $\Sigma n^{-s}=\prod(1-p^{-s})^{-1}$ или в развернутом виде:

$$1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}\ldots=(1-2^{-s})^{-1}\cdot(1-3^{-s})^{-1}\cdot(1-5^{-s})^{-1}\cdot(1-7^{-s})^{-1}\cdot\ldots,\quad (2)$$

где $s>1$ и суммирование ($\Sigma$) проводится по всем натуральным числам, а произведение ($\prod$) берётся по всем простым числам. Сумму $\zeta(s)\equiv\Sigma n^{-s}$ Эйлер назвал ***дзета-функцией***, он также установил, что простых чисел «много», ибо их количество на отрезке $[1;N]$ было больше, чем $\ln N-1$, и в то же время почти все натуральные числа являются составными при $N\to\infty$. Красивое тождество (2) гениального Эйлера и его обобщения играют фундаментальную роль в теории распределения простых чисел в натуральном ряду. Как функцию комплексного переменного дзета-функцию первым стал рассматривать Б. Риман (1826–1866), обнаруживший глубокую связь её аналитических свойств с вопросами распределения простых чисел [1]. При $s=2$ и $n\to\infty$ дзета-функция $\zeta(s)$ устремляется к числу $\pi^2/6=1{,}6449\ldots$, а с ростом показателя степени $s$ ($s=3, 4, 5, \ldots$) дзета-функция стремится к единице [6].

Математиками были сделаны многочисленные попытки найти формулы, которые давали бы только простые числа. Самой удачной оказалась принадлежащая Эйлеру квадратичная форма $x^2-x+41$, которая при $x=1, 2, 3, \ldots, 40$ – суть простое число. Таким образом, длительные поиски формул, дающих только простые числа, оказались в итоге тщетными [1, 10, 23].

Конечно, рассматривая произвольное число $N$, желательно уметь сразу сказать, простое оно или составное, не проверяя каждое простое число, меньшее $N^{1/2}$, как его возможный делитель (см. гл. 2.5). Любопытно, что некоторым людям-уникумам (таковым, отчасти, был и Эйлер) от природы дано *ощущать* простое число или нет (при одном взгляде на это число [6]). Для нахождения всех простых чисел на отрезке от 2 до $N$ служит метод, известный с 3 века до н. э., и называемый *решето Эратосфена* [6, 23]. Разумеется, что решето Эратосфена уже давно не применяют для поиска простых чисел, а пользуются специальными таблицами или компьютером.

К настоящему времени разработан целый ряд математических *критериев простоты числа*, которые позволяют установить является ли произвольное большое число $N$ (с большим количеством цифр) простым или составным числом. Но всё равно это остаётся очень трудной задачей. На компьютере не составляет проблемы найти *все* простые числа на относительно «коротких» отрезках, например, на небольшом отрезке $[1;10^{12}]$ содержится 37.607.912.018 $\approx 0{,}37\cdot10^{11}$ простых чисел (данным шрифтом они займут площадь примерно 5×5 км!). В то же время с помощью специальных алгоритмов и целого ряда технических ухищрений, уже найдены *отдельные* чудовищно большие простые числа. Так, в 2002 г. 20-летний канадский студент Майкл Камерон при помощи GRID (компьютерной сети, «натянутой», благодаря Интернету, на весь земной шар) нашел самое большое простое число вида $N=2^p-1$, в котором 4.053.946 цифр (даже и не пытайтесь представить это число!). На работу над ним (это 39-е число Мерсенна, см. [6, 10, 23]) ушло 2 года и 130 тысяч компьютеров по всему миру.

## 2.3. ПЯТЬ КЛАССОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Оказывается, все натуральные числа можно разделить не только на простые и составные, но ещё и на 5 классов. Автор открыл это для себя в 1997 г. [4], причем аналогичных результатов встретить нигде не удалось, но и заинтересовать своим «открытием» профессиональных математиков – пока также не получилось. Данную главу лучше прочитать «под настроение», поскольку не всегда приятно скрупулезно, «с карандашом в руке» разбираться в хитросплетениях натуральных чисел. Правда, здесь приведены первые и довольно серьезные аналогии в части космологии чисел.

Итак, всё бесконечное множество натуральных чисел $N$ образовано членами пяти арифметических прогрессий, имеющих следующий вид

$$\boldsymbol{N_n = A + B\cdot(n-1) = B\cdot n + A - B}, \qquad (3)$$

где $A$ – это первое число (первый член) прогрессии; $B$ – шаг (разность) прогрессии; $n$=1, 2, 3, … – порядковый номер натурального числа внутри данной прогрессии. Каждую из пяти арифметических прогрессий мы будем называть ***классом чисел*** и обозначать его как класс $AB$ (первый член и разность прогрессии). Нетрудно убедиться, что все натуральные числа разделяются на следующие пять классов: **14**, **26**, **34**, **46**, **66**. В табл. 1 приведено по 24 первых натуральных числа $N$ из каждого класса (в пяти столбцах). Пять чисел $N$, расположенных *в строке* табл. 1 (по одному из каждого класса), будем называть $n$-м ***слоем*** натуральных чисел.

**Аналогия 1**. Пять классов – это проявление ***“магии” числа* 7±2** (поскольку, 5=7–2), которая в мире чисел проявляется сплошь и рядом (много примеров в [6]). В реальном физическом мире также совершенно очевидна «магия» числа 7 (далее имеем в виду 7±2). Можно привести много *серьезных* примеров (которые почти не зависят от воли человека): 7 периодов и 8 групп в таблице Менделеева; 7 классов звезд; 7 слоев в атмосфере Земли; 7 бит информации, хранящейся в «кратковременной» памяти человека; 7 букв в «среднем» слове многих языков мира и т. д. А количество *несерьезных* примеров (их человек сам придумал) вообще не поддаётся учету: пословицы и поговорки; 7 цветов радуги; 7 дней недели; 7 книг Ветхого завета; 7 книг Нового завета (семёрка в его притчах встречается в 25 сюжетах, исключая повторы); 7 дней творения Бога; 7 групп дорожных знаков и т. д.

Классы чисел в натуральном ряду чередуются определенным образом – начиная с единицы, бесконечное количество раз повторяется набор из двенадцати классов, которые мы назовем ***дюжиной*** классов: **14**, **26**, **34**, **46**, **14**, **66**, **34**, **26**, **14**, **46**, **34**, **66**. Поскольку номера слоев (*n*) в табл. 1 – это суть натуральный ряд (уходящий вниз до бесконечности), то слева от него указан класс (*AB*) для каждого числа *n*, а также *порядковые номера дюжин* (*J*=1, 2, …), образованных этими классами. Таким образом, легко видеть, что в каждой дюжине по три числа из классов **14** и **34**, а доля каждого из этих классов составляет *D*≡3/12=1/4, т. е. по 25% (как внутри дюжины, так и среди всех натуральных чисел). Ещё в каждой дюжине по два числа из классов **26**, **46** и **66**, а доля каждого из них составляет *D*≡2/12=1/6, т. е. около 16,67…% (как внутри дюжины, так и среди всех натуральных чисел). Иначе говоря, на любом достаточно большом отрезке натурального ряда вероятность встречи с числами из классов **14** или **34** составляет по 25%, а с числами из классов **26**, **46**, **66** – примерно по 16,7%.

Таблица 1. Пять классов чисел

| | Класс | Слой | Числа *N* из класса … | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *(n)* | *n* | **14** | **34** | **26** | **46** | **66** |
| **1** | 14 | **1** | 1 | 3 | 2 | 4 | 6 |
| | 26 | **2** | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 |
| | 34 | **3** | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 |
| | 46 | **4** | 13 | 15 | 20 | 22 | 24 |
| | 14 | **5** | 17 | 19 | 26 | 28 | 30 |
| | 66 | **6** | 21 | 23 | 32 | 34 | 36 |
| | 34 | **7** | 25 | 27 | 38 | 40 | 42 |
| | 26 | **8** | 29 | 31 | 44 | 46 | 48 |
| | 14 | **9** | 33 | 35 | 50 | 52 | 54 |
| | 46 | **10** | 37 | 39 | 56 | 58 | 60 |
| | 34 | **11** | 41 | 43 | 62 | 64 | 66 |
| | 66 | **12** | 45 | 47 | 68 | 70 | 72 |
| **2** | 14 | **13** | 49 | 51 | 74 | 76 | 78 |
| | 26 | **14** | 53 | 55 | 80 | 82 | 84 |
| | 34 | **15** | 57 | 59 | 86 | 88 | 90 |
| | 46 | **16** | 61 | 63 | 92 | 94 | 96 |
| | 14 | **17** | 65 | 67 | 98 | 100 | 102 |
| | 66 | **18** | 69 | 71 | 104 | 106 | 108 |
| | 34 | **19** | 73 | 75 | 110 | 112 | 114 |
| | 26 | **20** | 77 | 79 | 116 | 118 | 120 |
| | 14 | **21** | 81 | 83 | 122 | 124 | 126 |
| | 46 | **22** | 85 | 87 | 128 | 130 | 132 |
| | 34 | **23** | 89 | 91 | 134 | 136 | 138 |
| | 66 | **24** | 93 | 95 | 140 | 142 | 144 |

Чтобы определить, к какому классу принадлежит произвольное натуральное число *N* достаточно разделить это число на 12 и посмотреть чему равен остаток. Например, у числа *N*=19 остаток от деления на 12 равен 7, значит наше число *N* из класса **34**, поскольку 7-ому числу в первой дюжине (по порядку от её начала, см. табл.1 ) соответствует именно **34** класс. Если остаток от деления некого числа *N* на 12 окажется равным 0 (нулю), то число *N* будет из класса **66** (это единственный класс, в котором числа *N*≥12 делятся нацело на 12). Очевидно, что в классах **26**, **46**, **66** – только четные числа, а все простые числа содержатся исключительно в классах **14** и **34**. Причем в самом начале натурального ряда простых чисел в классе **34** больше, нежели в классе **14**, но на бесконечности этот «сдвиг» исчезает [6].

**Аналогия 2**. Число 12 (дюжина) в реальном физическом мире также скрывает за собой некую тайну, правда, «магия» здесь не столь очевидна, как у числа 7. На циферблате часов 12 делений; 1 час=12×5=60 минут; 1 год =12 месяцев – подобным фактам посвящено немало занятных исследований. Так, число 12 является *ключевым числом* в удивительно обширной теории С. И. Сухоноса, посвященной масштабной гармонии Вселенной [17].

Далее мы приведем основные формулы в части деления натурального ряда на пять классов, позволяющие сделать весьма *интересные выводы*, которые без наших формул осознать было бы просто невозможно.

Пусть $n^*$ – это порядковый номер *первого* числа из данного класса в $J$-й дюжине (в каждой дюжине только одному из номеров $n$ мы присваиваем «звездочку»). Например, во второй дюжине ($J$=2, см. табл. 1) для **14** класса имеем $n^*$=4, поскольку в первой дюжине ($J$=1) уже были три числа из класса **14** (были $n^*$=1; $n$=2; $n$=3). Ясно, что в третьей дюжине ($J$=3) в классе **14** будем иметь $n^*$=7, т. к. во второй дюжине были $n^*$=4; $n$=5; $n$=6. Таким образом, для класса **14** (как и для класса **34**) получим арифметическую прогрессию 1, 4, 7, 10, …, иначе говоря, $n^*=1+3\cdot(J–1)= 3\cdot J–2$, где $J$=1, 2, 3, …. Совершенно аналогично для классов **26**, **46** и **66** мы получим арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7, …, или $n^*=1+2\cdot(J–1)= 2\cdot J–1$. Таким образом,

$$n^* = 1+K\cdot(J–1) = K\cdot J–K+1, \tag{4}$$

где $K$ – это количество чисел данного класса в дюжине (см. табл. 2).

Пусть $S^*$ – это сумма всех натуральных чисел $N$ из данного класса внутри $J$-й дюжины. Например, для **14** класса в первой дюжине ($J$=1, см. табл. 1) имеем $S^*$=1+5+9=15, а во второй дюжине ($J$=2) имеем $S^*$=13+17+21=51. Нетрудно также получить формулу, связывающую $n^*$ и $S^*$:

$$S^* = g\cdot n^* + h, \tag{5}$$

где значения числовых коэффициентов $g$ и $h$ следует брать из табл.2, причем $g=K\cdot B$, а $h=K\cdot A$ – для классов **14**, **34**, и $h=K\cdot(A–B)+B$ – для классов **26**, **46**, **66**. Если формулу (4) подставить в формулу (5), то получим

$$S^* = G\cdot J – H, \tag{6}$$

где значения числовых коэффициентов $G$ и $H$ следует брать из табл.2, причем $G=K^2\cdot B$, а $H=K\cdot(B+A)–K^2\cdot B$ – для классов **14**, **34**, и $H=K\cdot A+B–K^2\cdot B$ – для классов **26**, **46**, **66**.

Таблица 2

| *AB* | **14** | **34** | **26** | **46** | **66** |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | 3 | 2 | 4 | 6 |
| *B* | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 |
| *K* | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| *D* | 1/4 | 1/4 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| *g* | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| *h* | 3 | 9 | –2 | 2 | 6 |
| *G* | 36 | 36 | 24 | 24 | 24 |
| *H* | 21 | 15 | 14 | 10 | 6 |
| *W* | 18 | 18 | 12 | 12 | 12 |
| *Z* | –3 | 3 | –2 | 2 | 6 |

Если в любой $J$-й дюжине найти *общую сумму* всех натуральных чисел, суммируя формулы (6) для всех пяти классов, то получим выражение

$$\Sigma S^* = 144\cdot J – 66 . \tag{7}$$

Поэтому при $J\to\infty$ можно утверждать, что $S^*/\Sigma S^* \to G/144=D$ (см. табл.2), то есть справедлив следующий довольно интересный и далеко ***неочевидный вывод***: сумма чисел ($S^*$) данного класса ($AB$) *в любой* дюжине стремится к такой же доле ($D$) от суммы всех чисел дюжины ($\Sigma S^*$), как и их количество (см. вывод значений для $D$ в начале главы).

Пусть $S$ – это сумма всех натуральных чисел $N$ из данного класса во всех дюжинах (до $J$-й включительно). Например, для **14** класса во второй дюжине ($J$=2, см. табл. 1) будем иметь $S$=15+51=66. Нетрудно получить формулу

$$S = W \cdot J^2 + Z \cdot J\,, \qquad (8)$$

где значения числовых коэффициентов $W$ и $Z$ следует брать из табл.2, причем $W=1{,}5 \cdot K \cdot B$ и $Z=K \cdot (A-B/2)$ – для классов **14**, **34**; $W=K \cdot B$ и $Z=K \cdot A-K \cdot B+B$ – для классов **26**, **46**, **66**.

Если для любого количества дюжин ($J$) найти *общую сумму* всех натуральных чисел, суммируя формулы (8) для всех пяти классов, то получим

$$\Sigma S = 72 \cdot J^2 + 6 \cdot J\,. \qquad (9)$$

Но этому же равна и сумма всех натуральных чисел от $N$=1 до $N=12 \cdot J$, а именно $1+2+3+\ldots+12 \cdot J$. Равенство двух указанных сумм доказывает, что понятие о *пяти классах* и *дюжине* справедливо (“работает”) для всего бесконечного ряда натуральных чисел. Кроме того, при $J \to \infty$ из формулы (9) вытекает, что $S/\Sigma S \to W/72=D$ (см. табл.2), то есть справедлив также интересный и уже ***совсем неочевидный вывод***: сумма чисел ($S$) данного класса ($AB$) во всех дюжинах (до $J$-й включительно) стремится к такой же доле ($D$) от суммы всех чисел ($\Sigma S$), как и их количество ($K$, см. вывод значений для $D$ в начале главы).

**Аналогия 3**. Формулы (8) и (9) – суть *квадратное уравнение*, общий вид которого можно записать как: $a \cdot \boldsymbol{x}^2+b \cdot \boldsymbol{x}+c=0$. Изучая структуру мира чисел мы нередко будем сталкиваться с этим законом, который для краткости назовем, скажем, ***законом квадрата***, причем он может принимать иное обличие, например, $a \cdot \boldsymbol{x}^2+c=0$ или $\boldsymbol{x}=\sqrt{N} \equiv N^{1/2} \equiv N^{0,5}$. В реальном мире природа почему-то также отдает предпочтение именно *закону квадрата*: закон всемирного тяготения Ньютона [$F=G \cdot (m_1 \cdot m_2)/\boldsymbol{r}^2$]; закон Кулона (основной закон электростатики) [$F=k \cdot (e_1 \cdot e_2)/\boldsymbol{r}^2$]; знаменитая формула Эйнштейна о связи энергии и массы тела [$E=m \cdot c^2$]; Планковская длина (элементарная длина) [$l=(Gh/2\pi c^3)^{0,5}$]; Планковская масса [$m=(hc/2\pi G)^{0,5}$] и т. д. [3, 26].

В заключение данной главы подчеркнем, что натуральный ряд (его «внутренняя» структура) – лучшее определение того, что мы называем «гармонией». Очевидно, никакие другие математические, а тем более, физические объекты не способны составить конкуренцию натуральному ряду в части предельной простоты и одновременно (!) бесконечной сложности его взаимосвязей. Пять классов и дюжина – лишь слабые «тени» указанного удивительного обстоятельства. Возможно, всё дело в том, что самые фундаментальные истины в природе имеют структуру, в некотором смысле, аналогичную «внутренней» структуре натурального ряда.

## 2.4. ТИПЫ ЧИСЕЛ, МИРЫ ЧИСЕЛ

Для описания мира чисел невольно приходится вводить новые понятия (термины). Они взяты автором буквально «с потолка», но предпочтение отдавалось коротким, простым словам. Понятие о типе числа – одно из ключевых, раскрывающее бесконечное многообразие виртуального мира чисел.

***Тип числа*** *– это количество всех его делителей*. Например, тип числа $N$=20 равен 6, так как у него имеется шесть делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Будем обозначать тип числа буквой $T$. Очевидно, что у любого простого числа $T$=2. Число $N$=1 является единственным, особым числом, у которого $T$=1. Зная каноническое разложение числа $N=P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \ldots \cdot P_n^m$, всегда можно определить его тип $T$ по красивой, лаконичной формуле:

$$T=(a+1)(b+1)(c+1)...(m+1). \qquad (10)$$

Так, для числа $N=261360=2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2$ находим $T$=(4+1)(3+1)(1+1)(2+1)=120. Однако поиск показателей $a$, $b$, $c$, ..., $m$ – задача далеко непростая. В серьезной компьютерной программе *Mathcad 2000*, ориентированной на решение математических задач, существует даже специальная команда (*Factor*) для автоматического поиска показателей $a$, $b$, $c$, ..., $m$, т. е. для факторизации числа $N$ (содержащего десятки цифр).

Если все делители любого числа $N$ расположить по возрастанию, то, перебрав первую их половину (***малые делители***), мы обнаружим, что остальные (***большие делители***) равны отношению числа $N$ и соответствующего малого делителя. Например, у числа $N$=20 все его делители (1, 2, 4, 5, 10, 20) можно представить как: 1, 2, 4, 20/4, 20/2, 20/1. Таким образом, определение типа числа $N$ сводится к поиску его малых делителей, причем они заключены в диапазоне от 1 до $N^{0,5}$(*закон квадрата*, см. аналогию 3), который является своего рода паспортом числа $N$.

В натуральном ряду появление различных типов носит *псевдослучайный* характер (см. гл. 2.5), то есть, вообще говоря, *практически* невозможно предсказать какой тип будет у следующего числа $N$. Очевидно, только одно – чем дальше мы уходим от единицы, тем б***о***льшие типы могут появиться, причем наряду с ними неизбежно будут появляться числа и с самыми малыми типами $T$=2, 3, 4, ... . Для любого числа $N$ помимо его собственного типа $T$ (количества всех *его* делителей) всегда можно вычислить некий ***средний тип*** (*Tsr*), равный среднему арифметическому всех предшествующих типов (то есть у всех чисел от 1 до $N$ включительно):

$$Tsr = (T_1 + T_2 + T_3 + ... + T)/N \ . \qquad (11)$$

Несмотря на беспорядочные колебания типов $T$ (точки на рис. 5), средний тип *Tsr* (линия среди точек) ведет себя поразительно спокойно. Более того, немецкий математик П. Г. Л. Дирихле (1805–1859) нашел закон роста среднего типа (***формула Дирихле*** – очень важная формула):

$$Tsr \approx Ts = \ln N + (2 \cdot C - 1) + \varepsilon \quad , \qquad (12)$$

где с ростом $N$ слагаемое $\varepsilon \to 0$, а $C$ – постоянная, определяемая как сумма сходящегося ряда $C = \lim\{\sum k^{-1} - \ln(n+1)\}$, где $k$=1, 2, 3,…, $n$; при $n \to \infty$. Постоянная $C$ носит имя Эйлера, который в 1740 г. вывел формулу, позволяющую вычислить $C$ с любой точностью; например, с 15 верными знаками: $C$=0,577 215 664 901 532... . Однако арифметическая природа *постоянной Эйлера* ($C$) не изучена до сих пор, и неизвестно является ли она рациональным числом или нет. Эйлер также получил асимптотическое выражение для суммы ($S$) первых $N$ членов так называемого *гармонического ряда*:

$$S \equiv \sum k^{-1} = 1+1/2+1/3+1/4+\ldots+1/N+\ldots = \ln N + C + \varepsilon \, , \qquad (13)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $N \to \infty$. Гармоническим ряд назван потому, что каждый его член, начиная со второго, является *гармоническим средним* двух соседних членов, т. е. для $n$=2, 3, 4, 5, … выполняется равенство: $1/n = 2/[(n-1)+(n+1)]$.

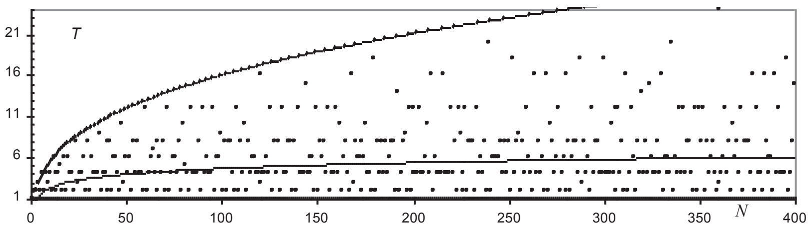


Рис. 5. Типы ($T$) первых 400 натуральных чисел $N$, а также $T_{max}$ и $T_s$

Числа каждого типа образуют своеобразный замкнутый мир со своими неповторимыми законами. Поэтому часто удобнее говорить о ***мирах***, которые объединяют числа с одинаковым типом. Так, все простые числа ($T$=2) образуют мир №2, числа с редким типом $T$=3 образуют мир №3, а миры №4 и №8, наоборот, весьма “густонаселенные” (чисел с $T$=4 и $T$=8 довольно много) и т. д. Миры возникают (появляются первый раз в натуральном ряду) далеко не по возрастанию, вот, например, первые 17 миров: №1, 2, 3, 4, 6, 5, 8, 9, 10, 12, 7, 16, 15, 18, 14, 20, 24 (т. е. миры №11, 13, 17, 19, 21, 22, 23 – не появились, но «позже» и они непременно появятся в ряду чисел).

Всё бесконечное множество миров можно разделить на ***частые миры*** (или *четные* миры, т. к. у их чисел тип $T$ – четное число) и ***редкие миры*** (или *нечетные* миры, т. к. у их чисел тип $T$ – нечетное число). Редкие миры образуют числа вида $N = i^2$, где $i$=1, 2, 3, …(опять *закон квадрата*, см. аналогию 3). Если рассмотреть типы $T$ всех чисел на отрезке [1;520000], то мы обнаружим, что больше всего чисел из мира №8 (22,35%), затем идут следующие миры: №4 (21,6%), №16 (12,2%), №12 (9,4%), №2 (8,3%), №24 (6,7%), №6 (4,7%). Таким образом, в *семи* указанных мирах (“*магия” числа 7*, см. аналогию 1) содержится б***о***льшая часть (85,4%) всех чисел данного отрезка, причем, рассматривая другие отрезки, мы всё равно обнаружим “магическую” семёрку миров (т. е. содержащую б**о**льшую часть всех чисел отрезка). Любопытно, что доля мира №8 (доля чисел с $T$=8) стала преобладать только после $N$≈245000, но на б**о**льших отрезках [1;$N$] мир №8, вероятно, уже никогда не теряет своего первенства, т. е. чаще всего мы будем встречать натуральные числа, у которых 8 делителей (или 7 правильных делителей – меньших самого числа $N$). Возможно, именно в этом «сильнее» всего проявляется «*магия» числа 7* в мире чисел (см. аналогию 1).

Максимально возможная доля мира №8 равна 22,4432…% (доля чисел с $T$=8 среди всех чисел отрезка [1;$N$], т. е. доля от $N$), причем это значение достигается при $N$=999994 (у 224431-го числа из мира №8).

**Аналогия 4**. В науке существует интересный вопрос – чему равен предельный *коэффициента заполнения пространства* (КЗП). Согласно оценкам ученых (1988 г.) предельный КЗП≤77,84% (укладка идеальных одинаковых шаров даст всего-навсего КЗП≤74,05% – это сможет доказать и школьник).

Так вот, возможно, мир чисел «подсказывает» (?!) нам, что *предельный* КЗП≤77,5568…% (так как 100% –22,4432%, см. выше о мире №8), то есть мы «улучшаем» оценку ученых на 0,28% (и это очень много!). После *эви*-конвертации числа $N$=999994 можно утверждать, что указанный наибольший КЗП реализуется в микромире при ~$10^{-38}$ с (на размере ~$10^{-29}$ м ).

С ростом числа $N$ его тип $T$ может иногда «непредсказуемым» образом увеличиться, бывает даже, что сразу на несколько единиц (т. е. существенно увеличиться). Числа $N$, у которых данный тип $T$ появился впервые, мы будем называть *лидерами*. Таким образом, каждый лидер всегда “открывает” какой-нибудь мир (тип $T$). Иногда у очередного лидера его тип $T$ оказывается больше всех ранее появившихся типов, поэтому их удобно называть *верхними лидерами*. Именно они образуют воображаемую линию $T_{max}$ (максимально возможного типа), «огибающую» сверху все точки-типы на рис. 5, и «запрещающую» иметь произвольному числу $N$ тип $T$ больше, чем $T_{max}$ на данном отрезке. Автору не удалось найти уравнение для виртуальной линии $T_{max}=f(N)$, однако были найдены все 120000 лидеров из *редких миров* на Большом отрезке (в т. ч. только 270 верхних лидеров, образующих виртуальную линию $T1_{max}$, которая проходит ниже линии $T_{max}$). Также удалось найти все лидеры *частых миров*, но только до $N=10^{32}$ (27306 лидера, в т. ч. 313 верхних лидера). Это позволило сделать правдоподобный вывод относительно частых миров: на Большом отрезке, вероятно, около 687430 лидеров частых миров, в т. ч. около 734 верхних лидеров, «образующих» линию $T_{max}$. Всего же на Большом отрезке появляется около 807430 различных миров (120000 редких и 687430 частых мира).

**Аналогия 5**. В конце Большого отрезка соотношение количества различных частых и редких миров равно 687430/120000≈5,73, что близко к «магической» семёрке. Это пример того, что в мире чисел *«магия» числа 7* может возникать («созревать») именно *в конце* БО, а на других отрезках натурального ряда она, вообще говоря, «уходит» от числа 7. Таким образом, в целом ряде случаев «магия» семёрки – это своеобразная «визитная карточка» БО (той эпохи во Вселенной, когда существует человечество на Земле).

**Аналогия 6**. Если вспомнить про *эви-конвертацию*, то первые $10^{44}$ натуральных чисел можно воспринимать как времен***о***й интервал в 1 секунду. То есть за первую секунду в мире чисел успевает «промелькнуть» колоссальное количество миров – $10^{44}$ (около $10^5$ *разных* миров, см. [6]). В масштабе нашего (человеческого) времени в любое мгновение существуют как бы *одновременно* несколько миров (скажем, миры №8, №16 и т. д., но какие точно и сколько – пока не ясно), которые повторяются чаще всего, а высокая частота «мельканий» делает их «доступными» для человека. В некотором смысле, эти самые частые миры можно даже назвать ***параллельными мирами***. Здесь можно делать самые фантастические предположения, например, о некой тождественности числовых миров и «кирпичиков» мироздания: шести кварков, нескольких сотен элементарных частиц (а может их $807430 \approx 10^5$ ?). Кстати, число $10^5$ близко к важной безразмерной физической константе (постоянной слабого взаимодействия, см. аналогию 10, а также [6]).

В конце Большого отрезка верхняя граница типов $T_{max}$, вероятно, "дорастает" до $T_{max} \approx 7{,}7 \cdot 10^{11}$, то есть у некоторых гигантских натуральных чисел, состоящих из 61-й цифры, может быть примерно до 770 миллиардов делителей (и это немало!). А вот *средний тип* (по формуле Дирихле) всех чисел на Большом отрезке будет равен всего-навсего $T_s \approx \ln(10^{61}) \approx 141$. Это можно объяснить единственным образом: *мир чисел отдает явное предпочтение малым типам T* (у подавляющего большинства чисел $N$ количество делителей невелико) – такова структура мира чисел. Больше всего чисел, как уже говорилось, вероятно, имеют 8 делителей ($T$=8). А простых чисел ($T$=2) на Большом отрезке содержится около $7 \cdot 10^{58}$, что составляет примерно 0,7% от всех натуральных чисел БО. Это следует расценивать как весьма большую долю, ибо в среднем на один мир должно приходиться $10^{61}/807430 \approx 1{,}2 \cdot 10^{55}$ чисел или 0,00012% от всех чисел БО.

**Аналогия 7**. Природа также отдает явное предпочтение малым числам перед большими: «фактор Больцмана» в физике оказывает предпочтение частицам меньших масс [3, 6, 26]; существуют только *два* вида зарядов (+ и –); наше пространство *трехмерно* (могло быть и четырехмерным ?); существует не более *четырех* фундаментальных сил в природе (могло быть и больше ?); "магическое" число равно всего-навсего 7±2 (см. аналогию 1); имеет место *закон квадрата* (а не куба, см. аналогию 3). Вообще в природе *малые* особи (в самом широком понимании, а не только живые существа) более распространены, чем крупные, и часто именно этим можно объяснить бесконечное множество *тильда-распределений* (см. гл. 2.6).

**Аналогия 8**. Любопытно отношение $T_{max}/T_s \approx 7{,}7 \cdot 10^{11}/141 \approx 5{,}4 \cdot 10^9$, поскольку примерно такой величине равно отношение числа фотонов к числу барионов во Вселенной (это важнейший космологический параметр). Причем, при «зарождении» натурального ряда это отношение было в миллиард раз меньше, например, при $N$=300 имеем $T_{max}/T_s \approx 24/6 \approx 4$ (см. рис. 5).

**Аналогия 9**. Речь пойдет о загадочной величине $\mathbf{10^{11}}$ (сто миллиардов, условно считаем, что в конце БО именно этому равно *Tmax*). В окружающем нас мире данное число служит неким верхним «пределом» («границей»), и мы проиллюстрируем это на пяти примерах из самых разных сфер бытия:

1) Во Вселенной около $10^{11}$ галактик – самых крупных объектов природы, гигантских «островов» из звёзд. В типичной галактике также около $10^{11}$ различных звезд. Почему эти *характерные количества* таковы – неизвестно.

2) Ёмкость человеческой памяти порядка $10^{11}$ бит информации. (Поэтому на протяжении 70 лет можно “грузить” в память 60 бит каждую секунду, т. е. мы могли бы помнить свою жизнь до мельчайших подробностей, но почему-то природа надежно “прячет” от нас большинство воспоминаний.)

3) Среди *семи* сенсорных систем человека самый широкий динамический диапазон имеет наш слух. Интенсивность звука, воспринимаемого ухом, может меняться в $10^{11}$ раз. (Поэтому наше главное развлечение – это музыкальные шоу, а не математика. Язык звуков – простейший, он доступен и животным, а *язык формул* требует несравненно б**о**льшего интеллекта.)

4) Состояние самых богатых людей планеты – американца Билла Гейтса и прочих олигархов, в том числе и российских, устремляется к сумме в $10^{11}$ долларов. Это число – предельный *коэффициент расслоения общества* [7].

5) Количество всех людей, когда-либо живших на Земле, быстро приближается к $10^{11}$ человек. (Согласно теории Капицы в 2005 г. скорость роста населения достигнет своего максимума, а дальше – смена форм и параметров развития человечества [8]. Ничего подобного на Земле ещё не было.)

Исходя из выше сказанного, можно предположить (?!), что в нашей Вселенной максимально возможная «мощность» интеллекта (IQ у *Сверхинтеллекта*, см. [7]) в миллиард раз превышает возможности человека (поскольку $10^{11}/141 \approx 10^9$). Поразительное совершенство мира чисел почти не оставляет сомнений – только в нем могут содержаться некие Абсолютные Истины, в т. ч. своеобразные «подсказки» в части Сверхинтеллекта (причем автор не склонен отождествлять его с Богом, Аллахом, Буддой и т. п., см. [7]).

Мы не зря назвали все числа одного типа – *миром*. Дело в том, что внутри каждого мира (т. е. на более глубоком уровне) можно обнаружить множество ещё более тонких взаимосвязей между числами, чем на уровне типов. Покажем это на конкретном примере с орбитами простых чисел.

Внутри данного мира будем говорить, что ***орбита*** ($H$) числа $N_n$ равна разности между последующим числом $N_{n+1}$ и данным числом $N_n$ :

$$H \equiv N_{n+1} - N_n\,, \tag{16}$$

где $n$=1, 2, 3, … – это порядковый номер числа $N$ внутри данного мира.

Для мира №2 (для простых чисел) эту формулу запишем в виде

$$H \equiv P_{n+1} - P_n \tag{17}$$

где $n$=1, 2, 3, … – это порядковый номер простого числа внутри мира №2. Так, числа 3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, …лежат на второй орбите, так как у каждого из них $H$=2 (это так называемые *числа-близнецы*). Простые числа 7, 13, 19, 37, 43, 67, 79, …лежат на четвертой орбите (у них $H$=4); простые числа 23, 31, 47, 53, 61, 73, 83, …лежат на шестой орбите ($H$=6) и т. д. до бесконечности. Орбиты простых чисел кратны 2, исключение составляет простое число $P_1$ =2, у которого $H$=3–2=1, то есть это единственное простое число, лежащее на первой орбите ($H$=1), общей для всех натуральных чисел.

Так вот, можно доказать [6], что для *средней орбиты* ($H_s$) *n* простых чисел (у $P$=2 считаем, что $n$=1) справедлива следующая оценка:

$$H_s \sim \ln(n+1)\ , \tag{18}$$

а максимально возможная *величина* орбиты пропорциональна квадрату средней орбиты – $(H_s)^2$. И это далеко не тривиальные выводы, говорящие о «богатстве красок» внутри мира №2. Очевидно и в других мирах (за исключением мира №1, состоящего из единицы) можно обнаружить некую «внутреннюю» структуру. Более того, можно утверждать, что натуральные числа имеют *бесконечно много* уровней (типы; внутри типов – орбиты; внутри орбит – скажем, подорбиты и т. д.). Всё новые и новые уровни в мире чисел «проявляются» по мере удаления правой границы отрезка [1;$N$], причем каждый новый уровень обнаружить всё более и более сложно.

**Аналогия 10**. В конце Большого отрезка средняя орбита простых чисел равна $H_s$≈137, что почти совпадает со значением важнейшей физической константы – *постоянной тонкой структуры* ($\alpha^{-1}$≈137, $\alpha$=0,007297…). Некую “связь” $\alpha$ и $H_s$ подтверждает и тот факт, что *величина* тонкого расщепления в физике пропорциональна $\alpha^2$, а максимально возможная *величина* орбиты также пропорциональна – $(H_s)^2$ (*закон квадрата*, см. аналогию 3). Но, если $H_s$, действительно, как-то “коррелирует” с $\alpha$, то придется признать, что $\alpha$ – не константа! Кстати, в таком случае, проверить рост $\alpha^{-1}$ (убывание $\alpha$) очень трудно, так как *шестая цифра* после запятой в современном значении $\alpha$ ($\alpha^{-1}$ ) изменится на единицу примерно через 138000 лет (*эви*-конвертация).

**Аналогия 11.** Более «изощрённый» аналог постоянной тонкой структуры ($\alpha$=0,007…) – это отношение количества *лидеров орбит простых чисел* – $Z$ к количеству *лидеров всех миров* – $K$. В конце Большого отрезка, вероятно, имеем $Z/K$≈0,006÷0,011. Причем седьмая цифра после запятой в числовом значении $Z/K$ в конце БО уменьшиться на 1, когда правая граница отрезка [1;$N$] увеличится на 7÷17 млн. лет (после *эви*-конвертации), а шестая цифра после запятой уменьшиться на 1, когда $N$ увеличится на 51÷68 млн. лет. То есть по человеческим меркам параметр $Z/K$ (=$\alpha$?) – это константа.

Существует научная гипотеза, согласно которой *гравитационная постоянная G* (фундаментальная физическая константа) не является таковой, а *изменяется* менее чем на одну десятимиллиардную в год и это близко к темпу изменения $\alpha$, полученному в рамках наших ортодоксальных аналогий.

## 2.5. ПИРАМИДА ДЕЛИТЕЛЕЙ

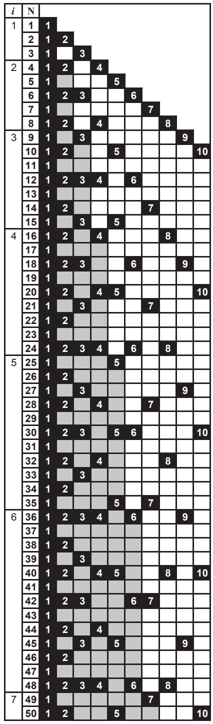

Рис. 6. Пирамида

Построим своеобразную ***Пирамиду*** (рис. 6), на вершине которой поместим число $N$=1, под ним число $N$=2, потом $N$=3 и т. д., то есть здесь ряд натуральных чисел – это вертикальный столбец, уходящий вниз до бесконечности. Справа от каждого числа $N$ по горизонтали будем изображать ***камни*** – клетки (белые, серые или черные). Причем каждому камню припишем некую условную характеристику, скажем, ***массу***, равную порядковому номеру вертикального столбца (1, 2, 3, …, $N$). Если очередной камень в горизонтальном ряду совпадает с делителем числа $N$, то будем окрашивать камень в черный цвет и внутри него указывать массу камня (делитель числа $N$). Например, у числа $N$=10 всего 10 камней, из них четыре – черные с массами 1, 2, 5, 10 (все делители числа 10). Массы белых и серых камней не указаны (но они подразумеваются). В целях уменьшения текста в книжке (а значит и *стоимости* нашей книжки) на рис. 6 справа «отрезано» (не показано) ещё 40 столбцов, которые начинают *крайние справа* чёрные камни (уходящие вниз под 45°, то есть Пирамида – это «прямоугольный треугольник» бесконечной высоты!).

Особенность Пирамиды в том, что не надо вычислять делители чисел $N$, поскольку в каждом вертикальном столбце они чередуются с шагом равным самому делителю, начиная, с *крайних справа* черных камней. Так, в первом столбце черные камни идут подряд; во втором столбце – каждый 2-й камень чёрный; в третьем столбце – каждый 3-й камень чёрный и т. д. (это всё делители чисел $N$).

Внутри Пирамиды находится ***Ствол*** (для наглядности все его белые камни закрашены в серый цвет), причем каждая $i$-я ***ступень*** Ствола ($i$=1, 2, 3, ...) начинается напротив числа $N=i^2$ . Ступени Ствола имеют *высоту* в 3, 5, 7, 9, 11, ... камней.

Архитектура Пирамиды (ее Ствола) – предельно проста, но позволяет легко осознать и сформулировать весьма интересные выводы – ***законы Пирамиды***. Ниже приводятся основные из них (подробно см. [6]).

**Закон 1**. *Количество малых делителей у числа N не превосходит номера ступени Ствола (i), на которой число N находится*, причем $i$=А($N^{1/2}$).

Для любого числа $N$ можно указать номер ступени $i$ Ствола, который равен целой части (А –“*антье*”) от корня квадратного из числа $N$. Все малые делители числа $N$ надо искать только среди целых чисел 1, 2, 3, …, $i$ (область полной информации для числа $N$). Зная номер ступени Ствола ($i$), всегда можно указать *параметры ступени* (табл. 3), которые по своей сути – *закон квадрата* (см. аналогию 3).

Таблица 3. Параметры ступени

| | |
|---|---|
| Начало ступени | $N1 = i^2$ |
| Середина ступени | $N2 = i^2 + i$ |
| Конец ступени | $N3 = i^2 + 2i$ |
| Высота ступени | $H = 2i+1$ |

**Закон 2**. *Тип числа N, вообще говоря, равен удвоенному количеству малых делителей.* Если $t$ – количество малых делителей числа $N$, то более корректно данный закон звучит следующим образом: у натуральных чисел вида $N\neq i^2$ (таких чисел подавляющее большинство) тип равен $T=2\cdot t$ – это *четные* или *частые* типы (миры), а у чисел вида $N=i^2$ тип равен $T=2\cdot t-1$ – это *нечетные* или *редкие* типы (миры).

**Закон 3**. *Вероятность встречи с частым типом в $N^{1/2}$ раза больше, чем с редким типом* (речь идет об относительно больших отрезках натурального ряда).

**Закон 4**. *У всякого числа N вероятность встречи с малым делителем в $N^{1/2}$ раз больше, чем с его антиподом* (то есть с больш***и***м делителем).

**Закон 5**. *Формирование типа T у любого числа N – это псевдослучайный процесс* (только похожий на случайный процесс). Но на самом деле тип $T$ любого числа $N$ строго определен правилом укладки черных камней в Пирамиде (описанным нами выше), и это правило исключает всякую случайность. Когда мы говорим, что не можем *предсказать* тип, скажем, числа $N\sim10^{61}$, то это, фактически, означает только наше неумение "сложить" (представить себе мысленно) Ствол из $\sim10^{92}$ камней. Что, впрочем, вполне простительно для нашего интеллекта, ибо это количество – чудовищно.

**Аналогия 12**. Учеными как-то была выдвинута концепция, допускающая, что *среди первичного хаоса Вселенной был заложен некий п л а н – тонкая организация движений*. Возможно, огненный шар первых мгновений Вселенной лишь предстает нашему взгляду как беспорядок микроскопических движений – мы просто не способны различить скрытую согласованность поведения бесчисленного множества частиц (количество всех атомов оценивается как $10^{80}$). Возможно, во Вселенной существует скрытый порядок, "замаскированный" среди, казалось бы, беспорядочно движущихся ее составных частей. Это подобно тому, как бесконечно сложные хитросплетения мира чисел (теории чисел) скрывают за собой *элементарную* архитектуру Пирамиды (Ствола), а также самый главный и самый элементарнейший факт – «непрерывное расширение» ряда натуральных чисел (1+1+1+…).

Парадоксально, но самые фундаментальные Истины могут оказаться удивительно простыми. Древняя латинская пословица говорит: «*Simplex sigilum veri*» («Простота – это признак истинности»). К этому же пришли многие ученые, вот, например, слова А. Эйнштейна: «Наш опыт убеждает нас, что природа – это сочетание самых простых математических идей».

**Закон 6**. *Произведение всех делителей числа N равно $N^{T/2}$.*

**Закон 7**. *Количество всех камней в Пирамиде равно* $K=(1+N)\cdot N/2$. Это *закон квадрата* (см. аналогию 3), а при очень больших $N$ имеем: $K\approx N^2/2$. Говоря о Пирамиде, мы и впредь будем подразумевать, что её *высота* равна $N$ (ясно, что высоту Ствола также «образуют» $N$ чисел, см. рис. 6).

**Закон 8**. *Количество всех камней в Стволе стремится к величине* $k\approx(2/3)\cdot N^{3/2}$ (параметры Ствола договоримся впредь обозначать строчными буквами в отличие от прописных букв для параметров Пирамиды).

**Закон 9**. *В Стволе общая масса черных камней (m*) равна количеству всех его камней* («звездочка» * указывает, что речь идет о черных камнях). Общая масса черных камней в Стволе – это сумма малых делителей. Учитывая 8-й закон Пирамиды, можно записать $m^*\approx(2/3)\cdot N^{3/2}$.

**Закон 10**. *В Пирамиде отношение количества всех камней (K) к общей массе черных камней (M*) стремится к числу* $6/\pi^2=0{,}6079...$

Общая масса черных камней – это сумма всех делителей у всех чисел. Таким образом, Пирамида довольно быстро "генерирует" число $\pi$ и определение этой фундаментальной константы в терминах Пирамиды, вероятно, можно считать самым глубоким из многих ранее известных [6]. Этот закон Пирамиды, очевидно, равносилен результату, полученному в работах Ж. Бюффона и П. Л. Чебышева: если наугад (случайным образом) выписать два натуральных числа, то вероятность их *взаимной простоты* будет равна $6/\pi^2$ (числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, кроме единицы, например, таковыми являются числа 10 и 21).

**Закон 11**. *Масса всех камней в Пирамиде (M) стремится к числу* $N^3/6$.

**Закон 12**. *Масса всех камней в Стволе (m) стремится к значению* $N^2/4$.

**Закон 13**. *Количество черных камней (K*) в Пирамиде стремится к произведению числа N на его средний тип (по Дирихле):* $K^*\approx N\cdot T_s$.

**Закон 14**. *Количество черных камней в Стволе стремится к величине*

$$k^*\approx K^*/2+0{,}5\cdot N^{0,5}\approx N\cdot T_s/2+0{,}5\cdot N^{0,5}$$

**Закон 17**. *В начале натурального ряда существует* ***сингулярность***.

Напомним, что *сингулярность* в физике – место, где заканчивается действие известных науке законов. Это соответствует моменту, когда пространство-время и вся материя впервые возникают. Так вот, в мире чисел многие законы (формулы, их выражающие, в т. ч. многие законы Пирамиды) дают большую относительную погрешность или даже вовсе «не работают» в начале натурального ряда (скажем, от 1 до $N\sim10^{12}$), хотя с ростом $N$ относительная погрешность этих формул, вообще говоря, быстро убывает. Подобная ситуация имеет место и для многих формул общепризнанной *теории чисел*. И чтобы каждый раз не обращать внимание на столь удивительное обстоятельство – мы сформулировали данный закон Пирамиды.

**Аналогия 13**. Начало ряда натуральных чисел – это некий (возможно, лучший) аналог *сингулярности* из физики. В мире чисел здесь происходит, своего рода, "зарождение" структуры натурального ряда, причем совершенно элементарным образом (1+1+1+…). Целый ряд соображений побуждает автора «обозначить» границу сингулярности в мире чисел как $N{\sim}10^{12}$ (всякое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем 800000 простых чисел, а наименьшая из таких сумм равна ~$10^{12}$) [6]. Что касается физической реальности, то наука пока не способна выяснить *на уровне эксперимента*, что происходит на расстояниях меньших $10^{-18}$м ($10^{-26}$с или $10^{17}$ *эви*). Пока физики не располагают никакими экспериментальными данными, которые говорили бы о наличии квантования (“зернистости”, дискретности) пространства-времени, но и прежним, классическим понятиям о «непрерывном» пространстве-времени нет места в теоретическом описании микромира. Некоторые гипотезы предлагают рассматривать пространство-время как некую структуру, состоящую из *множества уровней*. Сейчас большинство физиков признают необходимость существенного изменения смысла пространства-времени. Быть может, *мир чисел* поможет им в этом?

## 2.6. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОГАТСТВА

Как-то Леонард Эйлер посетовал на своих современников, что: “*Из всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными предложений, чем проблемы, касающиеся* ***природы чисел и их делителей*** *...*». Сам он, похоже, предчувствовал бездну «открытий чудных», о которых мы и поговорим.

Эйлер первым из математиков ввёл обозначение для *суммы всех делителей* натурального числа $N$, правда, он использовал символ $\int N$, а в настоящее время обычно используется символ $\sigma(N)$. Так, сумма всех делителей у числа $N$=21 будет равна $\sigma(21)=1+3+7+21=32$. Очевидно, что для всех простых чисел, которые мы обозначим символом $P$, справедлива формула: $\sigma(P)=1+P$. Для единицы получаем $\sigma(1)=1$, а не 1+1, поэтому Эйлер замечает, что “…из последовательности простых чисел 1 должна быть исключена; 1 есть *начальное целое число*, ни простое, ни составное”. А вот 0 (нуль) делится на все числа, которых бесконечно много, поэтому, по мнению Эйлера, $\sigma(0)$ должно было бы быть *бесконечно большим числом*, однако сам Эйлер приводит пример того, что $\sigma(0)$ может принимать бесконечное число *конечных значений* (см. гл. 2.8). И здесь следует особо подчеркнуть, что мир чисел явно “подсказывает” нам – в самом начале натурального ряда “скрывается” нечто фундаментальное и таинственное (поскольку, $\sigma(0)$ – далеко не нуль, а единица – совершенно особое число).

**Аналогия 14**. Общеизвестна гипотеза академика Маркова о том, что исчезающе малый *фридмон* (*планкеон*) с планковской массой ~$10^{-8}$ кг (почти ничто, нуль) может заключать в себе… бесконечно большую вселенную! [3, 19, 26]. Это яркий пример возможной «близости» *нуля и бесконечности*, когда бесконечно большое «охватывается» бесконечно малым. Любопытно, что мир чисел также *неоднократно* демонстрирует аналог этой фантастической ситуации: единица (почти ничто, почти нуль) оказывается чрезвычайно «близка» к бесконечности (подробно об этом сказано в [6]).

Ещё в 1997 г. автор предложил назвать сумму всех делителей – “***богатством***” натурального числа *N*. Поскольку, во-первых, это короткий, удобный и звучный термин, а во-вторых, для целого ряда чисел *N* распределение их богатства очень похоже на распределение… денежных доходов населения (т. е. богатства). Остановимся на этом чуть подробней.

Распределение денежных доходов (богатства) среди членов общества и распределение суммы всех делителей числа *N* (*богатства*, скажем, равного *S*) среди его делителей в целом ряде случаев можно неплохо описать функцией одного и того же вида[1] (ниже речь пойдет о делителях числа *N*):

$$D^{*}=S\cdot\exp[-A\cdot\left(\ln\frac{K}{x}\right)^{p}\,], \tag{20}$$

где $x$=1, 2, 3, ..., $K$–1 – порядковый номер делителя (идут по возрастанию);

$D^*$ – мнимый делитель (значение, близкое к реальному делителю $D$);

$K$ – количество всех делителей у натурального числа $N$ (тип числа $N$);

$S$ – сумма всех делителей (*богатство* натурального числа $N$);

$A$ и $p$ – некий коэффициент и показатель степени (эмпирические числа).

Наибольший мнимый делитель (при $x$=$K$) можно определять как разность между богатством числа $N$ и суммой всех предшествующих делителей:

$$D_{к} = S-(\,D_1+D_2+D_3+...+D_{к-1}\,). \tag{21}$$

Формулу (20) удобно называть *тильдой* (*тильда-распределением*, *тильда-функцией*), так как график функции $D^*$=f($x$), вообще говоря, напоминает символ “тильду” (~), у которой правый край всегда приподнят к верху. На рис.7 показана тильда для числа $N$=19.999.980.000. Разумеется, что далеко не у всех натуральных чисел $N$ распределение делителей можно описать формулой (20), и даже у «лучших» представителей, скажем, у *тильда-чисел N* относительная погрешность *ОП*≡($D$–$D^*$)/$D^*$ оставляет желать лучшего.

Параметры тильды ($A$ и $p$) легко найти, если построить график зависимости $y$=$f$($z$), где $y$=ln($S/D$) и $z$=ln($K/x$) – некие комплексы (рис.8). На этом графике компьютер выдает *параметры степенной линии тренда* – это и будут искомые параметры $A$ и $p$. Останется только немного изменить показатель степени $p$, «вогнав» значение наибольшего делителя ($D_к$) максимально близко к числу $N$ (и стараясь “не испортить” остальные значения).

Любопытно, что если использовать параметры $A$ и $p$, найденные только на базе малых *делителей числа N* (то есть при $x$=1, 2, 3, …, $K$/2, а величины $S$ и $K$ беря прежними), то относительная погрешность для $D^*$ уменьшиться в несколько раз (скажем, с *ОП*=±20% до *ОП*=±5%).

[1] Этой теме посвящена отдельная книга: Исаев А. В. «**Тайны статистики** или что скрывают числа» (2003 г., 82 стр.), которую можно приобрести в «Доме книги» на Невском проспекте в отделе «Экономика» (он находится по соседству с отделом «Точных наук»).

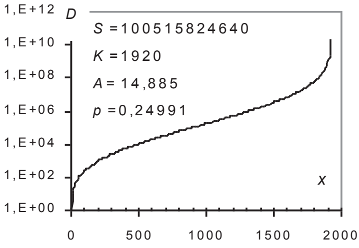


Рис. 7. Тильда-функция (тильда)

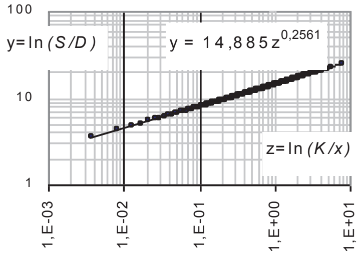


Рис. 8. Нахождение параметров тильды

Таким образом, надо четко понимать, что тильда-функция всего лишь «бледная тень» реально существующих закономерностей в распределении делителей у некоторых натуральных чисел (тильда-чисел). Очевидно, более правильно говорить, что у целого ряда натуральных чисел делители подчиняются *логарифмически нормальному распределению* (***логнормальному распределению***). Так, у числа $N$=19.999.980.000 все его 1920 делителей явно образуют логнормальное распределение, в чем легко убедиться, если построить график зависимости количества делителей $K$ от величины самих делителей $D$ (рис.9). Данный график, например, показывает, что если $10^2 < D < 10^3$, то количество таких делителей будет $K$=148; если $10^3 < D < 10^4$, то количество таких делителей будет $K$=286 и т. д.

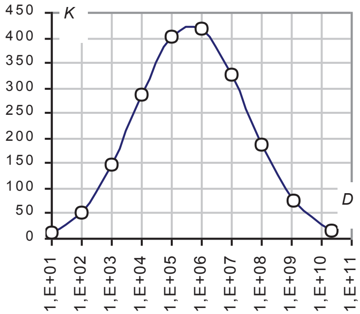


Рис. 9. «Колокол» для делителей числа $N$=19.999.980.000

Иначе говоря, величина ln$D$ имеет *нормальное распределение* (об этом свидетельствует почти идеальный «колокол» на графике), а значит, сами делители $D$ подчиняются *логнормальному* распределению (поскольку на рис. 9 по оси абсцисс – логарифмическая шкала). Такое распределение делителей приводит к тому, что по количеству больше всего делителей “принадлежат” среднему диапазону $10^4 < D < 10^7$, а количество как очень малых, так и очень больших делителей – совсем ничтожно (аналогия: в России подавляющее большинство людей «живут на одну зарплату», то есть весьма и весьма скромно, а вот количество крайне бедных людей и очень богатых людей – ничтожно мало, что похоже на распределение делителей у тильда-числа).

Логнормальное распределение – это понятие из высшей математики и там всё далеко не так просто. Безусловно, наша тильда-функция – примитивный и грубый «инструмент» для *теории чисел*, но он помогает легко осознать некую адекватность мира чисел и реального физического мира.

**Аналогия 15**. «Богатство» ($S$) в *широком смысле* – это самые разные ресурсы, объекты, величины и т. д., созданные как человеком (обществом), так и самой природой (на Земле, в солнечной системе, в Галактике и т. д.). При таком взгляде на окружающий нас мир можно привести множество примеров того, что богатство $S$ подчиняется именно тильда-распределению (логнормальному распределению) [5, 6, 7]. Вероятно, это одна из самых любопытных (“сильных”) аналогий космологии чисел. Причем закон распределения богатства в *узком смысле* (в смысле денег) понятен и актуален для большинства людей, поэтому термин “богатство” для суммы делителей числа $N$ представляется весьма уместным, удобным и оправданным.

## 2.7. БОГАТСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Если известно каноническое разложение числа $N=P_1{}^a \cdot P_2{}^b \cdot P_3{}^c \cdot \ldots \cdot P_n{}^m$, то богатство этого числа можно вычислить по формуле Валлиса:

$$S \equiv \sigma(N) = \frac{P_1{}^{a+1}-1}{P_1-1} \cdot \frac{P_2{}^{b+1}-1}{P_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{P_n{}^{m+1}-1}{P_n-1}. \qquad (22)$$

Кстати, именно английский математик Джон Валлис (1616–1703) ещё в 1655 г. ввёл общепринятый теперь знак для бесконечности (∞) и выразил число $\pi$ в виде *бесконечного произведения* (это один из первых примеров бесконечного произведения):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k-1} \cdot \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k+1} \cdots, \quad \text{где } k=1, 2, 3, \ldots \qquad (23)$$

Формула Валлиса (22) хороша тем, что мы находим богатство числа $N$, практически не зная его делителей. Правда, по формуле (10) мы можем ещё узнать их количество (узнать тип $T$ числа $N$). Однако найти каноническое разложение *всех* чисел на относительно большом отрезке $[1;N]$ – это весьма непростая задача, ибо количество всех возможных разложений огромно.

Именно по формуле Валлиса автор нашел богатства *лидеров частых миров* на отрезке $[1; 10^{32}]$ и *лидеров редких миров* на отрезке $[1; 10^{61}]$ (подробно об этом см. [6]). Напомним, что *лидер мира* – это первое число $N$ из данного мира (“открывающее” мир), и именно среди лидеров находятся числа с наибольшим количеством делителей, а значит и с наибольшим богатством. Это позволило сделать предположение о максимально возможном богатстве ($S_{max}$) на отрезке $[1;N]$:

$$S1_{max} \approx \sqrt{e} \cdot N \cdot \ln\ln N \text{ – для редких миров;} \qquad (24)$$

$$S2_{max} \approx \sqrt{\pi} \cdot N \cdot \ln\ln N \text{ – для частых миров.} \qquad (25)$$

Таким образом, у произвольного числа $N$ его богатство $S$ не может быть больше, чем $S2_{max} \approx 1,7724 \cdot N \cdot \ln\ln N$. Причем, часто бывает удобней говорить не о богатстве, а о ***кратности*** ($KR$) богатства (или самого числа $N$):

$$KR \equiv S/N\,, \qquad KR2_{max} \equiv S2_{max}/N \approx 1,7724 \cdot \ln\ln N. \tag{26}$$

Например, согласно формуле (26) в конце Большого отрезка максимально возможная кратность достигает уровня $KR2_{max} \approx 8,76$ (“*магия*” числа 7±2, см. аналогию 5), а при $N=10^{308}$ будем иметь $KR2_{max} \approx 11,63$, т. е. кратность чисел растет крайне медленно (аналогия: большое богатство в мире чисел, как и в человеческом обществе, дается очень даже нелегко!).

Скорее всего, формулы (24), (25), (26) упрощают (огрубляют) реальную ситуацию, в части кратности чисел. Так, очень может быть, что максимально возможная кратность $KR2_{max}$ связана с *суммой Гаусса-Мертенса* $GM \equiv \Sigma P^{-1} = \ln\ln N + 0,261497 + \varepsilon(N)$, где $N$– правая граница отрезка $[1;N]$, всегда превосходящая наибольшее простое число $P$ этого отрезка, а $\varepsilon(N) \to 0$. Реальное отношение $X \equiv KR2_{max}/GM$ сначала убывает от $X=3$ (при $N=2$) до $X_{min}=1,538393\ldots.$ (при $N=25200$), а потом начинает медленно расти и на подходе к числу $N=10^{32}$ совершает колебания вокруг значения $X \approx 1,64106$. Поэтому для $N \to \infty$ можно предположить следующее:

$$KR2_{max} \approx X \cdot GM\,, \tag{27}$$

где $X=1,63 \pm 0,01$, или $X=\pi^2/6=1,6449\ldots$, или $X=e^{0,5}=1,6487\ldots.$ (увы, это всё предположения). Кстати, аналогичным образом ведет себя и отношение $Y \equiv KR1_{max}/GM$ для редких миров, но здесь даже при $N=10^{61}$ это отношение дорастает только до значения $Y \approx 1,5$ (совершая куда б**о**льшие колебания).

В части *кратности чисел* можно привести ещё интересные гипотезы:

1). Сумма кратностей всех натуральных чисел *из редких миров* на отрезке $[1;N]$ стремится к значению $2 \cdot N^{0,5}=2 \cdot i$, где $i$ – номер ступени Ствола, т. е. средняя кратность всех чисел из редких миров, вероятно, стремится к 2.

2). Сумма кратностей *всех* натуральных чисел на отрезке $[1;N]$ стремится к значению $e^{0,5} \cdot N \approx 1,6487 \cdot N$, т. е. средняя кратность всех чисел, вероятно, стремится к числу $e^{0,5}$ (что близко к “золотому сечению” 1,618).

Что касается *минимально возможного богатства* ($S_{min}$) у произвольного числа $N$, то оно, очевидно, определяется выражением $S_{min} \geq 1+N$, т. е. нижнюю границу образуют богатства *простых чисел*. Это самые “бедные” числа в части богатства $S$, но напомним, что их роль в мире чисел трудно переоценить (и опять напрашивается аналогия с нашим обществом: ученые в России, как правило, относятся к беднейшим, *простым* слоям населения, но их роль для процветания страны невозможно переоценить).

Ранее [6] автором было установлено, что при $N \to \infty$ суммарное богатство всех чисел (***богатство Пирамиды***) стремится к величине

$$\Sigma S = (\pi^2/6) \cdot (1+N) \cdot N/2 \approx (\pi^2/12) \cdot N^2 \approx 0,8224 \cdot N^2\,. \tag{28}$$

Причем модуль относительной погрешности данной формулы не превосходит величины $2/N$, а при $N>500$ для подавляющего большинства значений $N$ формула (28) дает суммарное богатство $\Sigma S$ больше реального.

Очевидно, можно также говорить о *среднем богатстве Пирамиды*:

$$S_s \equiv \Sigma S/N = (\pi^2/12)\cdot(1+N) \approx 0{,}8224\cdot N\ . \qquad (29)$$

С помощью программы «*Excel*» на компьютере можно без труда найти все делители первых 10000 натуральных чисел, т. е. найти богатство $S$ всех чисел на *рабочем отрезке* [1;10000]. Эти богатства на графике $S$=f($N$) в логарифмических осях образуют довольно узкий, восходящий вверх, своеобразный «шлейф» из точек-значений $S$, заключенных между виртуальными (воображаемыми нами) границами $S_{min}=1+N$ и $S2_{max}$, причем, учитывая формулы (26) и (27), впредь будем считать, что максимально возможное богатство ($S2_{max}$) натуральных чисел на отрезке [1; $N$] равно

$$S2_{max} \approx (\pi^2/6)\cdot N\cdot(\ln\ln N+0{,}261497)\ . \qquad (30)$$

Первое, что бросается в глаза на рабочем отрезке – это совпадение богатств у целого ряда чисел. Так, значение $S$=15120 повторилось у 37 различных чисел $N$, а значение $S$=240 только у 7 чисел. Для обозначения подобных фактов мы введем важное понятие: назовем количество таких повторений – ***плотностью*** ($R$) богатства $S$ на отрезке [1; $N$]. Например, будем говорить, что на рабочем отрезке плотность богатства $S$=15120 равна $R$=37.

Всего на рабочем отрезке появилось $K$=3700 различных богатств $S$=1, 3, 4, 6, 7, …, 34560, которые с точки зрения их плотности $R$ объединяются в 39 групп: $R$=1, 2, 3, …, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 39, 40, 49, 57, т. е. наибольшая плотность оказалась равной $R_{max}$=57 (57 раз появилось богатство $S$=10080). Если на графике $R$=f($S$) все плотности (3700 точек, которые на рис. 10 не показаны) обвести пунктирной линией, то получим своеобразный *спектр распределения* плотности. Его характерная особенность такова: чем больше плотность $R$, тем меньше богатств $S$ имеют данную плотность и, вероятно, справедлива такая оценка:

$$Kr \leq K/R^2\,, \qquad (31)$$

где $Kr$ – это количество богатств $S$ (а значит и чисел $N$), чья плотность не превосходит $R$. Кстати, в части плотности богатства можно также говорить о «*магии» числа* 7 (см. аналогию 1), поскольку первые семь плотностей $R$=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 «вбирают в себя» подавляющую часть богатств (на рабочем отрезке это 93,32% от количество всех богатств $S$).

Количество различных богатств на отрезке [1;$N$] в первом приближении, вероятно, можно оценить следующим образом:

$$K \approx N \cdot (A \cdot \ln N + B)^{-1}\quad, \qquad (32)$$

где $A \approx 0{,}5 \cdot \ln(\pi/2) = 0{,}2257\ldots$, $B \approx 2/\pi = 0{,}6366\ldots$. Не исключено, что при $N \to \infty$ *средняя плотность богатства* ($N/K$) устремляется к некому числу, а не растет бесконечно, как это следует из формулы (32): $N/\mathrm{K} \approx A \cdot \ln N + B$, согласно которой в конце Большого отрезка имеем $N/K \approx 32{,}35$.

Если на отрезке [1;$N$] все $K$ различных богатств $S$ расположить по их возрастанию и при этом суммировать (по нарастающей) плотности этих богатств ($\Sigma R$), то можно вычислить некую текущую *удельную плотность богатства* – $\Sigma R/S$. Причем параметр $\Sigma R/S$ с ростом $S$ остается постоянным (около 0,673) вплоть до $S$=$N$, а затем экспоненциально убывает.

Примечательно, что спектр распределения плотности богатства в мире чисел (пунктирная линия на рис. 10), оказывается, можно описать тем же уравнением, что и ***закон излучения Планка*** в физике (см. прилож.):

$$R \approx A \cdot \boldsymbol{S}^3 \cdot [\exp(B \cdot \boldsymbol{S}/K) - 1]^{-1}\ . \qquad (33)$$

Таким образом, неким аналогом частоты излучения ($\nu$) выступает богатство $S$; аналогом температуры ($T$) выступает $K$ – количество различных богатств на отрезке [1;$N$]. Поскольку $K$ зависит исключительно от $N$, то аналогом температуры в мире чисел можно считать именно правую границу отрезка (т. е. параметр $N$). Числовые коэффициенты $A$ и $B$ в формуле (33) для рабочего отрезка были приняты следующими: $B$=1; $A$=$e^2 \cdot N^{-a}$; $e^2$=7,3890…; $a$=$(2\pi)^{0,5}$ =2,5066…На рис. 10 тонкая сплошная линия построена по формуле

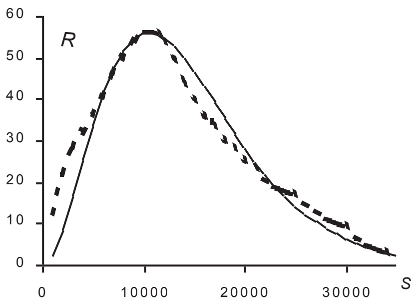

Рис. 10. Спектр распределения плотности богатства на отрезке [1;10000]

(33), которая также была проверена автором и для меньших рабочих отрезков ($N$=100, 1000, 5000).

Более того, можно сформулировать некий аналог *закона смещения Вина* (см. прилож. 1): богатство $Sm$, соответствующее максимальной плотности ($Rm$) на отрезке [1;$N$], пропорционально правой границе этого отрезка:

$$Sm \approx Ss \approx (\pi^2/12)\cdot N \approx 0{,}8224\cdot N \quad , \tag{34}$$

т. е. пик плотности (“вершина горки” на рис. 10) приходится на богатство, численно равное среднему богатству Пирамиды ($Ss$).

Максимальная плотность ($Rm$), вероятно, стремится к выражению

$$Rm \approx Ss^{0,5}/2 \approx \pi\cdot(2\cdot 12^{0,5})^{-1}\cdot N^{0,5} \approx 0{,}4534\cdot N^{0,5} \quad . \tag{35}$$

Площадь ($F$) под кривой, изображенной на рис. 10, пропорциональна суммарному богатству на отрезке [1;$N$] (богатству Пирамиды):

$$F \approx 0{,}754\cdot(\Sigma S)^{0,769} \; . \tag{36}$$

При большом желании в богатстве Пирамиды (см. формулу (28)) можно даже увидеть труднообъяснимый аналог *закона Стефана – Больцмана*:

$$(\Sigma S)^2 \approx (\pi^4/12^2)\cdot N^4 \approx 0{,}6764\cdot N^4 \quad . \tag{37}$$

**Аналогия 16**. Почему так много общего между фундаментальным законом физики (законом излучения Планка, см. прилож.) и законами из мира чисел (см. формулы 33÷37)? Разве подобные аналогии не заслуживают самого глубокого философского осмысления? Именно такие обстоятельства привели автора к мысли о существовании таинственной *космологии чисел*.

Однако продолжим изучение богатства натуральных чисел.

Богатство $S$ – это всегда некое натуральное число, в связи с чем возникает законный вопрос: а какова, вероятность ($Ps$) того, что произвольное, относительно большое число, скажем, число $N$=$10^{61}$ (правая граница Большого отрезка) будет являться богатством некого другого числа $X$ (разумеется, $X<N$). По формуле (30) путем подбора находим число $X \approx 1{,}195\cdot 10^{60}$, при котором выполняется равенство $S2max=10^{61}$, т. е. именно на отрезке [1;$X$] максимально возможное богатство достигает значения $S2max=10^{61}$, при этом искомую вероятность ($Ps$), очевидно, можно оценить по формуле

$$Ps \equiv K/S2max \approx \{[0{,}5\cdot\ln(\pi/2)\cdot\ln X+2/\pi]\cdot[(\pi^2/6)\cdot(\ln\ln X+0{,}261497)]\}^{-1} \quad . \tag{38}$$

При $X \approx 1{,}195\cdot 10^{60}$ мы получим $Ps \approx 0{,}003748\ldots$, причем 11-я цифра после запятой в значении $Ps$ уменьшится на единицу, когда правая граница БО увеличится примерно на 600 лет (разумеется, после *эви*-конвертации).

**Аналогия 17**. Говоря о вероятности $Ps$, мы, по сути дела, продолжаем нашу “охоту” за *постоянной тонкой структуры* (**α**=0,007297…, см. аналогии 10, 11), которая в данном случае всего в два раза больше полученного значения $Ps$, и не исключено, что только из-за неточности формулы (38).

Если мы хотим оценить вероятность того, что произвольное число $N$ может являться *богатством* (некого меньшего числа), то можно также воспользоваться “улучшенной модификаций” формулы (38), а именно:

$$P_S{}^* \equiv P_S \cdot \ln\pi \approx 1{,}1447 \cdot P_S \,, \qquad (39)$$

причем здесь в формулу (38) для $P_S$ следует подставлять само число $N$ (не надо искать границу $X$, из-за чего и появился коэффициент $\ln\pi$). Относительная погрешность формулы (39) на отрезке $[10^3;10^{61}]$ составляет *ОП*=±10%, а при $10<N<10^3$ реальные вероятности $P_S$ могут превышать $P_S{}^*$ на 20% (в начале натурального ряда $P_S$ сами колеблются в пределах ±0,05).

Несколько «грубее» на БО работает совсем простая формула:

$$P_S \approx (4/\pi)\cdot(\ln N)^{-\sqrt{\pi}} \approx 1{,}2732\cdot(\ln N)^{-1{,}1447}. \qquad (40)$$

**Важное замечание**. На самом деле вероятность $P_S$ (если её вообще можно выразить аналитически как некую функцию от $N$), наверняка, будет отличаться от формулы (38), а тем более – (39), (40). Говоря о *космологии чисел*, нам важно в первую очередь получить числовую оценку параметра $P_S$ (хотя бы грубую) на различных отрезках ряда (МО, ЦО, БО и проч., см. гл. 2.1). После этого, скажем, ортодоксальный физик уже может искать некие аналогии (объяснения) найденной числовой оценке $P_S$ в реальном мире (например, доказывать, что в конце БО вероятность $P_S$ адекватна именно постоянной тонкой структуры $\alpha$). При этом надо четко понимать, что получение истинной аналитической зависимости $P_S$ от $N$, скорее всего, окажется невероятно сложной задачей, хотя окончательная формула может поразить нас своей простотой и лаконичностью (в этом вся прелесть математики). Данное замечание, разумеется, относится не только к $P_S$, но и к большинству выражений, найденных нами в рамках *космологии чисел* [6].

Завершая нашу главу, можно констатировать, что её название («Богатство натуральных чисел») имеет двоякий смысл. Во-первых, «богатство» – это название важной характеристики любого числа $N$ (суммы всех его делителей, обозначенной нами символом $\sigma(N)$ или буквой $S$). Во-вторых, читатель вряд ли теперь сомневается в том, что натуральные числа – это, действительно, исключительно «богатый», интересный и красивый объект.

Для подавляющего большинства людей вся математика сводится, увы, только к подсчету наличных денег (своих богатств), причем столь «прозаическая» тема, как оказалось (см. аналогию 15 и [5, 6, 7]), отнюдь не чужда миру чисел, более того, именно числа «устанавливают» закон, согласно которому распределяются богатства в человеческом обществе. Поэтому есть надежда, что хотя бы тема *распределения богатства* натуральных чисел «заденет за живое» многих читателей, а самым впечатлительным из них даст повод самостоятельно погрузиться в фантастически прекрасную и наиболее реальную (?!) из всех областей наших знаний – в мир чисел.

## 2.8. УДИВИТЕЛЬНЫЙ МЕМУАР ЭЙЛЕРА

В богатейшем наследии Эйлера есть удивительный мемуар, который называется «*Открытие* ***наиболее необычайного закона чисел****, относящегося к суммам их делителей*»[1]. Как видно из названия этот закон поразил даже самого Эйлера. Его открытие – это блестящий пример *индуктивного исследования* в математике, мастером которого был Эйлер. Менее известные математики также широко использовали индукцию в своей работе, но, пожалуй, никто из них не фиксировал на бумаге столь тщательно ход своей мысли, как это, к нашему счастью, делал Эйлер. Вот что сказал об этом его современник – известный французский математик и просветитель Кондорсе (1743–1794): «Он [Эйлер] предпочитал обучение своих учеников тому небольшому удовлетворению, которое он получил бы, изумляя их. Он думал, что недостаточно сделал бы для науки, если бы не прибавил к открытиям, которыми он обогатил науку, *чистосердечного изложения идей*, приведших его к этим открытиям". И если бы Эйлер не поступал столь великодушно, то наше изумление его гениальности вообще не знало бы границ, в чем мы убедимся ниже на конкретном примере.

Итак, перейдем к мемуару. Эйлер пишет: «До сих пор математики тщетно пытались обнаружить в последовательности простых чисел какой-либо порядок, и мы имеем все основания верить, что здесь существует какая-то тайна, в которую человеческий ум *никогда не проникнет*.[2] …Это тем более удивительно, что арифметика дает нам определенные правила, с помощью которых мы можем продолжать последовательность простых чисел сколь угодно далеко, не замечая, однако, ни малейшего следа порядка… Мне удалось открыть *чрезвычайно странный закон*, управляющий последовательностью *сумм делителей* целых чисел, которая на первый взгляд кажется неправильной ровно в такой же степени, как и последовательность простых чисел, и которая в некотором смысле даже включает в себя эту последнюю».

[1] Оригинал этого мемуара на французском языке содержится в Euler, Opera Omnia, ser. 1, vol. 2, p. 241–253. Его перевод почти *in extenso* (в полном объеме) представлен в книге американского математика Д. Пойа (1887–1985) «Математика и правдоподобные рассуждения» [12]. Эта книга (464 стр.) рассказывает о путях и процессах математического творчества (общих для всех естественных наук), о теории правдоподобных (индуктивных) умозаключений.

[2] При цитировании Эйлера *курсив* всегда мой. Кстати, насчет «… *никогда не проникнет*» Эйлер ошибся, поскольку к настоящему времени математики во многом постигли тайну простых чисел (см. [1]). Никогда не говорите «никогда» – и у Вас не будет лишних ошибок!

Напомним, что сумма всех делителей числа $N$ – это *богатство* числа $N$ (см. гл. 2.6), которое далее мы будем обозначать символом $\sigma(N)$.

Теперь мы сформулируем "наиболее необычайный закон чисел» на строгом языке математических символов:

$$\begin{aligned}\sigma(N) = \sigma(N-1) + \sigma(N-2) - \sigma(N-5) - \sigma(N-7) &+\\ + \sigma(N-12) + \sigma(N-15) - \sigma(N-22) - \sigma(N-26) &+\\ + \sigma(N-35) + \sigma(N-40) - \sigma(N-51) - \sigma(N-57) &+\\ + \sigma(N-70) + \sigma(N-77) - \sigma(N-92) - \sigma(N-100) &+\ldots\end{aligned}$$

или, в короткой записи (обозначения и термины автора, т. е. они "*ad hoc*"):

$$\sigma(N) = \sum Z\cdot\sigma(N-E)\quad, \tag{41}$$

где $Z=\pm1$, причем знаки у слагаемых $Z\cdot\sigma(N-E)$ попарно чередуются; $\boldsymbol{E}$**=1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92,** …– ряд Эйлера (*Euler*), который легко «расшифровывается», если обратить внимание на *разности* чисел в нём: 1, *3*, 2, *5*, 3, *7*, 4, *9*, 5, *11*, 6, *13*, 7, *15*, 8, …, т. е. все натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, … и все нечетные числа *3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, …*. чередуются.

Для конкретного натурального числа $N$ необходимо брать те слагаемые, у которых разность $(N-E)$ под знаком $\sigma$ положительна ("отсекая" все отрицательные разности). Причем, вместо выражения $\sigma(0)$ необходимо подставить само число $N$ (см. гл. 2.6). Таким образом, закон Эйлера говорит о том, что богатство любого натурального числа $N$ равно сумме богатств предшествующих натуральных чисел, взятых по определенному правилу.

Для примера найдем богатство числа $N=15$ с помощью закона Эйлера:

$$\begin{aligned}\sigma(15) &= \sigma(15-1) + \sigma(15-2) - \sigma(15-5) - \sigma(15-7) + \sigma(15-12) + \sigma(15-15) =\\ &=\sigma(14) + \sigma(13) - \sigma(10) - \sigma(8) + \sigma(3) + \sigma(0) =24+14-18-15+4+15 = 24.\end{aligned}$$

Разумеется, чтобы вычислить $\sigma(14)$, нам необходимо было вычислить $\sigma(13)$, а перед этим – $\sigma(12)$, $\sigma(11)$, $\sigma(10)$ и т. д. вплоть до $\sigma(1)=1$. Таким образом, здесь мы имеем дело с *рекуррентной* последовательностью, где каждое слагаемое определяется по неизменному правилу исходя из предыдущего слагаемого. И если бы закон Эйлера оказался единственной возможностью для нахождения богатства натуральных чисел (к счастью есть формула Валлиса), то для определения богатства конкретного числа $N$ нам бы пришлось найти богатство *всех* предшествующих $(N-1)$ чисел, начиная с единицы. Т. е. закон Эйлера дает далеко не лучший практический способ определения богатства числа. Прелесть данного закона в «механизме» его вывода (об этом ниже) и в интересных следствиях из него. Например, вызывает восхищение сам факт существования бесконечного ряда чисел $\boldsymbol{E}$, которые «увязывают» (словно единым шнурком) богатство любого числа $N$ с богатством всех предшествующих чисел (что приводит нас к поразительной аналогии с явлением «*бутстрапа*» из физики, но об этом ниже). Однако сам Эйлер явно недооценил важность открытого им закона, поскольку он писал: «…мы не чувствуем *никакой разумной связи между структурой моей формулы и при-*

*родой делителей*, с суммой которых мы имеем здесь дело. Последовательность чисел 1, 2, 5, 7, 12, 15, …[ряд чисел ***E***], казалось бы, не имеет к рассматриваемому вопросу никакого отношения. Более того, поскольку закон этих чисел "прерывист" и они фактически являются смесью двух последовательностей с правильным законом: 1, 5, 12, 22, 35, 51, … и 2, 7, 15, 26, 40, 57, …, мы не могли ожидать, что такая неправильность может встретиться в Анализе" [в математическом анализе].

Последние слова Эйлера требуют пояснений. Если ввести обозначение $m$=1, 2, 3, … – порядковый номер числа ***E*** (т. е. в ряду Эйлера), то при нечетных $m$=1, 3, 5, 7, … и четных $m$=2, 4, 6, 8, … соответственно имеем:

$$E = (3/8)\cdot m^2 + (1/2)\cdot m + (1/8) \quad \text{и} \quad E = (3/8)\cdot m^2 + (1/4)\cdot m \qquad (42)$$

Таким образом, при росте номера $m$ формулы (42) "генерируют" две последовательности чисел, а ряд ***E*** является их чередующейся "смесью" (здесь мы опять имеем дело с *законом квадрата*, см. аналогию 3).

Любопытно, что в своем мемуаре Эйлер показывает (опять же с помощью математической индукции) как вычислить $\sigma(N)$, если известно каноническое разложение числа $N$, то есть он, по сути дела, выводит формулу Валлиса (22), уже строго доказанную к тому времени, правда, о самом Валлисе Эйлер в мемуаре почему-то не упоминает.

В формулировке закона Эйлера нас всё изумляет: и ряд чисел ***E***, и правило знаков ($Z$), и правило для $\sigma(0)$. Угадать случайно *такое* невозможно, но как удалось Эйлеру вывести данный закон? Это похоже на грандиозный фокус, особенно после того, как мы узнаем всю правду об его открытии. Ниже мы ещё лишний раз убедимся, что чудес на свете не бывает, и все они имеют удивительно *простое* объяснение, к сожалению (а может и к счастью?) нам не дано знать ещё очень многих *очень простых* Истин.

Свою "исповедь" Эйлер начинает словами: "… хотя мы здесь рассматриваем *природу целых чисел, к которой Исчисление Бесконечно Малых кажется неприложимым*, тем не менее я пришел к своему заключению с помощью дифференцирований и других *уловок*. Я желал бы, чтобы кто-нибудь другой нашел более короткий и более естественный путь, и, быть может, рассмотрение того пути, которому я следовал, могло бы оказать здесь некоторую помощь." Мы видим, что обнаруженная Эйлером таинственная связь между природой бесконечно большого (природой целых чисел) и бесконечно малого расценивается им всего лишь как математическая "уловка". Правда, налет некой непознанной тайны все равно остается.

Далее Эйлер пишет о том, что, рассматривая разбиение чисел, он много лет тому назад исследовал выражение (скажем, *произведением Эйлера*):

$$\Pi \equiv (1-x^1)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^6)\cdot(1-x^7)\cdot\ldots, \qquad (43)$$

где произведение предполагается бесконечным. Чтобы увидеть, какого рода ряд получится в результате, он фактически перемножил большое число множителей и нашел следующее выражение (назовем его *суммой Эйлера*):

$$S \equiv 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots \quad . \qquad (44)$$

Причем Эйлер убежден, что в качестве показателей степени при аргументе $x$ (который рассматривается на интервале $0 \le x \le 1$) выступает именно ряд чисел ***E*** с правилом знаков, аналогичным правилу знаков в формуле (41). Вот что он говорит по этому поводу: "… у меня нет для этого никаких других доводов, за исключением длинной индукции, которую я провел так далеко, что никоим образом не могу сомневаться в законе, управляющем образованием этих членов и их степеней… Таким образом, это познанная, но все же *не доказанная* истина…Поскольку мы таким образом обнаружили, что эти два бесконечных выражения равны [$\Pi$=$S$], хотя и оказалось невозможным это доказать, все заключения [в т. ч. и закон Эйлера (41)], которые могут быть из этого выведены [как – мы увидим ниже], будут той же природы, т. е. будут верны, но *не доказаны*. Или если бы одно из этих заключений [скажем, закон (41)] можно было доказать, то, наоборот, можно было бы получить ключ к доказательству этого равенства [$\Pi$=$S$]; и именно с таким намерением я различными способами *манипулировал* этими двумя выражениями [$\Pi$ и $S$] и, таким путем, среди других открытий пришел к тому, которой я объяснил выше [то есть к закону (41)]…"

Рассмотрим манипуляции, которые совершил Эйлер. Чтобы избавиться от множителей в произведении (43) он его прологарифмировал:

$$\ln\Pi = \ln(1 - x^1) + \ln(1 - x^2) + \ln(1 - x^3) + \ln(1 - x^4) + \ln(1 - x^5) + \ldots ,$$

и продифференцировал [напомним, что $(\ln x)` = 1/x$], получив равенство

$$\frac{1}{\Pi}\cdot\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{1\cdot x^0}{1-x^1} - \frac{2\cdot x^1}{1-x^2} - \frac{3\cdot x^2}{1-x^3} - \frac{4\cdot x^3}{1-x^4} - \frac{5\cdot x^4}{1-x^5} - \frac{6\cdot x^5}{1-x^6} - \frac{7\cdot x^6}{1-x^7} - \ldots . \qquad (45)$$

Затем Эйлер умножил обе его части на $-x$ и получил некую величину $h$

$$h \equiv -x\cdot\frac{1}{\Pi}\cdot\frac{d\Pi}{dx} = \frac{1\cdot x^1}{1-x^1} + \frac{2\cdot x^2}{1-x^2} + \frac{3\cdot x^3}{1-x^3} + \frac{4\cdot x^4}{1-x^4} + \frac{5\cdot x^5}{1-x^5} + \frac{6\cdot x^6}{1-x^6} + \frac{7\cdot x^7}{1-x^7} + \ldots \quad . \qquad (46)$$

В последнем выражении каждое слагаемое (в виде дроби) можно представить как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член ($a$) и знаменатель ($q$) равны $x^n$ (где $n$=1, 2, 3, …и т. д. до бесконечности). Так, первое слагаемое ($n$=1) – это сумма бесконечной прогрессии $x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\ldots$, умноженной на 1; второе слагаемое ($n$=2) – это сумма бесконечной прогрессии $x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}+\ldots$, умноженной на 2 и т. д. При любом фиксированном $x$ ($0 \le x \le 1$) сумма каждой из этих прогрессий не растет беспредельно, а приближается к определенной «предельной» величине. Этот предел и называют *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* и вычисляют по общеизвестной формуле: $\sum = a/(1-q)$, но поскольку у нас $a=q=x^n$, то имеем $\sum = x^n/(1-x^n)$.

Таким образом, величину $h$ можно записать в виде суммы

$$
\begin{array}{l}
h = 1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6 + 1x^7 + 1x^8 + 1x^9 + 1x^{10} + 1x^{11} + 1x^{12} + \ldots \\
\qquad +2x^2 \qquad +2x^4 \qquad +2x^6 \qquad +2x^8 \qquad +2x^{10} \qquad + 2x^{12} + \ldots \\
\qquad\qquad +3x^3 \qquad\qquad +3x^6 \qquad\qquad +3x^9 \qquad\qquad + 3x^{12} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad +4x^4 \qquad\qquad\qquad +4x^8 \qquad\qquad\qquad + 4x^{12} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +5x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad +5x^{10} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +6x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 6x^{12} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +7x^7 + \ldots \text{ и т. д.}
\end{array} \qquad (47)
$$

Чтобы лучше понять, что здесь получил Эйлер – подставьте значение $x$=1, тогда останутся одни целые числа, образующие не что иное как… нашу Пирамиду (!), но только расположенную не вертикально (как на рис. 6), а горизонтально (точнее говоря, её зеркальное отражение). Поэтому формулу-схему (47) для $h$ мы будем называть *E-пирамидой*. Её «архитектура» позволяет сделать вывод, что каждая степень $x^n$ встречается столько раз, сколько её показатель ($n$) имеет делителей, и что каждый делитель появляется в качестве коэффициента при той же самой степени $x$, т. е.

$$h = \sigma(1)\cdot x^1 + \sigma(2)\cdot x^2 + \sigma(3)\cdot x^3 + \sigma(4)\cdot x^4 + \sigma(5)\cdot x^5 + \sigma(6)\cdot x^6 + \sigma(7)\cdot x^7 + \ldots \quad (48)$$

А теперь вернемся к сумме (44), которую Эйлер также продифференцировал, а потом умножил на $-x$ и получил (напомним, что $\Pi$=$S$):

$$h \equiv -x\cdot\frac{1}{S}\cdot\frac{dS}{dx} = (1x^1 + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - \ldots)/\ (1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots)$$

откуда получаем очевидное равенство

$$h\cdot(1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots) - (1x^1 + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - \ldots) = 0 \quad (49)$$

Подставляя в (49) вместо $h$ его значение по формуле (48), получаем

$$
\begin{array}{rl}
0 = & \sigma(1)\cdot x^1 + \sigma(2)\cdot x^2 + \sigma(3)\cdot x^3 + \sigma(4)\cdot x^4 + \sigma(5)\cdot x^5 + \sigma(6)\cdot x^6 + \ldots \\
& - x^1 - \sigma(1)\cdot x^2 - \sigma(2)\cdot x^3 - \sigma(3)\cdot x^4 - \sigma(4)\cdot x^5 - \sigma(5)\cdot x^6 + \ldots \\
& - 2\cdot x^2 - \sigma(1)\cdot x^3 - \sigma(2)\cdot x^4 - \sigma(3)\cdot x^5 - \sigma(4)\cdot x^6 + \ldots \\
& + 5\cdot x^5 + \sigma(1)\cdot x^6 + \ldots
\end{array} \qquad (50)
$$

Так как сумма бесконечного ряда (50) равна 0, то каково бы не было значение $x$, коэффициент при каждой отдельной степени $x^n$ должен обязательно быть равен 0 – отсюда мы и получаем закон Эйлера (41).

Итак, мы почти в точности повторили рассуждения Эйлера. Именно они дают нам веские основания и для правила формирования чисел ***E***, и для правила знаков ($Z$), и для правила в части σ(0), т. е. весь алгоритм вывода формулы (41) приводит нас к указанным правилам (мы их просто «считываем» из формул). В заключении мемуара ещё раз подчеркнем, что справедливость «наиболее необычайного закона чисел» (41) столь же несомненна, как и справедливость равенства между двумя бесконечными выражениями $\Pi$ и $S$, которое осталось не доказанным (а сколь угодно длинные вычисления $\Pi$ и $S$ на компьютере, увы, доказательством не являются). Возможно, в подобных парадоксах о познанной, но *не доказанной* истине (которых в *теории чисел* немало) кроется нечто фундаментальное.

**Аналогия 18**. В микромире, возможно, ВСЁ состоит из ВСЕГО. Неверно искать в микромире «последнюю» элементарную частицу, её просто нет. Каждая частица оказывается бесконечно сложной. Все зависит от всего, и нет малых параметров. Такие воззрения получили название «*ядерной демократии*», а механизм её обуславливающий обозначают словом «***бутстрап***» (от английского «зашнуровка», ведь каждая частица как бы связана единым «шнурком»). Причем понятия «ядерной демократии», бутстрапа идут вразрез с доктриной кварков, ведь при демократии не может быть частиц-аристократов, какими являются кварки – «кирпичики» мироздания [6, 19].

Бутстрап – это очень сложное понятие, его ещё не удалось сформулировать на строгом языке математики. Не исключено, что наилучшие представления о бутстрапе нам дает именно мир чисел, где также ВСЁ зависит от ВСЕГО и нет малых параметров. Ярким примером этого может служить рассмотренный нами «наиболее необычайный закон чисел» Эйлера, где богатство любого числа $N$ равно некой комбинации богатств предшествующих чисел (см. формулу 41). Грубо говоря, каждому числу $N$ ставится в соответствие своя неповторимая комбинация, которая как единый «шнурок» связывает число $N$ со всеми предшествующими числами. В подобных законах теории чисел, очевидно, «зашифрованы» основы самого мироустройства.

## 2.9. СТРУКТУРА БОГАТСТВА ПИРАМИДЫ

Рассмотрим вершину Пирамиды, состоящую из первых $N$ натуральных чисел (см. рис. 6), и будем далее для краткости говорить о Пирамиде высотой $N$. *Богатство Пирамиды* (высотой $N$) – это сумма всех делителей у всех чисел от 1 до $N$, которую мы будем обозначать символом $\Sigma\sigma(N)$, т. е.

$$\Sigma\sigma(N) = \sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(4) + \sigma(5) + \sigma(6) + \sigma(7) + \ldots + \sigma(N) . \quad (51)$$

Ясно, что общая *масса черных камней Пирамиды* (высотой $N$, см. рис. 6) – это синоним богатства Пирамиды. Из 10-го закона Пирамиды следует, что при $N\to\infty$ богатство Пирамиды высотой $N$ стремится к выражению:

$$\Sigma\sigma(N) \sim (\pi^2/6)\cdot K = (\pi^2/6)\cdot(1+N)\cdot N/2 , \quad (52)$$

где $K$ – это количество всех камней в Пирамиде (белых, серых, черных).

Если богатство Пирамиды, скажем, при $N$=20 вычислять по формуле (51), где каждое слагаемое “расписать” по формуле Эйлера (41), то получим, своего рода, *структуру богатства Пирамиды*:

$$\Sigma\sigma(20)=2\cdot\{\sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(4) + \sigma(5) + \sigma(16) + \sigma(17) + \sigma(18)\} +$$
$$1\cdot\{\sigma(6) + \sigma(7) + \sigma(8) + \sigma(14) + \sigma(15) + \sigma(19)\} +$$
$$0\cdot\{\sigma(9) + \sigma(10) + \sigma(11) + \sigma(12) + \sigma(13\} + [\mathbf{1}+\mathbf{2}-\mathbf{5}-\mathbf{7}+\mathbf{12}+\mathbf{15}]=339.$$

Прокомментируем полученный результат и введём ряд определений.

Во-первых, мы видим, что богатства σ(9), σ(10), …,σ(13) *в данном случае* (при высоте Пирамиды $N$=20) нам не понадобились, они «исчезли», поскольку в законе Эйлера у слагаемых фигурируют оба знака («+» и «–»). Поэтому сумму «лишних» слагаемых, заключенную в фигурные скобки {σ(9)+σ(10)+…+σ(13)}, мы умножили на нуль (0) и будем говорить, что у «лишних» слагаемых *ранг* равен 0 (или $R$=0).

Во-вторых, мы видим, что у слагаемых с рангом два ($R$=2) можно выделить две *группы* слагаемых: σ(1)÷σ(5) и σ(16)÷σ(18), в которых числа по знаком σ идут подряд без пропусков (в этом здесь будет смысл понятия «*группа*»). У слагаемых с рангом $R$=1 в данном случае три группы слагаемых: σ(6)÷σ(8) и σ(14)÷σ(15), а также σ(19).

И наконец, мы видим некий «довесок» [**1**+**2**–**5**–**7**+**12**+**15**]=18, который есть ни что иное как сумма первых шести членов ряда Эйлера, не превосходящих высоту конкретной Пирамиды ($N$=20), причем правило знаков у членов "довеска" по-своему соответствует правилу знаков в законе Эйлера (41). Будем называть сумму всех чисел Эйлера, не превосходящих числа $N$ (включая само число $N$, если оно из ряда Эйлера) ***поправкой Эйлера***:

$$RE = 1+2-5-7+12+15 - \ldots + N\,. \tag{53}$$

Исходя из метода математической индукции, можно утверждать, что богатство Пирамиды высотой $N$ можно определить по формуле:

$$\begin{aligned}\Sigma\sigma(N) = {} & 2\cdot\{\Sigma[\sigma(A_i) + \sigma(A_i{+}1) + \sigma(A_i{+}2) + \ldots + \sigma(Z_i)]\} + \\ & 1\cdot\{\Sigma[\sigma(A_i) + \sigma(A_i{+}1) + \sigma(A_i{+}2) + \ldots + \sigma(Z_i)]\} + \\ & 0\cdot\{\Sigma[\sigma(A_i) + \sigma(A_i{+}1) + \sigma(A_i{+}2) + \ldots + \sigma(Z_i)]\} + RE\,,\end{aligned} \tag{54}$$

где 2, 1, 0 – это *ранг* ($R$) слагаемых заключенных в фигурные скобки {…} (полезно каждый раз вспоминать пример для случая $N$=20, см. выше);

$i$=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …$iR$ – это порядковый номер группы внутри данного ранга $R$, причем номер последней группы ($iR$) в каждом ранге, вообще говоря, свой. Чем больше число $N$, тем больше будет групп в каждом ранге (в формуле (54) $i$-ая группа помещена в квадратные скобки);

$A_i$, $Z_i$ – это начало и конец в $i$-ой группе, т. е. первое и последнее число, которые стоят под знаком σ в $i$-ой группе.

Таблица 4

| | $R$=2 | $R$=1 | $R$=0 |
|---|---|---|---|
| $a$ | –6 | –3/2 | –6 |
| $b$ | 1 | –1/2 | –5 |
| $c$ | 1 | 1 | 0 |
| $f$ | 5 | 1/2 | –1 |
| $g$ | –1 | 0 | 0 |
| $h$ | 5 | 1 | –1 |
| $q$ | 12 | 6 | 12 |

Если мы знаем начало ($A_i$) и конец ($Z_i$) в $i$-ой группе, то значит мы знаем все члены этой группы, поскольку в каждой группе числа идут подряд без пропусков (с шагом равным 1). Начало и конец каждой группы с ростом её номера ($i$) убывают по параболе (опять *закон квадрата*, см. аналогию 3)

$$A_i = N + a\cdot i^2 + b\cdot i + c, \qquad Z_i = N + a\cdot i^2 + f\cdot i + g\quad , \tag{55}$$

где значения числовых коэффициентов $a$, $b$, $c$, $f$, $g$ зависят от ранга $R$ (см. табл.4). Автор не берется объяснять, как им были получены формулы (55), ибо любой желающий, манипулируя с законом Эйлера $n$-ое количество часов на компьютере, очевидно, получит такой же результат.

**Аналогия 19**. Цифры в табл.4 могут вызвать некие смутные ассоциации с физикой микромира, например, спины элементарных частиц обозначаются числами 2; 3/2; 1; 1/2; 0. Вероятно, есть смысл рассмотреть коэффициенты в каждом *законе квадрата* из мира чисел (см. аналогию 3), однако такое исследование представляется весьма и весьма непростым, требующим большого научного “кругозора”.

Говоря о формуле (54), нам осталось только пояснить как находить количество групп в каждом ранге (т. е. число $iR$). Очевидно, что $i$-ая группа “вырождается”, когда $Z_i \le 0$, именно данное значение $i$ мы и принимаем за $iR$. Поэтому, подставив в уравнение (55) $Z_i=0$, мы получим искомый номер

$$iR = Ц\{(h + \sqrt{24 \cdot N+1})/q\} \approx h/q + (\sqrt{24}/q)\cdot \sqrt{N} \ , \qquad (56)$$

где $Ц$ – функция “антье” (выделяет целую часть из выражения в фигурных скобках), а числа $h$ и $q$ зависят от ранга $R$ (см. табл. 4). Из формул (56) следует, что $i2 \approx i0$ и $i2+i0=i1$, а суммарное количество групп в трех рангах, вообще говоря, будет равно (и снова *закон квадрата*, см. аналогию 3)

$$\Sigma iR \equiv i2 + i1 + i0 \approx 1/2 + (\sqrt{24}/3)\cdot \sqrt{N} \approx 1{,}6329\cdot\sqrt{N} \ . \qquad (57)$$

В части количества групп надо иметь в виду, что существуют такие числа $N^* = -(a\cdot i^2 + f\cdot i + g)$, для которых по формуле (55) получаем $Z_i=0$, а значит в этих редких случаях количество групп в ранге $R$ будет равно $iR^*=iR-1$.

Представляется также важным вопрос о количестве слагаемых в $i$-ой группе ($K_i$) и общем количестве слагаемых. Понятно, что $K_i=Z_i-A_i+1$ и, подставляя сюда формулы (55), легко убедится, что с ростом номера групп ($i$) количества слагаемых в них образуют арифметические прогрессии:
при $R=2$ имеем $K_i$=3, 7, 11, 15, 19, …($K_i=3+4(i-1)$, числа из класса “**34**”);
при $R=1$ имеем $K_i$=1, 2, 3, 4, 5, …($K_i=1+1(i-1)=i$, т. е. сам натуральный ряд);
при $R=0$ имеем $K_i$=5, 9, 13, 17, 21, …( $K_i=5+4(i-1)$, числа из класса “**14**”).

Поэтому общее количество слагаемых в каждом ранге ($\Sigma K$) – это сумма $iR$ членов арифметических прогрессий, т. е. для каждого ранга получаем некое квадратное уравнение (где $iR$ – его аргумент), а подставив в эти квадратные уравнения $iR$ по формулам (56) в итоге получим, что *в любом ранге* при $N\to\infty$ справедливо утверждение: $\Sigma K \to N/3$ (при $N=10^{10}$ относительная погрешность убывает до 0,0008%). Т. е. общие количества слагаемых во всех рангах стремятся друг к другу и в сумме они дают само число $N$.

Наибольшее количество слагаемых будет в группе с номером, вообще говоря, равным $iR$. Поэтому, подставив в выражение для арифметической прогрессии значение $i=iR$ по формуле (56), мы получим формулу для количества слагаемых в наибольшей группе – $KiR$ (для ранга $R$). Максимальная группа всегда будет во втором ранге, для неё при $N\to\infty$ получаем «размер»:

$$Ki2 \approx 2/3 + (\sqrt{24}/3)\cdot \sqrt{N} \approx 1{,}6329\cdot\sqrt{N} \ . \qquad (58)$$

Также справедливы следующие соотношения: $Ki2/Ki1=2$, $Ki2-Ki0=2$.

Заканчивая главу, ещё раз подчеркнем основные результаты в части *богатства Пирамиды* (высотой $N\to\infty$), определяемого по формуле (54):

1). Богатство Пирамиды определяют только 2/3 чисел, её «составляющих» (в законе (54) они стоят под знаком $\sigma$ в рангах $R=2$ и $R=1$), а 1/3 чисел

– “лишние”, они не несут “полезной” информации в части богатства (в законе (54) они стоят под знаком $\sigma$ в ранге $R$=0).

2). Богатство «лишних» чисел равно богатству чисел второго ранга, плюс поправка Эйлера ($RE$) и минус богатство самого числа $N$.

3). Поправка Эйлера ($RE$) при $N$=20 составляет всего лишь 5,3% от богатства Пирамиды (18/339≈ 0,053). В дальнейшем мы убедимся, что с ростом $N$ поправка Эйлера стремится к ничтожно малой доле от богатства Пирамиды. Однако именно эта исчезающе малая величина является «связующей нитью» между бесконечно большим (рядом натуральных чисел) и бесконечно малым (суммой Эйлера, в связи с которой «зародились» числа из поправки Эйлера).

4). Суммарное количество групп в трех рангах и «размер» наибольшей группы (она всегда 2-го ранга) стремятся к одному и тому же числу, равному $w \equiv W \cdot N^{0,5}$, где $W \equiv 24^{0,5}/3 \approx 1,632993\ldots$. Число $w$ перекликается с номером последней *ступени Пирамиды* (см. гл. 2.5) и превосходит его в $W$ раз (ну а упоминать про *закон квадрата* уже просто «надоело», он – всюду!).

## 2.10. ПОПРАВКА ЭЙЛЕРА

Очевидно, трудно переоценить смысл и значение *поправки Эйлера* в космологии чисел, поэтому исследуем её самым подробным образом.

Поправка Эйлера ($RE$) по своему определению (53) является дискретной функцией от аргумента $N$ (от высоты Пирамиды) и это хорошо видно на рис. 11. Все натуральные числа с точки зрения поправки Эйлера делятся на четыре *ряда* ($P$): у чисел $N$ из первого ряда ($P$=1) – положительные медленнорастущие поправки (на рис. 11 – это горизонтальные “штрихи” из точек-значений $RE$, лежащих над самой осью абсцисс); у второго ряда ($P$=2) – положительные быстрорастущие поправки (“штрихи”, уходящие вверх); у третьего ряда ($P$=3) – отрицательные медленнорастущие поправки; у четвертого ряда ($P$=4) – отрицательные быстрорастущие поправки. Таким образом, в каждом ряду поправки $RE$ образуют сообщества, которые мы так и будем называть *штрихами*, “длина” которых (количество значений $RE$ в которых) дискретно увеличивается. Введем ещё обозначение $t$=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … – порядковый номер штриха внутри каждого ряда. Ну а далее мы приведем основные соотношения, характеризующие удивительный математический объект – поправку Эйлера.

Любой штрих с номером $t$ начинается с *лидера* ($Nt$) – это первое число штриха, причем это число всегда будет из ряда Эйлера. Внутри каждого ряда лидеры $Nt$ образуют параболу (в каждом ряду она своя):

$$Nt = 6 \cdot t^2 + b \cdot t + c \quad , \qquad (59)$$

где коэффициенты $b$ и $c$ берем из табл. 5.

Если мы хотим вычислить поправку Эйлера для произвольного натурального числа $N$, то сначала надо найти лидера штриха ($Nt$), в котором располо-

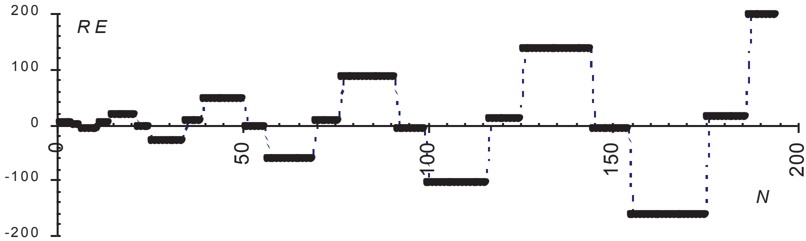


Рис. 11. Значение поправок Эйлера ($RE$) для чисел $N$ от 1 до 200

жено наше $N$, и дальше следует работать именно с лидером $Nt$ (которое “заменяет” собой наше $N$). Поэтому ищем ближайшего лидера $Nt$ из ряда Эйлера такого, что $Nt \le N$.

Потом определяем к какому ряду $P$ принадлежит лидер $Nt$, для чего в каждом из четырех рядов $P$ вычисляем номер штриха

$$t = (-b + \sqrt{24 \cdot Nt + 1})/12 \quad , \qquad (60)$$

где параметр $b$ также берется из табл. 5. Тот ряд, в котором номер штриха $t$ окажется целым число, – будет искомым рядом лидера $Nt$ (а значит и $N$).

Таблица 5

| | $P$=1 | $P$=2 | $P$=3 | $P$=4 |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | –7 | –5 | –1 | 1 |
| $c$ | 2 | 1 | 0 | 0 |
| $d$ | 1 | 2 | 1 | 2 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 3 |

Для рядов $P$=1 и $P$=3 поправки Эйлера отличаются только знаком:

$$RE1 = (1 + \sqrt{24 \cdot Nt + 1})/6 \quad \text{и} \quad RE3 = -(1 + \sqrt{24 \cdot Nt + 1})/6 \ . \qquad (61)$$

Для рядов $P$=2 и $P$=4 поправки Эйлера также отличаются только знаком:

$$RE2 = Nt + (\sqrt{24 \cdot Nt + 1} - 1)/6 \quad \text{и} \quad RE4 = -Nt - (\sqrt{24 \cdot Nt + 1} - 1)/6 \ . \qquad (62)$$

Из формул (61) и (62) следует, при $N \to \infty$ (считаем, что $N=Nt$) для чисел из рядов $P$=1 и $P$=2 поправки Эйлера соответственно стремятся к виду

$$RE1 \approx (\sqrt{24}/6) \cdot \sqrt{N} \approx 0{,}8164 \cdot \sqrt{N} \quad \text{и} \quad RE2 \approx N \ , \qquad (63)$$

т. е. поправка $RE1$ почти равна номеру последней ступени Пирамиды и примерно в 1,5 раза меньше отношения богатства Пирамиды к богатству Ствола (см. гл. 2.5), а поправка $RE2$ стремится к самому числу $N$. Формула (63) достойно пополняет нашу коллекцию *закона квадрата* (см. аналогию 3).

Учитывая, что при $N \to \infty$ богатство Пирамиды устремляется к значению $\Sigma\sigma(N) \approx (\pi^2/12) \cdot N^2$ (см. формулу 52), мы может оценить *долю поправки Эйлера в богатстве Пирамиды* через некий параметр $dRE \equiv RE/\Sigma\sigma(N)$:

$$dRE1 \approx (2\sqrt{24}/\pi^2) \cdot N^{-3/2} \approx 0{,}9927 \cdot N^{-3/2} \ ; \quad dRE2 \approx (12/\pi^2) \cdot N^{-1} \approx 1{,}2158 \cdot N^{-1} \ . \qquad (64)$$

Таким образом, при $N \to \infty$ доля поправки Эйлера в богатстве Пирамиды быстро устремляется к нулю. При этом *dRE1* почти обратно пропорциональна количеству всех камней в Стволе или богатству Ствола, а *dRE2* почти равна отношению массы всех камней Ствола и Пирамиды (см. гл. 2.5).

Итак, мы установили какими по величине и знаку могут быть поправки Эйлера. Остается выяснить, как часто встречаются те или иные поправки.

Зная уравнения для лидеров $N_t$ (см. формулы 59), мы можем определить количества чисел в любом штрихе любого ряда. Оказывается, что эти количества образуют арифметическую прогрессию (для каждого ряда она своя), а *общее количество к концу t-го штриха* ($K_t$), т. е. сумма $t$ членов арифметической прогрессии будет равна (закон квадрата, см. аналогию 3)

$$K_t = d \cdot t^2 + f \cdot t \quad , \qquad (65)$$

где коэффициенты $d$ и $f$ берутся из табл.5.

Суммируя количества $K_t$ для всех четырех рядов, получаем

$$\Sigma\, K_t = K_{t1} + K_{t2} + K_{t3} + K_{t4} = 6 \cdot t^2 + 5 \cdot t \quad ., \qquad (66)$$

где $K_{t1}, K_{t2}, K_{t3}, K_{t4}$ – это соответственно количество всех натуральных чисел из 1, 2, 3, 4–го рядов, содержащихся на отрезке от 1 до $N=N_t$.

Таким образом, при $N \to \infty$ (а значит и $t \to \infty$) доля чисел 1-го ряда $D1 \equiv K_{t1}/\Sigma\, K_t$ будет расти, устремляясь к числу 1/6=0,1666…; доля чисел 2-го ряда $D2$ будет уменьшаться, устремляясь также к числу 1/6; доля чисел 3-го ряда $D3$ будет расти, устремляясь к числу 1/3=0,3333…; доля чисел 4-го ряда $D4$ будет уменьшаться, устремляясь также к числу 1/3. Количество всех чисел, имеющих положительную поправку (чисел из 1 и 2-го рядов), стремится к количеству всех чисел, имеющих отрицательную поправку (чисел из 3 и 4-го рядов).

Интересные свойства поправка Эйлера (*RE*) обусловлены самим фактом существования ряда Эйлера (*E*). А что ещё можно сказать об этих таинственных числах $E$=1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, …?

Например, ясно, что все они, кроме 1, принадлежат частым мирам (у них четный тип $T$) – это следует их формул (59). Причем типы у чисел $E$ изменяются хаотически, подобно тому, как это происходит в общем ряду натуральных чисел (см. рис. 5). Если рассмотреть произвольное количество ($K$) чисел $E$, начиная с $E$=1 и, скажем, до числа $E=N$ включительно, то для них можно ввести понятие о ***среднем типе*** ($TE_s$) – это сумма их типов, деленная на $K$ (по аналогии с типом Дирихле – $T_s$, см. формулы 11 и 12). Оказывается, что зависимость среднего типа $TE_s$ от правой границы рассмотрения $N$ ведет себя весьма спокойно. Так, для $N=6 \cdot 10^3 \div 10^7$ имеем

$$TE_s/T_s \approx 0{,}0758 \cdot \ln N + 0{,}5323 \; , \qquad (67)$$

т. е. средний тип числа $N$ «внутри» ряда Эйлера растет заметно быстрее, чем средний тип того же чисел $N$ в общем ряду всех натуральных чисел (который мы находим по формуле Дирихле). Расчеты по формуле (67) представлены в табл. 6.

Каких типов больше всего на отрезке $[1;N]$ "внутри" ряда Эйлера? Например, на отрезке $[1;10^7]$ среди первых 5000 чисел из ряда Эйлера больше всего из них относится к типу $T$=16 (22,56%). Возможно, приоритет типа $T$=16 для чисел из ряда Эйлера сохраняется и дальше (или все-таки переходит к типу $T$=8?, см. гл. 2.4).

**Аналогия 20**. Возможно, на самом деле, в конце Большого отрезка (БО) имеем не $TEs \approx 1572$ (см. табл. 6), а $TEs \approx 1836$ (этому равно отношение массы протона к массе электрона). Вообще-то табл. 6 – это просто "напоминание" читателю о том, что целесообразно пытаться искать некие аналогии мира чисел с физическим миром не только на Большом отрезке (БО), но также и на других отрезках натурального ряда: МО, ЦО, ПО (см. гл. 2.1) и прочих.

## 2.11. ИССЛЕДОВАНИЕ СУММЫ ЭЙЛЕРА

Удивительный закон Эйлера (см. гл. 2.8.) интересен для нас прежде всего тем, что указывает на *таинственную связь* между природой *бесконечно большого* (в лице бесконечного ряда натуральных чисел, их целых делителей) и *бесконечно малого* (в лице чисел, "предшествующих" единице). В стремлении осмыслить эту связь, очевидно, не будет лишним максимально подробно рассмотреть сумму Эйлера, ведь именно она "породила" необычайный закон Эйлера, наши вопросы и аналогии в связи с ним.

Напомним, что *сумма Эйлера* это бесконечная сумма, имеющая вид

$$S \equiv 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots, \qquad (44)$$

где $0 \le x \le 1$, а показатели степени образуют *ряд Эйлера*: $E$=1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, …. Все слагаемые в сумме Эйлера с точки зрения знака перед ними можно разбить на группы (по два слагаемых в каждой): в *нечетных группах* (с номерами $G$=1, 3, 5, 7, …) – все слагаемые положительные, а в четных группах (с номерами $G$= 2, 4, 6, 8, …) – все слагаемые отрицательные. Только в первой группе ($G$=1) одно слагаемое – единица. Если все слагаемые, начиная с 1, пронумеровать, то тогда слагаемые с нечетными номерами $J$=1, 3, 5, 7, … и с четными номерами $J$=2, 4, 6, 8, …будут иметь показатели степени соответственно равные (см. формулы (42) из мемуара, с учетом того, что $J$=$m$+1):

Таблица 6

| $N$ | $Ts$ | $TEs$ | $TEs/Ts$ |
|---|---|---|---|
| $10^{20}$ | 46,2 | 186 | 4,0 |
| $10^{35}$ | 80,7 | 536 | 6,6 |
| $10^{61}$ | 140,6 | 1572 | 11,2 |
| $10^{308}$ | 709,4 | 38510 | 54,3 |

$$E = (3/8)\cdot J^2 - (1/2)\cdot J + (1/8) \quad \text{и} \quad E = (3/8)\cdot J^2 - (1/4)\cdot J\ . \qquad (68)$$

Таким образом, каждое слагаемое в сумме Эйлера имеет два основных параметра: номер группы – $G$ и номер в общем ряду всех слагаемых – $J$.

Поскольку количество слагаемых стремится к бесконечности ($J \to \infty$), то обе формулы (68) стремятся к виду $E \approx (3/8) \cdot J^2$. Кстати, отсюда можно получить очередной *закон квадрата*: $J \approx (8/3)^{0,5} \cdot E^{0,5} \approx 1,633 \cdot E^{0,5}$.

**Аналогия 21**. Что это за число $3/8 \approx 0,375$? Скажем, число $A \equiv (2 \cdot \boldsymbol{e})^{-1} + \ln(\boldsymbol{\pi})/6 \approx 0,3747\ldots$ (комбинация двух фундаментальных констант – $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{\pi}$) приближает число 3/8 с относительной погрешностью $ОП \approx 0,073\%$. При этом можно ввести некий аналог ряда Эйлера $E^* \approx A \cdot J^2$, и проследить за отношением $E^*/E$: для нечетных $J$=3, 5, 7, … оно убывает от значения 1,6862…, «пересекая» значение $E^*/E$ =1 между $J$=**1837** и 1839 ($E$=1264545 и 1267301), а для четных $J$=2, 4, 6, … отношение $E^*/E$ убывает от значения 2,3982…, «пересекая» единицу между $J$=918 (=**1836**/2) и 920 (=1840/2) ($E$=315792 и 317170). При $J \to \infty$ имеем: $E^*/E \to 8 \cdot A/3 = 0,999274\ldots$ . Таким образом, наш аналог $E^*$ «ближе» всего к реальному числу $E$, когда параметр $J$ “перекликается” с числом 1836. Одна из фундаментальных констант в физике – отношение массы протона к массе электрона – равна числу **1836**.

Последнее (второе) слагаемое в любой нечетной группе (где слагаемые со знаком «+») имеет, очевидно, номер $J_S = 2 \cdot G - 1$ и показатель степени

$$E = (3/2) \cdot G^2 - (5/2) \cdot J + 1 \qquad (69)$$

Как изменяется сумма Эйлера? Глядя на формулу (44), можно сразу предположить, что с ростом $x$ от 0 до 1 значение $S$ убывает от 1 до 0. Тот факт, что при $x$=1 получаем именно $S$=0 вытекает из «краеугольного» предположения Эйлера о том, что $S = П$, поскольку равенство $П$=0 при $x$=1 не вызывает никаких сомнений (см. формулу 43). Что касается суммы Эйлера, то при $x$=1 с ростом номера $J$=1, 2, 3, … она принимает следующие текущие значения: $S$=1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, 0, …, т. е. бесконечное количество раз повторяется комбинация 1, 0, –1, 0, и на графике $S$=f($J$) можно наглядно убедиться, что значения $S$ совершают бесконечные периодические колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку $S$=0.

Говоря о бесконечной сумме $S$ при конкретных значениях $x$<1, мы будем подразумевать суммы, вычисляемые с точностью персонального компьютера (ПК). Это требует некоторых пояснений. Так, если взять конкретное значение $x$, например, $x$=0,7, то ПК (а точнее – его программа «*Excel*», в которой удобно выполнять подобные исследования) выдаст нам значение $S$=0,0423158973846354000000, т. е. уже за 15-й *значащей цифрой* (за цифрой 4) ПК “пишет” нули, хотя “пляска” цифр, вообще говоря, продолжается до бесконечности. Просто наш ПК, увы, “видит” только первые 15-ть значащих цифр, и

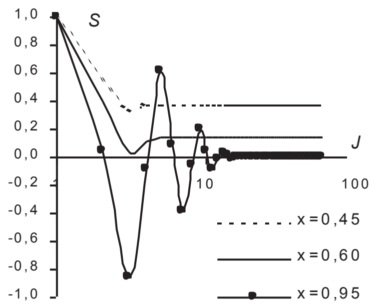

Рис. 12. Сумма Эйлера для 3-х чисел

“глазами” такого ПК при $x$=0,7 невозможно “увидеть” дальше 17-го слагаемого в сумме Эйлера, поскольку уже при $J^*$=17 ($E$=100) получим слагаемое $x^E=0,7^{100}=3,234\ldots\cdot 10^{-16}$, т. е. первая значащая цифра (здесь цифра 3) у этого слагаемого стоит на 16-ом месте после запятой и дальше (с ростом $J$) сумма $S$ для ПК не меняется (он просто “обрезает” все цифры в значении $S$ дальше 15-й позиции). Выше мы обозначили символом $J^*$ – номер слагаемого, при котором в сумме $S$ появилось 15 достоверных значащих цифр после запятой, т. е. для данного $x$ при $J>J^*$ меняться будут цифры стоящие дальше указанной позиции (и наш ПК этого не “увидит”). При изменении $x$ от нуля номер $J^*$ также начинает увеличиваться, причем сначала экспоненциально $J^*\approx 5,1187\exp(1,6735x)$, но потом это происходит, вероятно, по закону $J^*\approx\pi/(1-x)$, т. е. при $x\to 1$ номер $J^*$ стремительно уходит в бесконечность. Из сказанного должно быть ясно, что наш ПК вычисляет достоверно сумму Эйлера только на отрезке $0\le x\le 0,7$.

Чтобы наглядно представить, как бесконечная сумма Эйлера приходит к своему пределу при конкретных $x$, построим график зависимости $S$ от $J$ (см. рис. 12). Мы видим, что для $x$=0,6 уже при $J^*$=14 сумма $S$, с точки зрения ПК, достигла своего предела (на графике появился горизонтальный «хвост»), а вот для $x$=0,95 колебания суммы $S$ (почти “вокруг” нуля) гораздо больше. При $x\to 1$ амплитуда колебаний суммы Эйлера «сходится» к нулю только в загадочной бесконечности.

Но как нам вычислить сумму Эйлера для относительно больших $x$ (для $x>0,7$)? Быть может здесь нам поможет произведение Эйлера ($\Pi$), поскольку $\Pi=S$. Оказывается, действительно, ПК гораздо “легче” вычислять $\Pi$, чем $S$. Так, для $x$=0,997693 при $J^*$=15254 сомножитель равен $(1-x^{15254})$=0,9999999999999990000, т. е. после запятой идет 15-ть девяток, а вот дальше, увы, ПК «пишет» нули и все сомножители с номерами $J>J^*$ будут равны 1, а произведение сомножителей перестанет уменьшаться, “застыв” на значении $\Pi=2,59\ldots\cdot 10^{-308}$. Кстати, последнее число – это предел возможностей для ПК, м**е**ньшие числа ПК не различает, они все для него равны нулю.

Выше мы «незаметно» ввели понятие о номере сомножителя (далее для краткости – *члена*) произведения $\Pi$, причем этот номер $J$=1, 2, 3, … совпадает с показателем степени у каждого члена, т. е. $J$-й член произведения Эйлера имеет вид $(1-x^J)$. Символом $J^*$ мы обозначили номер члена, при котором для данного $x$ в произведении $\Pi$ появилось 15 достоверных *значащих цифр* после запятой, т. е. при $J>J^*$ меняться будут цифры стоящие дальше указанной позиции (и наш ПК этого не “увидит”). При изменении $x$ от нуля номер $J^*$ также увеличивается и при $x>0{,}8$, вероятно, по закону $J^*\approx\pi^3/(1-x)$, т. е. при $x\to 1$ номер $J^*$ стремительно уходит в бесконечность.

Рис. 13 позволяет увидеть, как бесконечное произведение Эйлера приходит к своему пределу при конкретных $x$. Мы видим, что для $x=0{,}95$ уже при $J^*\approx 700$ произведение $\Pi$ с точки зрения ПК достигло своего предела (на графике появился горизонтальный «хвост»), причем $\Pi$ уменьшалось плавно без всяких колебаний, присущих $S$ (поэтому ПК легче работать с $\Pi$, нежели с $S$). В дальнейшем, исследуя произведение Эйлера, не будем забывать, что, по сути, мы исследуем и сумму Эйлера.

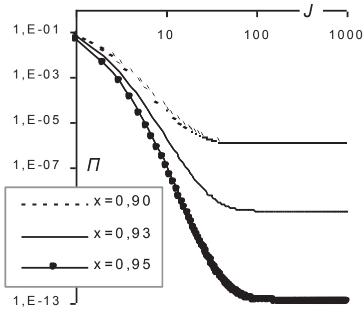


Рис. 13. Произведение Эйлера

Итак, теперь мы можем найти произведение (сумму) Эйлера на отрезке $0\le x\le 0{,}997693$. Данная зависимость представлена на рис. 14, где кружком обозначена *точка перегиба* функции $\Pi=f(x)$ в которой, вероятно, $x=\Pi$ (так, при $x=0{,}41960035$ имеем $\Pi=0{,}419600356\ldots$, т. е. почти равный $x$). На рис. 14 мы видим, что вплоть до $x=0{,}68$ функция $\Pi=f(x)$ – это почти прямая, уходящая вниз, и, действительно, уравнение прямой линии

$$\Pi^* \equiv 1- e^{1/3}\cdot x \approx 1- 1{,}3956\cdot x \ , \qquad (70)$$

довольно хорошо описывает убывание произведения (суммы) Эйлера. На рис. 15 представлена относительная погрешность $О\Pi\equiv(\Pi-\Pi^*)/\Pi^*$ и точками обозначены значения $x\approx 0{,}248575$; $0{,}44039$; $0{,}612$; $0{,}667325$ (которые могут быть «особыми», «интересными» по целому ряду причин).

Функцию $\Pi=f(x)$ можно назвать *масштабным фактором*, который с ростом аргумента $x$ уменьшается по вполне определенному закону, изображенному на рис. 14. При выводе своего закона (41) Эйлер «сконструировал» параметр, имеющий вид $H\equiv(1/\Pi)\cdot(d\Pi/dx)$ (см. формулу 45). т. е. это относительная скорость изменения масштабного фактора. Таким образом, параметр $H$ является неким аналогом *параметра Хаббла* (важнейший параметр, характеризующий расширение нашей Вселенной), поэтому мы так его и назовем “параметр Хаббла” (в кавычках для мира чисел). Из формулы (46) следует, $h\equiv -x\cdot H$, т. е. здесь мы просто увели-

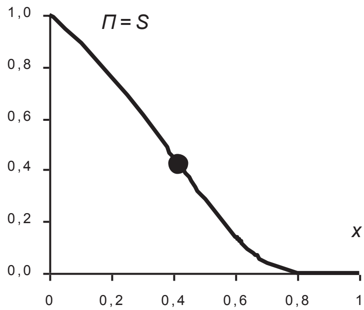


Рис. 14. Функция $\Pi= S =f(x)$

чиваем «параметр Хаббла» в $x$ раз и делаем его положительным (т. к. из формулы (45) следует, что $H<0$). На рис. 16 показано как ведёт себя модуль «параметра Хаббла» и параметр $h$: при $0{,}2<x<0{,}65$ они растут по экспоненте

$$\mathrm{abs}(H) \approx 0{,}7130\cdot\exp(4{,}2038\cdot x); \qquad h \approx 0{,}0987\cdot\exp(6{,}6891\cdot x), \qquad (71)$$

а затем, при $x\to 1$, они сливаются ($H\to -h$) и «взрываются» – «параметр Хаббла» стремительно уходит в бесконечность (со знаком «минус»!). Причем численно «параметр Хаббла» стремиться к сумме богатств всех натуральных чисел (см. формулу 48).

Что происходит с суммой Эйлера при $x>1$? Будем судить об этом, опять-таки глядя на произведение Эйлера. Если коротко, то можно сказать, что произведение $\Pi$ «взрывается» в бесконечность (расходится и числового предела не имеет). Если чуть подробней, то можно сказать следующее.

Пусть $n=1, 2, 3, \ldots$– это порядковый номер «текущего» значения $\Pi$ (который всегда совпадает с показателем степени $x^n$) при конкретном значении $x$. Тогда в бесконечном ряду «текущих» значений $\Pi$ можно отдельно рассмотреть ряд всех отрицательных значений $\Pi 1=-\mathrm{f}(n)$, где $n=1, 3, 5, \ldots$и ряд всех положительных значений $\Pi 2=\mathrm{f}(n)$, где $n=2, 4, 6, \ldots$, т. е. по модулю все значения «лежат» на одной и той же кривой, описываемой функцией $\mathrm{f}(n)$, вид которой зависит от конкретного $x$. Поэтому дальше будем говорить только о ряде $\Pi 2$ для чётных $n$ (ряд $\Pi 1$ – «почти» зеркально повторяет его).

При $1<x<2^{0,5}$ ряд $\Pi 2$ имеет «яму», т. е. сначала убывает, и только пройдя дно «ямы», начинает свой бесконечный рост. При $x\to 1$ («справа» от 1) дно «ямы» находится в бесконечности.

При $>2^{0,5}=1{,}4142\ldots$ у ряда $\Pi 2$ «яма» исчезает и он устремляется в бесконечность примерно по следующему закону

$$\Pi 2 \approx \exp(A\cdot n^B)\,, \qquad (72)$$

где $A \approx 0{,}8686\cdot\ln x$ и $B \approx 2\cdot(\ln x)^{-0{,}03225}$ . Так, при $x=10^{61}$ ситуация, вероятно, примерно такова: $\Pi 2\approx\exp(122\cdot n^{1{,}7052})$, откуда для $n=1$ имеем $\Pi 2\approx 10^{53}$, а для

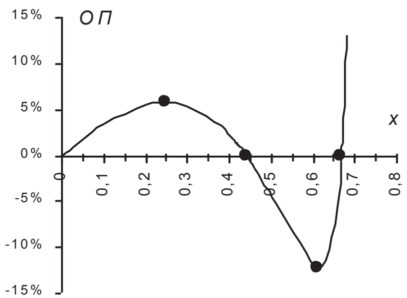

Рис. 15. Погрешность функции $\Pi^*=\mathrm{f}(x)$

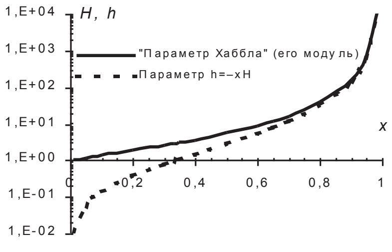

Рис. 16. Изменение модуля «параметра Хаббла»

$n$=2 имеем $П2 \approx 10^{172}$ – вот почему мы говорим о «взрыве» $П2$, а по сути – о «взрыве» произведения Эйлера $П$.

**Аналогия 22**. Выше была предпринята попытка “увидеть” в мире чисел *параметр Хаббла* (другая попытка приведена в [6]). Значение параметра Хаббла для науки трудно переоценить, ибо она свидетельствует, что наша *Вселенная расширяется* – галактики “разбегаются” друг от друга (как изюминки в разбухающем на дрожжах тесте). Означает ли это, что расширяется само *пространство-время* (в т. ч. физические тела и мы с Вами)? Ответа пока нет, но над эти вопросом думали лучшие умы, вот, например, мнение величайшего французского ученого Анри Пуанкаре (1854–1912): “Часто делалось замечание о том, что если бы все тела во Вселенной начали одновременно и в одинаковой пропорции расширяться, то у нас не было бы никаких средств заметить это…После этого расширения мир продолжал бы свой ход и ничто не говорило бы нам, что произошло столь важное событие… Пространство может подвергнуться любой деформации, и ничто не откроет нам этого, если наши инструменты испытали ту же самую деформацию… Если бы все процессы в природе замедлились и если бы то же самое произошло с нашими часами, то мы бы ничего не заметили…» [13].

Учитывая все наши аналогии (“подтверждающие” *космологию чисел*), можно сказать, что пространство-время в некотором смысле также “дискретно” и “расширяется” (“подобно” ряду натуральных чисел: 1+1+1+1+1+1+…). Однако это довольно туманное утверждение мало что дает человеку, для которого вера в Число пока не стала своеобразной новой “*религией*”.

## 2.12. ИССЛЕДОВАНИЕ I-СУММЫ

Если из ряда натуральных чисел «изъять» бесконечный ряд Эйлера $E$=1, 2, 5, 7, 12, 15, …, то у нас останется также бесконечный ***ряд I***=3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, …. Можно также составит, скажем, ***I-сумму***:

$$IS \equiv 1 - x^3 - x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} - x^{13} - x^{14} - x^{16} - \ldots, \qquad (75)$$

где $0 \le x \le 1$, а показатели степени – это ряд $I$, причем правило знаков у слагаемых “сохраняет” закономерности правила знаков в сумме Эйлера. Иначе говоря, $I$-сумма составлена «по образу и подобию» суммы Эйлера (но вот какое *произведение* равно $I$-сумме?). В связи с этим, мы вправе ожидать от $I$-суммы неких необычных свойств, возможно, не менее значимых, чем свойства суммы (произведения) Эйлера. Именно поэтому мы исследуем $I$-сумму, «сконструированную» нами благодаря гениальному Эйлеру.

Нетрудно видеть, что все слагаемые в $I$-сумме с точки зрения знака перед ними можно разбить на группы: в первой группе ($G$=1) только одно положительное слагаемое – единица; во 2-й группе ($G$=2) – два отрицательных слагаемых; в 3-й группе ($G$=3) – пять положительных слагаемых и т. д. Короче говоря, в *нечетных группах* (с номерами $G$=1, 3, 5, 7, …) – все слагаемые положительные, а в четных группах (с номерами $G$= 2, 4, 6, 8, …) – все слагаемые отрицательные. Начиная со 2-й группы, количества слагаемых ($K_g$) в группах образуют бесконечную арифметическую прогрессию: 2, 5, 8, 11, 14, …, поэтому для любой группы ($G \geq 2$) мы можем записать

$$Kg = 3 \cdot G - 4 \quad . \tag{76}$$

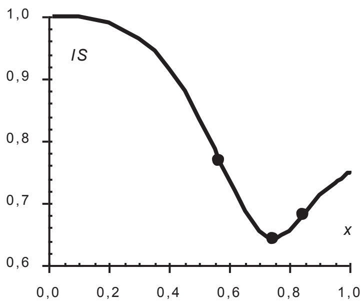


Рис. 17. Закон изменения *I*-суммы

*Важное правило*: в *I*-сумме показатель степени у любого слагаемого, вообще говоря, на 1 больше показателя степени предыдущего слагаемого. Исключения составляют только первое и ($G$–1)-ое слагаемое в любой $G$-й группе, у которых показатель степени больше предыдущего на 2 единицы.

Таким образом, выше мы полностью описали «архитектуру» *I*-ряда и *I*-суммы и теперь можем найти закон изменения *I*-суммы: $IS$=f($x$), который показан на рис.17. Жирные точки на графике: $x$=0,568… ($IS$=0,7674…) – точка первого перегиба; $x^*$=0,7483018..…($IS$=0,6434…) – точка минимума (дно «ямы»); $x$=0,8443…($IS$=0,6806…) –точка второго перегиба. При $x \to 1$ наша *I*-сумма устремляется к значению 3/4=0,75 по следующему закону

$$IS \approx 3/4 + \pi^{-1} \cdot \ln x \approx 0,75 + 0,3183 \cdot \ln x \ . \tag{77}$$

Функцию $IS$=f($x$) можно назвать *масштабным фактором*, который с ростом аргумента $x$ изменяется по вполне определенному закону, изображенному на рис. 17. По аналогии с суммой Эйлера (а точнее, *П* – см. гл. 2.8) мы можем и для *I*-суммы найти "параметр Хаббла" $H \equiv (1/IS) \cdot (dIS/dx)$, а также параметр $h \equiv -x \cdot H$. На рис. 18 показано как ведёт себя модуль «параметра Хаббла» и параметр $h$ для *I*-суммы. Таким образом, поведение нашей *I*-суммы и «параметра Хаббла» для неё «сложнее», чем для суммы Эйлера.

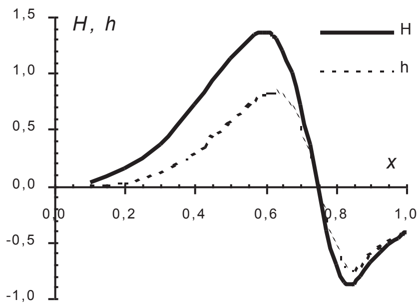


Рис. 18. «Параметр Хаббла» для *I*-суммы

Нетрудно убедиться, что *I*-сумма всегда превосходит сумму Эйлера, причем на отрезке $0 < x < x^*$

(вплоть до дна «ямы») соотношение $IS/S$ растет от 1 до 39,7319… и этот весьма быстрый рост можно описать, скажем, так

$$IS/S \approx \exp[(3\pi)^{-1}\cdot\exp(F\cdot x)] \quad , \qquad (78)$$

где $F$=4,669201… – число Фейгенбаума. Относительная погрешность формулы (78) около ±10% вплоть до дна «ямы», в которой $IS/S$, можно сказать, “взрывается”, устремляясь к бесконечно большому значению (т. к. $S\to 0$).

Любопытно, что если в формуле (75) у всех слагаемых, кроме первого (кроме единицы), поменять знак на противоположный, то мы получим некую новую сумму, скажем, $IS$^. Так вот, оказывается, что для любого значения $x$ будет выполняться следующее равенство: $IS$^ + $IS$ =2, т. е. сложение числовых пределов двух бесконечных сумм всегда будет давать число 2.

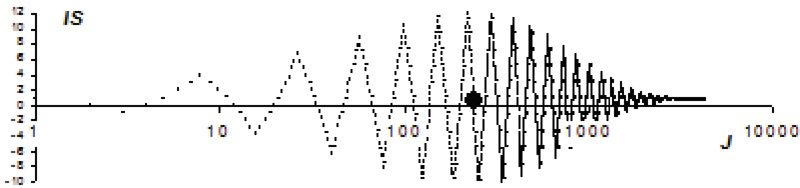


Рис. 19. Изменение текущей $I$-суммы для $x$=0,998 (график «обрезан» при $J$=4400)

Если в характере сходимости суммы Эйлера (см. рис. 12), и тем более произведения Эйлера (см. рис. 13) мы не обнаружили ничего необычного, то характер сходимости $I$-суммы заслуживает более пристального внимания. Пусть $J$=1, 2, 3, …– это порядковый номер слагаемого в $I$-сумме (т. е. у первого слагаемого – единицы имеем $J$=1). Тогда для $0<x<0{,}97$ можно сказать, что с ростом номера $J$ текущая $I$-сумма сходится с пределу (для каждого $x$ он, разумеется, свой) после некоторых колебаний. Причем с ростом $x$ эти колебания становятся всё более затяжными, интенсивными, и зрительно на графике $IS=\varphi(J)$ они воспринимаются как “затухающие” колебания. А вот при $x>0{,}97$ уже становится заметным овал “*ядра*”, образованного текущими значениями $I$-суммы (т. е. при текущих $J$ для данного $x$). На рис. 19 показано ядро для $x$=0,998, а жирной точкой обозначен *центр ядра* ($J_я$) – номер $J$, при котором текущая $I$-сумма достигает максимального значения ($J_я$=223; $IS_я$=11,8875…). Затем текущая сумма убывает, “стягиваясь” к своему пределу (“хвост” на графике): после $J$=18475 имеем $IS$=0,7493…, и при б**о**льших

$J$ изменения суммы «уходят» за 15-ю цифру после запятой и персональный компьютер (ПК) их уже «не видит».

С ростом $x$ центр ядра «уходит» вправо (к бесконечности) по закону

$$J_я \approx 0{,}5\cdot(1-x)^{-1}; \qquad IS_я \approx 0{,}5\cdot(1-x)^{-0{,}5}\ , \qquad (79)$$

причем для $J_я$ имеем abs($ОП$)<±20%, а для $IS_я$ имеем $ОП$<10%. Например, при $x$=0,999999999999999 (15 девяток) получаем $J_я \approx 5\cdot 10^{14}$; $IS_я \approx 1{,}58\cdot 10^{7}$.

При $x$=1 центр ядра находится в таинственной бесконечности, причем горизонтальная ось колебаний текущих значений $I$-суммы проходит через точку $IS$=3/4=0,75, поэтому мы и считаем, что здесь $IS$=3/4 (по аналогии с суммой Эйлера при $x$=1). При $x$=1 трудно себе представить как обязательный для ядра «хвост» может находиться дальше самой бесконечности, поэтому можно сказать, что при $x$=1 наша $I$-сумма в логарифмической шкале по оси абсцисс просто «взрывается» (в обычной шкале этого не видно).

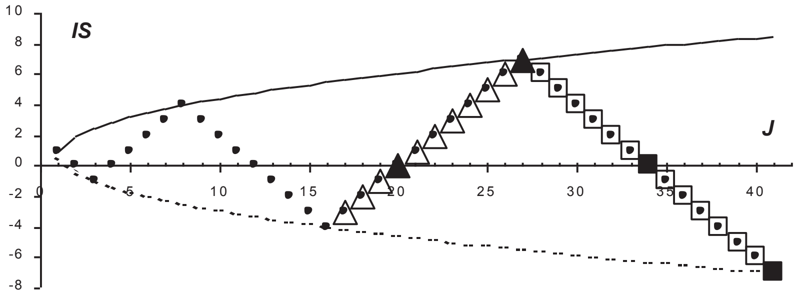


Рис. 20. Поведение $I$-суммы при $x$=1 (точки – это $J$-ые члены суммы)

Ниже мы рассмотрим поведение $I$-суммы при $x$=1.

На рис. 20 точками показаны первые текущие значения $I$-суммы ($J$=1, 2, 3,…, 41), которые мы будем называть далее *членами суммы*. Треугольниками обведены члены типичной нечетной группы (в данном случае $G$=5), а квадратами – типичной четной группы ($G$=6). Пусть $J_s$ и $IS_s$ – это координаты последних членов нечетных групп (верхний черный треугольник), которые «лежат» на линии максимума (сплошная тонкая линия), а $Ji$ и $ISi$ – это координаты последних членов четных групп (нижний черный квадрат), которые «лежат» на линии минимума (пунктирная тонкая линия). Тогда

$$ISs = (3/4)\cdot(1+\sqrt{D}) \quad \text{и} \quad ISi = (3/4)\cdot(1-\sqrt{D}), \quad \text{где} \quad D = (8/3)\cdot J - (23/9) \ , \qquad (80)$$

причем те значения $J$, при которых $ISs$ и $ISi$ – целые числа, будут номерами $Js$ и $Ji$ (последних членов в группах). При $J\to\infty$ значения $ISi$ являются почти зеркальным отражением $ISs$ (всё тот же *закон квадрата*, см. аналогию 3):

$$ISs \approx (3/4)\cdot\sqrt{8/3}\cdot\sqrt{J} \approx 1{,}2247\cdot\sqrt{J} \ . \qquad (81)$$

У произвольной группы ($G$=1, 2, 3, …) номер последнего члена равен

$$J = (3/2)\cdot G^2 - (5/2)\cdot G + 2 \ . \qquad (82)$$

В каждой группе начиная со второй ($G\geq2$) существует *нулевой член* (на рис. 20 это черный треугольник и квадрат на оси абсцисс), номер которого:

$$J0i = (3/2)\cdot G^2 - 4\cdot G + 4 \qquad \text{(для четных } G\text{=2, 4, 6, …);}$$

$$J0s = (3/2)\cdot G^2 - 4\cdot G + 5/2 \qquad \text{(для нечетных } G\text{=3, 5, 7, …);} \qquad (83)$$

Пусть $Ks$ и $Ki$ – это соответственно количество всех положительных и отрицательных членов (нарастающим итогом) от первого члена (единицы) и до данного члена с номером $J$=2, 3, 4, 5, …, т. е. в конце любой группы $G\geq2$ будет выполняться равенство $J = Ks + Ki + (G-1)$. Отношение $Ks/Ki$ с ростом $J$ совершает затухающие колебания, причем “пики” этих колебаний (8/1=8; 21/8=2,625; 40/21≈1,905 и т. д.) приходятся на нулевые члены в четных группах $G$ = 4, 6, 8, …. Более того, при данных $G$ = 4, 6, 8, …. для нулевых членов $J0i$ можно указать точные значения $Ks$ и $Ki$, а именно:

$$Ks = (3/4)\cdot G^2 - G \quad \text{и} \quad Ki = Ks - 3\cdot G + 5 \quad . \qquad (84)$$

Таким образом, при $J\to\infty$ (а значит и $G\to\infty$) отношение $Ks/Ki$ асимптотически стремится к единице, но всегда положительных членов будет больше, чем отрицательных («на» нулевых членах $J0i$ четных групп).

Итак, мы исследовали основные свойства $I$-ряда ($I$-суммы), они довольно занятны, но их практическая польза пока ускользает от нас. Как мы знаем, ряд Эйлера ($E$) играет решающую роль в “наиболее необычайном законе чисел»: $\sigma(N)=\sum Z\cdot\sigma(N-E)$, то есть ряд $E$, в некотором смысле, «генерирует» богатство для любого числа $N$ (для всех $N$ образуя, скажем, множество всех богатств $M$). В принципе можно «сконструировать» аналогичные суммы и с $I$-рядом, «генерируя» некое множество $M^*$ из целых чисел, однако, вероятность того, что полученные числа являются *богатством* будет близка к вероятности $Ps$ (но никак не больше, см. формулы 38, 39, 40). Возможно, множества $M$ и $M^*$ (всех богатств и псевдобогатств) имеют любопытные связи, но выяснение этого требует немалых усилий.

## 2.13. ЕЩЁ РАЗ О ПРОСТОМ ЧИСЛЕ

Известный шотландский математик Колин Маклорен (1698–1746) доказал, что если линию разбить на любое количество частей, то произведение этих частей будет максимальным, когда все части равны между собой. Иначе говоря, если $L = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \ldots \neq x_n$ (все разные), тогда

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n < (L/n)^n \ . \qquad (85)$$

Если мы из этого неравенства извлечем корень $n$-й степени, то получим интересную и важную «*теорему о среднем*»: среднее геометрическое любых положительных чисел всегда меньше их среднего арифметического.

Теорема о среднем может быть высказана в двух различных формах: 1) произведение $\boldsymbol{n}$ положительных величин с данной суммой $\boldsymbol{L}$ становится максимальным, когда все эти величины равны; 2) сумма $\boldsymbol{L}$ положительных величин с данным произведением становится минимальной, когда все эти величины равны. Как видим, речь идет о максимуме и минимуме. В связи с эти можно вспомнить такие слова Эйлера: «Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума»[1]. Дело в том, что теорему о среднем можно интерпретировать, например, в виде более «наглядных» утверждений: площадь прямоугольника с данным периметром $\boldsymbol{L}$ становится максимальной, когда прямоугольник есть *квадрат*; из всех ящиков (прямоугольных параллелепипедов) с данной площадью поверхности *куб* имеет наибольший объем; из всех 3-мерных тел с данной площадью поверхности *шар* имеет наибольший объем. Как известно, природа весьма “любит” придавать телам форму шара: галактики (с учетом “темной” материи), звезды (в т. ч. Солнце), планеты, и даже… наши головы и многие фрукты, овощи. Кстати, природа позаботилась, чтобы “правильные” фигуры (шар, квадрат, куб и т. д.) мозг человека воспринимал как верные признаки совершенства, гармонии.

К удивительным следствиям *теоремы о среднем* (85) мы попробуем добавить ещё одно не менее интригующее. Для этого будем считать, что $x_1 = 1 - x^1$; $x_2 = 1 - x^2$; $x_3 = 1 - x^3$; … $x_n = 1 - x^n$, причем $0 \leq x < 1$. Имея это в виду, прологарифмируем обе части неравенства (85) и в итоге получим выражение:

$$P^* \equiv n \cdot \ln n < n \cdot \ln(n - L^*) - \ln \Pi^* \ , \qquad (86)$$

где $P^*$ – примерное значение простого числа $P$, порядковый номер которого в мире №2 равен $n$ (см. гл.2.4 и [6]), причем при $n=1$ будем считать $P=2$;
$L^* \equiv x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ ; $\Pi^* \equiv (1 - x^1) \cdot (1 - x^2) \cdot (1 - x^3) \cdot \ldots \cdot (1 - x^n)$ – некие ***поправки***; $n = 1, 2, 3, \ldots$ – *бесконечный* ряд чисел. Ясно, что при $n \to \infty$ величина $\Pi^*$ устремляется к произведению Эйлера $\Pi$ (см. формулу 43).

Поскольку приближение $P^*$ меньше реального $n$-го простого числа $P$ (см. [6]), то можно ожидать, что полученные нами поправки $L^*$ и $\Pi^*$ будут улучшать известную формулу $P \sim n \cdot \ln n$. И действительно, когда мы берем

[1] Знаменитый французский писатель, философ и историк Вольтер (1694–1778), современник Эйлера, возражал ему, что богу необязательно быть бережливым буржуа, он может хотеть, чтобы и его считали щедрым аристократом, не жалеющим средств на усовершенствование мира. Слова Вольтера полны “великолепия”, но, скорее всего, за ними – *пустота*, что весьма характерно даже для великих *гуманитарных* личностей, далеких от математики.

$x$=0,999999999999999 (15 девяток после запятой), то относительная погрешность (*ОП*) нашего выражения (86) в 3,2872÷1,31 раза меньше, чем *ОП* формулы $P \sim n \cdot \ln n$. При $x=0$ поправки попросту исчезают: $L^*=0$ и $\ln \Pi^*=0$, а вот при $x=1$ получаем $L^*=n$ и $\Pi^*=0$, но логарифма нуля ($\ln \Pi^*=\ln 0$) не существует (при $x \to +0$ логарифм натуральный стремится к «минус» бесконечности медленнее любой степени $1/x$). Таким образом, при $x \to 1$; $n \to \infty$ имеем: $L^* \to +\infty$; $\ln \Pi^* \to -\infty$. Возможно, имеет место следующее соотношение между поправками (во всяком случае это справедливо для $0<x<0{,}98$):

$$L^* \approx (A \cdot x - B) \cdot \ln \Pi^*, \qquad (87)$$

где $A \approx 0{,}3742$ и $B \approx 0{,}9949$ (линия тренда). Быть может, следует брать $A=3/8=0{,}375$ и $B=1$, или отношение $L^*/(-\ln \Pi^*)$ стремится к «золотому сечению» (0,618), но в любом случае обе поправки явно взаимосвязаны. При $x \to 1$ и $n \to \infty$ выражение (86) можно переписать в следующем виде

$$P \sim \ln[(n - C \cdot \ln \Pi)^n \cdot \Pi^{-1}] \;, \qquad (88)$$

где $C$ – числовая константа (близкая к 0,62?); $\Pi$ – произведение Эйлера.

Глядя на формулу (88), мы можем сделать следующий вывод: в непосредственной близости параметра $x$ к *единице* (слева от неё) – произведение Эйлера, стремящееся к *бесконечно малой* величине, в некотором смысле «перебирает» (при $n$=1, 2, 3, …) всё множество простых чисел, «последнее» из которых стремится к *бесконечно большой* величине.

**Аналогия 23**. Из последнего абзаца «следует», что единица «заключает в себе» нечто б***о***льшее, чем просто бесконечную сумму бесконечно малых величин. Возможно, единицу следует понимать как некую «горловину» (размером в 1 *эви*) между двумя вселенными (бесконечно малых и бесконечно больших величин), каждая из которых одинаково важна, сложна, прекрасна, и которые неразрывно связаны между собой, образуя единое целое («замкнутое» само на себя?, что допускается физиками в качестве гипотезы).

По сути дела, речь идет опять (см. аналогию 14 и [6]) о таинственном «соседстве» единицы (нуля) и бесконечности. Причем именно об этом так же свидетельствуют: математические рассуждения (вывод формул) Эйлера в части его «наиболее необычайного закона чисел» (см. гл. 2.8); исследования суммы Эйлера (гл. 2.9÷2.11), исследования I-суммы (гл. 2.12).

## 2.14. «ВСЁ ЕСТЬ ЧИСЛО» (ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ)

Древнегреческому мыслителю Пифагору[1] (576–496 гг. до н. э.) приписывают ряд любопытных высказываний: «Всё есть число»; «Самое мудрое – число»; «Бог – это число»; «Числу же все подобно»; «Все происходит не из

[1] Пифагор был первым, кто назвал свои рассуждения о смысле жизни *философией* (любомудрием). Пифагор («убеждающий речью») – это не имя, а прозвище за то, что он высказывал истину так же часто, как дельфийский оракул. После его лекций тысячи учеников образовали свое государство «Великая Греция», жившее по высоким законам и правилам Пифагора. Его учение в частности уравновешивало всех свободных граждан по меркам высших духовных ценностей, что серьезно беспокоило власть имущих, которые в итоге коварно убили мудреца.

числа, но сообразно с числом, ибо в числе – первичная упорядоченность...» и т. п. Дело в том, что у Пифагора в основе всего лежало учение о числах, которое развертывалось в учение о космосе как числе, о вещах как числах, о душах как числах и, наконец, об искусстве как числе (концепция числового “канона” в скульптуре, в музыке). Оригинальная арифметика Пифагора придавала пластичный и жизненный смысл каждому числу. Так, «1» – это абсолютная и неделимая единичность, а точка была единицей положения, причем пространство представлялось как сумма точек (то есть дискретным, если следовать современной терминологии физиков). Число «2» символизировало полярность во Вселенной: свет – тьма, женское – мужское, жизнь – смерть, добро – зло, правое – левое и т. д. Число «3» – это первое оформление бесконечности и т. д. Число «7» считалось мироправящим (божественным), требующим особого почитания, оно играло “космическую” роль. Число «7», судьба и kairos (критическое время) было одним и тем же.

Не исключено, что за подобным восприятием чисел может скрываться нечто большее, чем просто наивные представления древних греков. Например, можно предположить, что о некой тайне чисел молодому Пифагору поведали жрецы в Египте, где он обучался два десятка лет. А эти жрецы, как известно, были удивительно «продвинутыми» для той далекой эпохи, и многие современные историки даже склоны к мысли, что изначальные сведения жрецы получили от представителей некой высокоразвитой цивилизации. Таковой могла быть и Атлантида якобы исчезнувшая в водах океана у западного побережья Африки около 12 тысяч лет назад. Короче говоря, не исключено, что взгляды Пифагора на числа – это бледная «тень» некой фундаментальной Истины, сообщенной однажды *кем-то* нашим далёким предкам, но не постигнутой ими из-за значительной разницы в интеллекте.

Есть правдоподобные гипотезы, согласно которым первые высокоразвитые цивилизации могли существовать на нашей планете более 17 тысяч лет назад: в Антарктиде (эту метрополию якобы погубило смещение земной коры); в Андах, в Центральной Америке, в долине Нила (как сателлитные цивилизации метрополии). Причем главным аргументом их высокой интеллектуальности выступают глубокие познания в математике, иначе просто невозможно объяснить существование точных географических карт и многочисленных астрономических «обсерваторий» в древнем мире. [11]

Совсем недавно физик-атомщик В. В. Бубнёнков обосновал гипотезу, согласно которой каждые 12 тысяч лет из-за воздействия Солнца на нашей планете происходит изменение геофизических параметров, приводящее к глобальным катастрофам [31]. Именно они могли погубить протоцивилизации и Атлантиду, а теперь, спустя 12 тысяч лет, человеческая цивилизация очередной раз оказалась на пороге неизбежной гибели (в течение ближайших 70 лет, об этом говорят и другие научные гипотезы). И что поразительно, если это, действительно, произойдет, то самое сокровенное, что мы сможем передать потомкам, – это опять-таки слова: «Всё есть Число…».

А дело в том, что самые глубокие научные истины, полученные человечеством к настоящему времени, можно понять исключительно на языке математики. Например, вся теоретическая физика, успешно объясняющая и микромир, и далекий космос, – это сплошная суперсложная математика, причем ученые давно уже отказались от попыток наглядно представить себе то, что скрывается за формулами, уж слишком далеко это лежит за гранью человеческого воображения. Так, нам, живущим в трехмерном измерении (с длиной, шириной и высотой) просто не дано представить пространство с 10-ю или 26-ю измерениями, хотя ученые на языке формул оперируют и такими понятиями. Короче говоря, самые фундаментальные достижения естественных и точных наук в настоящее время формулируются на языке невероятно сложной математики (увы, почти недоступной для большинства непосвященных). Кроме того, математика – это единственная область знаний, где истины открывают, а не выдумывают, причем только эти истины являются абсолютными. Ведь даже фундаментальные законы физики – это всего лишь очередные приближения к Истине: пройдет время, и они окажутся частным случаем ещё более глубоких законов природы

Современная математика чудовищно сложна, однако всё не столь безнадежно и для нас с Вами, едва знакомых с точными науками. Как не странно, но есть основания думать, что самые фундаментальные Истины могут оказаться удивительно простыми. Великий французский ученый Анри Пуанкере в связи с этим писал: «Изучая историю науки, мы замечаем два явления, которые можно назвать взаимно противоположными: то за кажущейся сложностью скрывается простота, то, напротив, видимая простота на самом деле таит в себе чрезвычайную сложность»[13]. Но независимо от того, какая из этих ситуаций реализуется на самом деле, в науке, по мнению Пуанкаре, в любом случае следует предпочесть сначала простейшее обобщение, т. е. надо исходить из гипотезы простоты природы. Именно такой подход позволяет нам всерьёз говорить о космологии чисел, об аналогиях между миром чисел и физическим миром, которые неизбежно приводят нас к новому (или истинному?) пониманию слов Пифагора: «Всё есть Число».

## ЗАКОН ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАНКА

Всего лишь за несколько недель до начала XX века немецкий физик-теоретик Макс Планк (1858–1947)[1] открыл закон, который положил начало всей современной *квантовой физике*. Речь идет о *законе излучения Планка*.

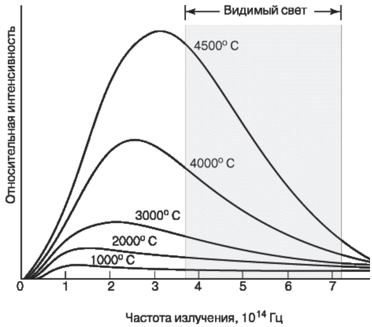


Рис.21. Закон излучения Планка

Планк сделал это эпохальное открытие, пытаясь найти теоретическое объяснение спектра излучения, испускаемого нагретыми телами. Такое излучение испускают все тела, состоящие из большого числа атомов, при любой температуре выше абсолютного нуля ($T$ = 0°К ≡ –273,15°С), однако оно становится заметным лишь при температурах, близких к температуре кипения воды (100° С) и выше нее. Кроме того, это излучение охватывает весь спектр частот от радиочастотного диапазона до инфракрасной, видимой и ультрафиолетовой областей. В области видимого света излучение становится достаточно ярким лишь примерно при 550° С. Зависимость интенсивности излучения за единицу времени от частоты характеризуется спектральными распределениями, представленными на рис. 21 для нескольких значений температуры. Интенсивность излучения при данном значении частоты есть количество энергии, излучаемой в узкой полосе частот в окрестности данной частоты. Площадь «горки» пропорциональна полной энергии, излучаемой на всех частотах. Причем, эта площадь быстро увеличивается с повышением температуры.

Планк хотел вывести теоретически функцию спектрального распределения и найти объяснение двух простых экспериментальных законов:

1) *Закон смещения Вина*, согласно которому частота ($\nu_m$), отвечающая наиболее яркому свечению нагретого тела (т. е. максимальной интенсивности излучения), пропорциональна абсолютной температуре ($T$) тела:

---

[1] Планк прожил почти 90 лет. Ему было 42 года, когда он открыл *квант действия*, за который ему присудили Нобелевскую премию (в 1918 г.). На его глазах происходил расцвет и крушение классической физики, он также видел возвышение и полное поражение родной Германии. В первую мировую войну погиб его сын, умерли две дочери. За участие в заговоре против Гитлера (20 июля 1944) был казнен его старший сын. Во время войны дом Планка был разбомблен, погибла уникальная библиотека, которую он собирал всю жизнь. Сам Планк был однажды засыпан в бомбоубежище, где испытал несколько часов ада, пока его не откопали. Конец его жизни был озарен первым *атомным* взрывом (Хиросима, 6 августа 1945, за секунды убито и ранено свыше 140 тысяч человек), который «породил» его квант действия.

$$\nu_m = (c/\beta)\cdot T \ , \qquad (91)$$

где $c$=2,9979·10$^8$ м/с – скорость света в вакууме, $\beta$=0,2897 см·К – постоянная Вина. Этот закон в 1893 г. открыл немецкий физик В. Вин (1864–1928), ставший в 1911 г. лауреатом Нобелевской премии.

2) *Закон Стефана – Больцмана*, согласно которому полная (по всем частотам) энергия ($E$), излучаемая за одну секунду единичной площадкой поверхности *абсолютно черного тела*, пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры ($T$):

$$E = \sigma\cdot T^4 \ , \qquad (92)$$

где $\sigma$=5,67032·10$^{-8}$ Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$– постоянная Стефана–Больцмана. Этот закон был получен австрийскими физиками Й. Стефаном (в 1879 г. – чисто экспериментально) и Л. Больцманом (в 1884 г. – теоретическим путем).

На основании этих двух законов Макс Планк стремился вывести точное выражение для спектрального распределения излучаемой энергии при любой температуре. Действуя методом проб и ошибок, он нашел формулу, которая хорошо согласовалась с эмпирическими формулами (91), (92) и позволяла вычислять функцию распределения энергии в спектре равновесного излучения при определенной температуре (***закон излучения Планка***):

$$\rho = A\cdot \nu^3\cdot[\exp(B\cdot \nu/T) - 1]^{-1} \ , \qquad (93)$$

где $\rho$ – объемная плотность электромагнитного излучения (энергия излучения в единице объема, или, иначе говоря, относительная интенсивность – см. рис. 1); $\nu$ – частота излучения (она обратно пропорциональна длине волны $\lambda$, а именно: $\nu$=c/$\lambda$); $T$ – абсолютная температура излучающего тела. Причем форма тела, его размеры и природа вещества его стенок – значения не имеют, главное, чтобы соблюдались условия *теплового равновесия*: излучение, попадая на стенки тела, должно отдавать ровно столько энергии, сколько стенки излучают обратно. В идеале это условие выполняется для *абсолютно черного тела*, и именно для него справедлива формула (93). Числовые коэффициенты $A$ и $B$ – это комбинации фундаментальных констант: $A=8\cdot\pi\cdot h/c^3$ и $B=h/k$, где $\pi$=3,14…; $c$ – скорость света в вакууме; $h$=6,6260755 ± 0,00023·10$^{-34}$ Дж·с – *постоянная Планка*, входящая во многие формулы и физические законы, описывающие поведение материи и энергии в масштабах микромира (оценка Планка величины $h$ только на 1% отличалась от её современного значения); $k$=1,380662·10$^{-23}$ Дж·К$^{-1}$ – постоянная Больцмана.

Проблема объяснения полученной функции (93) спектрального распределения свелась Планком к «простой» задаче: нужно было объяснить, каков физический смысл постоянной $h$ или, вернее, произведения $h\cdot\nu$. Гениальное открытие Планка состояло в том, что объяснить ее физический смысл можно, лишь введя в механику совершенно новое понятие «*кванта энергии*». 14 декабря 1900 на заседании Немецкого физического общества Планк в своем докладе показал, что формулу (93) можно объяснить, если предположить, что осциллятор с частотой $\nu$ обменивается энергией с электромагнитным полем не непрерывно, а как бы ступенями, приобретая и теряя свою энергию *дискретными порциями*, *квантами*, каждый из которых равен $h\cdot\nu$. Так Планк положил начало всей современной квантовой механике.

*Квантовая механика* представляет собой общую теорию явлений в масштабе микромира. Открытие Планка выступает ныне как вытекающее из уравнений этой теории важное следствие особого характера. В частности, оказалось, что оно имеет силу для всех процессов обмена энергией, которые происходят при колебательном движении, например в акустике и в электромагнитных явлениях. Им объясняется высокая проникающая способность рентгеновского излучения, частоты которого в 100–10000 раз превышают частоты, характерные для видимого света, и кванты которого имеют соответственно более высокую энергию. Открытие Планка служит основой всей волновой теории материи, имеющей дело с волновыми свойствами элементарных частиц и их комбинаций.

Из теории Максвелла известно, что пучок света с энергией $E$ несет импульс $p$, равный $p=E/c$, где $c$ – скорость света. Если кванты света рассматривать как частицы, каждая из которых имеет энергию $h\cdot\nu$, то естественно предположить наличие у каждой из них импульса $p=h\cdot\nu/c=h/\lambda$. В 1923 г. аспирант Л. де Бройль высказал предположение, что не только свету, но и всем формам материи свойствен корпускулярно-волновой дуализм, выражающийся в соотношениях $E=h\cdot\nu$ и $p=h\cdot\nu/c=h/\lambda$ между характеристиками волны и частицы. Эта гипотеза подтвердилась, что сделало постоянную Планка фундаментальной физической константой. Ее роль оказалась гораздо более значительной, чем можно было бы предполагать с самого начала. Сам Планк как-то пытался ввести свою «безумную» гипотезу в русло классических представлений, однако это ему не удалось. Гипотеза квантов захватывала все новые и новые области, став «царицей» современной физики.

Закон излучения Планка не только положил начало всей современной квантовой физике, но и помог объяснить важное открытие в космологии – *реликтовое (фоновое) излучение*, распределение энергии в спектре которого похоже на распределение энергии в спектре абсолютно черного тела. Реликтовое излучение было обнаружено случайно в 1965 г. американскими радиоастрономами Арно Пензиасом и Робертом Вилсоном (Нобелевская премия в 1978 г.) и сыграло решающую роль в становлении и дальнейшем триумфальном шествии теории «горячей» Вселенной.

Существование реликтового излучения объясняется следующим. Около 10–15 млрд. лет назад произошел Большой взрыв: наша Вселенная, занимавшая неизмеримо малый объем (*сингулярность*, о которой науке ничего не известно), начала расширяться с колоссальной скоростью, во много раз превышающей скорость света. Неразделимое тогда *пространство-время-веще-*

*ство-излучение* (в условиях универсального взаимодействия) имело температуру порядка $10^{32}$ градусов и плотность порядка $10^{94}$ г/см$^3$. В какой-то момент, но не позже $10^{-43}$ секунды после Большого взрыва, от универсального взаимодействия «отщепилась» гравитация. Вселенная, состоящая из фотонов, нейтрино и кварков, продолжала раздуваться. Энергично взаимодействуя с излучением, материя препятствовала его свободному расширению, играя роль ящика с полностью поглощающими стенками (т. е. играя роль *абсолютно черного тела*). При этом распределение интенсивности излучения по частотам полностью определялось температурой стенок в соответствии с законом Планка (93). Поскольку ящик раздувался (объем Вселенной увеличивался), то объемная плотность энергии ($\rho$, или относительная интенсивность), заключенного в нем излучения, – падала, то есть падала частота излучения ($\nu$) и температура (см. рис. 21). В расширяющейся Вселенной средняя плотность материи ($\rho m$) уменьшалась, а температура ($T$) падала примерно по следующим законам:

$$\rho m = 4{,}5\cdot 10^5/t^2 \text{ (г/см}^3\text{)}, \qquad T \approx 1{,}2\cdot 10^{10}/\sqrt{t} \text{ (K)}, \qquad (94)$$

где $t$ – время от начала Большого взрыва (в секундах, кстати, оба выражения – суть *закон квадрата*, см. аналогию 3). И, наконец, при $t$~$10^{13}$ с (318 тысяч лет) наступил момент, когда излучение стало настолько слабо взаимодействовать с веществом, что смогло распространяться практически свободно – стенки ящика стали прозрачными, излучение «оторвалось» от вещества и стало свободно расширятся вместе со Вселенной. К настоящему времени температура излучения упала до $T$=2,7 К (максимум излучения приходится на $\lambda_{max}\approx 1$ мм) – это и есть реликтовое излучение, возникшее почти при самом зарождении Вселенной. Это, действительно, реликт прошлого, который характеризует горячее состояние Вселенной на ранних этапах её эволюции. На этом мы закончим короткий рассказ о законе Планка.

Как уже говорилось в самом начале главы – М. Планк пришёл к своей знаменитой формуле (93) всего лишь за несколько недель до наступления 1900 года. В связи с этим любопытно отметить, что «связь» мира чисел с законом Планка (см. аналогию 16 в гл. 2.7) впервые возникла в исследованиях автора также накануне 2003 г. (в середине января, как и у Планка). Конечно, речь идет только о совпадениях, да ещё о том, что обыкновенный инженер, при некотором желании с его стороны, в принципе, способен почувствовать красоту точных наук и их «королевы» – математики.

Что касается красоты, гармонии и глубины проникновения математики на пути к Абсолютной Истине, то здесь привести слова мудрого Пуанкаре:

В математике "…полезными комбинациями [скажем, правильными формулами] являются как раз наиболее изящные комбинации, то есть те, которые в наибольшей степени способны удовлетворять тому *специальному эстетическому чувству*, которое знакомо всем математикам, но которое до того непонятно профанам, что упоминание о нем вызывает улыбку на их лицах”.

“Люди, посвященные в её [математики] тайны, вкушают наслаждения, подобные тем, которые дает нам живопись и музыка. Они восторгаются изящной гармонией чисел и форм; они приходят в восхищение, когда какое-нибудь новое открытие раскрывает перед ними неожиданные перспективы… Правда, только немногие избранные призваны к тому, чтобы вполне вкусить эти наслаждения. Но разве это не имеет места и в случае наиболее благородных искусств?”

“Математика должна помогать философу углубляться в понятия числа, пространства и времени”.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Галочкин А. И. и др.* Введение в теорию чисел. М.: Издательство МГУ, 1995.
2. *Дагаев М. М. и др.* Астрономия. М.: Просвещение, 1983.
3. *Девис П.* Случайная вселенная. М.: Мир, 1985.
4. *Исаев А. В.* Графическая теория натуральных чисел. СПб, ВМВ, 1997 г.
5. *Исаев А. В.* Закон распределения богатства. Санкт-Петербург: ЛИСС, 1998.
6. *Исаев А. В.* Параллельные миры II … . Санкт-Петербург.: ЛИСС, 2002.
7. *Исаев А. В.* Тайны статистики … . Санкт-Петербург.: ЛИСС, 2003.
8. *Капица С. П.* Общая теория роста человечества. М.: Наука, 1999.
9. *Кудрявцев П. С.* Курс истории физики. М.: Просвещение, 1974.
10. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001.
11. *Левин А. С.* Протоцивилизация: миф или реальность? Силламяэ, 1999.
12. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975 г.
13. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983 г.
14. *Силк Дж.* Большой взрыв (рождение и эволюция Вселенной). М.: Мир, 1982.
15. *Сингх С.* Великая теорема Ферма. М.: МЦНМО, 2000.
16. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М. : Наука, 1984.
17. *Сухонос С. И.* Масштабная гармония Вселенной. М.: Новый Центр, 2002 г.
18. *Хокинг С.* Краткая история времени. Санкт-Петербург: Амфора, 2001.
19. *Чирков Ю. Г.* Охота за кварками. М.: Мол. гвардия, 1985.
20. *Шкловский И. С.* Звезды: их рождение, жизнь и смерть. М.: Наука, 1984.
21. Большая Советская Энциклопедия. (В 30 томах). М.: Сов. энциклопедия, 1978.
22. Большой энциклопедический словарь. Санкт-Петербург: Норинт, 1997.
23. Математика. Энциклопедия для детей. Т. 11. М.: Аванта+, 1999.
24. Математический энциклопедический словарь. М.: Б. росс. энциклопедия, 1995.
25. Политехнический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1977.
26. Физическая энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.
27. Физические величины. Справочное издание. М.: Энергоатомиздат, 1991.
28. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1984.
29. Фундаментальная структура материи. М.: Мир, 1984.
30. Хронология всемирной и российской истории. Санкт-Петербург: Шпиль, 1996.
31. Журнал «Природа и человек» («Свет») №8, 2002 г.