

# "Зеркало" Вселенной ("Mirror" of the Universe)

Александр Васильевич Исаев  
(Alexander Vasilievich Isaev)

## Abstract

автор ездил в Москву в МГУ на семинар биофизика А. П. Левича (по его приглашению). К сожалению, обзорный доклад автора (есть в интернете) не мог включать довольно «тонкие» и весьма любопытные вопросы мира чисел, которые содержатся в книге «Зеркало» Вселенной». Например, там (в гл. 10) впервые говорится про удивительные метачисла (но сам этот термин появился только в апреле 2020 г., когда автор открыл формулу для вычисления любого метачисла).

The author traveled to Moscow at Moscow State University for a seminar by biophysicist A.P. Levich (at his invitation). Unfortunately, the author's survey report (available on the Internet) could not include rather "subtle" and very curious questions of the world of numbers, which are contained in the book "Mirror" of the Universe ". For example, there (in Chapter 10), for the first time, it is said about amazing meta numbers (but this term itself appeared only in April 2020, when the author discovered a formula for calculating any meta number).



ББК 22.1  
И 85

И 85 Исаев А. В.  
«Зеркало» Вселенной. СПб.: «ЛИСС», 2004. – 109 с.

ISBN 5–87050–208–X

Книга посвящена проблеме «Зеркала», то есть тому факту, что структура натурального ряда (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...) как бы «отражает» («моделирует») структуру реального пространства-времени («отражает» законы Вселенной). Это показано на самых последних достижениях *космологии* – науке о Вселенной, сделавшей в конце XX века наиболее захватывающие открытия в истории человечества.

В книге немало формул, но они, вообще говоря, совсем простые, как и сами идеи, породившие их. Остается только удивляться, что бесконечно богатая природа натуральных чисел до сих пор вне поля зрения её потенциальных исследователей. Хотя для приобщения к тайнам натурального ряда у многих есть всё необходимое: и компьютер, и любознательность в части самых фундаментальных Истин окружающего нас мира.

© А.В. Исаев, 2004

© Издательство «ЛИСС», 2004

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| Предисловие.....                                    | 4   |
| 1. Принятые обозначения и определения.....          | 5   |
| 2. Загадочный мир простых чисел.....                | 9   |
| 3. Типы (миры) натуральных чисел.....               | 18  |
| 4. Максимально возможный тип.....                   | 21  |
| 5. Пирамида натуральных чисел.....                  | 23  |
| 6. Закон распределения богатства.....               | 25  |
| 7. Богатство натуральных чисел.....                 | 28  |
| 8. «Наиболее необычайный закон» чисел.....          | 31  |
| 9. Структура богатства Пирамиды.....                | 35  |
| 10. Особые натуральные числа – ЛПД.....             | 38  |
| 11. Свойства $W$ -функции.....                      | 41  |
| 12. Основы теории вероятности.....                  | 44  |
| 13. Натуральные логнормальные числа.....            | 52  |
| 14. Дисперсия натурального числа.....               | 54  |
| 15. Крупное и мелкое разбиение числа.....           | 60  |
| 16. Энтропия натурального числа, отрезка.....       | 63  |
| 17. Дисперсия всех натуральных чисел.....           | 65  |
| 18. Распределение делителей по орбитам.....         | 70  |
| 19. Плотность отрезка натурального ряда.....        | 74  |
| 20. Скрытая плотность числа, отрезка.....           | 78  |
| 21. Скрытая материя во Вселенной.....               | 82  |
| 22. Элементарные частицы – «базис» материи.....     | 86  |
| 23. Энергия скалярного поля.....                    | 90  |
| 24. Постоянная тонкой структуры – не константа..... | 94  |
| 25. Расширение Вселенной.....                       | 99  |
| 26. Дискретность пространства-времени.....          | 104 |
| 27. «Теория всего» (суперструны).....               | 106 |
| 28. Этапы эволюции Вселенной.....                   | 108 |
| 29. Видовое многообразие во Вселенной.....          | 111 |
| 30. Мозаика парадоксальных рефлексий.....           | 114 |
| Заключение.....                                     | 125 |
| Литература.....                                     | 125 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Ещё в 1996 г. автором были начаты исследования структуры натурального ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... с помощью компьютера: вычисления, построение графиков, их анализ. Получаемые таким путем результаты были названы *графической теорией натуральных чисел* (ГТНЧ). В отличие от *теории чисел* (сложнейшего раздела высшей математики), ГТНЧ – это весьма доступное занятие, таящее в себе неожиданности. Для изучения мира чисел достаточно уметь работать в электронной таблице «Excel», а умение программировать на ПК – открывает путь уже к самым серьезным исследованиям.

В настоящей книге изложено много совершенно новых идей в части ГТНЧ. Например, впервые была применена *теория вероятности*, что сразу дало удивительные результаты, подтвердив в очередной раз, что мир чисел – это “кладовая” самых поразительных открытий. Притом не только в теории чисел, но и... в *космомикрофизике* (зародилась в конце XX века).

Столь парадоксальное утверждение иллюстрирует, скажем,  $\alpha$ -гипотеза ГТНЧ: в «настоящее время» наиболее вероятная дисперсия у натуральных чисел равна *постоянной тонкой структуры* ( $1/\alpha \approx 137$  – это важнейшая безразмерная величина в физике). И чтобы  $\alpha$ -гипотеза не выглядела полным безумием можно сослаться на высказывание знаменитого немецкого математика Давида Гильберта (1862–1943): «Мы видим, что не только наши представления о пространстве, времени и движении коренным образом меняются по теории Эйнштейна, но я убежден также, что основные уравнения её дадут возможность проникнуть в самые сокровенные процессы, происходящие внутри атома и, что особенно важно, *станет осуществимым привести все физические постоянные к математическим константам*, а это, в свою очередь, показывает, что приближается принципиальная возможность сделать из физики науку такого рода, как геометрия».

Другая особенность данной книги – это рассмотрение самых *последних достижений космологии*, которые удивительным образом находят своё «отражение» в мире чисел. И хотя физику, скорее всего, нельзя будет уподобить формальной геометрии (как об этом говорил Д. Гильберт), зато вполне реально обнаружить в природе натуральных чисел некие «зашифрованные» истины реального мира. Именно данный феномен (условно названный «Зеркалом») обсуждается в книге, начиная с гл. 21. Представлен целый ряд примеров возможных «отражений» абстрактным миром чисел физической реальности (от микромира до макрокосмоса). Это занятно само по себе, но может иметь и далеко идущие, непредсказуемые последствия. Мир натуральных чисел, как и реальный мир, неисчерпаем на загадки...

## 1. ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В тексте могут встречаться следующие *общепринятые обозначения*:

$+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$ ,  $\wedge$  – знаки арифметических операций: “сложение”, “вычитание”, “умножение” (точка), “деление” (дробь), “возведение в степень” (крышка).

$7,2E+11 = 7,2 \cdot 10^{11}$  экспоненциальный числовой формат (на графиках).

$\infty$  – бесконечность (как противопоставление понятию конечного).

$N \rightarrow \infty$  – означает, что величина  $N$  стремится к бесконечности.

$\Sigma$ ,  $\Pi$ ,  $\sqrt{\quad}$ ,  $\int$  – сумма, произведение, корень квадратный, интеграл.

$<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  – «меньше», «больше», «меньше (больше) или равно».

$\equiv$  – означает “по определению”, например  $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

$n!$  – *факториал*, то есть  $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  (формула из комбинаторики).

$\approx$  – символ приближенного равенства. Применяется к величинам, равным с точностью до множителя два или около этого, например  $\pi^2 \approx 3,14^2 \approx 10$ .

$\pi = 3,141593\dots$  – фундаментальная математическая константа (ФМК).

$e = 2,718282\dots$  – ФМК и основание натуральных логарифмов.

$C = 0,577215\dots$  – постоянная Эйлера (Эйлера – Маскерони), ФМК, гл. 3.

$4,669201\dots$  – число Фейгенбаума (ФМК, открыта в 1977 г., см. [9]).

$1,618034\dots$  – число Фидия (или “золотое сечение”, см. гл. 30).

*const* – числовая константа (когда её значение для нас не существенно).

$N=f(X)$  – величина  $N$  является некой функцией ( $f$ ) от величины  $X$ .

**ln**, **lg** – логарифм натуральный, логарифм десятичный (две функции).

**exp(N)** – показательная функция с основанием  $e$ , то есть  $\exp(N) \equiv e^N$ .

**abs(N)** – абсолютная величина (модуль)  $N$ , т.е. число  $N$  без учета знака.

**max**, **min** – максимум, минимум (некой величины, например,  $T_{max}$ ,  $T_{min}$ ).

**lim** – предел (функции, последовательности, интегральных сумм и проч.).

**A(N)** – функция “антье” (целая часть числа  $N$ ), например,  $A(7,346) = 7$ .

$R^2$  – величина достоверности аппроксимации линии тренда (в идеале  $\rightarrow 1$ ).

$\sim$  – этот символ (*тильда*) может иметь в тексте книги два значения:

1). Равенство порядков у величин, например,  $7 \cdot 10^8 \sim 5 \cdot 10^9$ . Стоящий перед одиночным символом или числом знак  $\sim$  означает «по порядку величины». Так,  $N \sim 10^3$  может означать как  $N=630$ , так и  $N=2050$ , то есть это весьма приблизительное указание значения  $N$ .

2). Знак *асимптотического* равенства, см. разъяснения в гл. 2.

**Важное замечание.** По ходу изложения материала вводится множество *обозначений* (букв из разных алфавитов). Часто они имеют силу только внутри главы, а иногда – только для конкретной формулы. В других частях текста эти обозначения могут иметь иной смысл. Вообще, из-за стремления

автора к лаконичному и широкодоступному тексту, предлагаемые обозначения, названия, и сами рассуждения поначалу могут озадачить читателя, но в ходе дальнейшего изложения многое «становится на свои места».

Текст книги далёк от математической корректности, зато в нём содержится масса совершенно оригинальных идей, гипотез, оценок, которые могут быть интересны как профессионалам, так и самой широкой публике.

Ниже приводятся определения, весьма важные для понимания текста.

**Графическая теория натуральных чисел (ГТНЧ)** – это не профанация теории чисел, а, образно говоря, прелюдия к столь сложному и важному разделу высшей математики (см. Предисловие). Характерная особенность ГТНЧ в том, что она пытается апеллировать к физике в крайне сомнительных и, вместе с тем, интригующих, любопытных *рефлексиях*.

**Рефлексия** (от позднелат. reflexio – обращение назад, отражение) – труднообъяснимое «отражение» («моделирование») структурой натурального ряда («Зеркалом») реальной структуры пространства-времени (структуры Вселенной). Термин «рефлексия» призван подчеркнуть проблематичность подобных «отражений» (не чёткие отражения, а Бог знает что<sup>1</sup> – рефлексии какие-то).

Рефлексии, увы, не образуют единой картины. Они могут даже противоречить друг другу. Но в них есть нечто притягательное, поэтому автор очередной раз (см. [6 ÷ 12]) не в силах умолчать о данном феномене. Рефлексии содержатся в гл. 21 ÷ 30, и, разумеется, их можно опустить, но тогда, вероятно, от Вас ускользнет одна из Тайн окружающего мира.

**“Вообще говоря”** – это выражение на строгом языке математики означает, что “*бывают случаи, когда это не так*”. Например, можно предположить, что люди с гуманитарным образованием, вообще говоря, не станут читать данную книгу, хотя, как сказал английский философ Роджер Бэкон (ок. 1214–1292): “Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества”.

**Пространство-время** – это основные формы существования материи, которые имеют решающее значение для построения физической картины мира, нашей Вселенной. *Математические описания* пространства и времени оказались очень похожими и в действительности это две стороны одной единственной структуры, именуемой “пространство-время”. В современной *квантовой теории* пространству и времени отводится центральная роль, существуют даже гипотезы, где вещество рассматривается не более как возмущение этой основной структуры. Средняя плотность *видимого* вещества во Вселенной оценивается как один атом вещества на 5-метровый

---

<sup>1</sup> *Сверхразум*, наверняка, понимает о чем идет речь... (см. гл. 30, рефлексия № 16).

куб пространства, т.е., на первый взгляд, наша Вселенная – это почти «пустое» пространство-время (но, разумеется, всё далеко не так просто) [5, 26].

**Элементарный временной интервал (эви)** – понятие из квантовой физики:  $1\text{эви} \approx 5,4 \cdot 10^{-44}$  секунды (см. гл. 24). Это минимальный временной интервал, который требуется для протекания любого мыслимого физического события, причем некоторые теории утверждают, что на этом уровне время уже квантуется, носит дискретный (зернистый) характер (хотя в обыденной жизни время представляется нам чем-то текущим непрерывно).

Чрезвычайная мизерность **эви** осознается, например, в следующем факте. От момента зарождения Вселенной (от так называемого *Большого взрыва*) прошло около 13 млрд. лет или  $100.000.000.000.000 \equiv 10^{17}$  секунд. Это, безусловно, колоссальное число, но нетрудно подсчитать, что 1 секунда  $\approx 1,85 \cdot 10^{43}$  **эви**, что в  $10^{26}$  (!) раз больше «колоссального» числа  $10^{17}$ . Короче говоря, **эви** лежит «глубже» всякого предела нашего воображения.

**Элементарная длина (планковская длина)**  $l_{pl} \approx 1,6 \cdot 10^{-35}$  метра – это длина, которую свет проходит за время 1 **эви**. Подобным же образом любой промежуток времени  $t$  можно перевести в отрезок длины, который проходят фотоны света за время  $t$  (со скоростью, равной  $3 \cdot 10^8$  м/с, то есть со скоростью света в вакууме, см. гл. 24). Мы будем часто этим пользоваться.

**Возраст Вселенной** пока точно не известен науке. Считается, что он равен  $13 \pm 2$  млрд. лет. В рамках «Зеркала» мы будем считать, что возраст Вселенной равен 13 млрд. лет =  $8 \cdot 10^{60}$  **эви** («точный» возраст), или  $10^{61}$  **эви** («примерный» возраст, равный 17,2 млрд. лет). При этом так называемый **характерный размер** Вселенной, очевидно, равен  $\sim 10^{26}$  метров.

**Ядерное время.** Для ядерной физики элементарной частицей первостепенной важности является *протон* (он входит в состав ядра любого атома). Если условно принять размер протона равным  $3 \cdot 10^{-15}$  м (на самом деле это довольно тонкое понятие), то можно ввести удобную для микромира характеристику – **ядерное время**, которое равно  $10^{-23}$  секунды или  $10^{20}$  **эви** – за это время свет пересечет протон. Физически это наименьший интервал времени, который требуется, чтобы протон наблюдался как единое целое.

**Глубина проникновения** в микромир равна  $L \approx 10^{-18}$  м ( $10^{-26}$  с или  $10^{17}$  **эви**) – это комптоновская длина волны частицы, разогнанной в самом мощном из современных ускорителей элементарных частиц. Что происходит в природе на размерах меньше, чем  $L \approx 10^{-18}$  м – ученым увидеть пока не дано, хотя в своих *теориях* они доходят вплоть до планковской длины  $l_{pl}$ .

Остается только удивляться гигантской пропасти между мыслью Человека (теоретической физикой) и его материальной ипостасью (социальным «здоровьем» общества). Причем эта пропасть быстро увеличивается...

**Отрезок** натурального ряда, например,  $[1; N]$  – это натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...,  $N$  (включая 1 и  $N$ ). Разумеется, отрезок может начинаться с любого числа, но в рамках ГТНЧ он чаще всего «открывается» именно единицей. А вот правая граница  $N$  может быть различной (в зависимости от взгляда рассмотрения). Поэтому мы часто будем оговаривать правую границу отрезка (который становится для нас *рабочим отрезком*).

**Большой отрезок** (БО) – это отрезок  $[1; 10^{61}]$ , содержащий  $10^{61}$  натуральных чисел. БО более чем колоссален, ведь если каждое его число воспринимать как один *эви*, то мы получим возраст Вселенной (см. выше). Таким образом, БО можно отождествлять с возрастом Вселенной (или с её характерным размером). Именно в пределах БО обнаруживаются удивительные «отражения» (рефлексии, см. гл. 21÷30). Поэтому ГТНЧ ограничивается, как правило, рассмотрением различных отрезков натурального ряда в пределах БО. Если отбросить всякие рефлексии, то всё равно отождествление каждого натурального числа с одним *эви* – весьма полезная идея, благодаря которой натуральный ряд словно «оживает» в нашем сознании.

**Персональный компьютер (ПК)**. В распоряжении автора был всего-навсего ПК *Pentium-III*. А самый мощный в мире компьютер (фирмы IBM, ноябрь 2004 г.) выполняет  $7,1 \cdot 10^{13}$  операций в секунду, но даже он бессилен перед числами порядка  $10^{61}$ . Тем не менее, используя по-настоящему мощные компьютеры (сеть из них), наверняка, можно получить достаточно серьезные данные о структуре натуральных чисел. Эти данные существенно помогут математикам в дальнейшем развитии *теории чисел* (или ГТНЧ, но теперь уже – *глобальной теории натуральных чисел*).

**Эви-конвертация**. Очевидно, что подобно БО любой отрезок натурального ряда (любой длины) с помощью *эви* можно перевести в промежутки времени (в секунды, минуты, часы, годы и т. д.) или, используя понятие «элементарная длина», – в отрезки длины (сантиметры, метры и т. д.). Подобный перевод мы будем называть *эви-конвертацией*. Весьма полезные примеры *эви-конвертации* приведены в табл. 28.1 и 29.1.

**Малый отрезок** (МО) – это отрезок  $[1; 10^{20}]$ . Если каждое натуральное число МО воспринимать как один *эви*, то данный отрезок окажется чрезвычайно малым, его длина будет эквивалентна  $5,4 \cdot 10^{-44} \cdot 10^{20} \approx 10^{-23}$  секунды, т. е. после *эви-конвертации* МО можно отождествлять с *ядерным временем* (или с характерным размером протона). Однако МО может быть и промежутком времени в  $10^{20}$  *эви* от момента зарождения Вселенной. То есть в части МО всё зависит от контекста (смысл МО всегда будет ясен).



**Предельный отрезок** (ПО) – это отрезок  $[1; 10^{308}]$ . После *эви*-конвертации ПО можно трактовать как  $10^{257}$  лет – для нас это самая настоящая *вечность*. Числа, превосходящие  $10^{308}$ , просто выходят за диапазон допустимых значений, с которыми работает ПК. Дойдя до числа  $10^{308}$ , ПК прекращает счет и выдает специальное сообщение, например, «#ЧИСЛО!».

**Относительная погрешность** (ОП) приближения  $B^*$ . Так называется отношение  $ОП \equiv (B - B^*)/B^*$ , где  $B^*$  – найденное нами приближенное значение величины, точное значение которой равно  $B$ . Величину ОП будем часто выражать в процентах (%). Как правило, величина  $B$  является неизвестной нам функцией от  $N$  (возможно, очень сложной функцией  $f$ ), т. е.  $B=f(N)$ . Но вместо неё нам удастся найти только некое грубое приближение – функцию  $B^*=ψ(N)$ . После чего мы оцениваем ОП и принимаем решение о пригодности функции  $ψ$  для наших оценок в рамках ГТНЧ. Такой **инженерный подход** абсолютно неприемлем с точки зрения математики, но следует помнить, что задача ГТНЧ на первом этапе – это получение хотя бы неких качественных результатов и оценок в пределах Большого отрезка.

## 2. ЗАГАДОЧНЫЙ МИР ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

**Натуральные числа** – одно из основных понятий математики. Множество всех натуральных чисел  $N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ , т.е. целых положительных чисел, снабженных естественным порядком, называется **натуральным рядом**. Натуральные числа появились ещё у древних людей в результате счёта предметов (разного рода природы, окружающей людей), и эти числа – *первая абстрактная истина*<sup>1</sup>, открывшаяся Человеку.

**Простые числа**. Все натуральные числа разделяются на две группы. К первой группе относятся числа, имеющие ровно два делителя (1 и само число  $N$ ) – эти числа называют **простыми**. Приведем начало ряда простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ... .

Ко второй группе относятся все остальные числа, которые называют **составными**. У математиков есть основания считать число  $N=1$  – совершенно *особым числом* (ни простым, ни составным, но об этом чуть ниже).

Свойства простых чисел и их связь со всеми натуральными числами изучалась еще знаменитым древнегреческим математиком Евклидом (III век до

---

<sup>1</sup> Не исключено, что постижение многочисленных Тайн, «зашифрованных» в недрах натурального ряда окажется также и *последней* (абсолютной) Истиной, доступной Человеку. Эта мысль выглядит пока явным «перебором», однако, после знакомства с данной книгой, мнение некоторых читателей, вероятно, начнет колебаться в части указанного «перебора».

н. э.). Множество простых чисел бесконечно – доказательство этого утверждения содержалось в IX книге «Начал» Евклида (это первый из дошедших до нас теоретических трактатов по математике) [29].

Начиная с давних пор, были сделаны многочисленные попытки найти формулы, которые давали бы только простые числа. Самой удачной оказалась принадлежащая Л. Эйлеру квадратичная форма  $x^2 - x + 41$ , которая при  $x = 1, 2, 3, \dots, 40$  – суть простое число. Таким образом, длительные поиски формул, дающих только простые числа, оказались в итоге тщетными.

Конечно, рассматривая произвольное натуральное число  $N$ , желательно уметь сразу сказать, простое оно или составное, не проверяя каждое простое число (меньшее, чем  $\sqrt{N}$ , см. гл. 3), как его возможный делитель. Любопытно, что некоторым людям-уникумам (кстати, им, отчасти, был Л. Эйлер) от природы дано *ощущать* простое число или нет (при одном взгляде на это число) [9]. Для нахождения всех простых чисел на отрезке от 2 до  $N$  служит метод, известный с III века до н.э., и называемый *решето Эратосфена*<sup>1</sup> [9]. Разумеется, что его уже давно не применяют для поиска простых чисел, а пользуются специальными таблицами или компьютером.

К настоящему времени разработан целый ряд математических *критериев простоты числа*, которые позволяют установить является ли произвольное большое число  $N$  (с большим количеством цифр) простым или составным числом. Но всё равно это остаётся очень трудной задачей. На компьютере не составляет проблемы найти *все* простые числа на относительно «коротких» отрезках. Например, на небольшом отрезке  $[1; 10^{12}]$  содержится  $37.607.912.018 \approx 0,37 \cdot 10^{11}$  простых чисел (данным шрифтом они займут площадь примерно  $5 \times 5$  км). В то же время, с помощью специальных алгоритмов и целого ряда технических ухищрений, уже найдены *отдельные* чудовищно большие простые числа. Так, в 2002 г. 20-летний канадский студент Майкл Камерон при помощи GRID (компьютерной сети, «натянутой», благодаря Интернету, на весь земной шар)<sup>2</sup> нашел самое большое простое число вида  $N=2^p-1$ , в котором 4.053.946 цифр (это 39-е число Мерсенна, см. [9]; даже и не пытайтесь его как-то представить!). На работу над ним ушло 2 года и 130 тысяч компьютеров по всему миру.

**Базис натуральных чисел.** *Основная теорема арифметики* утверждает, что всякое натуральное число  $N$ , кроме единицы, единственным образом разлагается в произведение простых чисел (порядок сомножителей

---

<sup>1</sup> *Эратосфен Киренский* (ок.276 – 194 до н.э.) – древнегреческий ученый. Заведовал Александрийской библиотекой – самой известной в древности (в 391 г. н.э. уничтожена христианами-фанатиками). В математике Эратосфен дал способ нахождения простых чисел, заложил основы математической географии (и первым довольно точно рассчитал диаметр Земли).

<sup>2</sup> Быть может, так («всем миром») и следует браться за изучение мира чисел (ГТНЧ)...

при этом не принимается во внимание). Иначе говоря, с помощью умножения только простых чисел  $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$  получаем любое число  $N$ :

$$N = P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m, \quad (2.1)$$

где все показатели степени ( $a, b, c, \dots, m$ ) – натуральные числа, либо нуль.

Представление числа  $N$  в виде (2.1) называется его **каноническим разложением** (*факторизацией*). Например,  $261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2$  и всякий другой набор простых чисел никогда не даст нам числа 261360. Теперь легко объяснить, почему единицу математики не считают простым числом, ведь, сколько не умножай на единицу, ничего в формуле (2.1) не изменится.

Основная теорема арифметики, по сути дела, утверждает, что простые числа образуют своеобразный **базис натуральных чисел**.

**Количество простых чисел** на произвольном отрезке. Поскольку простые числа – это базис натуральных чисел, то проблема распределения простых чисел в натуральном ряде всегда представляла большой интерес. В *теории чисел* была введена даже специальная функция  $\pi(x)$  – количество простых чисел, не превосходящих  $x$  (не следует путать принятое обозначение функции с математической константой  $\pi = 3,14\dots$ ). Но все попытки после Евклида установить какие-либо новые утверждения о распределении простых чисел долгое время не приводили к успеху. И не даром проблемы, связанные с этим распределением, классифицируются как *очень трудные*.

Мы не будем пользоваться обозначением  $\pi(x)$  в ГТНЧ (т.к. оно может сбить с толку некоторых читателей), а введем своё обозначение: пусть  $K$  – это количество простых чисел на произвольном отрезке  $[2; N]$ . А теперь коротко изложим фрагмент *теории чисел*, раскрывающий суть проблемы.

Ещё Л. Эйлер<sup>1</sup> обратил внимание на то, что плотность распределения простых чисел в натуральном ряде равна нулю:  $K/N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Строгое доказательство этой теоремы было дано А. Лежандром (1752–1833). В 1737 г. основная теорема арифметики (2.1) была представлена Л. Эйлером в следующей изящной форме:  $\Sigma n^{-s} = \prod (1 - p^{-s})^{-1}$  или в развернутом виде:

<sup>1</sup> **Леонард Эйлер** (1707–1783) – гениальный и самый плодовитый математик всех времен. Список его книг и статей доходит до 886 работ (!). В области теории чисел Эйлер получил такие результаты, что только одно это дало бы ему место в пантеоне славы (и в настоящей книге его имя встречается чаще всего!). В 28 лет он потерял один глаз, а в 59 лет – второй, но слепой Эйлер, пользуясь *феноменальной памятью*, еще 17 лет продолжал диктовать свои удивительные открытия. Около 3/5 его работ относится к математике, остальные – преимущественно к её приложениям: механике, физике, астрономии и т. д. Эйлер – швейцарец, но почти 40 лет работал в Санкт-Петербурге. Был похоронен на Смоленском лютеранском кладбище [12].

С 1956 г. прах Эйлера покоится в «Некрополе XVIII века». Последний дом Эйлера – это ныне здание школы № 27 (наб. л-та Шмидта, 15). Её директор, Агавелов Эдуард Александрович, сделал почти невозможное – восстановил заброшенное здание и его славную историю.

$$1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} \dots = (1-2^{-s})^{-1} \cdot (1-3^{-s})^{-1} \cdot (1-5^{-s})^{-1} \cdot (1-7^{-s})^{-1} \dots, \quad (2.2)$$

где  $s > 1$  и суммирование ( $\Sigma$ ) проводится по всем натуральным числам, а произведение ( $\Pi$ ) берётся по всем простым числам. Сумму  $\zeta(s) \equiv \Sigma n^{-s}$  Эйлер назвал *дзета-функцией*, он также установил, что простых чисел «много», ибо их количество на отрезке  $[1; N]$  было больше, чем  $\ln N - 1$ , и в то же время почти все натуральные числа являются составными при  $N \rightarrow \infty$ . Красивое тождество (2.2) и его обобщения играют фундаментальную роль в теории распределения простых чисел. Как функцию комплексного переменного дзета-функцию первым стал рассматривать Г. Ф. Б. Риман, обнаруживший глубокую связь её аналитических свойств с вопросами распределения простых чисел (см. ниже).

Многим математикам (впрочем, не только им<sup>1</sup>) открылся *асимптотический закон*, утверждающий, что при  $N \rightarrow \infty$  имеет место следующее:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K}{N/\ln N} = 1, \text{ или, что то же самое, } K \sim \frac{N}{\ln N}. \quad (2.3)$$

Знак  $\sim$  (асимптотически равно) не может быть заменен знаком обыкновенного равенства ( $=$ ), это ясно хотя бы из того факта, что  $K$  – непременно целое число (количество простых чисел), тогда как  $N/\ln N$  – не является таковым. Выражение  $\ln N$  – можно трактовать как площадь под гиперболой  $Y=X^{-1}$  на отрезке  $[1; N]$ . Поэтому количество простых чисел выражается также *логарифмической суммой*  $K \approx Ls(N) = (\ln 2)^{-1} + (\ln 3)^{-1} + \dots + (\ln N)^{-1}$ .

То обстоятельство, что распределение простых чисел описывается с помощью логарифмической функции, нельзя не признать поразительным, т.к. здесь вступают в тесное соприкосновение два математических понятия, казалось бы, не имеющих друг к другу никакого отношения. Простой (по своей форме) закон (2.3) относят к числу самых замечательных открытий, сделанных когда-либо во всей математике.

Из формулы (2.3) мы получаем, что  $\ln K = \ln N - \ln \ln N$ , а, умножив обе части этого выражения на  $K$ , приходим к выражению  $K \cdot \ln K = K \cdot \ln N - K \cdot \ln \ln N = N \cdot (1 - \ln \ln N / \ln N)$ , которое при  $N \rightarrow \infty$  стремится к виду:

$$N \sim K \cdot \ln K. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) указывает простое число  $P \approx N$  по его порядковому номеру  $K$  (внутри мира №2). Формула (2.4) является обратной к формуле (2.3), поэтому её точность (ОП) – как у формулы (2.3), о чём сказано чуть ниже.

Точность формулы (2.4) в начале натурального ряда можно максимально повысить, если ввести в эту формулу коэффициент  $\ln \pi = 1,1447\dots$

---

<sup>1</sup> В свои 40 лет автор, имея диплом инженера-механика, «вдруг» взялся исследовать натуральные числа на ПК (поначалу даже не глядя в общеизвестную *теорию чисел!*). Во второй своей работе (см. [7], стр.62) он нашёл формулу (2.3), вернее, её обратную форму:  $N \sim K \cdot \ln K$ .

$$N \approx (\ln \pi) \cdot K \cdot \ln K. \quad (2.5)$$

На отрезке от  $N=2$  до  $N=10^7$  формула (2.5) работает гораздо точнее, чем формула (2.4). Так, при  $K = 10^7$  получаем  $P \approx N \approx 1,8 \cdot 10^8$ , а модуль ОП формулы (2.5) равен 2%. Но при  $K = 10^{18}$  получаем  $P \approx N \approx 4,74 \cdot 10^{19}$ , а модуль ОП увеличивается до 7% и становится равным ОП формулы (2.4).

Долгое время закон (2.3) не имел математических (строгих) доказательств. Этот закон, кстати, увидел и 15-летний Карл Гаусс в подаренных ему таблицах логарифмов. К. Гаусс (1777–1855) за свою жизнь нашел все простые числа на отрезке [2; 3000000], и всё сравнивал их с формулой (2.3). К. Гаусс первый открыл, что количество простых чисел выражается *интегральным логарифмом*  $\text{Li}$  гораздо точнее, чем формулой (2.3):

$$K \approx \text{Li}(N) \equiv \int_2^N \frac{dt}{\ln t} = C + \ln \ln N + \frac{(\ln N)^1}{1 \cdot 1!} + \frac{(\ln N)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln N)^3}{3 \cdot 3!} + \dots, \quad (2.6)$$

где  $C = 0,577\dots$  – *постоянная Эйлера*, а слагаемые в виде дробей с факториалом берутся до тех пор, пока не станут меньше единицы (для данного  $N$ ). Заметим, что имеет место такое неравенство:  $\text{Ls}(N) - 1,5 < \text{Li}(N) < \text{Ls}(N)$ .

В связи с членом  $(C + \ln \ln N)$  в (2.6), вспомним ещё одну формулу, найденную Гауссом (в 1796 г.), и доказанную Мертенсом (через 78 лет):

$$\sum P^{-1} \equiv 2^{-1} + 3^{-1} + 5^{-1} \dots + P^{-1} = 0,261497 + \ln \ln N + \varepsilon, \quad (2.7)$$

где  $P$  – это все простые числа, меньшие  $N$ ;  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . По оценке автора  $\varepsilon(N) < C \cdot N^{-c}$  (кроме  $N = 8$ ), где  $C$  – постоянная Эйлера. Сумма значений  $P^{-1}$  растет крайне медленно, так, в конце БО имеем  $\sum P^{-1} \approx 5,2048$ . Формула (2.7) Гаусса-Мертенса понадобится в дальнейшем (см. гл.19).

В 1808 г. А. Лежандр, пользуясь таблицами простых чисел, улучшил формулу (2.3):  $K \sim N/(\ln N - 1,08366)$ . На отрезке [1;  $5 \cdot 10^6$ ] формула Лежандра точнее, чем (2.6), но при  $N > 5 \cdot 10^6$  всегда будет точнее формула Гаусса.

На отрезке [1;  $10^9$ ] формула Гаусса всюду даёт завышенный результат:  $\text{Li}(N) - K \approx 0,3508 \cdot N^{0,4119}$  и создается впечатление, что с ростом  $N$  разность  $\text{Li}(N) - K \rightarrow \infty$ , то есть всегда  $K < \text{Li}(N)$ . Однако дело обстоит иначе. В 1914 г. Дж. И. Литтлвуд (1885–1977) из Кембриджа доказал, что существуют  $N^*$ , при которых  $K > \text{Li}(N^*)$ . Такие числа  $N^*$  до сих пор не найдены. В 1933 г. С. Скъюс показал, что одно из таких чисел не превосходит числа  $N_c = 10^A$ , где  $A = 10^B$  и  $B = 10^{34}$ . По словам известного английского математика Дж. Х. Харди (1877–1947) *число Скъюса* ( $N_c$ ) – «самое большое, которое когда-либо служило какой-нибудь цели в математике». Харди подсчитал, что если принять число частиц во Вселенной  $10^{87}$ , то количество всех комбинаторных перестановок для них примерно равно числу Скъюса.

Существенного успеха в изучении распределения простых чисел первым добился замечательный русский математик П. Л. Чебышев (1821–1894), который в 1850 г. элементарным методом установил истинный порядок роста функции  $K=f(N)$  при  $N \rightarrow \infty$ . Он также *доказал*, что если существует предел отношения  $K/(N/\ln N)$  при  $N \rightarrow \infty$ , то этот предел должен быть равен именно единице. Правда, доказать существование самого предела Чебышев так и не смог (главным образом, из-за своей «нелюбви» к комплексным числам). Только в 1896 г. Ж. Адамар (1865–1963) и Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен (1866–1963) одновременно и независимо друг от друга *доказали* асимптотический закон распределения простых чисел (2.3).

Описанная история доказательства закона (2.3) наглядно показывает с каким трудом добываются крупицы истин в математике (и вообще в науке), и что значит понятие “строгое математическое доказательство”.

В 1848 г. Чебышев показал, что в формуле Лежандра лучшим значением будет единица, т.е. точнее, чем формула (2.3) – *формула Чебышева*:

$$K \sim \frac{N}{\ln N - 1} \quad (2.8)$$

**Асимптотическое соотношение.** Таковым, например, является соотношение  $x^2 + x + 1 \sim x^2$  при  $x \rightarrow \infty$ ; а также наши формулы (2.3), (2.4), (2.8). Чтобы “почувствовать” *асимптотичность* закона распределения простых чисел, попробуем оценить относительную погрешность (ОП) формулы (2.8). Будем считать, что ОП  $\equiv (K_p - K)/K$ , где  $K_p$  – это реальное количество простых чисел на отрезке  $[2; N]$ , а  $K$  – значение по формуле (2.8).

Для оценки ОП формулы (2.8) в начале натурального ряда будем рассматривать отрезки  $[2; N]$ , выбирая в качестве правой границы  $N$  поочередно все простые числа вплоть до 5051803 (это 352000-ое число). Тогда получим следующую картину. При  $N=2$  имеем ОП= –115%, далее ОП начинает уменьшаться, проходит через нуль, возрастает до своего максимального положительного значения ОП= +1,4% (при  $N=1627$ ) и продолжает колебания “вокруг” нуля (ОП=±1,5%), а после  $N=5381$  уже всегда (?) ОП положительна и начинает снижаться. Последние 52000 значений ОП (на указанном рабочем отрезке) колеблются в диапазоне от 0,562% до 0,599%.

Для оценки ОП формулы (2.8) в пределах Большого отрезка будем рассматривать рабочий отрезок  $[2 \cdot 10^6; 4 \cdot 10^{16}]$ , на котором с помощью ПК можно найти точные количества ( $K_p$ ) простых чисел для конкретных значений  $N$ . Всего же на отрезке  $[2; 4 \cdot 10^{16}]$  находится 1.075.292.778.753.150 простых чисел (это было установлено учеными в 1989 г.). Для рабочего отрезка можно записать следующую формулу ( $R^2=0,9995$ , что очень неплохо):

$$\text{ОП} \equiv (K_p - K)/K \approx 1,7767 \cdot (\ln N)^{-2,1254} . \quad (2.9)$$

В конце Большого отрезка из формул (2.8) и (2.9) получаем такую оценку:  $K \approx 5,75 \cdot 10^{58}$ ;  $ОП \approx 4,86 \cdot 10^{-5}$ ;  $(K_p - K) = K \cdot ОП \approx 2,79 \cdot 10^{54}$ . Таким образом, в конце БО, несмотря на, казалось бы, малую относительную погрешность формулы Чебышева ( $ОП \approx 0,00486\%$ ), мы получаем более чем колоссальную абсолютную погрешность  $(K_p - K)$  в значении  $K$  – недосчитываемся около  $10^{54}$  (!) простых чисел. Итак, при  $N \rightarrow \infty$  наша ОП по (2.9) устремляется к нулю, но разность  $K_p - K$  неограниченно возрастает вплоть до  $+\infty$ .

Для формулы (2.3) при  $N > 113$ , возможно, справедлива такая оценка:

$$ОП \equiv (K_p - K)/K \approx \ln \pi \cdot (\ln N)^{-1} \approx 1,1447 \cdot (\ln N)^{-1}. \quad (2.10)$$

**Формула Римана** (в обозначениях классической *теории чисел*).

Хотя замечательный немецкий математик Г. Ф. Б. Риман (1826–1866) и не доказал закона (2.3), зато он сделал нечто гораздо более удивительное – дал *точную* формулу для  $\pi(x)$ . Вот эта формула (обозначения см. выше):

$$\pi(x) + \frac{1}{2} \pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3} \pi(\sqrt[3]{x}) + \dots = \text{Li}(x) - \sum \text{Li}(x^{\rho}), \quad (2.11)$$

где суммирование ( $\sum$ ) идет по корням *дзета-функции*  $\zeta(s) \equiv \sum n^{-s}$  (см. гл. 2). Корни эти (помимо так называемых «тривиальных корней»)  $\rho = -2, -4, -6, \dots$ , вкладом которых в общую сумму можно пренебречь) являются комплексными числами с вещественной частью (от 0 до 1); первые 6 из них таковы:  $\rho_1 = \frac{1}{2} + 14,134725 \cdot i$ ;  $\rho_2 = \frac{1}{2} + 21,022040 \cdot i$ ;  $\rho_3 = \frac{1}{2} + 25,010856 \cdot i$ ;  $\rho^*_1 = \frac{1}{2} - 14,134725 \cdot i$ ;  $\rho^*_2 = \frac{1}{2} - 21,022040 \cdot i$ ;  $\rho^*_3 = \frac{1}{2} - 25,010856 \cdot i$ .

Вместе с каждым  $\rho$  в число корней дзета-функции обязательно входит и комплексно-сопряженное с ним число. К 1979 г. для 150 миллионов (!) корней была также проверена гипотеза Римана о том, что вещественная часть корня  $\rho$  всегда равна  $\frac{1}{2}$  (но эта гипотеза до сих пор *не доказана*).

Формулу Римана (2.11) можно записать в виде

$$\pi(x) = R(x) - \sum R(x^{\rho}), \quad \text{где } R(x) = \text{Li}(x) - \frac{1}{2} \text{Li}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3} \text{Li}(\sqrt[3]{x}) - \dots \quad (2.12)$$

Это дает в качестве  $k$ -го приближения к  $\pi(x)$  функцию

$R_k(x) = R(x) + T_1(x) + T_2(x) + \dots + T_k(x)$ , где  $T_n(x) = -R(x^{\rho_n}) - R(x^{\rho^*_n})$  (2.13) – слагаемое, отвечающее  $n$ -й паре корней дзета-функции;  $T_n(x)$  при любом  $n$  является гладкой осциллирующей функцией от  $x$ . Вместе с  $T_n(x)$  и  $R_k(x)$  является гладкой функцией при любом  $k$ . С ростом  $k$  эта функция приближается к  $\pi(x)$  – асимптотическому закону распределения простых чисел.

Немецкий математик Дон Цагир образно сказал о простых числах примерно следующее. Простые числа – это самый капризный и упрямый из всех объектов, вообще изучаемых математиками. Они растут среди натуральных чисел как сорная трава, не подчиняясь, кажется, ничему, кроме случая. Но,

вместе с тем, простые числа демонстрируют удивительную регулярность, они подчиняются законам, и притом с почти педантичной точностью (В. Боро, ..., Д. Цагир «Живые числа». М.: Мир, 1985).

**R-фактор.** Пусть  $P_n$  – это простое число, порядковый номер которого в мире № 2 равен  $n$  (при  $n=1$  имеем  $P_1=2$ ). Для каждого  $P_n$  можно вычислить, скажем, R-фактор – «расстояние» до следующего числа  $P_{n+1}$ :

$$R_n \equiv P_{n+1} - P_n \quad (2.14)$$

В 1845 г. Жозеф Бертран (1822–1900) обнаружил, что между числами  $N$  и  $2N-2$ , где  $N>3$ , содержится, по крайней мере, одно простое число (*постулат Бертрана*). Значит, даже среди очень больших чисел простые числа не так уж редки. С другой стороны, существуют *сколь угодно длинные* отрезки ряда натуральных чисел (например, миллиарды чисел!), среди которых нет ни одного простого числа (нерегулярность распределения простых чисел). В самом деле, задавшись произвольным натуральным числом  $X$ , построим ряд чисел  $X!+2, X!+3, \dots, X!+X$ . Каждое из этих чисел составное, т. к. число  $X!+m$  делится на  $m$  (где  $m=2, 3, \dots, X$ ), поскольку  $X!$  делится на  $m$  и само  $m$  делится на  $m$ . Например, при  $X=48$  ряд чисел  $X!+2, X!+3, \dots, X!+48$  (всего 47 чисел, где  $X!=48! \approx 10^{61}$ ) – не будет содержать ни одного простого числа. При этом не стоит забывать, что число  $X$  может быть сколь угодно большим. Вместе с тем, существуют, например, миллионы простых чисел, имеющих ровно 100 цифр, но пока ни одно такое число не обнаружено.

Вероятно, всюду можно найти и простые числа с  $R_n = 2$  (пару «близнецов», у них минимальный R-фактор), правда, это ещё *не доказано* [9].

Ожидаемое количество простых чисел-близнецов на отрезке  $[N; N+L]$ :

$$k = Q \cdot L \cdot (\ln N)^{-2}, \quad (2.15)$$

$$\text{где } Q \equiv 2 \cdot \prod [(P^2 - 2 \cdot P) / (P^2 - 2 \cdot P - 1)] = 1, 3203236316 \dots, \quad (2.16)$$

а произведение  $(\Pi)$  берется по всем простым числам  $P > 2$  ( $P=3, 5, 7, \dots$ ).

Из формулы (2.15) при  $k = 1$  получаем закон появления близнецов:

$$L \approx Q^{-1} \cdot (\ln N)^2 \approx 0,7574 \cdot (\ln N)^2. \quad (2.17)$$

Этот закон указывает ожидаемую длину  $L$  отрезка («лежащего» за числом  $N$ ), на котором должна появиться очередная пара близнецов. Так, в конце Большого отрезка ( $N=8 \cdot 10^{60}$ ) имеем  $L \approx 14895$ .

Если R-факторы изображать точками на графике  $R_n = f(n)$ , где  $n=1, 2, 3, \dots$ , то получим картину аналогичную рис. 3.1, причем  $R_n$  – четное число (кроме  $R_1 = 3 - 2 = 1$ ). Ранее [9] максимально возможный R-фактор оценивался формулой  $(R_n)_{max} \sim (\ln n)^2$ , которую при  $n \rightarrow \infty$  можно записать так

$$(R_n)_{max} \sim (\ln N)^2. \quad (2.18)$$



И можно предположить, что максимально возможный  $R$ -фактор  $(R_n)_{max}$  устремляется к выражению (2.17), которое при  $N \rightarrow \infty$  можно назвать также *законом «провалов»*, где  $L$  – это длина наибольшего из отрезков («лежащего» за числом  $N$ ), на котором не содержится простых чисел.

Для любого простого числа  $P_n$  помимо его «собственного»  $R$ -фактора  $(R_n)$  всегда можно вычислить некий *средний  $R$ -фактор*  $(R_s)$ , равный среднему арифметическому всех предшествующих  $R$ -факторов:

$$R_s \equiv (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)/n . \quad (2.19)$$

Формулу (2.4) перепишем в виде  $P_n \sim n \cdot \ln n$  и подставим в (2.19):

$$R_s \equiv (P_{n+1} - 2)/n \sim [(n+1) \cdot \ln(n+1) - 2]/n \sim \ln(n+1) + \ln(n+1)/n - 2/n . \quad (2.20)$$

При  $n \rightarrow \infty$  получаем асимптотическое выражение для среднего  $R$ -фактора

$$R_s \sim \ln(n+1) \sim \ln n \sim \ln N . \quad (2.21)$$

В начале натурального ряда (от  $n=2$  до  $n \sim 10^7$ ) можно максимально повысить точность формулы (2.21), введя в неё коэффициент  $\ln \pi = 1,1447\dots$

$$R_s \approx (\ln \pi) \cdot \ln n . \quad (2.22)$$

Вероятно, на Малом отрезке лучше работает именно формула (2.22).

**Параметр  $H$ .** Производная  $dR_s/dn$  определяет скорость изменения среднего  $R$ -фактора. *Относительную* скорость изменения среднего  $R$ -фактора:

$$H_n \equiv (dR_s/dn)/R_s \sim (1/n)/\ln n \sim (n \cdot \ln n)^{-1} \sim P_n^{-1} . \quad (2.23)$$

будем называть параметром  $H$ . Как видим, его значение обратно числу  $P_n$ .

Поскольку реальные  $R_s$  колеблются, то производную определяем так:

$$dR_s/dn \equiv \text{abs}(R_{s_{n+1}} - R_{s_n})/1 , \quad (2.24)$$

а реальные параметры  $H_n$  (в виде точек) на плоскости графика  $H_n = f(P_n)$  оказываются «разбросанными» довольно причудливым образом.

Все параметры  $H_n$  находятся в коридоре от  $H_{min}$  до  $H_{max}$ , причем:

$$H_{min} = P_n^{-2} ; \quad H_{max} < P_n^{-1/2} \quad \text{или} \quad H_{max} = a \cdot P_n^b , \quad (2.25)$$

где  $a = e^2 = 7,3891$ ;  $b = \pi/4 = 0,7854$  (правда, эти  $a$  и  $b$  – маловероятны).

Однако подавляющая часть всех параметров  $H_n$  превышает именно значение  $P_n^{-1}$ , которое дает формула (2.23). Поэтому такие  $H_n$  мы назовем *правильными  $H$ -параметрами*. При  $P_n \rightarrow \infty$  доля правильных  $H$ -параметров, возможно, устремляется к 90% (при  $n=60000$  она равна 89,835%), либо она асимптотически устремляется к 100%.  $\sum H_n \sim \sum P_n^{-1}$ , см. формулу (2.7).

**Сумма простых чисел ( $\sum P$ )** на отрезке  $[1; N]$  выражается формулой

$$\sum P \sim S_N \cdot R_s^{-1} \sim 0,5 \cdot N^2 \cdot R_s^{-1} \sim N^2 \cdot (2 \cdot \ln N)^{-1} , \quad (2.26)$$

где  $S_N = 0,5 \cdot (1+N) \cdot N$  – это сумма всех натуральных чисел на отрезке  $[1; N]$ ,  $R_s$  – средний  $R$ -фактор, см. формулу (2.21). До  $N = 113$  (это 30-ое простое число) ещё возможно  $\sum P > S_N \cdot R_s^{-1}$ , но при  $N > 113$ , вероятно, уже всегда  $\sum P$

$< S_N \cdot R_s^{-1}$  (в качестве правой границы  $N$  всегда берем простое число). При  $N=5 \cdot 10^6$  относительная погрешность формулы (2.26) убывает до 4%.

На Большом отрезке сумма всех простых чисел равна  $\sum P \sim 2,28 \cdot 10^{19}$ .

**Порог** простого числа  $P_n$ . Пусть  $z$  – это *наибольший* возможный показатель степени над простым числом  $P_n$  в каноническом разложении числа  $N$ . Очевидно, что  $z = A(\ln N / \ln P_n)$ , где  $A$  – функция антье. Тогда можно заметить, что, например, на Большом отрезке ( $N=10^{61}$ )  $z=38$  почти равен  $P_n=37$  у 12-го простого числа (при  $n=12$ ). Порядковый номер  $n$  простого числа  $P_n$ , для которого точнее всего выполняется условие  $z \approx P_n$ , будем называть **порогом** простого числа  $P_n$  на отрезке  $[1; N]$ . С увеличением  $N$  порог медленно растет по следующему закону (на БО он дает ОП= – 3,7%):

$$n \approx 0,61 \cdot (\ln N)^{0,61}. \quad (2.27)$$

### 3. ТИПЫ (МИРЫ) НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Тип числа** – это количество всех его делителей. Например, тип числа  $N=20$  равен 6, так как у него имеется шесть делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Будем обозначать тип числа буквой  $T$ . У любого простого числа  $T=2$ . Число  $N=1$  является единственным, особым числом, у которого  $T=1$ . Зная каноническое разложение числа  $N = P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m$ , можно найти его тип:

$$T = (a+1)(b+1)(c+1) \dots (m+1). \quad (3.1)$$

Так, для  $N = 261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2$  имеем  $T = (4+1)(3+1)(1+1)(2+1) = 120$ . Однако поиск показателей степени  $a, b, c, \dots, m$  – задача далеко непростая. В серьезной компьютерной программе *Mathcad 2000*, ориентированной на решение математических задач, существует даже специальная команда (*Factor*) для автоматического поиска этих показателей, т. е. для факторизации числа  $N$  (даже если оно записывается десятками цифр).

**Малые делители.** Если все делители любого числа  $N$  расположить по возрастанию, то, перебрав первую их половину (*малые делители*), мы обнаружим, что остальные (*большие делители*) равны отношению числа  $N$  и соответствующего малого делителя. Например, у числа  $N=20$  все его делители (1, 2, 4, 5, 10, 20) можно представить как: 1, 2, 4, 20/4, 20/2, 20/1. Таким образом, определение типа числа  $N$  сводится к поиску его малых делителей, причем, исключительно на отрезке  $[1; \sqrt{N}]$ . Ведь если число  $N > 1$  равно произведению двух натуральных чисел, то, по крайней мере, одно из них не больше, чем  $\sqrt{N}$  – это заметил ещё Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1180–1240). Таким образом, малые делители (лежащие на отрезке от 1 до  $\sqrt{N}$ ) – своеобразный паспорт числа  $N$ , с *полной* информацией о нём.

**Средний тип числа.** В натуральном ряде появление различных типов (чисел с различными типами) носит *псевдослучайный* характер (см. гл. 5),

т.е. практически невозможно предсказать какой тип будет у следующего числа  $N$ . Очевидно только одно – чем дальше мы уходим от единицы, тем **большие** типы могут появиться, причем наряду с ними неизбежно будут появляться числа и с самыми малыми типами  $T = 2, 3, 4, \dots$  (см. рис. 3.1).

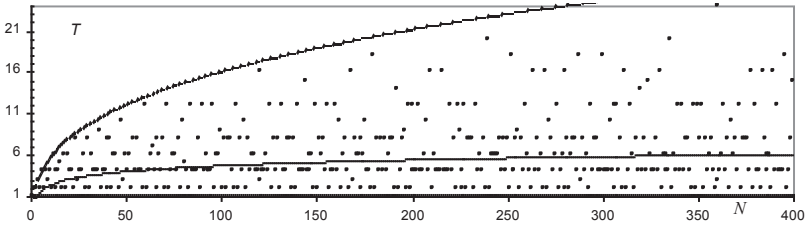


Рис. 3.1. Отрезок [1; 400]: типы  $T$  (точки) у всех чисел  $N$ , а также  $T_{max}$  и  $T_s$

Для любого числа  $N$  помимо его собственного типа  $T$  (количества всех его делителей) всегда можно вычислить некий **средний тип** ( $T_s$ ), равный среднему арифметическому всех предшествующих типов (точнее говоря, среднему арифметическому типов у всех чисел от 1 до  $N$  включительно):

$$T_s \equiv (T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T)/N \quad (3.2)$$

Несмотря на беспорядочные колебания типов  $T$  (точки на рис. 3.1), средний тип  $T_s$  (нижняя линия, идет среди точек) ведет себя на удивление спокойно. Немецкий математик П. Г. Л. Дирихле (1805–1859) нашел закон роста параметра  $T_s$  (скажем, **формула Дирихле** – очень важная для нас):

$$T_s = \ln N + (2 \cdot C - 1) + \varepsilon, \quad (3.3)$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а число  $C$  – это сумма сходящегося ряда:  $C = \lim[\sum k^{-1} - \ln(k+1)]$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ; ( $n \rightarrow \infty$ ). Число  $C$  носит имя Л. Эйлера, который в 1740 г. вывел формулу, позволяющую вычислить его с любой точностью (например, с 15 верными знаками:  $C = 0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\dots$ ). Однако арифметическая природа числа  $C$  (или иначе – **постоянной Эйлера**) не изучена до сих пор, и неизвестно является ли это число рациональным или нет.

Эйлер получил асимптотическое выражение для суммы ( $S$ ) первых  $N$  членов так называемого **гармонического ряда** [сравните с формулой (2.7)]

$$S \equiv \sum k^{-1} = 1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + \dots + N^{-1} + \dots = \ln(N+1) + C + \varepsilon, \quad (3.4)$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Каждый член этого ряда, начиная со второго, является **гармоническим средним** двух соседних членов. Таким образом, мы приходим к весьма “гармоничному” заключению:  $T_s = S + C - 1$  (при  $N \rightarrow \infty$ ).

Относительная погрешность (ОП) формулы Дирихле быстро убывает. Модуль ОП формулы (3.3) (считаем, что  $\varepsilon = 0$ ), вероятно, можно оценить неким выражением, скажем:  $\text{abs(ОП)} < N^{-w}$ , где  $w = \pi^2/12 \approx 0,8225$ .

**Миры чисел.** Все натуральные числа с одинаковым типом  $T$  образуют своеобразный мир, где царят законы, характерные только для этого мира.

Хитросплетения внутри миров (сложность миров) были обнаружены буквально с первых шагов ГТНЧ (см. [6÷9, 12]). Кроме того, зачастую просто удобнее говорить о *мирах*, которые объединяют числа с одинаковым типом. Так, все простые числа (с  $T=2$ ) образуют мир №2; числа с типом  $T=3$  образуют мир №3, и т.д. Миры возникают (появляются первый раз в натуральном ряде) далеко не по возрастанию, вот первые 17-ть миров на отрезке [1; 360]: № 1, 2, 3, 4, 6, 5, 8, 9, 10, 12, 7, 16, 15, 18, 14, 20, 24.

Все миры можно разделить на две существенно разные группы:

- 1). **Редкие миры** (нечетные миры) – в них числа  $N$  имеют нечетный тип  $T$ .
- 2). **Частые миры** (четные миры) – в них числа  $N$  имеют четный тип  $T$ .

Редкие миры образуют только числа вида  $N = i^2$ , где  $i=1, 2, 3, \dots$ . Только у таких чисел  $N$  последний малый делитель равен первому большому делителю, поэтому количество больших делителей всегда будет на единицу меньше, чем малых – так возникает нечетный тип  $T$ . Первые числа из редких миров это:  $N = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots$ . На графике  $N=f(i)$  эти числа уходят вверх по параболе и ясно, что таких чисел в натуральном ряде не может быть много. Такие  $N$  – это «исчезающие особи» в мире чисел.

В каждом мире можно выделить бесконечно много уровней. Например, первый уровень в мире №2 – это  $R$ -фактор (см. в конце гл.2); второй уровень в мире №2 – это разность уже между «рядом стоящими»  $R$ -факторами; и т.д. до бесконечности. Уровни как бы «вложены» один в другой, они последовательно «проявляются» по мере удаления правой границы отрезка [1;  $N$ ], причем каждый новый уровень обнаружить всё более и более трудно. Ясно, что на Большом отрезке количество «вложений», т.е. количество разных уровней, ограничено неким числом (у каждого мира оно своё) [9].

**Лидеры миров.** При последовательном движении по натуральному ряду у некоторого числа  $N$  впервые появляется тип  $T$  – такое число  $N$  мы будем называть *лидером* мира  $T$ . Лидер словно “открывает” данный мир  $T$ . Время от времени, по мере удаления правой границы отрезка [1;  $N$ ], у очередного лидера  $N$  его тип  $T$  оказывается больше всех ранее появившихся типов, поэтому такого лидера мы назовем *верхним лидером*.

**Исключительность мира №8.** Миры могут быть «густонаселенными», т.е. с относительно большим количеством чисел на данном отрезке (миры № 2, 4, 6, 8, 12 и т.д.), и «малонаселенными» (миры № 34, 150, 98, 132, 162 и т.д.). Если рассмотреть типы  $T$  всех чисел на отрезке [1; 520000], то мы обнаружим, что больше всего чисел из мира №8 (22,35%), затем идут следующие миры: №4 (21,6%), №16 (12,2%), №12 (9,4%), №2 (8,3%), №24 (6,7%), №6 (4,7%). То есть в *семи* указанных мирах содержится 85,4% всех чисел

указанного отрезка. Причем, рассматривая другие отрезки (располагая миры по убыванию количества чисел в них), обнаружим, что в первых *семи* мирах – сосредоточена львиная доля всех чисел отрезка [9].

Мир №8 начинает преобладать на отрезке  $[1; N]$  далеко не сразу, а только когда правая граница достигает значения  $N \approx 245000$ . Но после этого мир №8, вероятно, уже никогда не теряет своего первенства. То есть чаще всего мы будем встречать натуральные числа, у которых 8 делителей (или 7 *правильных* делителей – меньших самого числа  $N$ ). Максимально возможная доля мира №8 равна 22,4432...% (доля чисел с  $T=8$  среди всех чисел отрезка), это происходит при  $N=999994$  (у 224431-го числа из мира №8).

#### 4. МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНЫЙ ТИП

**Максимально возможный тип** ( $T_{max}$ ) на отрезке  $[1; N]$ . Беря за основу типы  $T$  у верхних лидеров  $N$ , в идеале желательно было бы построить некую линию  $T_{max} = f(N)$ , т.е. линию **максимально возможного типа** у произвольного числа  $N$ . Эта линия (верхняя линия на рис. 3.1) должна «огибать сверху» типы  $T$  (точки на графике) у всех верхних лидеров (и у всех прочих чисел на отрезке  $[1; N]$ ). Но далее по тексту мы укажем несколько иную линию:  $T_{max} = \varphi(N)$  – эти значения расположены “вокруг” первой линии.

**$T_{max}$  в редких мирах.** Ранее (см. [9]) на Большом отрезке удалось найти все (?) 120000 лидеров из *редких миров* (с нечетные  $T$ ), причем среди них оказалось только 270 верхних лидеров. В табл. 4.1 приведены, для примера, три последних (старших) на БО верхних лидера  $N$  и их типы  $T$ .

От конца Малого отрезка до конца Большого отрезка, то есть на отрезке  $[10^{20}; 10^{61}]$  можно пользоваться (с ОП = ± 9%) следующей формулой:

$$T_{max} \approx T_s \cdot \exp[0,3031 \cdot (\ln N)^{0,8493}], \quad (4.1)$$

где  $T_s$  – средний тип (по Дирихле) у числа  $N$ , для которого находим  $T_{max}$ . На Малом отрезке  $[1; 10^{20}]$  формула (4.1), срабатывает значительно хуже (с ОП от –27% до +4%). На Малом отрезке можно использовать (с ОП = ± 12%) аналогичную формулу, но уже с заметно другими параметрами:

$$T_{max} \approx T_s \cdot \exp[0,2465 \cdot (\ln N)^{0,9028}]. \quad (4.2)$$

И никакая формула для  $T_{max}$  на МО не сможет улучшить указанную ОП.

Таблица 4.1. Три последних верхних лидера  $N$  на БО

|   |   |
|---|---|
| $N = 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot M^2 \approx 3,51 \cdot 10^{60}$ | $T = 69\ 950\ 921\ 625 \approx 7,0 \cdot 10^{10}$ |
| $N = 2^{12} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot M^2 \approx 5,81 \cdot 10^{60}$ | $T = 75\ 546\ 995\ 355 \approx 7,6 \cdot 10^{10}$ |
| $N = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot M^2 \approx 7,91 \cdot 10^{60}$ | $T = 82\ 864\ 937\ 925 \approx 8,3 \cdot 10^{10}$ |

где  $M = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71$

**$T_{max}$  в частых мирах.** Ранее (см. [9]) удалось найти все (?) 27306 лидеров *частых миров*, но, увы, только на отрезке  $[1; 10^{32}]$ , причем среди них оказалось 313 верхних лидера (больше, чем на всём БО в редких мирах!). На БО, по предварительной оценке, вероятно, около 687430 лидеров частых миров, в т. ч. около 734 верхних лидеров. Всего на БО появляется около 807430 различных миров (120000 редких и 687430 частых мира).

На Малом отрезке (для  $N > 24$ ) пользуемся (с ОП =  $\pm 9\%$ ) формулой

$$T_{max} \approx T_s \cdot \exp[0,2710 \cdot (\ln N)^{0,90283}]. \quad (4.3)$$

От конца Малого отрезка до конца Большого отрезка, то есть на отрезке  $[10^{20}; 10^{61}]$  будем пользоваться аналогичной формулой [см. также (25.2)]:

$$T_{max} \approx T_s \cdot \exp[0,3197 \cdot (\ln N)^{0,85883}], \quad (4.4)$$

помня о том, что на отрезке  $[10^{20}; 10^{32}]$  у этой формулы ОП =  $\pm 5\%$ .

По формуле (4.4) в конце Большого отрезка получаем  $T_{max} \approx 6,85 \cdot 10^{11}$ , т.е. у некоторых гигантских натуральных чисел, состоящих из 61-й цифры, может быть около 685 миллиардов делителей. Следует добавить, что в гл. 13 нами будет выведено, пожалуй, самое интересное выражение для  $T_{max}$  из всех полученных в рамках ГТНЧ [см. формулу (13.17)]. В конце БО  $T_{max}$  частых миров примерно в 8 раз превосходит  $T_{max}$  редких миров.

Средний тип всех чисел в конце Большого отрезка достигает всего-навсего значения  $T_s \approx 140,4$ , что на много порядков меньше, чем  $T_{max}$ . Это можно объяснить единственным образом: *мир чисел отдаёт явное предпочтение малым типам  $T$* , т.е. у подавляющего большинства натуральных чисел  $N$  количество делителей невелико. Например, простых чисел (у них минимальный тип  $T=2$ ) на БО около  $7 \cdot 10^{58}$ , что составляет примерно 0,7%. И это весьма солидная доля, ведь в среднем на один мир должно приходиться  $10^{61}/807430 \approx 1,2 \cdot 10^{55}$  чисел или 0,00012% от всех чисел БО.

**Спектр миров**, скажем, на отрезке  $[1; 520000]$  – это количество чисел  $K$ , порожденных лидером  $NL$  (см. рис. 4.1). Как видим, чем больше лидер  $NL$ , тем меньше вероятность того, что он «породит» много чисел (мир, который он «откроет» чаще всего будет малонаселенным).

**Миры-фантомы.** На отрезке  $[1; 360]$  (см. выше) не появились миры № 11, 13, 17, 19, 21, 22, 23 – это *миры-фантомы*. Ясно, что при увеличении правой границы отрезка ( $N > 360$ ) миры-фантомы рано или поздно появятся, перестав быть таковыми (фантомами станут другие миры). Ведь номера *всех* миров (типы *всех* чисел) – также образуют натуральный ряд.

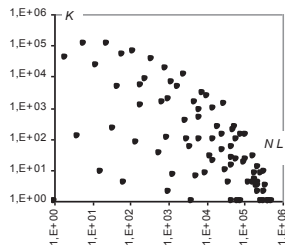


Рис. 4.1. Спектр миров

А сколько миров-фантомов может быть на произвольном отрезке? Рассмотрим отдельно только *редкие миры*. На отрезке  $[1; 132710400]$  появится  $K=60$  редких миров, а тип наибольшего из них –  $T_{max} = 567$ . Значит, количество миров-фантомов ( $K\phi$ ) на указанном (рабочем) отрезке будет равно  $K\phi = T_{max} - K = 567 - 60 = 507$ . Если судить в целом по рабочему отрезку, то в редких мирах количество фантомов ( $K\phi$ ), вероятно, асимптотически стремится к максимальному типу ( $T_{max}$ ) на отрезке  $[1; N]$ , т.е. при  $N \rightarrow \infty$  имеем  $\lim(T_{max}/K\phi) \rightarrow 1$ . При этом модуль относительной погрешности (ОП) можно оценить примерно следующим образом:

$$\text{abs(ОП)} \equiv \text{abs}[(K\phi - T_{max})/T_{max}] < 0,72 \cdot N^{-0,09}. \quad (4.5)$$

Аналогичные рассуждения можно провести для *частых миров*, скажем, на рабочем отрезке  $[1; 520000]$ . При этом мы получим такую оценку:

$$\text{abs(ОП)} \equiv \text{abs}[(K\phi - T_{max})/T_{max}] < 0,73 \cdot N^{-0,0674}. \quad (4.6)$$

Итак, количество фантомов  $K\phi$  (как в частых, так и в редких мирах) устремляется к значению максимально возможного типа  $T_{max}$  (в соответствующих мирах). Разумеется, всегда  $K\phi < T_{max}$ .

## 5. ПИРАМИДА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Пирамида** натуральных чисел (рис. 5.1) – это главное «наглядное пособие» ГТНЧ. Ниже приводится алгоритм построения Пирамиды:

1). Строим *натуральный столбец* – клетки с натуральными числами:  $N = 1, 2, 3, \dots, 50, \dots$ , которые одновременно являются и *номерами строк* Пирамиды. Второе название любой клетки – *камень* Пирамиды. Число  $N$  – это высота Пирамиды (м.б. от 1 до  $+\infty$ ).

2) Справа от натурального столбца (с  $N$ ) поместим другие столбцы. Начало  $J$ -го столбца – в строке с тем же номером:  $N=J=1, 2, 3, \dots$  (на рис.5.1 только 10 столбцов, остальные «обрезаем», экономя бумагу).

3). В каждом ( $J$ -ом) столбце закрасим серым цветом все клетки, начиная со строки с номером  $N=J^2$ . Все серые клетки образуют *Ствол* Пирамиды. Ствол имеет *ступени*, которые начинаются с чисел  $N = i^2$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots$  – это *номер ступени* Ствола (левый столбец).

4). В каждом ( $J$ -ом) столбце закрасим черным цветом клетки, идущие с шагом, равным  $J$ . Причем, чёрные клетки «заслоняют» серые (при их совпадении). Во всех черных клетках указываем номер столбца ( $J$ ), т.е. каждая клетка имеет *массу*, равную  $J$  (у белых и серых камней эту массу также подразумеваем).

**Законы Пирамиды.** Пирамида позволяет легко осознать и сформулировать весьма интересные выводы – *законы Пирамиды*. Ниже, в качестве примера, приводятся основные из них (подробней см. [9]).

**Закон 1.** Все делители числа  $N$  – это все черные камни в  $N$ -ой строке.

**Закон 2.** Количество *малых делителей* у числа  $N$  не превосходит номера ступени Ствола ( $i$ ), на которой число  $N$  находится. Причем,  $i=A(\sqrt{N})$ , где  $A$  – функция “*антье*” (целая часть от корня квадратного  $\sqrt{N}$ ).

**Закон 3.** У всякого числа  $N$  вероятность встречи с малым делителем в  $\sqrt{N}$  раз больше, чем с его антиподом (то есть с *большим делителем*).

**Закон 4.** Тип числа  $N$  равен  $T=2 \cdot t$ , если  $\sqrt{N}$  – не целое число, иначе  $T=2 \cdot t - 1$ , где  $t$  – количество малых делителей числа  $N$ . Числа  $N$  из редких миров (с нечетным типом  $T$ ) – это первое число каждой ступени Ствола.

**Закон 5.** Вероятность встречи с частым типом в  $\sqrt{N}$  раза больше, чем с редким типом (на относительно больших отрезках натурального ряда).

**Закон 6.** Формирование типа  $T$  у любого числа  $N$  – это *псевдослучайный процесс* (только похожий на случайный). Тип любого числа строго предопределен (детерминирован) алгоритмом построения Пирамиды (описанным выше), который исключает всякую случайность. Мы, действительно, не можем *предсказать* тип произвольного числа, скажем, порядка  $N \sim 10^{61}$ , но в этом – только слабость *человеческого* разума, не способного представить (нарисовать) чудовищно высокую Пирамиду.

**Закон 7.** Количество всех камней в Пирамиде равно  $K=(1+N) \cdot N/2$ .

При  $N \rightarrow \infty$  имеем  $K \sim N^2/2$ . При  $N \sim 10^{61}$  в Пирамиде находится колоссальное количество камней, равное  $0,5 \cdot (10^{61})^2 = 0,5 \cdot 10^{122}$ .

**Закон 8.** Количество всех камней в Стволе  $k \sim (2/3) \cdot N^{3/2}$  при  $N \rightarrow \infty$ . Параметры Ствола и впредь будем обозначать строчными буквами (а у Пирамиды – прописными). При  $N \sim 10^{61}$  в Стволе находится около  $10^{92}$  камней.

**Закон 9.** В Стволе общая масса черных камней ( $m^*$ ) равна количеству всех его камней («звездочка» \* указывает, что речь идет о черных камнях). Общая масса черных камней в Стволе – это сумма малых делителей. Учитывая 8-й закон Пирамиды, можно записать  $m^* \sim (2/3) \cdot N^{3/2}$  при  $N \rightarrow \infty$ .

**Закон 10.** Для Пирамиды высотой  $N \rightarrow \infty$  имеем:  $K/M^* \sim 6/\pi^2 = 0,6079\dots$ , где  $K$  – количества всех камней,  $M^*$  – общая масса черных камней (сумма всех делителей у всех чисел Пирамиды высотой  $N$ ). Таким образом, Пира-

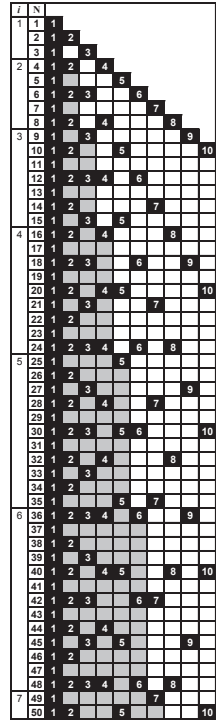


Рис. 5.1. Пирамида



мида довольно быстро “генерирует” число  $\pi$  и определение этой фундаментальной константы в терминах Пирамиды (через её параметры  $K$ ,  $M^*$  и  $N$ ), вероятно, будет самым глубоким из многих ранее известных [9].

Этот закон Пирамиды равносильно результату, полученному в работах Ж. Бюффона и П. Л. Чебышева: если наугад (случайным образом) выписать два натуральных числа, то вероятность их *взаимной простоты* будет равна  $6/\pi^2$  (числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, кроме единицы; например, таковы числа  $N=9$  и  $N=10$ , см. рис.5.1).

**Закон 11.** В начале натурального ряда существует *сингулярность*.

В мире чисел многие законы (формулы их выражающие) дают огромную относительную погрешность или вовсе «не работают» в самом начале натурального ряда (в сингулярности). Но с ростом  $N$  относительная погрешность этих формул, вообще говоря, быстро убывает. Подобным образом себя ведут, например, формулы 2.3 и 2.4, законы Пирамиды (7–10), многие другие формулы *теории чисел* и ГТНЧ (в т.ч. далее по тексту книги). И чтобы впредь не акцентировать своё внимание на столь примечательном факте – мы сформулировали 11-й закон.

Законам Пирамиды посвящены также табл. 5.1. и 5.2.

## 6. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОГАТСТВА

**Богатство числа  $N$ .** Как-то великий Л.Эйлер посетовал на своих современников, что: “*Из всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными предложений, чем проблемы, касающиеся природы чисел и их делителей ...*». Сам Эйлер, безусловно, совершил прорыв в данном вопросе. Он первым из математиков ввёл обозначение для *суммы всех делителей* натурального числа  $N$ , правда, он использовал символ  $\{N$ , а в настоящее время обычно используется символ «сигма»:  $\sigma(N)$ . Так, сумма всех делителей у числа  $N=21$  будет равна  $\sigma(21)=1+3+7+21=32$ . Очевидно, что для всех простых чисел, которые мы обозначим символом  $P$ , справедлива формула:  $\sigma(P)=1+P$ . Для единицы получаем  $\sigma(1)=1$ , а не  $1+1$ , поэтому Эйлер замечает, что “...из последовательности простых чисел 1 должна быть исключена; 1 есть начальное целое число, ни простое, ни составное”. А вот 0 (нуль) делится на все числа, которых бесконечно много, поэтому, по мнению Эйлера,  $\sigma(0)$  должно было бы быть *бесконечно большим числом*, однако сам Эйлер приводит пример того, что  $\sigma(0)$  может принимать бесконечное число *конечных значений* (см. [12], гл. 2.8). И здесь следует особо подчеркнуть, что в начале натурального ряда скрывается нечто фундаментальное (поскольку,  $\sigma(0)$  – далеко не нуль, а единица – совершенно особое число).

С первых шагов ГТНЧ сумма всех делителей натурального числа  $N$  была названа “**богатством**” ( $S$ ). Поскольку, во-первых, это короткий и удобный термин, а во-вторых, для целого ряда чисел  $N$  распределение их богатства  $S$  очень похоже на распределение... денежных доходов населения.

**Тильда-функция.** Как распределение денежных доходов (скажем, у населения России, подробно см. [10, 11]), так и распределение богатства в мире чисел (скажем, у некоего числа  $N$ ), можно описать одинаковой функцией – **законом распределения богатства  $S$**  (или тильда-функцией). Расскажем о ней на примере числа  $N = 19.999.980.000$ . У числа  $N$  богатство  $S$  будет распределяться среди его делителей по следующему закону:

$$D \approx S \cdot \exp\left[-A \cdot \left(\ln \frac{K}{x}\right)^p\right], \quad (6.1)$$

где  $x = 1, 2, 3, \dots, (K-1)$  – порядковый номер делителя (при условии, что все делители числа  $N$  выстроены по возрастанию, т.е. при  $x=1$  имеем  $D=1$ );

$D$  – делитель, близкий к реальному  $D^*$  (с порядковым номером равным  $x$ );

$K$  – количество всех делителей у натурального числа  $N$  (тип этого числа);

$S$  – сумма всех реальных делителей (**богатство** числа  $N$ );

$A$  и  $p$  – некий коэффициент и показатель степени (эмпирические числа).

Наибольший делитель (при  $x=K$ ) можно определять как разность между богатством числа  $N$  и суммой всех предшествующих делителей:

$$D_K = S - (D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_{K-1}). \quad (6.2)$$

Формулу (6.1) удобно называть также **тильдой** (*тильда-распределением, тильда-функцией*), так как график функции  $D=f(x)$ , вообще говоря, напоминает символ “тильду” ( $\sim$ ), правда, правый край которой будет всегда приподнят кверху. На рис.6.1 показана тильда для числа  $N=19.999.980.000$ .

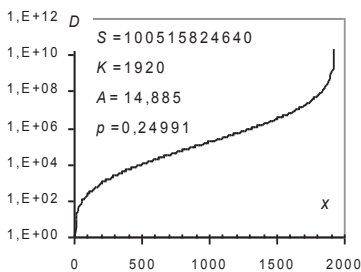


Рис. 6.1. Тильда-функция (тильда)

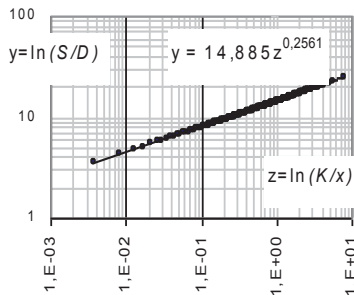


Рис. 6.2. Нахождение параметров тильды

Разумеется, что далеко не у всех натуральных чисел  $N$  распределение делителей можно описать формулой (6.1). Даже у «лучших» **тильда-чисел** (у

достаточно больших *верхних лидеров*, см. гл. 3) относительная погрешность значений, найденных по формуле (6.1), оставляет желать лучшего.

Параметры тильды ( $A$  и  $p$ ) легко найти, если построить график зависимости  $y=f(z)$ , где  $y=\ln(S/D^*)$  и  $z=\ln(K/x)$  – некие комплексы (рис.6.2.), а  $D^*$  – реальный делитель с порядковым номером равным  $x$ . На этом графике компьютер выдает (скажем, в программе «Excel») *параметры степенной линии тренда* – это и будут искомыми нами  $A$  и  $p$ . Останется только чуть изменить параметр  $p$ , добиваясь наименьшей относительной погрешности.

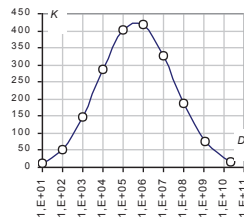


Рис. 6.3. «Колокол» для делителей числа  $N=19.999.980.000$

Тильда-функция – это примитивный, грубый «инструмент», но в ряде случаев его достаточно удобно использовать для описания распределения делителей (а тем более – денежных доходов граждан). Любопытно, что если использовать параметры  $A$  и  $p$ , найденные только на базе *малых делителей* числа  $N$  (то есть при  $x=1, 2, 3, \dots, K/2$ , взяв  $S$  и  $K$  прежними), то относительная погрешность для  $D$ , найденных по формуле (6.1), может уменьшиться в несколько раз (скажем, с  $\pm 20\%$  до  $\pm 5\%$ ).

**Логнормальные числа.** Тильда-функция (6.1) – всего лишь «бледная тень» реально существующих закономерностей в части распределения делителей. Правильней всего говорить, что у целого ряда натуральных чисел делители подчиняются *логарифмически нормальному распределению (логнормальному распределению)*. А сами эти числа можно назвать *логнормальными числами*. Поясним на примере числа  $N=19.999.980.000$ . Все его 1920 делителей явно образуют логнормальное распределение, в этом легко убедиться, если построить график зависимости количества делителей  $K$  от величины самих делителей  $D$  (рис.6.3.). Данный график, например, показывает, что если  $10^2 < D < 10^3$ , то количество таких делителей будет  $K=148$ ; если  $10^3 < D < 10^4$ , то количество таких делителей будет  $K=286$  и т. д. Иначе говоря, величина  $\ln D$  имеет *нормальное распределение* (об этом свидетельствует почти идеальный «колокол» на графике), а значит, сами делители  $D$  подчиняются *логнормальному* распределению (т.к. на рис. 6.3 по оси абсцисс – логарифмическая шкала). Такое распределение делителей приводит к тому, что по количеству больше всего делителей “принадлежат” среднему диапазону  $10^4 < D < 10^7$ , а количество как очень малых, так и очень больших

делителей – незначительно. Для более глубокого изучения натуральных логнормальных чисел, нам необходимо ознакомиться с основами *теории вероятности*. Этому будет посвящена отдельная глава (12).

## 7. БОГАТСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Формула Валлиса.** Если известно каноническое разложение натурального числа  $N = P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m$ , то богатство ( $S$ ) этого числа, оказывается, можно вычислить по формуле Джона Валлиса (1616–1703):

$$S \equiv \sigma(N) = \frac{P_1^{a+1}-1}{P_1-1} \cdot \frac{P_2^{b+1}-1}{P_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{P_n^{m+1}-1}{P_n-1}. \quad (7.1)$$

Кстати, именно Джон Валлис ещё в 1655 г. ввёл общепринятый теперь знак для бесконечности ( $\infty$ ) и выразил число  $\pi$  в виде *бесконечного произведения* (это один из первых примеров бесконечного произведения):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k - 1} \cdot \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k + 1} \dots, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.2)$$

Формула Валлиса (7.1) хороша тем, что мы находим богатство числа  $N$ , практически не зная его делителей. Правда, по формуле (3.1) мы можем узнать количество делителей у числа  $N$  (узнать тип  $T$ ). Напомним, что найти каноническое разложение всех чисел на большом отрезке  $[1; N]$  – задача непростая, а значит и непросто найти богатство всех чисел отрезка.

Ранее (см. [12]) было установлено, что при  $N \rightarrow \infty$  суммарное богатство всех чисел на отрезке  $[1; N]$  (**богатство Пирамиды**) стремится к величине

$$\Sigma S \sim (\pi^2/6) \cdot (1 + N) \cdot N/2 \approx (\pi^2/12) \cdot N^2 \approx 0,8224 \cdot N^2. \quad (7.3)$$

Причем модуль относительной погрешности данной формулы не превосходит величины  $2/N$ , а при  $N > 500$  для подавляющего большинства значений  $N$  формула (7.3) дает суммарное богатство  $\Sigma S$  больше реального.

**Максимально возможное богатство.** Именно по формуле Валлиса ранее [9] были найдены богатства *лидеров частых миров* на отрезке  $[1; 10^{32}]$  и *лидеров редких миров* на отрезке  $[1; 10^{61}]$ . Это позволило сделать предположение о максимально возможном богатстве ( $S_{max}$ ) на  $[1; N]$ :

$$S1_{max} \approx \sqrt{e} \cdot N \cdot \ln \ln N \quad \text{– для редких (нечетных) миров;} \quad (7.4)$$

$$S2_{max} \approx \sqrt{\pi} \cdot N \cdot \ln \ln N \quad \text{– для частых (четных) миров.} \quad (7.5)$$

Таким образом, у произвольного числа  $N$  его богатство  $S$  не может быть больше, чем  $S2_{max} \approx 1,7724 \cdot N \cdot \ln \ln N$ . Причем часто бывает удобней говорить не о богатстве, а о его *кратности*. См. также формулу (7.8).

**Кратность богатства.** Будем называть *кратностью (KR)* богатства числа  $N$  (или просто – кратностью самого числа  $N$ ) отношение богатства

числа  $N$  к самому этому числу:  $KR \equiv S/N$ . Тогда, максимально возможная кратность у числа  $N$ , очевидно, будет равна следующему:

$$KR2_{max} \equiv S2_{max}/N \approx 1,7724 \cdot \ln \ln N. \quad (7.6)$$

Например, согласно формуле (7.6) в конце Большого отрезка максимально возможная кратность достигает уровня  $KR2_{max} \approx 8,76$ .

Скорее всего, формулы (7.4), (7.5), (7.6), мягко говоря, упрощают реальную картину в части кратности чисел. Так, очень может быть, что максимально возможная кратность связана с суммой Гаусса-Мертенса ( $GM$ ):

$$GM \equiv \Sigma P^{-1} = \ln \ln N + 0,261497 + \varepsilon \quad [\text{см. формулу (2.6)}].$$

Реальное отношение  $X \equiv KR2_{max}/GM$  сначала убывает от  $X=3$  (при  $N=2$ ) до  $X_{min}=1,538393\dots$  (при  $N=25200$ ), а потом начинает медленно расти и на подходе к числу  $N=10^{32}$  совершает колебания вокруг значения  $X \approx 1,64106$ . Поэтому можно предположить, что при  $N \rightarrow \infty$  имеет место следующее:

$$KR2_{max} \sim X \cdot GM, \quad (7.7)$$

где  $X=1,63 \pm 0,01$ , или  $X=\pi^2/6=1,6449\dots$ , или  $X=e^{0,5}=1,6487\dots$  (остается только гадать). Кстати, аналогичным образом ведет себя и отношение  $Y \equiv KR1_{max}/GM$  для редких миров, но здесь даже при  $N=10^{61}$  это отношение до-растает только до значения  $Y \approx 1,5$  (совершая куда большие колебания).

В части кратности можно привести ещё две интересные гипотезы:

I. Сумма кратностей всех натуральных чисел из редких миров на отрезке  $[1; N]$  стремится к значению  $2 \cdot \sqrt{N} \approx 2 \cdot i$ , где  $i$  – номер ступени Ствола.

II. Сумма кратностей всех натуральных чисел на отрезке  $[1; N]$  стремится к значению  $\sqrt{e} \cdot N \approx 1,6487 \cdot N$ , т. е. средняя кратность всех чисел, вероятно, стремится к числу  $\sqrt{e} \approx 1,6487\dots$

**Минимально возможное богатство.** Что касается минимально возможного богатства ( $S_{min}$ ) у произвольного числа  $N$ , то оно, очевидно, определяется выражением  $S_{min} \geq 1+N$ . Иначе говоря, нижнюю границу образуют богатства простых чисел (см. гл. 2). Таким образом, в силу принятой нами терминологии, простые числа оказались здесь, увы, самыми “бедными”.

**Распределение богатства** в натуральном ряде. На компьютере можно без труда найти богатство ( $S$ ) у всех чисел на рабочем отрезке  $[1; 10000]$ . Эти богатства на графике  $S=f(N)$  в логарифмических осях образуют довольно узкий, своеобразный «шлейф» из точек-значений  $S$ , заключенных между воображаемыми «границами»: от  $S_{min}=1+N$  до  $S2_{max}$ . С учетом формул (7.6) и (7.7), впредь будем считать, что максимально возможное богатство ( $S2_{max}$ ) у числа  $N$  определяется следующей формулой:

$$S_{2max} \approx (\pi^2/6) \cdot N \cdot (\ln \ln N + 0,261497). \quad (7.8)$$

Первое, что бросается в глаза на рабочем отрезке – это совпадение богатств у целого ряда чисел. Так, значение  $S=15120$  повторилось у 37 различных чисел  $N$ , а значение  $S=240$  только у 7 чисел. Для обозначения подобных фактов мы введем важное понятие: назовем количество таких повторений – **плотностью** ( $R$ ) богатства  $S$  на  $[1; N]$ . Например, будем говорить, что на рабочем отрезке плотность богатства  $S=15120$  равна  $R=37$ .

Всего на рабочем отрезке появилось  $K=3700$  различных богатств  $S=1, 3, 4, 6, 7, \dots, 34560$ , которые с точки зрения их плотности  $R$  объединяются в 39 групп:  $R=1, 2, 3, \dots, 37, 39, 40, 49, 57$ , т. е. наибольшая плотность оказалась равной  $R_{max}=57$  (57 раз появилось богатство  $S=10080$ ). Если на графике  $R=f(S)$  все плотности (3700 точек, которые на рис. 7.1 не показаны) обвести линией, то получим своеобразный *спектр* плотности (богатства).

Как видим, чем больше плотность  $R$ , тем меньше богатств  $S$  (чисел  $N$  с таким  $S$ ) имеют данную плотность и, вероятно, справедлива такая оценка:

$$Kr \leq K/R^2, \quad (7.9)$$

где  $Kr$  – это количество богатств  $S$  (а значит и чисел  $N$ ), чья плотность не превосходит  $R$ . Заметим, что первые семь плотностей  $R=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  «вбирают в себя» подавляющую часть богатств (на рабочем отрезке это 93,32% от колчество всех богатств  $S$ ).

Количество различных богатств на отрезке  $[1; N]$ , вероятно, можно оценить следующим образом:

$$K \approx N \cdot (A \cdot \ln N + B)^{-1}, \quad (7.10)$$

где  $A \approx 0,5 \cdot \ln(\pi/2) = 0,2257\dots$ ,  $B \approx 2/\pi = 0,6366\dots$ . Не исключено, что при  $N \rightarrow \infty$  *средняя плотность богатства* ( $N/K$ ) устремляется к некому числу, а не растет бесконечно, как это следует из формулы (7.10):  $N/K \sim A \cdot \ln N + B$ , согласно которой в конце Большого отрезка имеем  $N/K \approx 32,35$ .

Если на отрезке  $[1; N]$  все  $K$  различных богатств  $S$  расположить по их возрастанию и при этом суммировать (по нарастающей) плотности этих богатств ( $\Sigma R$ ), то можно вычислить некую текущую *удельную плотность богатства* –  $\Sigma R/S$ . Причем параметр  $\Sigma R/S$  с ростом  $S$  остается постоянным (около 0,673) вплоть до  $S=N$ , а затем экспоненциально убывает.

**Число  $N$  в качестве богатства другого числа  $X$ .** Богатство  $S$  – это всегда некое целое число, в связи с чем, возникает любопытный вопрос: а какова, вероятность ( $P_s$ ) того, что произвольное, относительно большое число, скажем,  $N=10^{61}$  (пра-

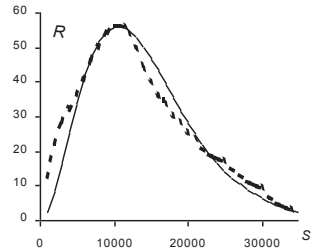


Рис. 7.1. Спектр плотности (богатства) на  $[1; 10000]$

вая граница Большого отрезка) будет являться богатством некоего другого числа  $X$  (разумеется,  $X < N$ ). По формуле (7.8) путем подбора находим число  $X \approx 1,195 \cdot 10^{60}$ , при котором выполняется равенство  $S2_{max} = 10^{61}$ . То есть именно на отрезке  $[1; X]$  достигается значение  $S2_{max} = 10^{61}$ , а искомую вероятность ( $P_s$ ) можно оценить по следующей формуле [она следует из выражений (7.8) и (7.10)]:

$$P_s \equiv K/S2_{max} \approx \{[0,5 \cdot \ln(\pi/2) \cdot \ln X + 2/\pi] \cdot [(\pi^2/6) \cdot (\ln \ln X + 0,261497)]\}^{-1}. \quad (7.11)$$

При  $X \approx 1,195 \cdot 10^{60}$  мы получим  $P_s \approx 0,003748\dots$ , причем 11-я цифра после запятой в значении  $P_s$  уменьшится на единицу, когда правая граница БО увеличится на  $\sim 600$  лет (разумеется, после эви-конвертации, см. гл. 1).

Если мы хотим оценить вероятность того, что произвольное число  $N$  может являться *богатством* (некоего меньшего числа), то можно также воспользоваться “улучшенной модификацией” формулы (7.11), а именно:

$$P_s^* \equiv P_s \cdot \ln \pi \approx 1,1447 \cdot P_s, \quad (7.12)$$

причем здесь в формулу (7.11) для  $P_s$  следует подставлять само число  $N$  (благодаря коэффициенту  $\ln \pi$ , не надо искать границу  $X$ ). Относительная погрешность формулы (7.12) на отрезке  $[10^3; 10^{61}]$  составляет  $\pm 10\%$ , а при  $10 < N < 10^3$  реальные вероятности  $P_s$  могут превышать  $P_s^*$  на 20% (в начале натурального ряда  $P_s$  сами колеблются в пределах  $\pm 0,05$ ).

Несколько «грубее» на БО работает совсем простая формула:

$$P_s \approx (4/\pi) \cdot (\ln N)^{-\sqrt{\pi}} \approx 1,2732 \cdot (\ln N)^{-1,1447}. \quad (7.13)$$

**Важное напоминание.** На самом деле вероятность  $P_s$  (если её вообще можно выразить аналитически как некую функцию от  $N$ ), наверняка, будет отличаться от формулы (7.11), а тем более – от (7.12) и (7.13). Но в ГТНЧ нам важно получить хотя бы грубую числовую оценку параметра  $P_s$  на Большом отрезке. При этом получение истинной аналитической зависимости  $P_s$  от  $N$ , скорее всего, окажется невероятно сложной задачей, а вот окончательное выражение может удивить нас своей простотой и лаконичностью. Данное замечание, разумеется, относится не только к  $P_s$ , но и к большинству выражений, найденных нами в рамках ГТНЧ.

## 8. «НАИБОЛЕЕ НЕОБЫЧАЙНЫЙ ЗАКОН» ЧИСЕЛ

**Мемуар Эйлера.** Всего каких-то триста лет назад учебников по математике не существовало (!). Научные труды и статьи излагались в так называемых мемуарах. В богатейшем наследии Эйлера есть удивительный мемуар, который называется «Открытие наиболее необычайного закона чисел, относящегося к суммам их делителей» [21]. Как видно из названия этот закон

поразил даже самого Эйлера. Его открытие – это блестящий пример *индуктивного исследования* в математике, мастером которого был Эйлер. Менее известные математики также широко использовали индукцию в своей работе, но, пожалуй, никто из них не фиксировал на бумаге столь тщательно ход своей мысли, как это, к нашему счастью, делал Эйлер. Вот что сказал об этом его современник – известный французский математик и просветитель Кондорсе (1743–1794): «Он [Эйлер] предпочитал обучение своих учеников тому небольшому удовлетворению, которое он получил бы, изумляя их. Он думал, что недостаточно сделал бы для науки, если бы не прибавил к открытиям, которыми он обогатил науку, *чистосердечного изложения идей*, приведших его к этим открытиям».

В своем мемуаре Эйлер пишет: «До сих пор математики тщетно пытались обнаружить в последовательности простых чисел какой-либо порядок, и мы имеем все основания верить, что здесь существует какая-то тайна, в которую человеческий ум *никогда не проникнет*. ...Это тем более удивительно, что арифметика дает нам определенные правила, с помощью которых мы можем продолжать последовательность простых чисел сколь угодно далеко, не замечая, однако, ни малейшего следа порядка... Мне удалось открыть *чрезвычайно странный закон*, управляющий последовательностью *сумм делителей* целых чисел, которая на первый взгляд кажется неправильной ровно в такой же степени, как и последовательность простых чисел, и которая в некотором смысле даже включает в себя эту последнюю».<sup>2</sup>

Напомним, что сумма всех делителей числа  $N$  – это *богатство* числа  $N$  (см. гл. 6), которое далее будем обозначать символом  $\sigma(N)$ .

«**Наиболее необычайный закон чисел**» для числа  $N$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma(N) = & \sigma(N-1) + \sigma(N-2) - \sigma(N-5) - \sigma(N-7) + \\ & + \sigma(N-12) + \sigma(N-15) - \sigma(N-22) - \sigma(N-26) + \\ & + \sigma(N-35) + \sigma(N-40) - \sigma(N-51) - \sigma(N-57) + \\ & + \sigma(N-70) + \sigma(N-77) - \sigma(N-92) - \sigma(N-100) + \dots \end{aligned}$$

или, в короткой записи (обозначения и термины в ней уже наши):

$$\sigma(N) = \sum Z \cdot \sigma(N - E) \quad , \quad (8.1)$$

где  $Z = \pm 1$  просто чередует знак: у двух слагаемых «+», у двух «-» и т.д.;  $E = 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, \dots$  – ряд Эйлера (*Euler*), который легко «расшифровывается», если обратить внимание на *разности* чисел в нём: 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, 13, 7, 15, 8, ..., т. е. все натуральные

---

<sup>2</sup> При цитировании Эйлера *курсив* всегда мой. Насчёт «... *никогда не проникнет*» Эйлер ошибся, поскольку за два столетия математики во многом постигли тайну простых чисел, см. гл. 2 и [1, 2, 3, 22, ...]. Английская поговорка гласит: «Никогда не говорите «Никогда»».



числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... и все нечетные числа 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... чередуются между собой (и, зная это, можно легко продолжить ряд Эйлера).

Для конкретного натурального числа  $N$  необходимо брать те слагаемые, у которых разность  $(N-E)$  под знаком  $\sigma$  положительна (“отсекая” все отрицательные разности). Причем, вместо выражения  $\sigma(0)$  необходимо подставить само число  $N$  (см. гл. 6). Таким образом, закон Эйлера говорит о том, что богатство любого натурального числа  $N$  равно сумме богатств предшествующих натуральных чисел, взятых по определенному правилу.

Для примера найдем богатство числа  $N=15$  с помощью закона Эйлера:

$$\begin{aligned}\sigma(15) &= \sigma(15-1) + \sigma(15-2) - \sigma(15-5) - \sigma(15-7) + \sigma(15-12) + \sigma(15-15) = \\ &= \sigma(14) + \sigma(13) - \sigma(10) - \sigma(8) + \sigma(3) + \sigma(0) = 24+14-18-15+4+15 = 24.\end{aligned}$$

Разумеется, чтобы вычислить  $\sigma(14)$ , нам необходимо было вычислить  $\sigma(13)$ , а перед этим  $-\sigma(12)$ ,  $\sigma(11)$ ,  $\sigma(10)$  и т. д. вплоть до  $\sigma(1)=1$ . Таким образом, здесь мы имеем дело с *рекуррентной* последовательностью, где каждое слагаемое определяется по неизменному правилу исходя из предыдущего слагаемого. И если бы закон Эйлера оказался единственной возможностью для нахождения богатства натуральных чисел [к счастью есть ещё, например, формула Валлиса (7.1)], то для определения богатства конкретного числа  $N$  нам бы пришлось найти богатство *всех* предшествующих  $(N-1)$  чисел, начиная с единицы. То есть закон Эйлера дает далеко не лучший практический способ определения богатства числа  $N$ .

**В чём прелесть закона Эйлера?** Прелесть закона (8.1) в алгоритме его вывода и в интересных следствиях из него. Например, вызывает восхищение сам факт существования бесконечного ряда чисел  $E$ , которые «увязывают» (словно единым шнурком) богатство любого числа  $N$  с богатством всех предшествующих чисел.

Похоже, сам Эйлер недооценил важность открытого им закона, поскольку он писал: «...мы не чувствуем *никакой разумной связи между структурой моей формулы и природой делителей*, с суммой которых мы имеем здесь дело. Последовательность чисел 1, 2, 5, 7, 12, 15, ... [ряд чисел  $E$ ], казалось бы, не имеет к рассматриваемому вопросу никакого отношения. Более того, поскольку закон этих чисел “прерывист” и они фактически являются смесью двух последовательностей с правильным законом: 1, 5, 12,

22, 35, ... и 2, 7, 15, 26, 40, ..., мы не могли ожидать, что такая неправильность может встретиться в Анализе” [раздел высшей математики].

Последние слова Эйлера требуют пояснений. Если ввести обозначение  $m=1, 2, 3, \dots$  – порядковый номер числа  $E$  (т. е. в ряду Эйлера), то при нечетных  $m=1, 3, 5, 7, \dots$  и четных  $m=2, 4, 6, 8, \dots$  соответственно имеем:

$$E = (3/8) \cdot m^2 + (1/2) \cdot m + (1/8) \quad \text{и} \quad E = (3/8) \cdot m^2 + (1/4) \cdot m \quad (8.2)$$

Таким образом, при росте номера  $m$  формулы (8.2) “генерируют” две последовательности чисел, а ряд  $E$  является их чередующейся “смесью”.

В формулировке закона Эйлера нас всё изумляет: и ряд чисел  $E$ , и правило знаков ( $Z$ ), и правило для  $\sigma(0)$ . Угадать случайно *такое* невозможно, но как удалось Эйлеру вывести данный закон? Вот что он пишет: “... хотя мы здесь рассматриваем *природу целых чисел, к которой Исчисление Бесконечно Малых кажется неприменимым*, тем не менее, я пришел к своему заключению с помощью дифференцирования и других *уловок*. Я желал бы, чтобы кто-нибудь другой нашел более короткий и более естественный путь, и, быть может, рассмотрение того пути, которому я следовал, могло бы оказать здесь некоторую помощь”. Неожиданная связь между природой бесконечно большого (природой целых чисел) и бесконечно малого расценивается Эйлером только как математическая “уловка”.

**Знаменитое тождество Эйлера.** Рассматривая разбиение чисел, Эйлер исследовал следующее бесконечное произведение (при  $0 \leq x \leq 1$ ):

$$P \equiv (1 - x^1) \cdot (1 - x^2) \cdot (1 - x^3) \cdot (1 - x^4) \cdot (1 - x^5) \cdot (1 - x^6) \cdot (1 - x^7) \cdot \dots \quad (8.3)$$

Чтобы увидеть, какого рода ряд получится в результате, он перемножил большое число множителей и нашел следующее выражение:

$$S \equiv 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \dots \quad (8.4)$$

Так возникло знаменитое тождество Эйлера ( $P=S$ ). Причем Эйлер убежден, что в качестве показателей степени при аргументе  $x$  (который рассматривается на интервале  $0 \leq x \leq 1$ ) выступает именно ряд чисел  $E$  с правилом знаков, аналогичным правилу знаков в формуле (8.1). Вот что он говорит по этому поводу: «... у меня нет для этого никаких других доводов, за исключением длинной индукции, которую я провел так далеко, что никоим образом не могу сомневаться в законе, управляющем образованием этих членов и их степеней... Таким образом, это *познанная, но все же не доказанная истина*...». Именно предположив равенство двух бесконечных выражений ( $P=S$ ), Эйлер, «различными способами манипулируя»  $P$  и  $S$ , приходит к открытию закона (8.1) (подробно об этом см. [12, 21]).

В 1881 г. Ф. Франклин впервые опубликовал красивое доказательство знаменитого тождества Эйлера ( $P=S$ ). Доказательство Франклина (зани-

мает всего 3 странички) – это поразительный пример того, что можно сделать с помощью элементарных «комбинаторных» аргументов (с помощью изучения графических изображений теорем о разбиениях) [33, стр. 122].

## 9. СТРУКТУРА БОГАТСТВА ПИРАМИДЫ

**Богатство Пирамиды.** Рассмотрим вершину Пирамиды, состоящую из первых  $N$  натуральных чисел (см. рис. 5.1). *Богатство Пирамиды* (высотой  $N$ ) – это сумма всех делителей у всех чисел от 1 до  $N$ . Богатство Пирамиды мы обозначим символом  $\Sigma\sigma(N)$ , а находим его по формуле:

$$\Sigma\sigma(N) \equiv \sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \dots + \sigma(N). \quad (9.1)$$

Ясно, что общая *масса черных камней Пирамиды* (высотой  $N$ , см. рис. 5.1) – это синоним богатства Пирамиды. Из 10-го закона Пирамиды следует, что при  $N \rightarrow \infty$  богатство Пирамиды высотой  $N$  стремится к выражению:

$$\Sigma\sigma(N) \sim (\pi^2/6) \cdot K = (\pi^2/6) \cdot (1+N) \cdot N/2, \quad (9.2)$$

где  $K$  – это количество всех камней в Пирамиде (белых, серых, черных).

**Структуру богатства Пирамиды.** Если богатство Пирамиды, скажем, при  $N=20$  вычислять по формуле (9.1), “расписав” все слагаемые по формуле (8.1), то получим, своего рода, *структуру* богатства Пирамиды:

$$\begin{aligned} \Sigma\sigma(20) = & 2 \cdot \{\sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(4) + \sigma(5) + \sigma(16) + \sigma(17) + \sigma(18)\} + \\ & 1 \cdot \{\sigma(6) + \sigma(7) + \sigma(8) + \sigma(14) + \sigma(15) + \sigma(19)\} + \\ & 0 \cdot \{\sigma(9) + \sigma(10) + \sigma(11) + \sigma(12) + \sigma(13) + [1+2-5-7+12+15]\} = 339. \end{aligned}$$

Прокомментируем полученный результат и введём ряд определений.

Во-первых, мы видим, что богатства  $\sigma(9)$ ,  $\sigma(10)$ , ...,  $\sigma(13)$  в данном случае (при высоте Пирамиды  $N=20$ ) нам не понадобились, они «исчезли», поскольку в законе Эйлера у слагаемых фигурируют оба знака («+» и «-»). Поэтому сумму «лишних» слагаемых, заключённую в фигурные скобки  $\{\sigma(9)+\sigma(10)+\dots+\sigma(13)\}$ , мы умножили на нуль (0) и будем говорить, что у «лишних» слагаемых *ранг (R)* равен нулю (или  $R=0$ ).

Во-вторых, мы видим, что у слагаемых с рангом два ( $R=2$ ) можно выделить две *группы* слагаемых:  $\sigma(1) \div \sigma(5)$  и  $\sigma(16) \div \sigma(18)$ , в которых числа по знаком  $\sigma$  идут подряд без пропусков (в этом здесь будет смысл понятия «группа»). У слагаемых с рангом  $R=1$  в данном случае три группы слагаемых:  $\sigma(6) \div \sigma(8)$  и  $\sigma(14) \div \sigma(15)$ , а также  $\sigma(19)$ .

И наконец, мы видим некий «довесок»  $[1+2-5-7+12+15]=18$ , который есть сумма первых шести членов ряда Эйлера, не превосходящих высоту Пирамиды ( $N=20$ ), причем правило знаков у членов “довеска” по-своему соответствует правилу знаков в законе (8.1). Будем называть сумму всех чисел

Эйлера, не превосходящих числа  $N$  (включая само число  $N$ , если оно из ряда Эйлера) *поправкой Эйлера*:

$$RE = 1+2-5-7+12+15 - \dots + N. \quad (9.3)$$

Исходя из примера для числа  $N=20$ , можно предположить, что богатство Пирамиды высотой  $N$  в общем случае определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \Sigma\sigma(N) = & 2 \cdot \{\Sigma[\sigma(A_i) + \sigma(A_{i+1}) + \sigma(A_{i+2}) + \dots + \sigma(Z_i)]\} + \\ & 1 \cdot \{\Sigma[\sigma(A_i) + \sigma(A_{i+1}) + \sigma(A_{i+2}) + \dots + \sigma(Z_i)]\} + \\ & 0 \cdot \{\Sigma[\sigma(A_i) + \sigma(A_{i+1}) + \sigma(A_{i+2}) + \dots + \sigma(Z_i)]\} + RE, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где 2, 1, 0 – это *ранг* ( $R$ ) слагаемых заключенных в фигурные скобки {...} (полезно каждый раз вспоминать пример для случая  $N=20$ , см. выше);

$i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, i_R$  – это порядковый номер группы внутри данного ранга  $R$ , причем номер последней группы ( $i_R$ ) в каждом ранге, вообще говоря, свой. Чем больше число  $N$ , тем больше будет групп в каждом ранге (в формуле (9.4)  $i$ -ая группа помещена в квадратные скобки);

$A_i, Z_i$  – это начало и конец в  $i$ -ой группе, т. е. первое и последнее число, которые стоят под знаком  $\sigma$  в  $i$ -ой группе.

Если мы знаем  $A_i$  и  $Z_i$  в  $i$ -ой группе, то значит, мы знаем все члены этой группы, поскольку в каждой группе числа идут подряд без пропусков (с шагом равным 1). Начало и конец каждой группы с ростом её номера ( $i$ ) убывают по параболе

$$A_i = N + a \cdot i^2 + b \cdot i + c, \quad Z_i = N + a \cdot i^2 + f \cdot i + g, \quad (9.5)$$

где значения числовых коэффициентов  $a, b, c, f, g$  зависят от ранга  $R$  (см. табл. 9.1). Автор не берется объяснять, как им были получены формулы (9.5), ибо любой желающий, манипулируя с законом Эйлера  $n$ -ое количество часов на компьютере, очевидно, получит такой же результат.

Говоря о формуле (9.4), нам осталось только пояснить, как находить количество групп в каждом ранге (т. е. число  $i_R$ ). Очевидно, что  $i$ -ая группа “вырождается”, когда  $Z_i \leq 0$ , именно данное значение  $i$  мы и принимаем за  $i_R$ . Поэтому, подставив в уравнение (9.5)  $Z_i=0$ , мы получим искомый номер

$$i_R = A \{ (h + \sqrt{24 \cdot N + 1}) / q \} \approx h/q + (\sqrt{24/q}) \cdot \sqrt{N}, \quad (9.6)$$

где  $A$  – функция “антье” (выделяет целую часть из выражения в фигурных скобках), а числа  $h$  и  $q$  зависят от ранга  $R$  (см. табл. 9.1). Из формул (9.6) следует, что  $i_2 \approx i_0$  и  $i_2 + i_0 = i_1$ , а суммарное количество групп в трех рангах, вообще говоря, будет равно следующему:

$$\Sigma i_R \equiv i_2 + i_1 + i_0 \approx 1/2 + (\sqrt{24/3}) \cdot \sqrt{N} \approx 1,6329 \cdot \sqrt{N}. \quad (9.7)$$

В части количества групп надо иметь в виду, что существуют такие числа  $N^* = -(a \cdot i^2 + f \cdot i + g)$ , для которых по формуле (9.5) получаем  $Z_i = 0$ , а значит, в этих редких случаях количество групп в ранге  $R$  будет равно  $i_R^* = i_R - 1$ .

Представляется также важным вопрос о количестве слагаемых в  $i$ -ой группе ( $K_i$ ) и общем количестве слагаемых. Понятно, что  $K_i = Z_i - A_i + 1$  и, подставляя сюда формулы (9.5), убеждаемся, что с ростом номера групп ( $i$ ) количества слагаемых в них образуют арифметические прогрессии: при  $R=2$  имеем  $K_i = 3, 7, 11, 15, \dots [K_i = 3 + 4(i-1)]$ , числа из класса “34” [12]; при  $R=1$  имеем  $K_i = 1, 2, 3, 4, \dots [K_i = 1 + 1(i-1) = i]$ , т.е. сам натуральный ряд; при  $R=0$  имеем  $K_i = 5, 9, 13, 17, \dots [K_i = 5 + 4(i-1)]$ , числа из класса “14” [12].

Поэтому общее количество слагаемых в каждом ранге ( $\Sigma K$ ) – это сумма  $i_R$  членов арифметических прогрессий, т.е. для каждого ранга получаем некое квадратное уравнение (где  $i_R$  – его аргумент), а, подставив в эти квадратные уравнения  $i_R$  по формулам (9.6) в итоге получим, что в любом ранге при  $N \rightarrow \infty$  справедливо утверждение:  $\Sigma K \rightarrow N/3$  (при  $N = 10^{10}$  относительная погрешность убывает до 0,0008%). Т.е. общие количества слагаемых во всех рангах стремятся друг к другу и в сумме они дают само число  $N$ .

Наибольшее количество слагаемых будет в группе с номером, вообще говоря, равным  $i_R$ . Поэтому, подставив в выражение для арифметической прогрессии значение  $i = i_R$  по формуле (9.6), мы получим формулу для количества слагаемых в наибольшей группе –  $K_{i_R}$  (для ранга  $R$ ). Максимальная группа всегда будет во втором ранге, для неё при  $N \rightarrow \infty$  получаем

$$K_{i2} \approx 2/3 + (\sqrt{24/3}) \cdot \sqrt{N} \approx 1,6329 \cdot \sqrt{N} \quad (9.8)$$

Также справедливы следующие соотношения:  $K_{i2}/K_{i1} = 2$ ,  $K_{i2} - K_{i0} = 2$ .

Заканчивая главу, ещё раз подчеркнем основные результаты в части богатства Пирамиды (высотой  $N \rightarrow \infty$ ), определяемого по формуле (9.4):

1). Богатство Пирамиды определяют только 2/3 чисел, её «составляющих» [в законе (9.4) они стоят под знаком  $\sigma$  в рангах  $R=2$  и  $R=1$ ], а 1/3 чисел – “лишние”, они не несут “полезной” информации в части богатства [в законе (9.4) они стоят под знаком  $\sigma$  в ранге  $R=0$ ].

2). Богатство «лишних» чисел равно богатству чисел второго ранга, плюс поправка Эйлера ( $RE$ ) и минус богатство самого числа  $N$ .

3). Поправка Эйлера ( $RE$ ) при  $N=20$  составляет всего лишь 5,3% от богатства Пирамиды ( $18/339 \approx 0,053$ ). С ростом  $N$  поправка Эйлера стремится к ничтожно малой доле от богатства Пирамиды. Однако именно эта исчезающе малая величина является «связующей нитью» между бесконечно большим (рядом натуральных чисел) и бесконечно малым (суммой Эйлера, в которой «зародились» числа из поправки Эйлера).

4). Суммарное количество групп в трех рангах и «размер» наибольшей группы (она всегда 2-го ранга) стремятся к одному и тому же числу, равному  $w \equiv W \cdot \sqrt{N}$ , где  $W \equiv \sqrt{24/3} \approx 1,632993 \dots$

Завершая разговор о богатстве натуральных чисел, подчеркнем двоякий смысл термина «богатство» в мире чисел. Во-первых, «богатство» – это название важной характеристики числа  $N$  (суммы всех его делителей). Во-вторых, читатель вряд ли теперь сомневается в том, что натуральные числа – это, действительно, исключительно *богатый* по своим свойствам объект.

## 10. ОСОБЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА – ЛПД

**Что такое ЛПД?** Рассмотрим делители числа  $N=420$ . Первые семь из них «копируют» (без пропусков) натуральный ряд:  $d_i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, \dots$ . То есть у  $N=420$  максимально возможная плотность первых семи делителей, а на графике  $d_i=f(N)$  эти семь делителей выстраиваются в прямую линию. Поскольку в натуральном ряде число  $N=420$  является первым с предельной плотностью семи делителей, то будем говорить, что число  $N=420$  – это *лидер плотности делителей* (ЛПД), у которого семь *линейных делителей* ( $ld=7$ ). Очевидно, что существует бесконечно много чисел  $N \geq 420$ , у которых  $ld=7$ . Таковыми являются, например, числа: 1260, 2100, 2940, ... – все они образованы из ЛПД=420 путем последовательного прибавления к нему числа 840 (кстати, оно также ЛПД, но уже с  $ld=8$ ). Возможно, закономерности образования всех чисел (после ЛПД) с таким же  $ld$  весьма интересны, но мы не будем заниматься этим в данной книге.

Все ЛПД примечательны своей чрезвычайной близостью к *верхним лидерам*, так 9 из 19-ти первых ЛПД – суть верхние лидеры. Очевидно, можно утверждать, что если ЛПД с типом  $T$  не является собственно верхним лидером, то тогда данный ЛПД – второе число из мира  $T$ .

**Количество ЛПД.** Удобно считать, что первым ЛПД является не единица, а двойка (у неё  $ld=2$ ). Тогда ЛПД=2 можно присвоить номер  $K=1$ , а порядковый номер любого другого ЛПД определятся красивой формулой

$$K = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m, \quad (10.1)$$

где  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  – показатели степени (их  $m$  штук) в каноническом разложении ЛПД  $= P_1^{a_1} \cdot P_2^{a_2} \cdot P_3^{a_3} \cdot \dots \cdot P_m^{a_m}$ . Напомним, что  $P_1=2, P_2=3, P_3=5, P_4=7, P_5=11, \dots, P_{34}=139, P_{35}=149 \dots$  – это ряд *простых чисел* (см. гл. 2).

Например, для ЛПД  $= 5342931457063200 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1 \cdot 31^1 \cdot 37^1 \approx 5,34 \cdot 10^{15}$  имеем  $K=5+3+2+1 \cdot 9 = 19$ . Это позволяет утверждать, что ЛПД – относительно *редкие* числа, и на ПК легко добраться только до 19-го из них. Поэтому для ЛПД *рабочий отрезок* ограничим  $N=5,34 \cdot 10^{15}$ .

Первые ЛПД представлены в табл.10.1, где справа (в «сетке») указаны показатели степени, с которыми простые числа (они над «сеткой») входят в каноническое разложение данного ЛПД. О параметре  $P^*$  сказано ниже.

Сколько ЛПД на Большом отрезке (БО)? Для рабочего отрезка имеем:

$$K \approx 1,4033 \cdot (\ln N)^{0,7327}, \quad (10.2)$$

поэтому в конце БО (при  $N \approx 8 \cdot 10^{60}$ ) получаем  $K \approx 52$  (столько ЛПД на БО).

**Определение типа у ЛПД.** С точки зрения ГТНЧ, один из важнейших вопросов – нахождение закона  $T_{max} = f(N)$ , т.е. закона роста типа  $T$  у верхних лидеров (см. гл. 4). Поскольку точный вид данного закона пока никем не найден, то интересны любые примерные оценки числового значения  $T_{max}$  в конце БО. Выше мы предположили, что ЛПД стоят буквально “за спиной” верхних лидеров, поэтому последние мы “заменяем” на ЛПД (в соответствующем мире  $T$ ). На рабочем отрезке у ЛПД тип  $T$  быстро растет по экспоненте при увеличении порядкового номера  $K$ :

$$T = T_{max} \approx 1,2829 \cdot \exp(0,5431 \cdot K). \quad (10.3)$$

Тогда в конце БО получаем (оценка завышена?):  $T_{max} \approx 2,36 \cdot 10^{12} (\pm 30\%)$ .

**Поиск очередного ЛПД.** Как найти очередной ЛПД? Оказывается, алгоритм поиска ЛПД совсем несложен. Берем «опорный» ЛПД (наибольший из известных, начинаем с ЛПД = 2) и последовательно умножаем его на простые числа 2, 3, 5, 7, 11, ..., получая некие числа-кандидаты (см. табл.10.1) У них находим  $ld$ , и как только  $ld$  окажется больше «опорного» – этот кандидат превращается в очередной ЛПД.

Работа по указанному алгоритму ускоряется, если использовать понятие, скажем, о *старшем простом числе* ( $P^*$ ). Схема поиска здесь такова:

- 1-й ЛПД =  $1 \cdot P_1 = 2$ , поскольку  $P^* = P_1 = 2$ , а далее берем  $P^* = P_2 = 3$ ;
- 2-й ЛПД =  $2 \cdot P_2 = 6$ , здесь  $P_2$  отработало, поэтому далее  $P^* = P_3 = 5$ ;
- 3-й ЛПД =  $6 \cdot 2 = 12$ , поскольку  $P_3$  не сработало, то  $P^*$  остается прежним;
- 4-й ЛПД =  $12 \cdot P_3 = 60$ , здесь  $P_3$  отработало, поэтому далее  $P^* = P_4 = 7$  и т.д.

По сути  $P^*$  – это наибольшее простое число, ожидаемое нами в каноническом разложении искомого ЛПД. Ясно, что  $P^*$  должно последовательно принимать значения из ряда простых чисел (в табл.10.1 за ЛПД указан множитель, приводящий к следующему ЛПД, а на сером фоне –  $P^*$ ).

**Как вычислить  $ld$ ?** Напомним, что  $ld$  – это количество первых делителей у ЛПД, «копирующих» натуральный ряд: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, .... Так вот оказывается, что для ЛПД, у которых стоит  $P^*$  (на сером фоне, см. табл.10.1), количество *линейных делителей* находится предельно просто:

$$ld = P^* - 1. \quad (10.4)$$

На рабочем отрезке параметр  $ld$  численно довольно близок к *среднему типу* (по Дирихле, см. гл. 3), примерно равному  $T_s \approx \ln N + 0,1544$ . Более того, закон роста  $ld$  на рабочем отрезке можно описать похожей формулой:

$$ld \approx A \cdot \ln N + B. \quad (10.5)$$

Коэффициенты  $A=1,0447$  и  $B=1,4956$  – это результат корректировки (на 1,87%), позволяющей выйти в конце БО на ближайшее простое число  $P^*=149$  ( $ld=148$ ). При  $N \rightarrow \infty$  из формулы (10.5) следует, что  $ld/T_s \rightarrow const \approx 1$ .

Поскольку в конце БО получаем  $ld=148$  и  $P^*=149$  (35-ое простое число), то на БО в каноническом разложении любого ЛПД участвуют, вероятно,  $P_i \leq 139$  (простые числа с 1-го до 34-го включительно). Эту мысль проясняет аналогия с рабочим отрезком (см. табл. 10.1). Очевидно, на БО в каноническом разложении любого *верхнего лидера* также  $P_i \leq 139$  (см. [9], стр. 66).

19 первых ЛПД и их параметры

Таблица 10.1

| K  | ЛПД                   | P* | ld | l (тип) | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 |
|----|-----------------------|----|----|---------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
|    |                       |    |    |         |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 1  | 2                     | 3  | 2  | 2       | 1 |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2  | 6                     | 2  | 3  | 4       | 1 | 1 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3  | 12                    | 5  | 4  | 6       | 2 | 1 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 4  | 60                    | 7  | 6  | 12      | 2 | 1 | 1 |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 5  | 420                   | 2  | 7  | 24      | 2 | 1 | 1 | 1 |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 6  | 840                   | 3  | 8  | 32      | 3 | 1 | 1 | 1 |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 7  | 2 520                 | 11 | 10 | 48      | 3 | 2 | 1 | 1 |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 8  | 27 720                | 13 | 12 | 96      | 3 | 2 | 1 | 1 | 1  |    |    |    |    |    |    |    |
| 9  | 360 360               | 2  | 15 | 192     | 3 | 2 | 1 | 1 | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |
| 10 | 720 720               | 17 | 16 | 240     | 4 | 2 | 1 | 1 | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |
| 11 | 12 252 240            | 19 | 18 | 480     | 4 | 2 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |
| 12 | 232 792 560           | 23 | 22 | 960     | 4 | 2 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |
| 13 | 5 354 228 880         | 5  | 24 | 1920    | 4 | 2 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |
| 14 | 26 771 144 400        | 3  | 26 | 2880    | 4 | 2 | 2 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |
| 15 | 80 313 433 200        | 29 | 28 | 3840    | 4 | 3 | 2 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |
| 16 | 2 329 089 562 800     | 31 | 30 | 7680    | 4 | 3 | 2 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |
| 17 | 72 201 776 446 800    | 2  | 31 | 15360   | 4 | 3 | 2 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |
| 18 | 144 403 552 893 600   | 37 | 36 | 18432   | 5 | 3 | 2 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |
| 19 | 5 342 931 457 063 200 | 41 | 40 | 36864   | 5 | 3 | 2 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |

**Особенность верхних лидеров.** Учитывая всё выше сказанное, можно утверждать, что натуральные числа  $N$  с наибольшим количеством делителей (т. е. верхние лидеры) порождаются наименьшими простыми числами ( $P_i = 2, 3, 5, 7, \dots$ ). Причем, чем меньше простое число  $P_i$ , тем в большую степень оно возводится в каноническом разложении (см. табл.10.1). Для осознания столь замечательного факта (малости  $P_i$ ) достаточно сказать, что для прочих («обычных») натуральных чисел  $N$  на БО имеем  $P_i \leq 8 \cdot 10^{60}$ , т.е. последнее из возможных простых чисел в каноническом разложении  $N$  равно правой границе БО. Это следует из классической теории чисел, поскольку при больших  $N$  имеем (см. гл. 2):  $k \sim N/\ln N$  и  $P \sim k \cdot \ln k$ , поэтому  $P \sim N \cdot (1-$



$\ln \ln N / \ln N \approx N$ , где  $k$  – количество простых чисел, меньших  $N$ , а  $P$  – это простое число ближайшее к  $N$ .

## 11. СВОЙСТВА $W$ - ФУНКЦИИ

$W$  (дабл-ю)-функция – это функция, имеющая следующий вид:

$$W \equiv \ln \sqrt{N} - A(\ln \sqrt{N}) \equiv \ln \sqrt{N} - a, \quad (11.1)$$

где  $N = 1, 2, 3, \dots$  – натуральные числа,  $A$  – функция “антье” (целая часть) числа  $\ln \sqrt{N}$  или для краткости  $a \equiv A(\ln \sqrt{N})$ . Поскольку  $\ln \sqrt{N}$  не может быть целым числом, и  $a$  – всегда целое число, то имеем:  $0 < W < 1$  (кроме  $N=1$ ).  $W$ -функция интересна сама по себе и пригодится нам в дальнейшем.

На графике с логарифмической осью абсцисс (рис.11.1)  $W$ -функция имеет вид чередующихся наклонных участков (как бесконечное повторение буквы  $W$ ). Эти участки мы назовем *эпохами*. Начало эпох приходится на числа  $N_n = 1, 8, 55, 404, 2981, 22027, \dots$ , а конец (тех же эпох) – на числа  $N_k = 7, 54, 403, 2980, 22026, 162754, \dots$ .  $W$ -функция в точках  $N_n$  очень быстро устремляет к нулю, а в точках  $N_k$  не менее быстро устремляет к единице.

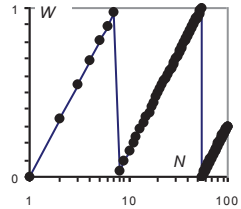


Рис. 11.1.  $W$ -функция

Произвольно взятое число  $N$  находится в эпохе, порядковый номер которой равен  $a \equiv A(\ln N)$ . Например, верхний лидер (открывающий мир  $T = 10080$ )  $N=6.746.328.388.800$  находится в 14-й эпохе. Конец Большого отрезка (БО) находится в самом начале 70-й эпохи, причем после *эви*-конвертации конца БО ( $N=8 \cdot 10^{60}$  *эви* – «настоящее время») можно сказать, что 70-ая эпоха началась около 2,9 млрд. лет назад, а закончится она примерно через 66,4 млрд. лет.

**Описание эпох.** Отрезок  $1 < N < 10^{14}$  показывает, что “крайние” точки эпох можно описать следующими выражениями (где  $a$  – номер эпохи):

$$N_n \sim \exp(2a); \quad N_k \sim \exp[2(a+1)] - 1. \quad (11.2)$$

Знак  $\sim$  (тильда) означает (на примере первой формулы), что отношение числа  $N_n$  к величине  $\exp(2a)$  стремится к единице при возрастании номера эпохи  $a$  (или короче:  $N_n / \exp(2a) \rightarrow 1$  при  $a \rightarrow \infty$ ). Знак тильда ( $\sim$ ) не может быть заменен знаком обыкновенного равенства ( $=$ ), это ясно хотя бы из того факта, что  $N_n$  – непременно целое (натуральное) число, тогда как число  $\exp(2a) \equiv e^{2a}$  не является таковым (число  $e = 2,718\dots$  в целой степени).

Зная  $N_n$  и  $N_k$ , несложно найти количество чисел ( $K$ ) в любой эпохе:

$$K \equiv N_k - N_n + 1 \quad \text{или} \quad K \sim (e^2 - 1) \cdot \exp(2a) - 2. \quad (11.3)$$

**Среднее значение ( $W_s$ ).** С ростом  $N = 1, 2, 3, \dots$  довольно любопытно ведет себя величина  $W_s$  – *среднее значение*  $W$ -функции на отрезке  $[1; N]$ :

$$W_s \equiv \sum W_i / N, \quad \text{где } \sum W_i \equiv W_1 + W_2 + \dots + W_N. \quad (11.4)$$

$\sum W_i$  – это сумма значений  $W$ -функции у всех чисел от 1 до  $N$ . Ясно, что каждому числу  $N$  соответствует свое значение  $W_s$  (см. рис.11.2). Внутри каждой эпохи параметр  $W_s$  сначала убывает до минимального значения  $(W_s)_{min}$  (у некоего числа  $N_{min}$ ), а потом растет до максимального значения  $(W_s)_{max}$  (у последнего числа  $N_k$  в данной эпохе).

Обозначим через  $K_m$  – количество чисел на отрезке  $[1; N]$ , у которых  $W_s < 0,5$ , а через  $K_b$  – количество чисел, у которых  $W_s > 0,5$ . Тогда можно сказать, что  $K_b$  и  $K_m$  «соперничают на равных» путем чередования лидерства.

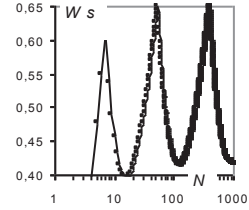


Рис. 11.2. Колебания  $W_s$

**Верхняя граница  $W_s$ .** Если рассматривать отрезки  $[1; N]$  с целым количеством эпох (т.е.  $N=N_k$  последней эпохи отрезка), то  $W_s \equiv \sum W_a / N_k$ , где суммирование идет по всем эпохам отрезка;  $W_a$  – это сумма  $W$ -функции “внутри” эпохи  $a$ ;  $N_k$  – “крайнее” число в последней из взятых эпох.

$$W_a \equiv (\ln N_a^{1/2} - a) + \dots + (\ln N_k^{1/2} - a) = 0,5 \cdot \ln(N_a \cdot \dots \cdot N_k) - a \cdot K,$$

$$\text{откуда } W_a = 0,5 \cdot \ln[N_k! / (N_a - 1)!] - a \cdot K. \quad (11.5)$$

Полученная *точная* формула (11.5) из-за наличия в ней факториалов не позволяет вычислить на ПК дальше 1-й эпохи ( $a > 1$ ). Поэтому попробуем найти другую формулу для нахождения  $W_a$ . Для этого заметим, что выражение  $\ln(N_a \cdot \dots \cdot N_k) = \ln(N_a) + \ln(N_a+1) + \ln(N_a+2) + \dots$  определяет площадь под логарифмической кривой на отрезке от  $N_a$  до  $N_k$ . Эту площадь находим с помощью интеграла  $\int \ln N \, dN = N \cdot \ln N - N$  и в конечном итоге получаем асимптотическую формулу:

$$W_a \sim 0,5 \cdot [(N_k \cdot \ln N_k - N_k) - (N_a \cdot \ln N_a - N_a)] - a \cdot K. \quad (11.6)$$

Нетрудно также заметить, что с ростом номера эпохи ( $a$ ) имеем:

$$W_a / N_k \sim (1 + e^2) / 2 = 0,5676\dots \quad \text{и} \quad W_a / N_a \sim (1 + e^2) / 2 = 4,1945\dots \quad (11.7)$$

Поэтому параметр  $W_a$  ещё можно, например, представить в таком виде:

$$W_a \sim 0,5(1 + e^2) \cdot N_k \sim 0,5(1 + e^2) \cdot e^{2a} \quad (11.8)$$

Таким образом, в конце эпохи  $a$  (у последнего её числа  $N_k$ ) имеем:

$$W_s \equiv \sum W_a / N_k \sim 0,5 \cdot (1 + e^2) \cdot (e^0 + e^2 + e^4 + \dots + e^{2a}) / (e^{2(a+1)} - 1) \quad (11.9)$$

$$W_s \sim 0,5 \cdot (1 + e^2) \cdot (e^2 - 1)^{-1} = 0,6565\dots, \quad (11.10)$$

$$\text{т.к. } (e^2 - 1)^{-1} = (e^0 + e^2 + e^4 + \dots + e^{2a}) / (e^{2(a+1)} - 1) = 0,156518\dots \quad (11.11)$$

Итак, среднее значение  $W$ -функции в конце эпох стремится к найденной нами константе  $S = 0,6565\dots$ , которая является *верхней границей* колебаний  $W_s$  [всегда  $W_s < (W_s)_{max} = S$ ].

Кстати говоря, найденное нами равенство (11.11) справедливо и в том случае, если вместо числа  $e=2,718\dots$  взять любое действительное число (кроме 0 и 1). Так, взяв  $\pi=3,14$ , мы придем к константе равной  $0,1127\dots$

**Нижняя граница  $W_s$ .** В каждой эпохе минимальное значение  $W_s$  оказывается у числа  $N_{min}$ :

$$N_{min} \sim Z \cdot N_n, \text{ где } Z \approx 2,313 \quad (11.12)$$

Иначе говоря, при  $a \rightarrow \infty$ , вероятно,  $N_{min}/N_n \rightarrow Z \approx 2,313\dots$

Пусть  $w_a$  – это сумма  $W$ -функции “внутри” эпохи  $a$ , но только до числа  $N_{min}$ . Тогда  $w_a \equiv (\ln N_n^{1/2} - a) + \dots + \ln(N_{min}^{1/2} - a) = 0,5 \cdot \ln(N_n \cdot \dots \cdot N_{min}) - a \cdot (N_{min} - N_n + 1)$ . Но выражение  $\ln(N_n \cdot \dots \cdot N_{min}) = \ln(N_n) + \ln(N_{n+1}) + \ln(N_{n+2}) + \dots$  определяет площадь под логарифмической кривой на отрезке от  $N_n$  до  $N_{min}$ . Эту площадь находим с помощью интеграла  $\int \ln N dN = N \cdot \ln N - N$  и в конечном итоге получаем асимптотическую формулу:

$$w_a \sim 0,5[(N_{min} \cdot \ln N_{min} - N_{min}) - (N_n \cdot \ln N_n - N_n)] - a(N_{min} - N_n + 1). \quad (11.13)$$

Таким образом, для эпох  $a \geq 1$  (у числа  $N_{min}$ ) всегда можно вычислить:

$$(W_s)_{min} \equiv (\sum W_{a-1} + w_a) / N_{min} \sim [0,5 \cdot (1 + e^2) \cdot (e^0 + e^2 + \dots + e^{2(a-1)}) + w_a] / N_{min}. \quad (11.14)$$

С ростом номера эпохи ( $a$ ) найденная нижняя граница  $(W_s)_{min}$  быстро устремляется к числовому пределу  $I = 0,419280319$  (возможно, это также некое выражение с числом  $e$ , см. формулу для  $S$ ). Причем, при  $Z = 2,313 \pm 0,003$  получаем параболу:  $I \approx 0,0467 \cdot Z^2 - 0,2162 \cdot Z + 0,6693$  (её  $R^2=0,9636$ ), а выбранное нами значение  $Z=2,313$  – это низшая точка этой параболы.

Итак, мы установили, что с ростом числа  $N$  среднее значение  $W$ -функции  $(W_s)$  совершает причудливые колебания в коридоре от  $I \approx 0,4192$  до  $S = 0,6565\dots$ . Ширина этого коридора ( $S - I = 0,2372$ ) близка к 24% ширины всего диапазона возможных значений  $W$ -функции (от 0 до 1).

**W у верхних лидеров.** Очевидно, что аргумент  $N$  в  $W$ -функции [см. формулу (11.1)] может принадлежать некому подмножеству натуральных чисел. Например,  $N = 2, 6, 12, 24, 48, 60, 120, 180, \dots$  – верхние лидеры частых миров. На БО набирается около 500 таких лидеров. Значения  $W$ -функции для указанного подмножества ( $N$  – только верхние лидеры БО) заполняют площадь графика  $W=f(N)$  почти равномерно (рис.11.3, сравните его с рис.11.1). Это говорит о том, что в логарифмической шкале верхние лидеры расположены в ряду натуральных чисел совершенно хаотично (случайным образом). Так, если разбить диапазон возможных значений  $W$ -функции (от 0 до 1)

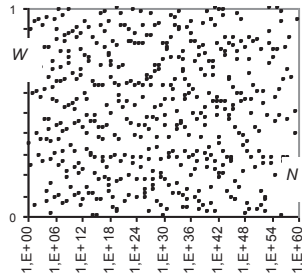


Рис. 11.3.  $W$  верхних лидеров

равных интервалов, то в каждом из них окажется по 10% ( $\pm 2\%$ ) всех значений  $W$ -функции на БО. Среднее значение  $W$ -функции у верхних лидеров с ростом  $N$  совершает *затухающие* колебания, стремясь к значению  $W_s = 0,5$ . Так, уже при  $N > 10^{16}$  соблюдается условие:  $0,49 < W_s < 0,51$ .

Если рассмотреть верхние лидеры *редких миров* ( $N = 4, 16, 36, 144, 576, 900, \dots$ ; всего на БО около 270 таких лидеров), то в части  $W$ -функции и её средних значений  $W_s$  – мы получим совершенно аналогичные результаты.

**У нижних лидеров.** Поскольку нижние лидеры *частых миров* описываются точной формулой ( $N = 3 \cdot 2^{T^2-1}$ , где  $T = 2, 4, 6, \dots$ , см. [9]), то на графике  $W = f(N)$  точки располагаются уже не хаотично, а строго регулярно (точки словно лежат на наклонных линиях, пересекающих ось абсцисс с равномерным шагом). Среднее значение  $W$ -функции у нижних лидеров при  $N \rightarrow \infty$  совершает затухающие колебания, устремляясь к значению  $W_s = 0,5$ .

## 12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

**Вступление.** Как наука *теория вероятностей* стала развиваться лишь с середины XVII века и только после 1936 г. она окончательно укрепилась как полноправная дисциплина на строгой математической основе. Теория вероятностей появилась на свет во имя того, чтобы выявить закономерности, которые возникают при взаимодействии большого числа *случайных, мало связанных друг с другом факторов*. Таким образом, предмет изучения этой теории, на первый взгляд, не имеет никакого отношения к структуре натурального ряда, где делители всех чисел раз и навсегда «зацементированы» относительно друг друга в теле Пирамиды (см. гл. 5). Но оказывается, что формулы теории вероятностей успешно срабатывают для абсолютно неслучайных величин, «замурованных» в Пирамиду. Чтобы попытаться осмыслить столь удивительный факт, нам необходим некий *минимум* знаний по теории вероятностей (интересный и полезный сам по себе).

**Классическое определение вероятности.** Пусть мы проводим серию из  $n$  испытаний, а именно: в каждой серии  $n$  раз подбрасываем игральный кубик. При каждом подбрасывании нас ожидает шесть *равновозможных* исходов, т. е. существуют одинаковые шансы для выпадения любой грани (любого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6). Очевидно, что одновременное выпадение четного и нечетного числа исключено – это *несовместные* исходы. Пусть нас интересуют, скажем, только такие случаи (*событие А*), при которых выпадают четные числа (2, 4, 6). Эти случаи будем называть *благоприятными* исходами, а их количество обозначим символом  $m$  (в данном примере  $m = 3$ ). Теперь мы можем сформулировать так называемое классическое определение вероятности: *вероятностью (Р) события (А) называется отношение*

числа благоприятных исходов ( $m$ ) к общему числу несовместных равновозможных исходов ( $n$ )

$$P = m/n . \quad (12.1)$$

Поскольку из шести граней кубика ( $n=6$ ) четные числа расположены на половине граней ( $m=3$ ), то интересующая нас вероятность выпадения четных чисел равна  $P=3/6=0,5$ . Это означает, что при реальном подбрасывании кубика частота появления выбранного нами события  $A$  будет случайным образом колебаться именно около значения 0,5. Причем, чем больше будет подбрасываний в каждой серии, и чем больше будет самих серий, тем ближе средняя частота появления нашего события  $A$  к вероятности  $P=0,5$ . Из сказанного также становится ясно, что вероятность любого случайного события находится между 0 и 1, т. е. всегда  $0 \leq P \leq 1$ .

**Сложение и умножение вероятностей.** Простой кубик порождает множество событий  $A$ , которые быстро приводят нас к важным понятиям:

1). Выпадение любого числа от 1 до 6. Здесь для любого испытания имеем  $m=n$  и получаем  $P=1$  – это так называемое *достоверное* событие.

2). Выпадение любого числа большего 6. Здесь для любого испытания имеем  $m=0$  и получаем  $P=0$  – это так называемое *невозможное* событие.

3). Выпадение числа кратного 5. Здесь для любого испытания имеем  $m=1$  и получаем  $P=1/6$  (пятерка только на одной грани из шести).

4). Выпадение числа кратного 2 или 5. Здесь для любого испытания имеем  $m=3+1=4$  и получаем  $P=4/6$ . Это равносильно тому, что  $P=3/6+1/6 = 4/6$  и тогда, очевидно, справедливо **правило сложения вероятностей**: *вероятность того, что произойдет какое-либо из нескольких несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий.*

5). Выпадение двух пятерок подряд (что равносильно одновременному выпадению пятерок при подбрасывании двух кубиков). Здесь  $n=6 \times 6=36$ , ибо с каждой гранью одного кубика следует рассмотреть все грани другого кубика, причем благоприятный исход (5;5) только один ( $m=1$ ), поэтому  $P=m/n = 1/36$ . Это можно трактовать как  $P=1/6 \times 1/6=1/36$  и тогда, очевидно, справедливо **правило умножения вероятностей**: *вероятность того, что одновременно произойдут несколько событий, равна произведению вероятностей этих событий.*

**Дискретная случайная величина.** Это есть величина, скажем,  $X$ , принимающая  $t$  значений  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_t$ , с соответствующими вероятностями  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_t$ . Причем, сумма этих вероятностей всегда равна единице ( $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_t = 1$ ), поскольку всегда реализуется одно из значений  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_t$  (безразлично, какое именно). Игральный кубик – это дискретная случайная величина  $X$ , принимающая шесть значений (1, 2, 3, 4, 5, 6) с одинаковой вероятностью  $p_i=1/6$ .

**Распределение вероятностей** ( $p_1, p_2, p_3, \dots, p_t$ ) содержит исчерпывающую информацию о случайной величине  $X$ , но количество вероятностей ( $t$ ) может быть огромным, а на практике во многих случаях знание этих вероятностей вовсе необязательно. Оказывается, что часто достаточно знать только две наиболее важные характеристики случайной величины  $X$  – её математическое ожидание (матожидание) и дисперсию.

**Математическое ожидание** – это своеобразное «среднее значение» случайной величины  $X$  (такое «среднее» мы обозначим скобками  $\langle \dots \rangle$ ):

$$\langle M \rangle \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_t p_t \equiv \sum x_i p_i, \quad (12.2)$$

где  $i=1, 2, 3, \dots, t$ . Любопытно, что формула (12.2) по своему смыслу определяет координату *центра масс* системы из  $t$  тел, расположенных на прямой в точках  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_t$ , и массы которых численно равны  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_t$ .

Для игрального кубика получаем:  $\langle M \rangle = (1+2+3+4+5+6) \cdot (1/6) = 3,5$ .

Кроме математического ожидания  $\langle M \rangle$  важно знать, насколько широк *разброс* значений случайной величины  $X$ . Но указанное выше «среднее значение» всех разностей  $(X - \langle M \rangle)$  здесь не годится, поскольку оно равно нулю:  $\langle (X - \langle M \rangle) \rangle = \sum (x_i - \langle M \rangle) p_i = \sum x_i p_i - \langle M \rangle \sum p_i = \langle M \rangle - \langle M \rangle = 0$ .

Поэтому рассматривают «среднее значение» *квадрата* отклонения:

$$\begin{aligned} D &\equiv \langle (X - \langle M \rangle)^2 \rangle = \sum (x_i - \langle M \rangle)^2 p_i = \sum (x_i^2 - 2x_i \langle M \rangle + \langle M \rangle^2) p_i = \\ &= \sum x_i^2 p_i - 2 \langle M \rangle \sum x_i p_i + \langle M \rangle^2 \sum p_i = \langle M^2 \rangle - 2 \langle M \rangle \langle M \rangle + \langle M \rangle^2, \text{ откуда} \\ D &= \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Величина  $D$  – это и есть **дисперсия** дискретной случайной величины  $X$ .

Например, для нашего игрального кубика получаем (все  $p_i = 1/6$ ):

$$D = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \cdot (1/6) - \{(1+2+3+4+5+6) \cdot (1/6)\}^2 \approx 2,9167$$

Следует отметить, что дисперсия  $D$  имеет размерность, соответствующую квадрату размерности случайной величины  $X$ , поэтому часто удобнее пользоваться так называемым **квадратичным отклонением** ( $\sigma$ ) случайной величины  $X$ , размерность которого та же, что и у  $X$ , поскольку  $\sigma$  равно

$$\sigma \equiv \sqrt{D}. \quad (12.4)$$

**Схема Бернулли.** Классическое определение вероятности случайного события было сформулировано известным швейцарским математиком Якобом Бернулли (1654–1705). Он впервые провел простые рассуждения, приводящие к ключевому результату. Изложим суть т. н. *схемы Бернулли*.

Пусть выполняется серия из  $n$  независимых одинаковых испытаний (результаты одних испытаний не влияют на результаты других испытаний). Некоторые из них дают интересующий нас исход, скажем, событие  $A$  (это случайное событие). Пусть  $m$  – число испытаний, в которых реализовалось событие  $A$  ( $m$  – случайная величина). Будем рассматривать вероятность  $P_n(m)$  того, что в серии из  $n$  испытаний событие  $A$  реализуется  $m$  раз.

Такая схема описывает многие реальные ситуации. Например, проверяются  $n$  лотерейных билетов, событие  $A$  – выигрыш,  $P_n(m)$  – вероятность того, что из  $n$  билетов выиграют  $m$  билетов. Более серьезный пример: физики-экспериментаторы регистрируют  $n$  нейтронов, событие  $A$  – регистрация нейтрона с энергией в некотором интервале значений,  $P_n(m)$  – вероятность того, что из  $n$  нейтронов будут иметь энергию в рассматриваемом интервале значений  $m$  нейтронов. Подобных примеров бесконечно много.

В основе схемы Бернулли (его рассуждений) лежит предположение, что вероятность  $p$  появления события  $A$  в *единичном испытании* известна и не меняется от испытания к испытанию (это важно!). Тогда вероятность не появления события  $A$  в единичном испытании будет равна  $q=1-p$ .

Допустим, что событие  $A$  появилось в первых  $m$  испытаниях и не появилось в оставшихся  $n-m$  испытаниях. Вероятность такой ситуации равна  $P_A \equiv p^m q^{n-m}$  (см. выше правило умножения вероятностей). Разумеется, порядок появления события  $A$  может быть любым, так, оно может не появиться в первых  $n-m$  испытаниях и появиться в оставшихся  $m$  испытаниях. Но вероятность  $P_A$  при *любом* варианте появления события  $A$  будет равна  $p^m q^{n-m}$ . Всего таких вариантов столько, сколько имеется *сочетаний* из  $n$  элементов по  $m$ , поэтому количество ( $K$ ) всех вариантов будет равно:

$$K = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)/m!. \quad (12.5)$$

Для нахождения искомой вероятности  $P_n(m)$  надо сложить вероятности реализации всех  $K$  вариантов, т. е. надо умножить  $K$  на  $p^m q^{n-m}$ :

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (12.6)$$

Это и есть **формула Бернулли** – ключевой результат рассуждений по схеме Бернулли. Формулу (12.6) ещё называют **биномиальным распределением** вероятностей дискретной случайной величины  $X$ . Второе название объясняется тем, что по формуле (12.6) также можно вычислять члены разложения *бинома Ньютона*  $n$ -й степени:  $(q+p)^n$ . Нетрудно доказать, что  $(q+p)^n = \sum P_n(m)$ , где  $m=0, 1, 2, \dots, n$ , а, учитывая, что  $q+p=1$  (см. выше), то получаем вполне логичное «дополнение» к схеме Бернулли:  $\sum P_n(m)=1$ .

**Формулы для матожидания и дисперсии.** Примечательно, что в схеме Бернулли можно получить лаконичные формулы для матожидания  $\langle M \rangle$  и дисперсии  $D$ , выразив их через величины  $n, p, q$ . Полезно ознакомиться с выводом этих формул. Пусть случайная величина  $X$  есть количество успехов в  $n$  испытаниях. Далее осознаём, что матожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их матожиданий. Поэтому сначала найдем

матожидание  $\langle MI \rangle$  числа успехов при одном испытании, что совсем просто:  $\langle MI \rangle = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ . А потом этот результат умножим на  $n$ , чтобы получить матожидание числа успехов при  $n$  испытаниях:  $\langle M \rangle = \langle MI \rangle \cdot n = pn$ .

Теперь перейдем к дисперсии. При одном испытании дисперсия числа успехов равна  $DI = p(1 - \langle MI \rangle)^2 + q(0 - \langle MI \rangle)^2$ . Учитывая, что  $\langle MI \rangle = p$ , получаем:  $DI = p(1 - p)^2 + q(0 - p)^2 = pq^2 + qp^2 = pq(q + p) = pq$  (здесь мы дважды воспользовались соотношением  $p + q = 1$ ). Рассуждая для дисперсии  $D$  по аналогии с матожиданием  $\langle M \rangle$  (см. выше), получаем:  $D = DI \cdot n = pqn$ .

Итак, для схемы Бернулли мы получили следующие формулы:

$$- \text{математическое ожидание} \quad \langle M \rangle = np, \quad (12.7)$$

$$- \text{дисперсия случайной величины} \quad D = npq = np(1 - p). \quad (12.8)$$

**Нормальное распределение.** Формула Бернулли (12.6) дает точное, но практически малоприменимое выражение искомой нами вероятности, поскольку величина  $n!$  («эн факториал») растет очень стремительно, выходя за пределы возможностей обычного компьютера уже при  $n = 171$ , т. е.  $170! \approx 7 \cdot 10^{306}$ . Однако расчёты существенно упрощаются, если рассмотреть *предельный случай* формулы Бернулли, когда  $n \rightarrow \infty$ . В этом случае мы получаем очень полезную *приближенную* формулу для вероятности:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left(-\frac{(m - \langle M \rangle)^2}{2D}\right), \quad (12.9)$$

где  $m$  – количество испытаний, в которых реализовалось событие  $A$ . Распределение (9) называется *нормальным распределением* дискретной случайной величины или *распределением Лапласа–Гаусса*. На рис. 12.1 приведены графики двух нормальных распределений с одинаковым матожиданием  $\langle M \rangle = 15$  (и поэтому именно через  $m = 15$  проходит ось симметрии обоих “колоколов”). А вот дисперсии  $D$  взяты разные и хорошо видно общее правило: **чем больше дисперсия, тем ниже и шире «колокол».**

Из (12.9) видно, что при  $m = \langle M \rangle$  вероятность будет наибольшая:

$$P_{\max} = (2\pi D)^{-1/2}. \quad (12.10)$$

Зная  $\langle M \rangle$  и  $D$ , мы можем вычислить  $p$  и  $n$  [см. (12.7) и (12.8)]:

$$p = 1 - D/\langle M \rangle; \quad n = \langle M \rangle/p = \langle M \rangle^2 / (\langle M \rangle - D). \quad (12.11)$$

Например, при  $\langle M \rangle = 15$  и  $D = 7,5$  по формулам (12.11) получаем:  $p = 0,5$  и  $n = 30$ . Подставляя эти  $p$  и  $n$  в формулу Бернулли (12.6), мы получим “колокол” близкий к исходному (в масштабе рис. 12.1 оба “колокола” просто сливаются). В данном примере *относительная погрешность* (ОП) формулы Лапласа–Гаусса<sup>1</sup> (12.9) имеет вид, представленный на рис. 12.2, т. е. по краям “колокола” формула (12.9) дает завышенный результат.

<sup>1</sup> П. С. Лаплас (1749–1827) – знаменитый французский астроном, математик, физик.  
К. Ф. Гаусс (1777–1855) – великий немецкий математик (внес вклад в астрономию, геодезию).



**Замечание:** подставляя подобным образом вычисленные  $p$  и  $n$  в формулу Бернулли (12.6), мы далеко не всегда получим “колокол” близкий исходному (построенному по исходным  $\langle M \rangle$  и  $D$ ). Так, при  $\langle M \rangle = 9$  и  $D = 10$  (“колокол” почти как на рис.12.1) мы получим  $p = -0,11$  и  $n = -81$ , которые вообще не годятся для формулы Бернулли ( $n!$  для отрицательного числа

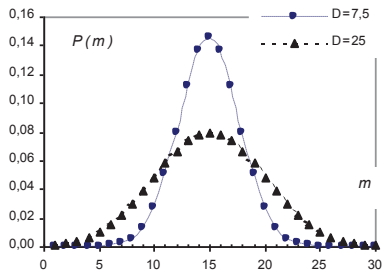


Рис. 12.1. Нормальные распределения

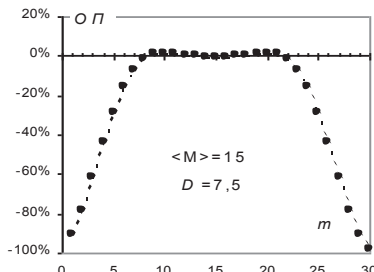


Рис.12.2. Относительная погрешность

просто не существует).

**Логнормальное распределение.** Если величина  $X$  имеет нормальное распределение и если  $Y = \exp(X)$ , то говорят, что величина  $Y$  имеет *логарифмически-нормальное* (логнормальное) распределение. Ясно, что  $\ln Y = X$ .

Об этом распределении даже в лучших справочниках [38, 41] будет сказано примерно следующее: “Логнормальное распределение (л.н.р.) применяется в самых различных областях – экономике, биологии, геологии, физике. Например, л.н.р. с хорошим приближением описывает распределение размера частиц при дроблении породы и содержащие множества минералов в породах”. И только в книгах [9, 12] говорится, что делители многих натуральных чисел  $N$  также образуют логнормальные распределения, причем это может иметь самое фундаментальное значение.

**Распределение Пуассона.** Если вероятность появления события  $A$  в единичном испытании очень мала ( $p \ll 1$ ), то при больших  $n$  биномиальное распределение переходит не в нормальное распределение, а в *распределение Пуассона*<sup>2</sup>, которое выражается следующей формулой:

$$P_n(m) = \frac{(np)^m}{m!} \exp(-np). \quad (12.10)$$

Это распределение называют также *законом редких явлений*. Из формул (12.7) и (12.8) следует, что при распределении Пуассона дисперсия случайной величины равна её математическому ожиданию:  $D = \langle M \rangle$ . График для

<sup>2</sup> С. Д. Пуассон (1781–1840) – французский механик, физик, математик

распределения Пуассона обычно имеет вид горки с частично «отсеченным» левым склоном (т. е. нет симметрии как в нормальном распределении).

**Непрерывная случайная величина.** До сих пор мы говорили только про *дискретные* случайные величины (д.с.в.), а теперь мы перейдем к более сложным объектам. Если произвольный отрезок  $[1; N]$  натурального ряда – это лучший пример дискретной величины (любые соседние числа различаются на единицу), то произвольный отрезок  $[1; N]$  ряда действительных чисел – это лучший пример непрерывной величины (нельзя указать два соседних числа). *Непрерывная величина* принимает бесконечное множество значений, которые сплошь заполняют выбранный отрезок. Это приводит к парадоксальному (но только на первый взгляд) выводу: вероятность каждого конкретного значения *непрерывной случайной величины* (н.с.в.) равна... нулю. Однако объясняется это просто. Например, ненулевая вероятность остановки стрелки рулетки в казино в пределах одного из секторов – это есть сумма бесконечного числа нулевых вероятностей остановки стрелки напротив отдельных точек данного сектора. Данная ситуация аналогична тому бесспорному факту, что ненулевая масса любого тела – это сумма бесконечного числа нулевых масс его отдельных точек.

Отмеченные выше затруднения можно легко обойти, используя понятие *плотности*. Так, если масса отдельной точки тела равна нулю, то не равна нулю плотность в данной точке. Пусть  $\Delta M$  – это масса в объеме  $\Delta V$ , внутри которого находится рассматриваемая точка (укажем её радиус-вектором  $t$ ). Плотность  $\rho(t)$  в данной точке есть предел ( $\lim$ ), к которому стремится отношение  $\Delta M/\Delta V$  при стягивании  $\Delta V$  к точке  $t$ , иначе говоря,  $\rho(t) = \lim(\Delta M/\Delta V)$  при  $\Delta V \rightarrow 0$ . В общем случае (когда тело неоднородно) плотность  $\rho(t)$  меняется от одной точки тела к другой. Если объем  $\Delta V$  выбран достаточно малым, то можно считать, что  $\Delta M \approx \rho(t) \cdot \Delta V$ . При строгом подходе надо заменить  $\Delta V$  дифференциалом  $dV$ . При этом масса  $M$  некоторого объема  $V$  будет выражаться интегралом  $M = \int \rho(t) \cdot dV$ , который берется по всему рассматриваемому объему  $V$ .

Аналогичным образом поступают и в теории вероятности. Рассматривая н.с.в. (обозначим её через  $x$ ), пользуются не понятием вероятности, а понятием *плотность вероятности* н.с.в. –  $f(x)$ . По аналогии с обычной плотностью запишем:  $f(x) = \lim(\Delta P_x/\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , где через  $\Delta P_x$  обозначена вероятность реализации значений н.с.в. на отрезке  $[x; x+\Delta x]$ . Тогда вероятность  $P$  реализации значений на отрезке  $[x_1; x_2]$  выражается через плотность вероятности:  $P = \int f(x) \cdot dx$  (интеграл берется по всему отрезку  $[x_1; x_2]$ ).

В общем случае будем полагать отрезок  $[x_1; x_2]$  бесконечным, т. е. будем записывать его как  $[-\infty; +\infty]$ , считая, что он охватывает все возможные значения н.с.в. В конечном итоге мы получим важнейшие формулы:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1; \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx; \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \cdot f(x) \cdot dx, \quad (12.11)$$

где  $\langle x \rangle$  – это матожидание н.с.в.,  $D$  – дисперсия н.с.в. Сравнивая формулы (12.11) с формулами (12.2) и (12.3) для д.с.в., мы видим, что для н.с.в. вместо сумм ( $\Sigma$ ) используют интегралы ( $\int$ ), а вместо распределения вероятностей ( $p_i$ ) используют распределение плотности вероятности  $f(x)$ .

Распределение  $f(x)$  для многих н.с.в. имеет *нормальный* вид, и на графике принимает вид “колокола” (как на рис.12.1). **Нормальное распределение** плотности вероятности описывается выражением [сравните с (12.9)]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (12.12)$$

где  $\sigma \equiv D^{1/2}$  – среднее квадратичное отклонение н.с.в., которое численно равно расстоянию от центра симметрии “колокола” до точки перегиба (в ней “выпуклая” кривая линия превращается в “вогнутую”). Функцию (12.12) называют **функцией (законом) Гаусса**, а “колокол” на графике обычно называют **кривой Гаусса**. Площадь под этой кривой на бесконечном отрезке  $-\infty < x < +\infty$  равна интегралу  $\int f(x) \cdot dx$ . Подставляя в него функцию (12.12), можно убедиться, что **площадь под кривой Гаусса равна единице**. Т.е. на бесконечном отрезке мы получаем  $P = \int f(x) \cdot dx = 1$  (вероятность достоверного события есть единица), что и следовало ожидать.

“**Правило трех сигм**” (речь идет о среднем квадратичном отклонении  $\sigma$ ) – это весьма полезное на практике правило, которое доказывается в рамках теории вероятности. Суть его в следующем. Если вычислять вероятность  $P$  по формуле (12.11) не на бесконечном отрезке  $[-\infty; +\infty]$ , а на конкретных числовых отрезках, то получим следующие результаты. На отрезке  $[\langle x \rangle - \sigma; \langle x \rangle + \sigma]$  вероятность будет равна  $P=0,683$ . То есть в указанный отрезок случайная величина  $x$  попадает с вероятностью, равной 0,683 (68,3%). Вероятность попадания в более широкий отрезок  $[\langle x \rangle - 2\sigma; \langle x \rangle + 2\sigma]$  (он в 2 раза “шире” первого) увеличивается до  $P=0,954$ . Вероятность попадания в отрезок  $[\langle x \rangle - 3\sigma; \langle x \rangle + 3\sigma]$  будет равна  $P=0,997$ . Иначе говоря, в отрезок шириной  $3\sigma$  (влево и вправо от центра симметрии  $\langle x \rangle$  кривой Гаусса) попадают почти все  $x$  (99,7%), поэтому на практике обычно именно этим отрезком и ограничиваются.

На этом мы заканчиваем рассмотрение *основ* теории вероятности. И далее впервые применим её в рамках ГТНЧ. Как мы вскоре убедимся, именно язык теории вероятности как нельзя лучше подходит для описания структуры тильдаобразных чисел и отрезков натурального ряда в целом.

### 13. НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГНОРМАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

**Интервал.** Делители любого натурального числа  $N$  – это  $T$  целых чисел от 1 до  $N$ , т. е. это числа из отрезка  $[1; N]$ . Мы всегда можем разбить такой отрезок тем или иным способом на ряд *интервалов*  $[X_m; X_{m+1})$ , у которых (по определению понятия “интервал”) крайнее правое число  $X_{m+1}$  исключается из рассмотрения (об этом говорит круглая скобка). Причем границы  $(X_m$  и  $X_{m+1})$  интервала – не обязательно целые число, но всегда будем соблюдать условие для правой границы:  $N \leq X_{m+1}$ , где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

**Натуральное разбиение** числа  $N$  – так мы договоримся называть разбиение отрезка  $[1; N]$  на интервалы:  $[e^0; e^1)$ ;  $[e^1; e^2)$ ;  $[e^2; e^3)$ ; ..., где число  $e = 2,718\dots$ . Если указанные интервалы рассмотреть в логарифмической шкале ( $\ln e^0 = 0$ ;  $\ln e^1 = 1$ ;  $\ln e^2 = 2$ ; ...), то эта шкала их «спрессует» (уменьшит) в интервалы вида  $[0; 1)$ ;  $[1; 2)$ ;  $[2; 3)$ ; ..., где левые границы образуют ряд *натуральных чисел*:  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Очевидно, что *длина* ( $S$ ) интервала равна разности между правой и левой границами:  $S = (m+1) - m = 1$ . Поскольку в логарифмической шкале длины всех указанных интервалов равны между собой, то впредь будем называть параметр  $S$  – *шагом разбиения*. Ясно, что при натуральном разбиении имеем единичный шаг  $S=1$ .

**Пилотное число  $N$ .** Дальнейшие рассуждения (вплоть до специальной оговорки) мы будем вести только для *верхних лидеров частых миров* (см. гл. 3). Для наглядности изложения выберем достаточно большой верхний лидер  $N = 6.746.328.388.800$  (у него  $T = 10080$  делителей), который назовем *пилотным* числом  $N$ . Его натуральное разбиение имеет вид:  $[e^0; e^1)$ ;  $[e^1; e^2)$ ;  $[e^2; e^3)$ ; ...,  $[e^{29}; e^{30})$ , поскольку  $e^{29} < N < e^{30}$ . В логарифмической шкале это натуральное разбиение примет вид:  $[0; 1)$ ;  $[1; 2)$ ;  $[2; 3)$ ; ...,  $[29; 30)$ .

**Распределение делителей.** У пилотного  $N$  в 30-ти интервалах оказывается следующее количество делителей:  $K_m = 2, 5, 13, 27, 51, \dots, 912, \dots, 39, 20, 8, 3, 1$  (в сумме получим 10080). Эти количества сначала возрастают до своего максимума в 14-ом интервале ( $K_{max} = K_{14} = 912$  делителей), а потом убывают. Зная распределение делителей по 30-ти интервалам, мы можем найти распределение вероятностей  $P_n(m)$  того, что наугад взятое натуральное число из отрезка  $[1; N]$  окажется делителем числа  $N$ . Причем, логарифм этого делителя лежит в интервале, левая граница которого равна  $m$  (здесь и далее необходимо иметь в виду материал гл.12). Итак, получаем:

$$P_n(0) = 2/T \approx 0,0002; P_n(1) = 5/T \approx 0,0005; P_n(2) = 13/T \approx 0,0013; \dots, \\ P_n(14) = 912/T \approx 0,0905; \dots, P_n(28) = 3/T \approx 0,0003; P_n(29) = 1/T \approx 0,0001.$$

Найденные нами вероятности  $P_n(m)$  на графике образуют характерный “колокол” нормального распределения (см. рис.13.1). Примечательно, что эти вероятности близки к вероятностям, рассчитанным по формуле Лапласа–Гаусса (12.9) при следующих условиях: математическое ожидание  $\langle M \rangle = 14,7700$ , дисперсия  $D = 18,3012$ , аргумент  $m = 0,5; 1,5; 2,5; \dots; 29,5$ . То есть  $m$  находится в *середине* интервалов натурального разбиения:  $[0; 1); [1; 2); [2; 3); \dots, [29; 30)$ . Числовые значения  $\langle M \rangle$  и  $D$  мы нашли по формулам (12.2) и (12.3), о чем сказано довольно подробно, но чуть ниже.

На рис.13.2 представлена относительная погрешность (ОП) формулы Лапласа-Гаусса [относительно вероятностей  $P_n(m)$  у “пилотного” числа  $N$ ]. Полученный график очень похож на график ОП формулы Лапласа-Гаусса относительно *точной* формулы Бернулли (см. рис.12.2). Следовательно, вероятности  $P_n(m)$ , найденные нами выше для числа  $N$ , также своеобразный «конечный продукт» схемы Бернулли. Итак, *при натуральном разбиении тильдаобразного числа  $N$  его делители образуют нормальное распределение* (в логарифмической шкале).

**Число  $N$  – как дискретная случайная величина.** Посмотрим на “плотное” число  $N$  (при натуральном разбиении) с другой стороны.

Появление у натурального числа  $N$  (с типом  $T$ ) соответствующего набора делителей  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_T$  можно рассматривать как некий случайный процесс (более точно – это *псевдослучайный* процесс, см. гл. 5). Тогда можно сказать, что мы имеем *дискретную случайную величину* (д.с.в.)  $Y$ , принимающую  $T$  значений  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_T$ , причем с одинаковыми вероятностями  $p_i = 1/T$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots, T$ . Очевидно, мы вправе «сконструировать» другую д.с.в.  $X$ , принимающую  $T$  значений  $\ln d_1, \ln d_2, \ln d_3, \dots, \ln d_T$  (также с одинаковыми вероятностями  $p_i = 1/T$ ). Т. е. мы имеем две взаимосвязанные д.с.в.:  $\ln Y = X$  или  $Y = \exp(X)$ .

**Матожидание  $\langle M \rangle$**  для д.с.в.  $X$  будет равно [см. формулу (12.2)]:

$$\langle M \rangle \equiv (\ln d_1 + \ln d_2 + \dots + \ln d_T) p_i \equiv \ln(d_1 d_2 \dots d_T) / T = \ln \sqrt{N}, \quad (13.1)$$

т. к. произведение всех делителей, очевидно, равно  $N^{T/2}$  ( $T$  – четное число).

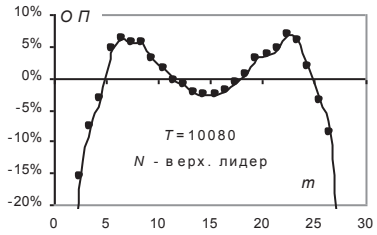


Рис.13. 2. Относительная погрешность

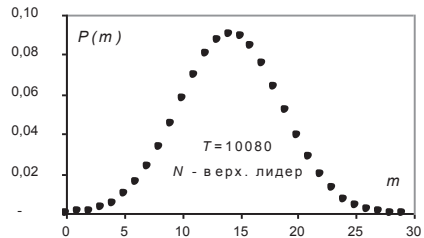


Рис. 13.1. Нормальное распределение

Вся информация о числе  $N$  (с четным типом  $T$ ) “зашифрована” только в его *малых* делителях  $d_1, d_2, \dots, d_{T/2}$  (*большие* делители всего на всего им обратны:  $1/d_1, 1/d_2, \dots, 1/d_{T/2}$ , см. гл. 3, 5). Причем никогда последний малый делитель не превзойдет корня квадратного из числа  $N$  (всегда  $d_{T/2} \leq \sqrt{N}$ ). Даже одного этого факта достаточно, чтобы оценить, насколько удачно параметр  $\sqrt{N}$  назван (ещё древними математиками) **корнем** числа  $N$ . Ведь понятие “корень” означает нечто первостепенное, дающее всему начало.

Вот и в мире натуральных чисел именно корень квадратный из числа  $N$  определяет важнейший закон – рост матожидания у верхних лидеров  $N$ :

$$\langle M \rangle = 0,5 \cdot \ln N \equiv \ln \sqrt{N}. \quad (13.2)$$

По формуле (13.2) в конце БО (при  $N=8 \cdot 10^{60}$ ) получаем  $\langle M \rangle \approx 70,12$ . Это означает, что в конце БО крайний верхний лидер будет иметь больше всего делителей в интервале, где находится число  $\sqrt{N} = \exp(\langle M \rangle) = 2,8 \cdot 10^{30}$ . Над ним находится вершина «колокола» нормального распределения делителей (в логарифмической шкале) у наибольшего верхнего лидера.

**Дисперсия  $D$**  для д.с.в.  $X$  будет равна [см. формулу (12.3)]:

$$D \equiv \langle (X - \langle M \rangle)^2 \rangle = \sum (x_i - \langle M \rangle)^2 p_i = \sum [\ln d_i - \ln(N^{1/2})]^2 / T. \quad (13.3)$$

Именно по формулам (13.2) и (13.3) мы нашли матожидание и дисперсию для «пилотного» верхнего лидера:  $\langle M \rangle = 14,7700$  и  $D = 18,3012$ .

Итак, д.с.в.  $X$  имеем нормальное распределение, а поскольку  $Y = \exp(X)$ , то д.с.в.  $Y$  имеет *логнормальное распределение*. Иначе говоря, мы приходим к фундаментальному выводу, что **делители тильдаобразного числа  $N$  образуют логнормальное распределение**. Поэтому все тильдаобразные числа (а верхние лидеры – самые “совершенные” из них) правильнее всего называть *логнормальными числами*.

## 14. ДИСПЕРСИЯ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

**Важное замечание.** Следует подчеркнуть, что далее мы будем работать с параметрами ( $\langle M \rangle$  и  $D$ ) *нормального распределения* д.с.в.  $X$  (см. гл.13), хотя логнормальное распределение д.с.в.  $Y$  имеет свои параметры ( $\langle M \rangle_Y$  и  $D_Y$ , о которых мы ни слова не говорим, и они выражаются через  $\langle M \rangle$  и  $D$ ). Говоря о матожидании и дисперсии, мы и впредь будем рассматривать делители  $d_i$  любого натурального числа  $N$  через логарифмические “очки” (будем работать с логарифмами –  $\ln d_i$ ). Это заметно упрощает изложение.

**Закон роста дисперсии  $D_2$ .** Если закон роста матожидания  $\langle M \rangle$  (13.1) мы нашли довольно просто, то закон роста дисперсии у верхних лидеров – куда более сложная задача. Чтобы решить её мы рассмотрим все 144 верхних лидера (из частных миров) на *рабочем отрезке* [2;  $10^{17}$ ]. Они образуют

ряд чисел: 2, 6, 12, 24, 48, 60, ..., 106858629141264000. Последнее из указанных чисел (с тремя *достоверными* нулями на конце) – это наибольший верхний лидер, у которого мы ещё можем увидеть *все* делители (их 65536 штук), т.к. ПК показывает только первые 15-ть значащих цифр числа, а вместо 16-й, 17-й и т.д. цифр – уже *всегда* «пишет» нули.

По формуле (13.3) у всех 144 верхних лидеров рабочего отрезка была найдена дисперсия. Это потребовало почти 13 часов непрерывного счета компьютера, т.к. время вычисления дисперсии для каждого верхнего лидера  $N$  составило  $t \approx 2,433 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{N}$  (минут). Кстати, отсюда следует, что выбранный ПК вычислит дисперсию у верхнего лидера  $N \approx 10^{45}$  за время  $t \approx 15$  млрд. лет (сопоставимо с возрастом Вселенной), что просто нереально.

Дисперсия  $D$  у верхних лидеров  $N$  из частых (четных) миров имеет фундаментальное значение (в чём мы убедимся ниже), поэтому будем обозначать эту дисперсию собственным символом –  $D_2$  (двойка напоминает нам, что миры чётные). Далее мы попытаемся найти в первом приближении закон роста  $D_2=f(N)$ , с тем, чтобы оценить значение  $D_2$  в конце БО.

Анализ рабочего отрезка дает основание предположить, что  $D_2$  устремляется к среднему типу  $T_s \approx \ln(N) + 2 \cdot C - 1$  (см. гл. 3) следующим образом:

$$D_2 \approx u \cdot T_s, \quad \text{где} \quad u = 1 - (a \cdot N^b)^{-1}. \quad (14.1)$$

Параметр  $u$  устремляется к 1 (*unit* – единица), а скорость этого процесса задается числами:  $a = \sqrt{\pi} = 1,7725\dots$ ,  $b = 0,5 \cdot \exp(-\pi) = 0,0216\dots$  (в конце рабочего отрезка  $u \approx 0,76$ ; в конце БО  $u \approx 0,97$ ). Разумеется, выбор значений  $a$  и  $b$  (как и формулы для самого  $u$ ) весьма субъективен, но он всё-таки позволяет получить грубую оценку: в конце БО формула (14.1) выдает  $D_2 \approx 136,6$ .

Убывание модуля относительной погрешности (ОП) формулы (14.1) на рабочем отрезке можно довольно неплохо описать следующим образом:

$$|\text{ОП}| \approx 0,65 \cdot (\ln N)^{-0,5}. \quad (14.2)$$

Однако есть основания считать, что в конце БО верно следующее:

$$|\text{ОП}| < 0,1789 \cdot N^{-0,0143} \approx 2,4\%. \quad (14.3)$$

Итак, по формулам (14.1) и (14.3) в конце Большого отрезка мы получаем любопытный результат:  $D_2 = 136,6 \pm 2,4\%$ , который позволяет говорить о парадоксальной  $\alpha$ -гипотезе:  $D_2 = \alpha^{-1} = 137,035$  (см. гл. 24).

Добавим, что дисперсию  $D_2$  можно рассматривать не как функцию среднего типа  $T_s$ , а как функцию непосредственно правой границы отрезка:

$$D_2 \approx Q \cdot (\ln N)^q. \quad (14.4)$$

Величины  $Q = 0,279351\dots$ ,  $q = (\pi/2)^{1/2} = 1,2533\dots$  – подобраны для соблюдения  $\alpha$ -гипотезы ( $D_2 = \alpha^{-1}$  в конце БО), и на рабочем отрезке с (14.4) имеем:

$$|\text{ОП}| < N^{-0,1}. \quad (14.5)$$

Конечно, вряд ли формула (14.1), а, тем более, формула (14.4) – это и есть истинный закон роста дисперсии  $D_2$ . Но, как мы убедились, в конце БО дисперсия вполне может численно дорасти до значения  $\alpha^{-1}$ , и даже такое «открытие» (всего лишь предположение) – хороший стимул в наших исканиях. Итак, знания о дисперсии могут иметь большое значение. И с целью дальнейшего изучения дисперсии, мы рассмотрим новые понятия.

**Центральный интервал.** Введем новый параметр  $w \equiv A(\ln\sqrt{N})$ , где символ  $A$  обозначает функцию “антье”, т.е. целую часть аргумента  $\ln\sqrt{N}$ . Тогда, можно утверждать, что  $w < \ln\sqrt{N} < (w+1)$ , или, что абсолютно то же самое,  $\ln(e^w) < \ln\sqrt{N} < \ln(e^{w+1})$ . Таким образом, параметр  $w$  – это левая граница интервала, содержащего матожидание  $\langle M \rangle$  натурального числа  $N$ . Интервал  $[e^w; e^{w+1})$  мы будем называть **центральным интервалом (ц.и.)**, ведь в логарифмической шкале это так и есть для любого числа  $N$ .

Ясно, что ц.и. образуют делители  $d_i$ , удовлетворяющие условию:

$$e^w < d_i < e^{w+1}. \quad (14.6)$$

Величина  $\ln\sqrt{N}$  – это **логцентр** (логарифмический “центр”) числа  $N$ . Положение логцентра на ц.и. мы будем определять по удалению логцентра от значения  $w$ , то есть  $W \equiv (\ln\sqrt{N} - w)$ . Параметр  $W$  – это **зазор** между логцентром и левой границей центрального интервала числа  $N$ . Второе название зазора – **W-функция** (дабл-ю функция) аргумента  $N$ . Свойства этой функции весьма любопытны и были рассмотрены нами выше в гл. 11. Там, в частности, было показано, что у *верхних лидеров* при  $N \rightarrow \infty$  зазор  $W$  может быть любым от 0 до 1 (все значения равновероятны, см. рис. 11.3).

**Керн числа  $N$ .** Введем новое понятие: **керн** числа  $N$  – количество делителей у числа  $N$  на его центральном интервале. Исследования на рабочем отрезке показывают, что у лидеров миров (с достаточно большим типом  $T$ ) керн  $K$  – максимально возможный в данном мире, и у всех последующих чисел  $N$  из мира  $T$  (стоящих за лидером мира) керн будет меньше. Поэтому для верхних лидеров введем обозначение для керна –  $K_{max}$ .

На рабочем отрезке для верхних лидеров можно вывести формулу:

$$K_{max} \approx \exp[0,4204 \cdot (\ln N)^{0,8216}]. \quad (14.7)$$

Модуль относительной погрешности этой формулы на рабочем отрезке убывает от 47% до 6%, и верна такая оценка:  $\text{abs}(\text{ОП}) < 0,35 \cdot (\ln N)^{-0,0416}$ . Если допустить, что керн  $K_{max}$  продолжает и дальше расти по закону (14.7), то в конце Большого отрезка получим такую оценку:  $K_{max} \approx 4 \cdot 10^{10}$ .

На графике  $K_{max} = g(N)$  *реальных* значений  $K_{max}$  построим касательную в конце рабочего отрезка (вернее, к последним 20-ти значениям  $K_{max}$ ). Тогда эта касательная (прямая линия), очевидно, обозначит некий “потолок” возможных значений параметра  $K_{max}$  за пределами рабочего отрезка:

$$K_{max} < \exp[0,1767 \cdot (\ln N) + 1,6119]. \quad (14.8)$$



Так, в конце БО получаем следующее ограничение (сверху):  $K_{max} < 2,9 \cdot 10^{11}$ .

Керн  $K_{max}$  имеет простую геометрическую интерпретацию. Оказывается, керн численно устремляется (с ростом  $N$ ) к *котангенсу угла наклона тильды* (на центральном интервале). Поясним суть сказанного. Для этого обратимся к графику тильды:  $\ln(d_i) = \varphi(i)$  (см. рис. 14.1, где центральный интервал условно “вырезан” двумя линиями). Мы видим, что большинство делителей тильдаобразного числа  $N$  образуют почти экспоненту (почти прямую линию в логарифмической шкале). Поэтому считаем, что на относительно малом *центральной интервале* делители тем более близки к экспоненте:

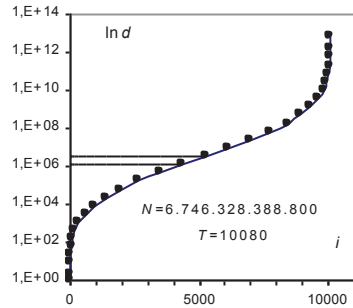


Рис. 14.1. Тильда делителей у числа  $N$

$$d_i = A \exp(B \cdot i), \quad (14.9)$$

где  $i = v, \dots, z$  – порядковые номера делителей в общем ряду всех делителей числа  $N$ , а  $A$  и  $B$  – параметры экспоненты. Из уравнений для начала и конца ц.и.:  $d_v = A \exp(B \cdot v)$ ;  $d_z = A \exp(B \cdot z)$ , найдем оба параметра экспоненты:

$$- \text{тангенс угла наклона экспоненты } B = (\ln d_z - \ln d_v) / (z - v) = S / K_{max}, \quad (14.10)$$

$$- \text{“высота” экспоненты над осью абсцисс } A = d_v / \exp(B \cdot v), \quad (14.11)$$

где  $S \equiv (\ln d_z - \ln d_v)$  – это *длина* центрального интервала (шаг разбиения).

Очевидно, что при логнормальном разбиении числа  $N$  всегда  $S=1$ , а значит  $B = 1/K_{max}$  или  $K_{max} = 1/B$ , т.е. *керн – это котангенс угла наклона тильды*.

Как найти тангенс угла наклона ( $B$ ) экспоненты? В идеале для этого надо знать все делители  $d_i$  центрального интервала и их порядковые номера  $i$ . Тогда можно построить на ПК линию тренда  $d_i = A \exp(B \cdot i)$ , т.е. получить параметры  $A$  и  $B$  в “готовом” виде. Например, для пилотного числа  $N$  компьютер легко «выдает» линию тренда с параметрами:  $A = 10389$ ;  $B = 0,0011$  (где  $i = 4340, 4341, \dots, 5251$ ). После чего остаётся подкорректировать  $B$  до значения  $B = 0,0010955$ , совместив график относительной погрешности (ОП) экспоненты с осью абсцисс (для точек ОП строится своя линия тренда в виде прямой, которую «накладываем» точно на ось абсцисс, это происходит при  $B = 0,0010955$ ). На графике ОП экспоненты (см. рис. 14.2) видно, что реальные делители «колеблются» относительно построенной экспоненты (поэтому её можно назвать ещё *псевдоэкспонентой*).

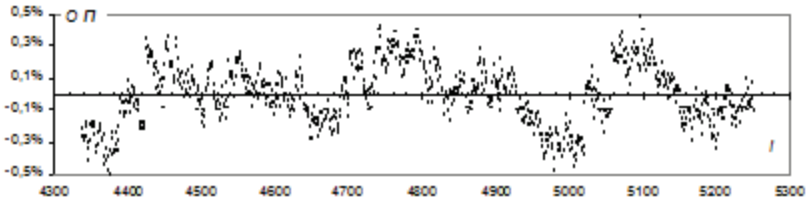


Рис. 14.2. Относительная погрешность экспоненты пилотного числа  $N$  на ц.и.

**Дисперсия  $D_2^*$ .** Теперь вернемся к рассмотрению *дисперсии* верхнего лидера  $N$ , но уже под новым углом зрения.

Пусть событие  $A$  заключается в том, что произвольно взятое натуральное число из отрезка  $[1; N]$  оказывается делителем числа  $N$ . Тогда, вспоминая теорию вероятности (см. гл.12), можно утверждать, что наибольшая вероятность ( $P_{max}$ ) события  $A$  будет у чисел, лежащих в центральном интервале числа  $N$ . Причем, эта вероятность будет равна  $P_{max} \equiv K_{max}/T$  (чем больше число  $N$ , тем точнее работает данная формула).

Но, с другой стороны, из теории вероятности [см. формулу (12.10)], имеем:  $P_{max} = (2\pi D)^{-1/2}$ . Таким образом, можно вывести формулу:

$$D_2^* = (2\pi)^{-1} \cdot (T/K_{max})^2 \approx 0,1591 \cdot (T/K_{max})^2, \quad (14.12)$$

где  $T$  – количество всех делителей у числа  $N$  (его тип), а  $K_{max}$  – *кern* числа  $N$ , т.е. количество его делителей, удовлетворяющих условию:  $e^w < d_i < e^{w+1}$ . Для верхних лидеров частых миров обозначим:  $T = T_{max}$  и  $D^* = D_2^*$ . Формула (14.12) дает, вообще говоря, несколько *большую* дисперсию, нежели формула (13.3). Об этом и будет напоминать символ «звездочка» (\*).

Для пилотного  $N$  мы получаем:  $D^* = (10080/912)^2 / (2\pi) = 19,4425\dots$ , что больше значения  $D = 18,3012\dots$ , полученного по формуле (13.3). На рабочем отрезке данное соотношение ( $D^* > D$ ) выполняется для всех верхних лидеров, за исключением шести:  $N=180, 240, 360, 5040, 10080, 15120$ . Модуль относительной погрешности [ $abs(ОП) \equiv (D - D^*)/D^*$ ] на рабочем отрезке весьма условно удастся оценить следующим выражением:

$$abs(ОП) \leq 2 \cdot (\ln N)^{-1}. \quad (14.13)$$

Из формулы (14.13) в конце БО получаем грубую оценку  $abs(ОП) \leq 1,4\%$ . Поэтому, в конце БО у верхних лидеров, возможно,  $D_2^* = 137 \div 139$  (если принять  $D_2 = \alpha^{-1} = 137,0359895$ ). Более того, сама формула (14.12) похожа на выражение из физики для постоянной тонкой структуры  $\alpha^{-1}$ , и этот факт («отражение» миром чисел  $\alpha^{-1}$ ) подробно рассмотрен в гл. 24.

**Дисперсия любого числа  $N$ .** Очевидно, что к любому натуральному числу  $N$  применимо понятие «центральный интервал», «кern», «тип» (см.

табл. 14.1). А это означает, что у *любого* натурального числа  $N$  можно вычислить и дисперсию ( $D$ ) по формуле, аналогичной (14.12):

$$D = (2\pi)^{-1} \cdot (T/K)^2 \approx 0,1591 \cdot (T/K)^2, \quad (14.14)$$

где  $T$  – количество всех делителей у числа  $N$  (его тип), а  $K$  – kern числа  $N$ , т.е. количество его делителей, удовлетворяющих условию:  $e^w < d_i < e^{w+1}$ .

Поскольку kern  $K$  может быть равен нулю (см. табл. 14.1), то, можно считать, что у чисел  $N=11, 17$ , и т.п. – дисперсия устремляется к бесконечности. Более подробно мы всё это рассмотрим в гл. 17.

Типы ( $T$ ) и керны ( $K$ ) первых 17-ти натуральных чисел  $N$ . Таблица 14.1.

| $N$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $T$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4  | 2  | 6  | 2  | 4  | 4  | 5  | 2  |
| $K$ | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1  | 0  | 3  | 0  | 1  | 2  | 1  | 0  |

**Очередная оценка  $T_{max}$ .** Формула (14.12) позволяет получить точное аналитическое выражение для очень важной величины  $T_{max}$  (максимально возможное количество делителей у натуральных чисел на отрезке  $[1; N]$ ):

$$T_{max} = K_{max} \sqrt{2\pi \cdot D_2^*}. \quad (14.15)$$

Если допустить, что в конце БО, действительно,  $D_2^* = D_2 = \alpha^{-1}$ , то, с учетом выражений для  $K_{max}$  [см. (14.7) и (14.8)], мы приходим, вероятно, к *верхней* оценке максимально возможного типа:  $T_{max} \approx (1,2 \div 8,5) \cdot 10^{12}$ . Заметим, что реальный  $T_{max}$  в конце БО может оказаться меньше указанного, например, ранее другим путем было получено  $T_{max} \approx 6,85 \cdot 10^{11}$  (см. гл. 4).

Итак, хотя *истинные* законы роста  $D_2, K_{max}, D_2^*, T_{max}$  (скажем, как некие функции правой границы  $N$  рассматриваемого отрезка) нам оказались недоступны, зато мы нашли весьма правдоподобный закон (14.15), связывающий указанные важнейшие величины между собой.

**Натуральное разбиение БО.** Речь идет о натуральном разбиении *старшего* (последнего, наибольшего) верхнего лидера  $N$  из частых миров на Большом отрезке (БО). О данном числе  $N$  нам известно следующее:

- $N \approx 8 \cdot 10^{60}$  – это правая граница БО (возраст Вселенной в *эви*, см. гл. 1);
- $T_{max} \approx 10^{11} \div 10^{12}$  – количество всех делителей у  $N$  (его тип см. гл. 4 и 14);
- $\langle M \rangle = \ln \sqrt{N} \approx 70,12$  (или  $2,8 \cdot 10^{30}$  *эви*  $\approx 1,5 \cdot 10^{-13}$  сек) – матожидание у  $N$ ;
- $D = \alpha^{-1} = 137,036$  – дисперсия у числа  $N$  (см.  $\alpha$ -гипотезу);
- $(2,52 \div 6,84) \cdot 10^{30}$  *эви*  $[(1,4 \div 3,7) \cdot 10^{-13}$  сек] – центральный интервал у  $N$ ;
- $m = 0,5; 1,5; \dots 140,5$  – середины  $m$ -интервалов разбиения (в лог/шкале).

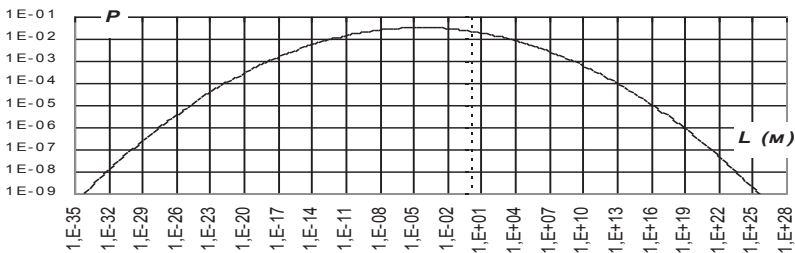


Рис. 14.3. Вероятность  $P$  при натуральном разбиении старшего верхнего лидера

Используя указанные значения  $\langle M \rangle$ ,  $D$  и  $m$ , мы можем вычислить все 140 значений  $P_n(m)$  по формуле Лапласа – Гаусса (12.9). При этом будем помнить, что все делители старшего верхнего лидера  $N$  мы рассматриваем в логарифмической шкале (лог/шкале). Тогда смысл величины  $P_n(m)$  – это вероятность того, что наугад взятое из  $m$ -интервала натуральное число окажется делителем числа  $N$ . Результаты расчета представлены на рис. 14.3, где вероятность  $P_n(m)$  обозначена одной буквой  $P$ , а «колокол» имеет непривычный вид (сравните с рис.13.1) из-за того, что вертикальная ось (с вероятностью  $P$ ) имеет логарифмическую, а не линейную шкалу. Хорошо видно, что вероятность «попадания» в центральный интервал ( $P \approx 0,034$  или 3,4%) – наибольшая в пределах БО (это вершина «колокола» на рис.14.3). На оси абсцисс изображен БО, но не в эви, а в метрах (после эви-конвертации, см. гл. 1). «Интерпретацию» рис. 14.3 см. в гл. 29.

## 15. КРУПНОЕ И МЕЛКОЕ РАЗБИЕНИЕ ЧИСЛА

**Крупное разбиение числа  $N$ .** Выше мы установили, что в логарифмической шкале при натуральном разбиении верхнего лидера  $N$  (шаг разбиения  $S=1$ ) его делители (вернее,  $\text{Ind}_i$ ) образуют нормальное распределение. Т.е. середины интервалов натурального разбиения ( $m=0,5; 1,5; 2,5; \dots$ ) после их подстановки в формулу Лапласа-Гаусса (12.9) образуют нормальное распределение, с параметрами:  $\langle M \rangle = \ln(N^{1/2})$ ;  $D \approx (2\pi)^{-1} \cdot (T \cdot S/K)^2$ . Это говорит о том, что при натуральном разбиении мы имеем дело с *дискретной случайной величиной* (д.с.в.)  $X$  (принимающей  $T$  значений  $\text{Ind}_1, \text{Ind}_2, \text{Ind}_3, \dots, \text{Ind}_T$  с одинаковыми вероятностями  $p_i=1/T$ , где  $i=1, 2, 3, \dots, T$ ).

А что изменится, если мы будем брать шаг  $S = 2, 3, 4, \dots$  (любое целое число больше 1)? Такое разбиение числа  $N$  (отрезка  $[1; N]$ ) мы назовем *крупным разбиением*. Ознакомимся с ним на примере всё того же пилотного

верхнего лидера  $N=6.746.328.388.800$  ( $T=10080$ ), взяв шаг разбиения  $S=2$  (здесь *центральный интервал* стал в 2 раза длиннее, чем при  $S=1$ ). Зная распределение делителей по 15-ти интервалам (левые границы этих интервалов равны  $m=0, 2, 4, \dots, 28$ ), мы находим распределение вероятностей  $P_n(m)$ , причем на графике они образуют характерный “колокол” нормального распределения. Затем вычисляем матожидание и дисперсию [с учетом формулы (14.14) и текста, её поясняющего]:

$$\langle M \rangle = \ln(N^{1/2}); \quad D \approx (2\pi)^{-1} \cdot (T \cdot S / K)^2, \quad (15.1)$$

где  $S=2$ , а  $K=1815$  – количество делителей на новом центральном интервале (ц. и.). Полученные  $\langle M \rangle = 14,7700$  и  $D \approx 19,6358$  мы попытаемся подставить в формулу Лапласа-Гаусса (12.9). Но, увы, теперь эта формула не срабатывает: слишком *низкий* «колокол», а сумма всех значений – 0,5 (вместо 1).

А что, если низкий колокол – это нормальное распределение *плотности вероятности*  $f(x)$ , описываемое законом Гаусса (12.12)? При этом мы вынуждены признать, что *дискретные* середины 15-ти интервалов ( $m=1, 3, 5, \dots$ ) теперь следует понимать как *непрерывную* случайную величину  $x$ , а площадь  $F$  под кривой Гаусса должна быть равна единице. Последнее нетрудно проверить, сложив площади всех “трапеций” под кривой Гаусса:

$$F \approx \sum F_x, \text{ где } F_x \approx \frac{f(x) + f(x-S)}{2} \cdot S. \quad (15.2)$$

У пилотного  $N$  для формулы (15.2) следует брать  $S=2$  и  $x=3, 5, \dots, 31$ . Где  $x$  – это середина интервалов при крупном разбиении, причем, указанные  $x$  ещё следует умножать на некий поправочный коэффициент  $\lambda \approx 1,07$  (для данного  $N$  и  $S$ ). В итоге мы имеем 14-ть “трапеций” с одинаковой высотой  $S$ , но разными площадями  $F_x$ . Длины двух оснований «трапеции» [ $f(x)$  и  $f(x-S)$ ] вычисляем по закону Гаусса (12.12), причем:

$$\langle x \rangle = \langle M \rangle; \quad \sigma = \sqrt{D} \equiv D^{0,5}, \quad (15.3)$$

где параметры  $\langle M \rangle$  и  $D$  находим по формулам (15.1).

В конечном итоге для пилотного  $N$  при  $S=2$  получим  $F \approx 0,9986$  (что близко к единице), а  $P_x \approx F_x$ , где  $P_x$  – это вероятность того, что наугад взятое натуральное число из отрезка  $[1; N]$  окажется делителем числа  $N$ , причем, логарифм этого числа лежит в интервале, левая граница которого равна  $x=2, 4, 6, \dots, 28$ . Коэффициент  $\lambda$  потребовался для того, чтобы подогнать полученное вышеописанным способом *распределение вероятностей*  $P_x$  к реальному распределению вероятностей  $[P_n(m)]$ . Вероятно, у данного числа  $N$  при увеличении шага разбиения  $S$  значение  $\lambda$  также увеличивается (у пилотного числа  $N$  при  $S=3$  необходимо брать  $\lambda \approx 1,113$ ).

**Мелкое разбиение числа  $N$ .** Итак, мы выяснили закономерности, возникающие при *крупном разбиении* верхнего лидера  $N$  (отрезка  $[1; N]$ ). Нам

остается только сказать о закономерностях, возникающих при шаге разбиения  $S$  меньше, чем единица. Подобное разбиение числа  $N$  мы назовем **мелким разбиением**. Так вот оказывается, что схема рассуждений и формулы, полученные выше для крупного разбиения, полностью пригодны и для мелкого разбиения. В этом легко убедиться, разбивая пилотное число  $N$ , например, следующими шагами:  $S=\ln 2=0,693\dots$ ;  $S=0,200$ ;  $S=0,02$ . Для каждого шага  $S$  по формулам (15.1) вычисляем  $\langle M \rangle$  и  $D$ . При  $S=0,02$  “колокол” распределения реальных вероятностей  $[P_n(m)]$  уже заметно “размазан” (как будто составлен из горизонтальных “штрихов”).

**Обобщения и выводы.** Любое натуральное число  $N$  с типом  $T$  (имеющее ровно  $T$  делителей:  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_T$ ), можно отождествлять с некой **случайной величиной**  $X$ , которая принимает ровно  $T$  значений:  $\ln d_1, \ln d_2, \ln d_3, \dots, \ln d_T$  (с одинаковыми вероятностями  $p_i=1/T$ , где  $i=1, 2, 3, \dots, T$ ). Величина  $X$  случайная в том смысле, что мы якобы не можем предсказать, какие именно будут делители  $d_i$  у произвольно взятого числа  $N$  (и сколько их). На самом деле существуют четкие правила (алгоритмы), позволяющие найти все делители *теоретически* у любого числа  $N$ . Поэтому правильной говорить, что  $X$  – это **псевдослучайная** величина (см. 6-й закон Пирамиды в гл. 5). Однако в конце Большого отрезка (в “настоящее время”, см. гл. 1) колоссальность чисел ( $N \sim 10^{61}$ ) позволяет считать величину  $X$  именно случайной, ибо найти все делители столь огромных чисел  $N$  невозможно.

Из наших исследований выясняется, что только при *натуральном разбиении* логнормального числа  $N$  величина  $X$  «наделяется» свойствами **дискретной** случайной величины. У любого числа  $N$  будет только одно единственное натуральное разбиение, и в этом его уникальность.

При всех прочих разбиениях числа  $N$  (при *крупных* или *мелких разбиениях*) величина  $X$  «наделяется» свойства **непрерывной** случайной величины. Причем, у огромных чисел  $N$  (в конце БО) количество различных крупных и мелких разбиений может также очень велико (в отличие от единственного натурального разбиения). Причем, начиная с некоторого шага разбиения ( $S < 1$  или  $S > 1$ ) рассмотрение случайной величины  $X$  (вернее, числа  $N$  в данном качестве) теряет всякий смысл.

Таким образом, в мире натуральных чисел мы сталкиваемся с явлением, которое можно назвать **дуализмом**: при разных рассмотрении структура числа  $N$  (его делители) обладает дискретными или непрерывными свойствами (всё зависит от способа рассмотрения).

## 16. ЭНТРОПИЯ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА, ОТРЕЗКА

**Энтропия числа  $N$ .** Пусть  $N$  – это верхний лидер. Зная его матожидание  $\langle M \rangle$  и дисперсию  $D$ , мы можем подвергнуть число  $N$  разбиению трех видов: натуральному, крупному или мелкому ( $S=1$ ;  $S>1$  или  $S<1$ ). Они будут различаться только способом задания параметра  $m$  – середины  $n$ -го интервала разбиения в логарифмической шкале, причем

$$m = S \cdot (n - 0,5) \quad \text{и} \quad n_{max} = A(S^{-1} \cdot \ln N) \quad (16.1)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – порядковый номер интервала разбиения (шагом  $S$ ).

При любом разбиении числа  $N$  мы будем получать  $n$  значений  $P_n(m)$ : по формуле Лапласа–Гаусса (12.9) – при натуральном разбиении ( $S=1$ ); по формулам (12.12), (15.2) и (15.3) – в остальных случаях ( $S>1, S<1$ ).

Напомним:  $P_n(m)$  – это вероятность того, что наугад взятое натуральное число из  $n$ -го интервала окажется делителем числа  $N$ , причем любое разбиение, вообще говоря, порождает набор вероятностей  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ .

В статистической физике есть такое понятие – *информационная энтропия* ( $H_{и}$ ), которую определяют следующим образом [45, стр.904]:

$$H_{и} \equiv - (P_1 \cdot \ln P_1 + P_2 \cdot \ln P_2 + P_3 \cdot \ln P_3 + \dots + P_n \cdot \ln P_n), \quad (16.2)$$

Энтропия  $H_{и}$  служит мерой неопределенности сообщений. Сообщения описываются множеством величин  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  и вероятностей  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  появления этих величин в сообщении, причем  $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$ .

$H_{и} = 0$ , если какая-либо из вероятностей  $P_k = 1$ , а остальные вероятности равны нулю, т.е. информация достоверна, неопределенность отсутствует. Энтропия  $H_{и}$  принимает наибольшее значение, когда все  $P_k$  одинаковы (неопределенность в информации максимальна). Общая энтропия нескольких сообщений равна сумме энтропий отдельных сообщений.

Учитывая сказанное, введем новое понятие – *энтропия числа  $N$* , которую будем обозначать  $H_{и}$ , и вычислять будем также по формуле (16.2), где  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  – это набор вероятностей какого-либо разбиения  $N$ .

Например, найдем энтропию числа  $N=8 \cdot 10^{60}$ , считая, что это  $N$  – старший (последний) верхний лидер из частей миров на Большом отрезке (БО). Тогда матожидание  $N$  равно  $\langle M \rangle = \ln \sqrt{N} \approx 70,12$ , а дисперсия  $N$  равна  $D_2 = \alpha^{-1} = 137,036$  (согласно  $\alpha$ -гипотезе). Далее при  $S = 48,42$  мы получим  $H_{и} \approx 0$ ; при  $S = 17,81$  получим  $H_{и} \approx 1$ ; при натуральном разбиении ( $S=1$ ) получим  $H_{и} \approx 3,88$ ; при  $S = 6 \cdot 10^{-60}$  получим  $H_{и} \approx 140 \approx \ln N$ . В итоге получаем закон

$$H_{и} \approx H_1 - \ln S, \quad (16.3)$$

где  $H_1$  – это энтропия числа  $N$  при натуральном разбиении (при  $S=1$ ). Таким образом, чем меньше шаг разбиения  $S$ , тем больше энтропия  $H_{и}$ , т.е. формула (16.3) вполне соответствует «физическому» смыслу энтропии.

Пусть при  $S_{min}$  имеем  $(H_{и})_{max} \approx \ln N$ , а при  $S_{max}$  имеем  $H_{и} = 0$ , тогда:

$$S_{min} \approx N^{-1} \cdot \exp(H_1), \quad S_{max} \approx [\exp(-H_1)]^{-1}. \quad (16.4)$$

**Нормальная энтропия** числа  $N$  – так будем называть энтропию  $H_1$ . Нетрудно убедиться, что формулы (16.3) и (16.4), вообще говоря, справедливы для любого верхнего лидера  $N$  из частых миров. Считаем, что для таких чисел  $N$  формула (14.4), действительно, отражает закон изменения дисперсии  $D_2 = f(\ln N)$ . Тогда мы приходим к следующей зависимости:

$$H_1 \approx \ln \sqrt{D_2} + \sqrt[3]{e} \approx \ln \sqrt{D_2} + 1,3956. \quad (16.5)$$

Таким образом, с ростом  $N$  нормальная энтропия  $H_1$  растет крайне медленно. Так, если при  $N=2$  имеем  $D_2 \approx 0,2$  и  $H_1 \approx 0,6$ , в конце Большого отрезка  $H_1 \approx 3,88$ , то при  $N=10^{308}$  (!) получаем  $D_2 \approx 1045$  и  $H_1 \approx 4,87$ . Добавим, что при  $N = 10^{21} \div 10^{61}$  ОП формулы (16.5) убывает от 0,81% до 0,63%.

**Энтропия отрезка**  $[1; N]$  – это сумма наибольших энтропий у всех натуральных чисел данного отрезка. Мы пока установили только одно: наибольшая энтропия *верхнего лидера*  $N$  равна  $(H_{и})_{max} \approx \ln N$  (но даже это, скорее, просто гипотеза). Однако формулы (16.3) и (16.4), вообще говоря, справедливы и для любого натурального *логнормального числа* (верхние лидеры просто самые «совершенные» из таких чисел). Более того, понятие «энтропия», вероятно, применимо к любому натуральному числу  $N$ .

Чтобы понять это, придется забежать немного вперед и сказать следующее. Оказывается, что у любого натурального числа  $N$  можно найти дисперсию по формуле  $D = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot (T/K)^2$ . Причем возможны два варианта:

1). Не менее половины (около 64,6%?) всех натуральных чисел имеют нулевой керн ( $K=0$ ), т.е. их дисперсия  $D$  устремляется к бесконечности  $\infty$  (т.к. всегда тип  $T \geq 1$ ). Например, у всех *простых чисел* ( $T=2$ ), начиная с  $N=11$ , керн  $K$  равен нулю и дисперсия  $D \rightarrow \infty$ . Можно предположить, что у чисел  $N$  с нулевым керном энтропия  $H_{и}$  устремляется к бесконечности, и, тем более,  $(H_{и})_{max \rightarrow \infty}$ ? Но ниже мы откажемся от этой гипотезы.

2) При  $N \rightarrow \infty$  наиболее вероятная дисперсия  $D$ , т.е. дисперсия у большинства чисел  $N$  с ненулевым керном ( $K \geq 1$ ), устремляется, вероятно, к дисперсии  $D_2$  (верхних лидеров частых миров). Поэтому, вероятно, можно утверждать, что у чисел  $N$  с ненулевым керном наибольшая энтропия также равна  $(H_{и})_{max} \approx \ln N$  (как у верхних лидеров частых миров).

Таким образом, принимая гипотезу  $(H_{и})_{max} \approx \ln N$  для любого натурального числа  $N$  (в т.ч. с нулевым керном), мы, вероятно, получим некую нижнюю (наименьшую по величине) оценку *энтропии отрезка*  $[1; N]$ :

$$H_i \equiv \sum (H_{и})_{max} \approx \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \dots + \ln N = \ln(N!) \quad (16.6)$$

Исследования показывают, что мы вправе записать также

$$H_i \approx \ln(N!) \sim N \cdot \ln N \quad (16.7)$$



Для формулы (16.7) верна такая оценка ОП  $\approx -(\ln N)^{-1}$ . В конце Большого отрезка согласно (16.7) «набегает» энтропия как минимум  $H_i \approx 10^{63}$ .

Подчеркнем ещё раз, что  $H_i$  – это оценка энтропии отрезка  $[1; N]$  по минимуму (или чуть ниже). А чему все-таки равна полная энтропия отрезка (обозначим её для краткости символом  $\Sigma H$ )? Учитывая крайне медленный рост нормальной энтропии  $H_i$  по закону (16.5), возможно, не верна гипотеза  $(H_i)_{\max} \rightarrow \infty$  для чисел  $N$  с нулевым керном. Не исключено, что даже у *простых чисел* наибольшая энтропия  $(H_i)_{\max}$  принимает хоть и очень большое, но, тем не менее, *конечное* значение.

Фантазируя (см. гл. 22, рефлексия №2, п.6, а), можно предположить, что суммарная энтропия всех простых чисел  $(\Sigma H_p)$  определяется выражением

$$\Sigma H_p \sim K \cdot \sqrt{N} \sim \frac{N}{\ln N} \cdot \sqrt{N}, \quad (16.8)$$

где  $K$  – количество простых чисел на отрезке  $[1; N]$ . Тогда для Большого отрезка получаем следующее  $\Sigma H \sim \Sigma H_p \sim 1,6 \cdot 10^{89}$  (энтропия БО).

## 17. ДИСПЕРСИЯ ВСЕХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Определение керна.** Напомним, что *кери* числа  $N$  – это количество делителей у данного числа на *центральной интервале*  $[e^w; e^{w+1})$ , где  $w = A(\ln \sqrt{N})$ , символ “ $A$ ” обозначает функцию антье (целую часть  $\ln \sqrt{N}$ ), и  $e = 2,718\dots$  Керн – это некая «выборка» в центре числа  $N$ , т.к. в логарифмической шкале его центр определяется как  $\sqrt{N}$ . Подобно тому, как в геологии керн позволяет достоверно судить о горных породах, пересеченных буровой скважиной, так и наш *кери*  $K$  много говорит об удивительных свойствах делителей числа  $N$ . Керн входит в выражение для дисперсии  $D = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot (T/K)^2$ . Причем теперь понятие о дисперсии мы распространим на *все* натуральные числа (выше мы говорили о дисперсии только верхних лидеров).

Очевидно, что для любого натурального числа  $N$  будет соблюдаться условие:  $T \geq 1$  и  $K \geq 0$ . Для первых *семи* натуральных чисел  $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  центральный интервал – это  $[1; 2,718\dots)$ . Значит, керны этих чисел будут соответственно равны: 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 (см. табл.14.1). У чисел  $N$  с нечетным типом  $T$  (из редких миров) керн, очевидно, никогда не будет равен нулю, т.к. у них в центральном интервале всегда есть делитель, равный  $\sqrt{N}$ .

**Нулевой керн.** Некие проблемы с вычислением дисперсии  $D$  возникают, когда у числа  $N$  окажется *нулевой керн* ( $K=0$ ), т.е. у числа  $N$  нет делителей на центральном интервале. Здесь дисперсия в *прежней нашей трактовке* – не определена, ибо деление на нуль не имеет смысла. Отношение  $T/0$  в выражении для дисперсии можно понимать как бесконечность ( $\infty$ ), однако

нельзя оперировать символом  $\infty$  так, как, будто, он подчиняется обычным законам арифметики.

Впервые нулевой kern возникает у *простого числа*  $N=11$ , и далее, разумеется, у всех простых чисел (их тип  $T=2$ ) kern будет равен нулю. У чисел с четным типом  $T$  (из частей миров) нулевой kern впервые возникает у числа  $N=22$  (его тип  $T=4$ ). Обозначим символом  $k_o$  – количество чисел с нулевым kernом на отрезке  $[1; N]$ . Тогда на графике  $k_o/N = f(N)$  параметр  $k_o/N$  быстро убывает до  $22/58 = 0,379\dots$  (у числа  $N=58$ ), а затем параметр  $k_o/N$  начинает затяжной волнообразный рост (до величины  $0,646$  у числа  $N=1254120$ ). Не исключено, что при  $N \rightarrow \infty$  (на бесконечности) отношение  $k_o/N$  устремляется к некому числу (константе).

**Минимальная дисперсия.** У натуральных чисел  $N$  минимальная дисперсия ( $D_{min}$ ) будет определяться отношением  $T/K=2$  при условии, что  $T>2$  и  $K>1$ . Поэтому  $D_{min} = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot (T/K)^2 = 2 \cdot \pi^{-1} = 0,6366\dots$ . Числа  $N$ , у которых дисперсия равна  $D_{min}$ , объединяются в некие группы с порядковыми номерами  $g$ . Так, первые десять групп ( $g = 1, 2, 3, \dots, 10$ ) будут начинаться с чисел-лидеров  $N_{gl} = 6, 12, 143, 667, 3599, 22499, 171371, 1209991, 8999999, 65836987$ . Лидеры  $N_{gl}$  очень близки к особым числам  $G=1, 8, 55, 404, 2981, 22027, \dots, 583461742527395$  (18-ое число  $G$ ). Их особенность в том, что, будучи подставленными в функцию  $\exp[A(\ln\sqrt{G})]$ , где  $A$  – целая часть  $\ln\sqrt{G}$ , числа  $G$  меняют  $g$ -ое значение данной функции на очередное:  $1, 3, 7, 20, 55, 148, 403, 1097, \dots, 24154953$  (при  $g = 18$ ). Причем, вероятно, справедливы следующие соотношения:

$$N_{gl} \sim G \quad \text{и} \quad G \approx \exp(2 \cdot g - 2) . \quad (17.1)$$

То есть, в выделяемых нами группах, лидеры  $N_{gl}$ , вероятно, растут по *асимптотическому* закону  $N_{gl} \sim \exp(2 \cdot g - 2)$ . Так, относительная погрешность этой формулы убывает:  $OP \equiv (N_{gl} - G)/G < 18 \cdot \exp(-g \cdot \sqrt{2/\pi})$ , хотя абсолютная погрешность растет:  $(N_{gl} - G) < 2,1 \cdot \exp(g \cdot \sqrt{\pi/2})$ .

Количество чисел  $N$ , имеющих  $D_{min}$ , в первых семи группах следующее:  $k = 1, 4, 6, 28, 163, 1058, 5587$ . Это приводит нас к весьма грубой оценке:

$$k \approx 0,5 \cdot e^{-\pi} \cdot \exp(g \cdot \sqrt{\pi}) \approx 0,0216 \cdot \exp(1,7724 \cdot g) . \quad (17.2)$$

Группа с номером  $g$  включает числа из диапазона от  $N \approx \exp(2 \cdot g - 2)$  до  $N \approx \exp[2 \cdot (g+1) - 2]$ . Середина диапазона в логарифмической шкале будет определяться числом  $N \approx \exp(2 \cdot g - 1)$ . Числа  $N$ , имеющие  $D_{min}$  и относящиеся к  $g$ -ой группе, с ростом номера  $g$ , возможно, стремятся к логнормальному распределению: больше всего (по количеству) указанных  $N$  будет находиться в середине диапазона (в логарифмической шкале). Это начинает едва заметно угадываться уже в пятой группе (при  $g=5$ ).

В части дисперсии  $D_{min}$  Большой отрезок «заканчивается», вероятно, между  $g = 71$  ( $N_{gl} \approx 6,33 \cdot 10^{60}$ ;  $k \sim 10^{53}$ ) и  $g = 72$  ( $N_{gl} \approx 4,68 \cdot 10^{61}$ ;  $k \sim 10^{54}$ ).

**Сумма всех кернов.** Замечательным образом ведет себя сумма кернов ( $\Sigma K$ ) у всех натуральных чисел на отрезке  $[1; N]$  при  $N \rightarrow \infty$ : *сумма всех кернов асимптотически стремится к правой границе отрезка* (к числу  $N$ ). Так, относительная погрешность ОП  $\equiv (N - \Sigma K) / \Sigma K$  убывает, стремясь к нулю, хотя разность  $r \equiv N - \Sigma K$ , наоборот, растет по закону  $r \approx 0,0014 \cdot N^{0,8843}$ . В конце отрезка  $[1; 1000000]$  получаем  $\Sigma K = 999720$  ( $r = 280$ ). В конце Большого отрезка, вероятно, имеем следующее:  $r \sim 10^{51}$  и ОП  $\sim 10^{-10}$ .

Указанное поведение суммы всех кернов приводит к тому, что на отрезке  $[1; N]$  при  $N \rightarrow \infty$  *среднее арифметическое всех кернов ( $K_s$ ) стремится к единице*, поскольку  $K_s \equiv \Sigma K / N$ . При увеличении  $N$  средний kern  $K_s$  сначала быстро растет до своего максимума (около 62/60), а потом начинает совершать плавные колебания вокруг единицы. Таким образом, каждому числу  $N$  мы можем приписать значение  $K_s$  («набежавшее» на некоем счетчике, к данному числу  $N$ ). Понятие о  $K_s$  приводит к любопытным фактам.

Например, можно рассмотреть все числа  $N$ , у которых  $K_s > 1$ . Они «распадаются» на группы, в которых числа близки к следующим выражениям:

$$N \approx G \cdot (K_s - 1)^{-1}, \quad (17.3)$$

где  $G = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  – номер группы. Эти группы начинаются с чисел  $N = 56, 60, 120, 144, 420$ . Экстраполяция данных чисел указывает начало 6-й группы –  $N \approx 598$ , но на отрезке  $[1; 65500]$  не удается увидеть 6-ую группу. У чисел  $N$  внутри каждой группы параметр  $K_s$  устремляется к единице.

Можно рассмотреть наиболее редкие числа  $N$ , у которых  $K_s = 1$ . Эти числа «распадаются» на группы, в которых выполняется соотношение:

$$N \approx a \cdot X^b, \quad (17.4)$$

где для I-й группы имеем:  $a = e^{-\pi} = 0,043 \dots$ ;  $b = 1,877$ ;  $X = 36, 37, 38, \dots, 167$  (всего 132 числа  $N$ ). Для II-й группы:  $a = e^{-\pi/2}$ ;  $b = 2,700$ ;  $X = 168, 169, \dots, 189$  (всего 22 числа  $N$ ). Вообще, здесь есть что исследовать...

Однако больше всего чисел  $N$  (с ненулевым керном) удовлетворяют условию  $K_s < 1$ . У этих чисел  $N$  параметр  $K_s$  также устремляется к единице, и также можно выделить некие группы чисел (но всё не так просто).

**Максимальная дисперсия.** Рассмотрим натуральные числа  $N$  с *ненулевым керном* ( $K \geq 1$ ). У каждого из них можно вычислить дисперсию  $D$  по формуле  $D = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot (T/K)^2$ . Очевидно, что внутри данного типа  $T$  максимальная дисперсия ( $D_{max}$ ) окажется у первого числа с единичным керном (обозначим это число –  $N_{k1}$ ). На графике  $D = f(N)$  числовые значения всех дисперсий займут определенную область, которую мысленно можно ограничить сверху

некой линией (картина похожа на рис. 3.1). Эта линия должна быть построена по значениям  $D_{max}$  – наибольшей дисперсии на отрезке [1;  $N_{K1}$ ]. Иначе говоря, существуют такие натуральные числа с единичным керном ( $N_{K1}$ ), у которых дисперсия (а, по сути, тип  $T$  при  $K=1$ ) оказывается больше, чем у всех предыдущих натуральных чисел (с  $K \geq 1$ ).

Приведем первые 19-ть чисел  $N_{K1}$ : 1, 3, 8, 16, 32, 66, 196, 276, 1416, 2124, 3792, 8940, 25320, 73620, 98160, 200520, 789840, 1254120, 3778740, а также их типы  $T$ : 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 32, 36, 40, 48, 60, 64, 72. Припишем каждому числу  $N_{K1}$  порядковый номер  $J = 1, 2, 3, \dots$ , тогда мы получим следующие выражения для оценок в первом приближении:

$$N_{K1} \approx A \cdot \exp(B \cdot J), \quad T \approx \exp(a \cdot J^b), \quad (17.5)$$

где  $A=0,5510$ ;  $B=0,8205$ ;  $a=0,6687$ ;  $b=0,6329$  (у обеих формул  $R^2=0,997$ ). На рабочем отрезке [1; 3800000] для  $N_{K1}$  имеем ОП= $\pm 40\%$ , для  $T$  – ОП= $\pm 10\%$ . Для чисел  $N_{K1}$  всегда соблюдается соотношение  $T < T_{max}$ , т.е. их тип меньше, чем тип у верхних лидеров частых миров. При этом, возможно,

$$T/T_{max} \approx 0,7 \cdot N^{-0,07}, \quad (17.6)$$

где числовые коэффициенты указаны весьма условно (для ориентировки).

Из формул (17.5) нетрудно найти зависимость  $T$  от  $N_{K1}$  (через  $J$ ):

$$T \approx \exp[c \cdot (\ln(N_{K1}/A))^b], \quad (17.7)$$

где  $c = a \cdot B^{-b} = 0,7579$ ;  $A=0,5510$ ;  $b=0,6329$ . На рабочем отрезке для  $T$  имеем ОП =  $\pm 10\%$ . После подстановки найденного  $T$  в формулу для дисперсии, мы получаем выражение для грубой оценки  $D_{max}$  как функции  $N$ .

$$D_{max} \sim (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot \{\exp[c \cdot (\ln(N/A))^b]\}^2. \quad (17.8)$$

Формулы (17.5) и (17.8) позволяют сделать следующий прогноз:

- на БО находится около 172-х чисел  $N_{K1}$  (у которых дисперсия  $D_{max}$ );
- в конце БО у чисел  $N_{K1}$  тип достигает значения  $T \sim 3 \cdot 10^7$ ;
- в конце БО у чисел  $N_{K1}$  дисперсия достигает значения  $D_{max} \sim 2 \cdot 10^{14}$ .

**Спектр дисперсий.** Рассмотрим отрезок натурального ряда [1; 65520]. У каждого числа  $N$  этого (рабочего) отрезка найдем на ПК керн  $K$  и тип  $T$ . Только у 24421 числа (у 37%) керн окажется отличным от нуля. Для чисел с ненулевым керном вычислим дисперсию  $D$  по формуле (14.14). Всего наберется 95 различных дисперсий, а их значения будут следующими:  $D = 0,6366 \div 162,9747$ . Больше всего по количеству будет значений  $D^* = 10,18$ , иначе говоря, на рабочем отрезке вероятность  $P$  встречи с дисперсией  $D^*$  будет максимальной  $P = P_{max}$  (где  $P_{max} = 6542/24421 = 0,268$ ). Впервые **наиболее вероятная дисперсия  $D^*$**  (на рабочем отрезке) появляется у числа  $N=66$  (у него  $T=8$ ,  $K=1$ ). Вероятности  $P$  встречи с другими дисперсиями  $D$  на рабочем отрезке представлены на рис. 17.1. Данное представление можно

назвать *спектром дисперсий*, и, разумеется, он зависит от правой границы  $N$  рассматриваемого отрезка. Сравните рис. 17.1 и рис. 4.1.

Заметим, что в конце рабочего отрезка *средний тип* достигает значения  $T_s \approx 11,24$ , поэтому можно выдвинуть интересную ГИПОТЕЗУ: при удалении правой границы отрезка ( $N \rightarrow \infty$ ) наиболее вероятная дисперсия  $D^*$  численно устремляется к среднему типу  $T_s$  (см. гл. 3), а значит *дисперсия  $D^*$  устремляется к дисперсии  $D_2$*  (верхних лидеров частых миров, см. гл.14 и гл. 24). Следует ещё раз напомнить, что при этом мы не рассматриваем огромное количество *бесконечно больших дисперсий* ( $D \rightarrow \infty$  у чисел с нулевым керном), которые, вообще говоря, не равны между собой (по закону бесконечности  $\infty$ , очевидно, могут быть “разными”).

**Закон распределения дисперсий.** Рассмотрим отрезок натурального ряда  $[1; N_{k1}]$ , взяв в качестве правой границы, например, 18-ое число  $N_{k1} = 1254120$  (см. выше “Максимальная дисперсия”). На этом отрезке максимальная дисперсия (у  $N_{k1}$ ) будет равна  $D_{max} = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot (64/1)^2 \approx 652$ , а общее количество ненулевых дисперсий (точнее, количество чисел  $N$ , у которых керн  $K \neq 0$ ) будет равно  $(N_{k1} - k_0) = 443969$  (где  $k_0 = 810151$  – количество чисел  $N$  с нулевым керном). Установив на нашем отрезке диапазон дисперсий (от  $D_{min} = 0,6366$  до  $D_{max} = 652$ ), подвергнем этот диапазон дисперсий *нормальному разбиению* (см. гл.13):  $[e^{-\infty}; e^0]$ ;  $[e^0; e^1]$ ;  $[e^1; e^2]$ ; ...,  $[e^6; e^7]$ , где  $e = 2,718 \dots$ , а символ  $e^{-\infty}$  будем понимать как нуль (логарифма нуля не существует). В логарифмической шкале середины ( $m$ ) этих интервалов будут следующими: 0,25; 0,5; 1,5; 2,5; ...6,5 (для первого интервала  $m=0,25$  – условная середина между  $-\infty$  и 0). В восьми указанных интервалах насчитывается следующее количество конечных дисперсий: 6864, 54348, 55501, 190290, 107217, 20296, 9364, 89 (в сумме – 443969).

Теперь для отрезка  $[1; 1254120]$  мы можем найти вероятность  $P(m)$  в каждом из восьми интервалов:  $6864/443969=0,0155$ ; 0,1224; 0,1250; 0,4286; 0,2415; 0,0457; 0,0211; 0,0002 (см. точки на сплошной «жирной» линии рис. 17.2). Это можно понимать следующим образом: у произвольно выбранного числа  $N$  (с ненулевой дисперсией) из отрезка  $[1; 1254120]$ , дисперсия будет принадлежать интервалу  $m$  с вероятностью равной  $P(m)$ .

Вероятности  $P(m)$  на графике достаточно хорошо укладываются на воображаемый “колокол”, и нетрудно убедиться, что близкие к ним вероятности можно также получить по формуле *Лапласа – Гаусса* (12.9), взяв: матожидание  $\langle M \rangle = 0,8 \cdot \ln \sqrt{D_{max}} = 0,8 \cdot \ln \sqrt{652} \approx 2,59$  и дисперсию  $D_{II} = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot (1/P_{max})^2 \approx 0,866$ , где  $P_{max} = 190290/443969 = 0,4286$ . Мы ввели здесь символ

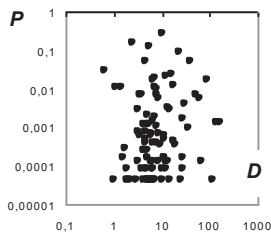


Рис.17.1. Спектр дисперсий

$D_{II}$ , понимая его как дисперсию II-го порядка (это дисперсия ненулевых дисперсий  $D$ ). Раз формула (12.9) срабатывает, значит можно говорить о **лог-нормальном распределении ненулевых дисперсий  $D$**  на отрезках  $[1; N]$ .

Аналогичным образом можно найти вероятности  $P(m)$ , скажем, ещё для 8-ти отрезков  $[1; N_{k1}]$  (тонкие линии на рис. 17.2), начиная с  $N_{k1} = 2124$  (точки на пунктирной “жирной” линии рис. 17.2). Из графиков видно, что чем больше  $N_{k1}$  – правая граница отрезков, тем стройнее “колокол”.

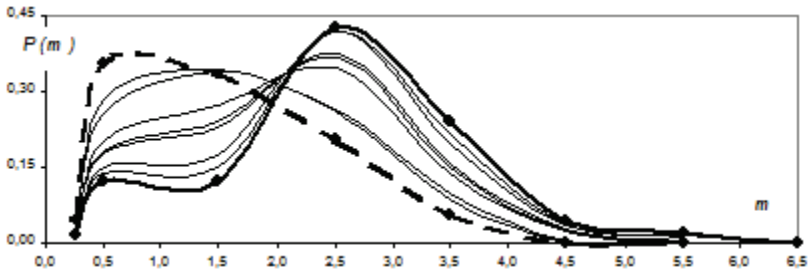


Рис. 17.2. Распределение дисперсии у натуральных чисел на отрезках  $[1; N_{k1}]$

## 18. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ ПО ОРБИТАМ

**Две орбиты делителей.** Что происходит с делителями чисел  $N$  (из мира  $T$ ), если их kern уменьшается? Исследуем этот вопрос на примере мира №72, начав с его лидера  $N = 10080$  (с kernом  $K=15$ ). Будем перебирать все последующие числа с типом  $T=72$ , фиксируя только те числа  $N$ , у которых kern *впервые* уменьшается на единицу: 10080 ( $K=15$ ); 13860 ( $K=14$ ); 12600 ( $K=13$ ); ...; 3778740 ( $K=1$ ); 20003400 ( $K=0$ ). У найденных 16-ти чисел  $N$  их kern  $K$  можно выразить следующей формулой (ОП =  $\pm 15\%$ , кроме  $K=0$ ):

$$K \approx 350,86 \cdot N^{-0,3354} - 1. \quad (18.1)$$

Отобразим на графике все делители только двух чисел  $N$  из найденных 16-ти. У числа  $N = 10080$  с наибольшим kernом  $K=15$  будет “идеальная” тильда (нижняя кривая на рис. 18.1), поскольку данное число  $N$  – это не просто лидер мира №72, но ещё и *верхний* лидер. А вот у числа  $N = 20003400$  с наименьшим kernом  $K=0$  будет ... две тильды (верхняя кривая на рис. 18.1). Т.е. по мере убывания kernа (от  $K=15$ ) тильда начинает деформироваться, и при  $K=0$  завершается своеобразное удвоение

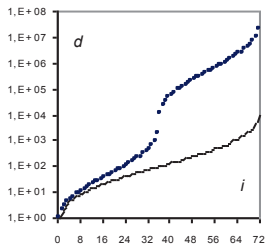


Рис. 18.1. Удвоение тильды

тильды, которому соответствует наличие *двух логнормальных распределений* делителей (каждая тильда – это свое логнормальное распределение делителей, см. гл. 13).

Таблица 18.1

Таким образом, можно сказать, что у первого числа  $N$  с нулевым керном (в данном мире  $T$ ) есть *две орбиты делителей* (середины двух тильд), где вероятность нахождения делителей наибольшая. Такое число  $N$  назовем *2-х орбитным числом*. Ясно, что 2-х орбитных чисел  $N$  бесконечно много внутри каждого частого мира (с четным типом  $T$ ).

При таком подходе к натуральным числам можно сказать, что у всякого верхнего лидера  $N$  (из любого мира  $T$ ) есть только *одна орбита*, причем, *радиус* этой орбиты равен  $\ln\sqrt{N}$  – именно на таком расстоянии от нуля (от единицы – в логарифмической шкале) вероятность нахождения делителей у верхнего лидера будет наибольшая (см. гл.13).

| Мир (тип) | Лидер мира | Первое число в мире $T$ |               |              |
|-----------|------------|-------------------------|---------------|--------------|
|           |            | с $K=0$                 | с $K_{III}=0$ | с $K_{IV}=0$ |
| $T$       | $N$        | $N_{II}$                | $N_{III}$     | $N_{IV}$     |
| 2         | 2          | 3                       | 23            | 59           |
| 4         | 6          | 22                      | 22            | 58           |
| 6         | 12         | 92                      | 242           | 1573         |
| 8         | 24         | 138                     | 268           | 2431         |
| 10        | 48         | 944                     | 4375          | 12005        |
| 12        | 60         | 708                     | 2668          | 5425         |
| 16        | 120        | 3576                    | 4002          | 41354        |
| 18        | 180        | 5364                    | 41772         | 61364        |
| 14        | 192        | 26176                   | 588245        | ?            |
| 20        | 240        | 7152                    | 57584         | 2831056      |
| 24        | 360        | 24540                   | 50268         | 82708        |
| 30        | 720        | 58896                   | 1065648       | 3397456      |
| 32        | 840        | 49080                   | 163438        | 1446798      |
| 28        | 960        | 210624                  | 6828125       | ?            |
| 36        | 1260       | 197460                  | 2000412       | 2548092      |
| 40        | 1680       | 311280                  | 2001264       | 3858128      |
| 48        | 2520       | 701640                  | 2511002       | ?            |

**Первые 2-х орбитные числа.** Так будем называть первые числа с нулевым керном ( $K=0$ ) внутри каждого мира  $T$ , обозначая их символом  $N_{k0}$ . В табл. 18.1 приведены  $N_{k0}$  (обозначены как  $N_{II}$ , почему – об этом ниже):

Для первых 15-ти верхних лидеров  $N$  можно записать (с ОП =  $\pm 50\%$ ):

$$N_{k0} \approx \exp[1,6506 \cdot (\ln N)^{1,0104}]. \quad (18.2)$$

По формуле (18.2) в конце БО получаем:  $N_{k0} \approx 1,772 \cdot 10^{35}$  (после *эви*-конвертации – 2,8 метра). Однако есть основания полагать, что реально  $N_{k0}$  в конце БО будет существенно меньше, вплоть до  $N_{k0} \sim 10^{25}$  (после *эви*-конвертации –  $10^{-10}$  метра, т.е. характерный *размер атомов*). К такой оценке приводит, например, формула  $N_{k0} \approx 0,0014 \cdot N^{2,5342}$ , полученная по четырем точкам: при  $T=60, 64, 72, 96$  принимаем соответственно  $N = 5040, 7560, 10080, 27720$  и  $N_{k0} (N_{II}) = 3305520, 9403560, 20003400, 250000000$ .

Глядя в табл. 18.1 можно заметить, что близость  $N_{k0} (N_{II})$  к лидеру  $N$  в конкретном мире  $T$  явно связана с частотой появления чисел в данном мире  $T$ : в малонаселенных мирах (например, в  $T=14$  и  $T=28$ , где  $N=192$  и  $N=960$  – не верхние лидеры) число  $N_{k0} (N_{II})$  будет появляться позже (дальше от лидера), чем в более населенных мирах.

Выше (см.  $D_{max}$ ) приводились значения  $N_{k1}$  – первых чисел с керном  $K=1$  в каждом из миров. Сравнивая их с табл. 18.1, можно убедиться, что  $N_{k1}$

ближе лидеру  $N$  соответствующего мира  $T$ , чем  $N_{ко}(N_{II})$ . И это иллюстрирует общее правило (внутри любого мира  $T$ ): чем больше kern, тем ближе к лидеру мира первое число с данным kernом.

**Очередная оценка  $T_{max}$ .**

Для первых 15-ти чисел  $N_{ко}(N_{II}$ , см. табл.18.1) запишем (с ОП = ± 14%):

$$T \approx \exp[0,6515 \cdot (\ln N_{ко})^{0,6891}]. \tag{18.3}$$

По формуле (18.3) в конце БО получаем  $T \approx 3 \cdot 10^8$ , то есть примерно таким будет  $T_{max}$  в конце БО. Из формулы (18.2) и (18.3) окончательно получаем:

$$T_{max} \approx \exp[0,9202 \cdot (\ln N)^{0,6963}], \tag{18.4}$$

что близко к оценке для  $T_{max}$  (см. формулу (132) в [9]).

**Первые 3-х и 4-х орбитные числа.**

После обнаружения 2-х орбитных чисел, логично предположить, что в бескрайнем мире натуральных чисел найдутся числа с *любым* количеством орбит. Например, ниже мы попытаемся найти первые 3-х и 4-х орбитные числа внутри каждого из миров  $T=2 \div 48$ .

Только прежде расширим понятие о керне натурального числа. Назовем **G-ым керном ( $K_G$ )** – количество делителей у данного числа  $N$  на интервале  $[e^w; e^{w+1})$ , где  $w=A[(\ln N)/G]$ , символ “A” обозначает функцию антье (целую часть числа, полученного в квадратных скобках), и  $e=2,718\dots$ . Так, для III-го керна ( $K_{III}$ ) числа  $N$  получаем  $w=A[(\ln N)/3]$ , а для IV-го керна ( $K_{IV}$ ) числа  $N$  получаем  $w=A[(\ln N)/4]$ , и т.д. При этом ясно, что раннее введенное понятие керна (для центрального интервала) является, по сути, II-ым керном ( $K_{II}$ ) числа  $N$ , т.к. здесь  $w = A[(\ln N)/2] \equiv A(\ln \sqrt{N})$ . Будем ещё называть  $K_{II}$  – **центральным керном**.

Перебирая все числа  $N$  внутри каждого четного мира  $T$ , будем фиксировать только те числа (обозначим их  $N_{III}$ ), у которых впервые  $K_{III}=0$ , т.е. III-й kern равен нулю. Именно среди этих *могут* быть первые 3-х орбитные числа (см. табл.18.1, миры  $T=16, \dots, 40$ ). Только *могут*, поскольку мы не запретили центральному керну  $K_{II}$  быть равным нулю и, увы, пока не знаем прочих ограничений или условий (которые вполне возможны в столь непростом вопросе). Так, число  $N=2511002$  ( $K_{III}=0, K_{II}=0$ ) имеет даже не 3, а все 4 тильды (или даже 6?). Вот почему первые 4-х орбитные числа ( $N_{IV}$ ) мы ищем из условий  $K_{III}=0$  и  $K_{II}=0$  (но и этих условий может быть недоста-  
точно для поиска 4-х орбит). На рис. 18.2 представлены примеры дробления тильды: 3-х орбитная у числа  $N_{III} = 2001264$  (жирные точки) и 4-х орбитная у числа  $N_{IV} = 2511002$ .

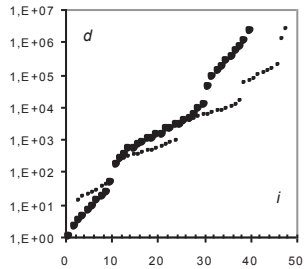


Рис. 18.2. Дробление тильды



Очевидно, в натуральном ряду существует множество **многоорбитных чисел** – чисел с 2-мя и более четко выраженными орбитами [каждая орбита – это, например, четкая тильда на графике делителей  $d=f(i)$ , или четкий «колокол» логнормального распределения]. Ещё больше чисел с нечеткими орбитами, но мы их вообще не рассматривали. Ясно, что выше мы только прикоснулись к вопросу об орбитах делителей.

**Призраки числа Фейгенбаума.** В табл. 18.1 указаны не все числа  $N_{IV}$ , поскольку их поиск на ПК требует много времени. Но даже короткая и далёкая от совершенства табл.18.1 ставит весьма любопытные вопросы:

1). Внутри каждого мира  $T$  выполняется соотношение  $N < N_{II} < N_{III} < N_{IV}$  и т.д., причем, вероятно, этот рост замедляется. Чему равно максимальное количество орбит у натуральных чисел (вернее, у их делителей) в конце Большого отрезка?

2). В первых 15-ти верхних мирах отношение  $N_{III}/N_{II}$  колеблется от 1 до 18 (среднее значение – 5,48), а в первых 15-ти верхних мирах отношение  $N_{IV}/N_{III}$  колеблется от 1,27 до 49,16 (среднее значение – 7). Значит ли это, что подобные отношения устремляются к числу Фейгенбаума  $F$ ?

( $F = 4,669201\dots$  – фундаментальная константа, подробней см. в [9])

3). Можно ввести параметр  $F_{II} \equiv (N_{III}-N_{II})/(N_{II}-N_I)$ , который в первых верхних мирах (от  $T=2$  до  $T=48$ ) изменяется от 0 до 17, причем его среднее значение вырастает до 4,4 и, возможно, устремляется к числу Фейгенбаума. Здесь, для лучшего понимания “конструкции” параметра  $F$ , мы обозначили символом  $N_I$  – верхний лидер четного мира  $T$  (у верхнего лидера, как мы знаем, максимально возможный центральный керн  $K_{II}$ ). Аналогичный параметр  $F_{III} \equiv (N_{IV}-N_{III})/(N_{III}-N_{II})$ , возможно, также устремляется к числу  $F$ .

Значит ли это, что на **больших** отрезках натурального ряда (у более старших миров) параметр  $F_{III}$  ( $F_{IV}$ ,  $F_V$ ,  $F_{VI}$ ,  $F_{VII}$ , ...) может устремляться к числу Фейгенбаума?

## 19. ПЛОТНОСТЬ ОТРЕЗКА НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

**Плотность числа.** Вспомним *основную теорему арифметики* (см. гл. 2), которая позволяет записать любое натуральное число  $N$  в *каноническом* виде:  $N = P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m$ , где  $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$  – простые числа (2, 3, 5, 7, 11, ...);  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  – порядковые номера простых чисел в мире №2;  $a, b, c, \dots, m$  – показатели степени (натуральные числа, либо нуль).

Например,  $N = 261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^2$ , и всякий другой набор простых чисел (и показателей степени) никогда не даст нам числа 261360.

Будем называть *плотностью* ( $\rho_N$ ) *числа*  $N$  сумму всех показателей степени в каноническом разложении данного числа:  $\rho_N \equiv a + b + c + \dots + m$ .

Например, у натуральных чисел  $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  будут соответственно такие плотности  $\rho_N = 1, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 2$ . Ясно, что у всех простых чисел единичная плотность –  $\rho_N = 1$ . Плотность числа  $N$  – это, иначе говоря, количество простых чисел в его “раскрытом” каноническом разложении (“раскроем”  $N = 261360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11$ , его плотность  $\rho_N = 10$ ).

*Эксплотность* ( $\mathcal{E}_P$ ) – это новое понятие в ГТНЧ берет своё начало с, казалось бы, праздного вопроса: у каких чисел  $N$  в каноническом разложении содержится выражение  $2^1$ ? Нетрудно убедиться, что это будут числа  $N = 2, 6, 10, 14, 18, \dots$ , т. е. числа вида  $N = 2^{1+2^{a+1}} \cdot k$ , где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . А у каких  $N$  будет содержаться  $2^2$ ? Это будут числа  $N = 4, 12, 20, 28, 36, \dots$ , т. е. вида  $N = 2^{2+2^{a+1}} \cdot k$ , и т. д. Поэтому для ответа на общий вопрос – у каких натуральных чисел  $N$  в каноническом разложении будет содержаться выражение  $2^a$ ? – мы должны использовать следующее выражение

$$N = 2^{a+2^{a+1}} \cdot k, \quad (19.1)$$

где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots \infty$ ;  $a = 1, 2, 3, \dots \infty$ .

Сколько чисел на отрезке  $[2; N]$  в своём каноническом разложении содержит выражение  $2^a$ ? Из формулы (19.1) мы получаем такой ответ:

$$K_a = A[(N - 2^a) \cdot 2^{-(a+1)}] + 1, \quad (19.2)$$

где  $A$  – функция антье (целая часть выражения в квадратных скобках).

Учитывая, что всегда существует такое натуральное число  $z$ , что  $N \leq P^z$ , то в формулу (19.2) вводим ограничение:  $a \leq z$ . Где  $z$  – это наибольший возможный показатель степени над простым числом  $P$  в каноническом разложении числа  $N$ . Наибольший возможный показатель будет равен

$$z = A(\ln N / \ln P). \quad (19.3)$$

Например, для  $N = 261360$  и  $P=2$  по формуле (19.3) получаем  $z=17$ . Далее, беря  $a = 1, 2, 3, \dots 17$ , по формуле (19.2) вычисляем 17-ть значений:

$K_1 = 65340$  (т. е. именно у такого количества натуральных чисел на отрезке  $[2; 261360]$  в каноническом разложении содержится выражение  $2^1$ ),

$K_2 = 32670$  (у стольких чисел содержится выражение  $2^2$ ),

$K_3 = 16335$  (у стольких чисел содержится выражение  $2^3$ ), и т. д.,

$K_{17} = 1$  (только одно число данного отрезка содержит выражение  $2^{17}$ ).

Как видим, чем больше  $a$ , тем реже встречается это значение в качестве показателя степени простого числа  $P$  в канонических разложениях.

Какое количество ( $\mathcal{E}_P$ ) чисел на отрезке  $[2; N]$  в каноническом разложении содержат выражение  $2^a$  с любой возможной степенью  $a$ ? Очевидно

$$\varepsilon_p \equiv \sum K_i \equiv K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_a. \quad (19.4)$$

Параметр  $\varepsilon_p$  – это и есть *эксплотность простого числа P* на рассматриваемом отрезке  $[2; N]$ . Приставка «экс» говорит о том, что количество  $\varepsilon_p$  имеет экспоненциальное распределение относительно показателя  $a$ :

$$K_a \approx \varepsilon_p \cdot (P-1) \cdot \exp(-a \cdot \ln P). \quad (19.5)$$

В справедливости формулы (19.5) также нетрудно убедиться. Например, для  $N = 261360$  и  $P=2$  она примет вид:  $K_a \approx 130680 \cdot (2-1) \cdot \exp(-a \cdot \ln 2)$ . Т.е. эксплотность  $P=2$  на отрезке  $[2; 261360]$  равна  $\varepsilon = 130680$ .

Однако с ростом  $N$  формула (19.5), вероятно, теряет свою точность.

**Реестр числа N** – это перечень количества соответствующих простых чисел  $P_i$  в каноническом разложении данного числа  $N$ . Например, реестр числа  $N = 261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^2$ , выглядит следующим образом:  $P_1=2$  – появилось четыре раза;  $P_2=3$  – три раза;  $P_3=5$  – один раз;  $P_5=11$  – два раза;  $P_4=7$  – ни разу. В принципе, можно узнать (записать) реестры у всех натуральных чисел на достаточно большом отрезке  $[2; N]$ , а потом составить единый (сводный) *реестр отрезка*  $[2; N]$ .

**P-плотность ( $\rho_p$ )** – к этому понятию мы приходим, как бы заглядывая в гипотетический реестр отрезка  $[2; N]$ , и отвечая на следующий вопрос: чему равно количество ( $\rho_p$ ) появлений простого числа  $P_1=2$  в *реестре отрезка*  $[2; N]$ ? Очевидно, суммарное количество появлений  $P_1=2$  равно:

$$\rho_p \equiv \sum i \cdot K_i \equiv 1 \cdot K_1 + 2 \cdot K_2 + 3 \cdot K_3 + \dots + a \cdot K_a. \quad (19.6)$$

Параметр  $\rho_p$  – это и есть **P-плотность простого числа P** на рассматриваемом отрезке  $[2; N]$ . Например, для  $N = 261360$  и  $P=2$  по формуле (19.6) получаем:  $\rho_2 \equiv 1 \cdot 65340 + 2 \cdot 32670 + 3 \cdot 16335 + \dots + 17 \cdot 1 = 261348$ . Как видим, P-плотность  $\rho_2$  близка к самому числу  $N$ , относительная погрешность составляет  $ОП \approx 4,6 \cdot 10^{-5}$ . Даже одно это подсказывает нам красивую формулу:

$$\rho_p \sim \frac{N}{P-1} - R_s. \quad (19.7)$$

Поправка  $R_s$  необходима, поскольку, взяв  $R_s = 0$  при  $P=2$ , получаем следующую оценку относительной погрешности формулы (19.7):

$$\text{abs}(ОП) \leq (2\sqrt{N})^{-1}. \quad (19.8)$$

В формуле (19.8) используем модуль (abs), т.к. асимптотическая формула  $\rho_p \sim N/(P-1)$  дает, вообще говоря, завышенное значение. На отрезке от  $N=3$  до  $N=37$  для  $P=2$  с точностью  $\pm 30\%$  верна такая оценка (при  $R_s=0$ ):

$$\text{abs}(ОП) \leq 1,4646 \cdot N^{-0,7165}. \quad (19.9)$$

При  $N \rightarrow \infty$  из формул (19.8) и (19.9) следует, что можно брать  $R_s=0$ .

**Поправка  $R_s$**  имеет вполне конкретный смысл. По формулам (19.3), (19.2) и (19.6) мы можем вычислить для каждого числа  $N$  (при конкретном

$P$ ) значение  $P$ -плотности  $\rho_p$ , а потом найти поправку  $R_N \equiv N/(P-1) - \rho_p$ . Данная поправка на графике  $R_N = f(N)$  образует некий шлейф точек, уходящий вверх, т.е. в целом поправки  $R_N$  увеличиваются с ростом  $N$ . Это увеличение хорошо видно по *средней поправке*  $R_s \equiv (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N)/N$ . Среднюю поправку  $R_s$  можно считать *поправкой отрезка* [1;  $N$ ].

Для первых 12-ти простых чисел ( $P=2, P=3, \dots, P=37$ ) с ростом  $N$  поправка  $R_s$  плавно увеличивается по следующему закону:

$$R_s \approx W \cdot (\ln N - 1), \text{ где } W \approx \exp[1,5376 \cdot \exp(-0,1045 \cdot P) - 2]. \quad (19.10)$$

Из формулы (19.10) следует, что в конце Большого отрезка  $R_s \approx 66$  при  $P=2, \dots, R_s \approx 19$  при  $P=37$ . И ещё раз подчеркнем, что формула (19.10) применима только для *первых 12-ти простых чисел*  $P$ , т.к. у последующих простых чисел ( $P=41, P=43, P=47, \dots$ ) происходит некий «срыв» поправки  $R_s$  (а точнее говоря, параметра  $W$ , см. рис. 19.1). Вероятно, при  $P > 37$  поправки  $R_s$  уже сами начинают совершать заметные колебания подобно поправке  $R_N$ . (повторяя колебания параметра  $W$ ).

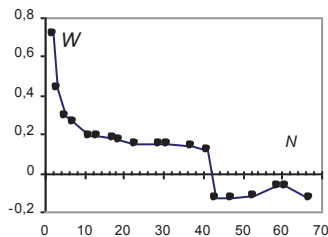


Рис.19.1. «Срыв»  $W(R_s)$

Мы немного забежали вперед при рассмотрении поправки  $R_s$ , когда говорили о случаях  $P > 2$ . Ведь до этого подразумевалось, что мы работаем с  $P=2$ , хотя в ряде формул мы и «не запрещали» брать и  $P > 2$  (это видно по «общим» обозначениям). Ниже рассмотрим все особенности случая  $P > 2$ .

**Эксплотность ( $\varepsilon_p$ ) при  $P > 2$**  находится также по формуле (19.4). Однако есть радикальное отличие в части нахождения параметра  $K_a$ .

В случае  $P=3, 5, 7, 11, \dots$  при ответе на вопрос – у каких натуральных чисел  $N$  в каноническом разложении будет содержаться выражение  $P^a$ ? – мы должны использовать уже совсем другое выражение:

$$N = (1+k) \cdot P^a, \quad (19.11)$$

где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ;  $a = 1, 2, 3, \dots, \infty$ .

Сколько чисел на отрезке [2;  $N$ ] в своём каноническом разложении содержат выражение  $P^a$ ? Из формулы (19.11) и здравой логики следует:

$$K_a = X_a - X_{a+1}, \quad \text{где } X_a = A[(N - P^a) \cdot P^{-a}] + 1, \quad (19.12)$$

где  $A$  – функция антье,  $a = 1, 2, 3, \dots, z$ , и также  $z = A(\ln N / \ln P)$ .

Нетрудно убедиться, что для  $P > 2$  верны следующие выражения:

$$X_a \approx \sum X_i \cdot (P-1) \cdot \exp(-a \cdot \ln P), \quad \text{где } \sum X_i \equiv X_1 + X_2 + \dots + X_a. \quad (19.13)$$

$$K_a \approx N \cdot (P-1) \cdot \exp[-(a+1) \cdot \ln P]. \quad (19.14)$$

С ростом  $N$  формулы (19.13) и (19.14), вероятно, теряют свою точность.

Плотность ( $\rho_p$ ) при  $P=2, 3, 5, 7, 11, \dots$  находится также по формулам (19.6) и (19.7). Поправку  $R_s$  для  $P = 2, 3, 5, \dots, 37$  – мы рассмотрели выше.

**Плотность ( $\rho$ ) отрезка** – это сумма  $P$ -плотностей  $\rho_p$  на рассматриваемом отрезке  $[2; N]$ . Причем будем различать два варианта плотности:

1). Плотность по всем простым числам, когда суммируются  $\rho_p$  для  $P = 2, 3, 5, 7, \dots, P_{max}$  (наибольшее простое число на отрезке, т.е.  $P_{max} \leq N$ ).

2). Плотность по заданное простое число, когда суммируются  $\rho_p$  для  $P = 2, 3, \dots, P$  (любое простое число, т.ч.  $P \leq N$ ). Это плотность отрезка  $[2; N]$ , которая “набежала” нарастающим итогом к данному простому числу  $P$ .

При  $N \rightarrow \infty$  можно смело брать  $R_s=0$  (см. выше), после чего формула (19.7) принимает красивый в своём лаконизме вид:  $\rho_p \sim N/(P-1)$ . Тогда плотность отрезка  $[2; N]$ , “набежавшая” к данному  $P$  будет равна:

$$\rho \sim N \cdot G, \text{ где } G \equiv \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{5-1} + \dots + \frac{1}{P-1}. \quad (19.15)$$

Очевидно, что на очень больших отрезках параметр  $G$  близок к сумме Гаусса-Мертенса ( $\sum P^{-1} \equiv 2^{-1} + 3^{-1} + 5^{-1} \dots + P^{-1} \approx \ln \ln P + 0,261497$ , см. гл. 2), т.к.

$$G/(\sum P^{-1}) \approx 1 + (\ln \ln P)^{-1}. \quad (19.16)$$

Поэтому плотность отрезка при больших  $P$  (и  $N$ ) находим по формуле

$$\rho \sim N \cdot (\ln \ln P + 0,261497) \cdot [1 + (\ln \ln P)^{-1}]. \quad (19.17)$$

Начиная с  $N=3$  реальная плотность  $\rho$  на отрезке  $[2; N]$  будет всегда меньше, чем по формуле (19.17). Например, при  $N=3$  имеем ОП=–83,9%; при  $N=37$  имеем ОП=–25,3%;  $N=1000000$  имеем ОП=–9,0%.

Модуль относительной погрешности формулы (19.17) примерно равен:

$$\text{abs(ОП)} \approx 0,8509 \cdot [\ln(N)]^{-0,9021}. \quad (19.18)$$

При  $N > 10000$  модуль реальной ОП всегда больше, чем дает (19.18).

Если при  $N=2$  имеем  $\rho/N = 1/2$ ; при  $N=3$  имеем  $\rho/N = 2/3$ ; при  $N=4$  имеем  $\rho/N = 4/4=1$ ; то в конце Большого отрезка ( $N \sim 10^{61}$ , см. гл.1) по формуле (19.17) получаем  $\rho/N \approx 6,26$ . Т.е. отношение  $\rho/N$  растет очень медленно.

На БО “вклад” первых 12-ти простых чисел ( $P = 2, 3, 5, \dots, 37$ ) соответственно равен ( $\rho_p$  в % от  $\rho$ ): 15,98; 7,99; 3,99; 2,66; 1,60; 1,33; 1,00; 0,89; 0,73; 0,57; 0,53; 0,44 (в сумме – 37,7% от общей плотности). Как видим, мир чисел в канонических разложениях отдает явное предпочтение самым малым простым числам  $P = 2, 3, 5, 7$ .

## 20. СКРЫТАЯ ПЛОТНОСТЬ ЧИСЛА, ОТРЕЗКА

**Скрытая плотность числа.** В каноническом разложении натурального числа единицу писать не принято, ибо умножение на единицу ничего не меняет. Например, у числа  $N = 261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^2$  легко увидеть как минимум одну «скрытую» единицу (поскольку  $7^0 \equiv 1$ ):  $N = 1 \cdot 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2$ .

Рассмотрим каноническое разложение числа  $N=21$  с указанием всех «скрытых» единиц:  $N = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3^1 \cdot 7^1$ . Причем мы отбрасываем все прочие простые числа  $P$ , превосходящие наше  $N$  (23, 29, 31, ...). Очевидно, подобным образом можно найти все «скрытые» единицы у любого натурального числа, начиная с  $N=3$ . Будем называть количество всех «скрытых» единиц у числа  $N$  – **скрытой плотностью** ( $\delta_N$ ) числа  $N$ . Скрытая плотность числа  $N$  – это, иначе говоря, количество простых чисел, которые не появились в каноническом разложении (у них показатель степени равен нулю). Например, у чисел  $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  будут соответственно такие скрытые плотности  $\delta_N = 1, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 2$ . У числа  $N=21$ , как мы убедились выше, скрытая плотность равна  $\delta_N = 6$ .

**Скрытая P-плотность** ( $\delta_P$ ) – к этому понятию мы приходим, рассматривая отрезок  $[3; N]$ , и отвечая на следующий вопрос: чему равно количество ( $\delta_P$ ) скрытых единиц, «порожденных» простым числом  $P$ ? Можно доказать (и нетрудно проверить), что искомое количество скрытых единиц определяется следующим выражением:

$$\delta_P \equiv (K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_{z-1}) + X, \quad (20.1)$$

где  $z = A(\ln N / \ln P)$ ; слагаемые  $K_a$  ( $a=1, 2, 3, \dots, z$ ) находятся по формуле

$$K_a = (1 - P^{-1}) \cdot (P - 1) \cdot P^a, \quad (20.2)$$

а параметр  $X$  («хвост», он может давать погрешность  $\pm 1$ ) по формуле

$$X \approx A[(N - P^z) \cdot (P^{z+1} - P^z)^{-1} \cdot K_z].$$

$A$  – это функция антье (целая часть выражения в квадратных скобках).

Смысл параметра  $K_a$  – это количество скрытых единиц, которые «порождены» сомножителем  $P^a$  в канонических разложениях всех натуральных чисел на рассматриваемом отрезке  $[3; N]$ . При очень больших  $N$  и  $P$  (например, в конце БО) из формулы (20.2) следует, что  $K_a \approx P^{a+1}$ .

Параметр  $\delta_P$  – это и есть **скрытая P-плотность простого числа P** на рассматриваемом отрезке  $[3; N]$ .

**Скрытая плотность** ( $\delta$ ) **отрезка** – это сумма скрытых P-плотностей  $\rho_P$  на рассматриваемом отрезке  $[3; N]$ . Будем различать здесь два варианта:

1). Скрытая плотность *по всем* простым числам, когда суммируются  $\delta_P$  для  $P = 2, 3, \dots, P_{max}$  (наибольшее простое число на отрезке, т.е.  $P_{max} \leq N$ ). Так можно исследовать скрытую плотность вплоть до  $N \sim 10^{15}$ .

2). Скрытая плотность, как сумма  $\delta_p$  для  $P = 2, 3, 5, 7, \dots, P$  (любое простое число, т.ч.  $P \leq N$ ). Это скрытая плотность отрезка  $[3; N]$ , которая “набежала” нарастающим итогом к данному простому числу  $P$ . Только так мы можем изучать скрытую плотность, скажем, Большого отрезка, т.к. ни один компьютер не доберется до числа  $P \sim 10^{61}$ .

Будем брать отрезки  $[3; N]$  с правой границей  $N = 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^9$ , и для каждого из них найдем скрытую плотность  $\delta$  по всем простым числам отрезка (т.е. работаем по 1-му варианту). Тогда получим степенной закон

$$\delta \approx m \cdot N^M, \quad (20.3)$$

где, вероятно,  $m = \exp(-\pi/2) = 0,2079$ , и  $M = \exp(\pi/3) = 2,8497$ . Относительная погрешность формулы (20.4) следующая:  $\text{abs(ОП)} \approx 0,8969 \cdot N^{-0,1414}$ . В конце Большого отрезка получаем  $\delta \approx 1,4 \cdot 10^{173}$ .

Далее будем исследовать скрытую плотность по 2-му варианту.

Формулы (20.1) ÷ (20.3) говорят о том, что для конкретного отрезка (т.е. для данного  $N$ ) скрытая плотность (дельта-плотность) – это некая функция простого числа:  $\delta = f(P)$ . Ниже дано её приближительное описание.

В самом начале натурального ряда (скажем, при  $N \sim 10 \div 100$ ) скрытая плотность  $\delta$  растёт по экспоненте (с относительной погрешностью  $\pm 20\%$ ):

$$\delta \approx \exp(\chi \cdot P^\lambda), \quad (20.4)$$

где  $\chi \approx 1,0573 \cdot \ln N - 1,4230$ ;  $\lambda \approx -0,2145 \cdot \ln N + 1,2121$  (что весьма условно).

После  $N \sim 100$  закон роста скрытой плотности  $\delta$  начинает плавно изменять свой характер (внешний вид) и, начиная, скажем, с  $N \sim 1000$  закон  $\delta = f(P)$  уже становится степенным:

$$\delta \approx \chi \cdot P^\lambda. \quad (20.5)$$

Причем начинают выделяться два разных участка: I-й участок, где простое число принимает значения  $P \leq \sqrt{N}$ , и II-й участок, где простое число принимает значения  $P > \sqrt{N}$ . На графике  $\delta = f(P)$  каждого отрезка (со своей правой границей  $N$ ) образуется перегиб, которой с ростом  $N$  становится всё более чётким. На рис. 20.1 показана функция  $\delta = f(P)$  для пяти отрезков с правой границей  $N = 10^2$  (жирная нижняя линия);  $10^3$ ;  $10^4$ ;  $10^5$ ;  $10^6$  (самая верхняя ломаная линия).

На I-ом участке для параметра  $\chi$  (хи) надёжно установлена формула

$$\chi \sim \chi^* \equiv \frac{1}{2} N, \quad (20.6)$$

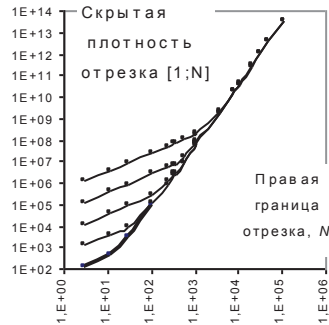


Рис.20.1. Функция  $\delta = f(P)$

у которой, вероятно,  $\text{abs}(\text{ОП}) \leq (\ln N)^{-1}$ . В конце БО имеем ОП  $\approx -0,7\%$ .

Параметр  $\lambda$  (лямбда) на I-ом участке быстро устремляется к некому числу  $\lambda^*$ : при  $N=10^2$  имеем  $\lambda^* \approx 1,0614$ ; при  $N=10^3$  имеем  $\lambda^* \approx 0,8697$ ; при  $N=10^{61}$  имеем  $\lambda^* \approx 0,8588$  (по участку  $P = 3, 5, 7, \dots, 104729$ ). Быть может, при  $N \rightarrow \infty$  имеем  $\lambda^* \rightarrow (M-2) = \exp(\pi/3) - 2 = 0,8497\dots?$

На II-ом участке для параметров  $\chi$  и  $\lambda$ , вероятно, верно следующее:

$$\chi = \pi - \lambda^* - 2, \text{ (или } \chi = m = \exp(-\pi/2) = 0,2079 \text{ ?)} \quad (20.7)$$

$$\lambda = \lambda^* + 2 \text{ (или просто } \lambda = M \text{ ?)}. \quad (20.8)$$

Следует заметить, что при  $N$  больших, чем  $N \sim 10^{10}$  не исключено, что на участке I и (или) II скрытая плотность  $\delta$  растет как-то иначе, скажем, быстрее, чем по степенному закону (20.5).

**Общая плотность отрезка ( $\psi$ )** – это сумма обычной плотности ( $\rho$ ) и скрытой плотности ( $\delta$ ) на рассматриваемом отрезке  $[3; N]$ , т.е.  $\psi \equiv \rho + \delta$ . Поскольку  $\rho$  и  $\delta$  – это две различные функции простого числа  $P$  (при выбранном  $N$ ), то  $\psi$  (пси) – также некая функция от  $P$ .

Найдем, например, общую плотность  $\psi$  Большого отрезка  $[1; 10^{61}]$ , которая «набежала» нарастающим итогом к значению  $P = \sqrt{N} = 3,16 \cdot 10^{30}$ , т.е. к *середине* Большого отрезка в логарифмической шкале (поскольку,  $\ln \sqrt{N} \equiv \frac{1}{2} \cdot \ln N$ ). По формуле (19.17) вычисляем обычную плотность:  $\rho \approx 1,76 \cdot 10^{31}$ . Скрытую плотность  $\delta$  находим по формуле (20.5), взяв:  $\chi = \chi^* = \frac{1}{2} N = 5 \cdot 10^{60}$  и  $\lambda = \lambda^* = 0,8588$ , в итоге получим  $\delta \approx 7,8 \cdot 10^{86}$ . Искомая общая плотность равна  $\psi \approx \delta \approx 7,8 \cdot 10^{86}$ .

Теперь найдем общую плотность  $\psi$  Большого отрезка  $[1; 10^{61}]$  по всем простым числам данного отрезка, т.е. при  $P = 2, 3, 5, 7, \dots, 10^{61}$ . По формуле (19.17) вычисляем обычную плотность:  $\rho \approx 6,26 \cdot 10^{61}$ . Скрытую плотность  $\delta$  находим по формуле (20.5), взяв:  $\chi = 0,2828$  и  $\lambda = 2,8588$ , в итоге получим  $\delta \approx 6,89 \cdot 10^{173}$ . Искомая общая плотность равна  $\psi \approx \delta \approx 6,89 \cdot 10^{173}$ .

**Доля ( $Q$ ) обычной плотности** – так будем называть отношение обычной плотности к общей плотности:  $Q \equiv \rho / (\rho + \delta) = \rho / \psi$ . Чуть выше были найдены  $\rho$  и  $\delta$  по всем  $P$  на БО, что позволяет оценить (разумеется, только в первом приближении) долю обычной плотности по всем простым числам на Большом отрезке:  $Q \approx 6,26 \cdot 10^{61} \cdot (6,89 \cdot 10^{173})^{-1} \approx 9,08 \cdot 10^{-113}$ .

Будем брать отрезки  $[3; N]$  с правой границей  $N = 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^9$ , и для каждого из них найдем обычную плотность  $\rho$  и скрытую плотность  $\delta$  по всем простым числам отрезка. Тогда получим степенной закон для  $Q$ :

$$Q \approx 22,5 \cdot N^{-1,8559}, \quad (20.9)$$

В конце БО по формуле (20.9) получаем аналогичную долю  $Q \approx 1,4 \cdot 10^{-112}$ .



В части определения скрытой плотности  $\delta$  все наши формулы настолько грубы, что нельзя исключать и такой гипотезы: на Большом отрезке общая плотность возрастает до  $\psi \approx 6,18 \cdot 10^{183}$ , а доля обычной плотности  $\delta$  уменьшается до  $Q \approx 10^{-122}$ . Только одно не вызывает никаких сомнений: на БО доля  $Q$  обычной плотности  $\delta$  по всем простым числам  $P$  – это величина менее чем мизерная (наверняка,  $Q \leq 10^{-112}$ ).

А какова доля обычной плотности по первым простым числам на Большом отрезке? В табл. 20.1. представлены  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $Q$  по первым 30-ти простым числам  $P = 2, 3, 5, \dots, 113$ . Как мы видим, здесь доля  $Q$  обычной плотности  $\rho$  уже вполне осязаема. У первых 12-ти простых чисел ( $P=2, 3, 5, 7, \dots, 37$ ) она убывает примерно (с ОП =  $\pm 6\%$ ) по степенному закону:

$$Q \approx 0,9712 \cdot P^{-0,4524}. \quad (20.10)$$

Согласно табл. 20.1 на Большом отрезке доля  $Q$  обычной плотности  $\rho$ , например, при рассмотрении первых 12-ти простых чисел  $P$  убывает от  $Q = 66,7\%$  до  $Q = 18,5\%$ , а при рассмотрении первых 25-ти простых чисел убывает до  $Q = 10\%$ .

Из табл. 20.1. следует вывод, что чем меньшие простые числа  $P$  мы берем в рассмотрение, тем выше оказывается доля  $Q$  обычной плотности  $\delta$ . При этом напрашивается экстраполяция: при  $P=1$  доля  $Q$  обычной плотности  $\rho$  должна быть больше, чем  $66,7\%$ . Возможно, следует считать, что у  $N=1$  (у первого числа натурального ряда) скрытая плотность  $\delta$  равна нулю, а обычная плотность  $\rho$  может быть любой. Ведь, и  $1^0$ , и  $1^1$ , и  $1^2$ , ..., и даже  $1^\infty$  – это всё единица? Здесь можно вспомнить странную ситуацию с богатством нуля  $\sigma(0)$ , выход из которой нашёл Л. Эйлер: оказывается, что богатство нуля  $\sigma(0)$  имеет бесконечно много разных значений! (см. гл. 6 и 8). Быть может, и в нашем случае  $1^n$  – это бесконечно много разных значений от 0 до  $\infty$ ? И значит ли это (уже далеко не первый раз в ГТНЧ, см. [8, 9, 12]), что мы имеем дело с “единством противоположностей” (1 и  $\infty$ ). В любом случае ясно, что  $N=1$  – исключительное число, воплощающее в себе одну из самых фундаментальных тайн.

Говоря о скрытой плотности, скажем, числа  $N = 261360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^2$ , мы как бы подразумеваем существование некоего *скрытого числа*  $N^*$ , с каноническим разложением  $N^* = 2^0 \cdot 5^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0$ . Таким образом, любой отрезок натурального ряда (в т.ч. и Большой отрезок) в этом смысле содержит в два раза больше чисел. Очевидно, каждое скрытое число  $N^*$  – это одна из бесконечных ипостасей (сущностей) «многоликой» единицы ( $N=1$ ).

Таблица 20.1. Обычная ( $\rho$ ) и скрытая ( $\delta$ ) плотности на Большом отрезке

| Простое<br>число и<br>его номер | Нарастающим итогом                 |  | Доля<br>обычной<br>плотн.<br>$Q$ | Простое<br>число и<br>его номер | Нарастающим итогом                 |  | Доля<br>обычной<br>плотн.<br>$Q$ |          |       |
|---------------------------------|------------------------------------|--|----------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|--|----------------------------------|----------|-------|
|                                 | Обычная<br>плотность<br>( $\rho$ ) | Скрытая<br>плотность<br>( $\delta$ )<br>(дельта) |                                  |                                 | Обычная<br>плотность<br>( $\rho$ ) | Скрытая<br>плотность<br>( $\delta$ )<br>(дельта) |                                  |          |       |
| 1                               | <b>2</b>                           | 1,00E+61   | 5,00E+60                         | 66,7%                           | 16                                 | <b>53</b>  | 2,45E+61                         | 1,43E+62 | 14,6% |
| 2                               | <b>3</b>                           | 1,50E+61   | 1,17E+61                         | 56,3%                           | 17                                 | <b>59</b>  | 2,47E+61                         | 1,53E+62 | 13,9% |
| 3                               | <b>5</b>                           | 1,75E+61   | 1,97E+61                         | 47,1%                           | 18                                 | <b>61</b>  | 2,48E+61                         | 1,63E+62 | 13,2% |
| 4                               | <b>7</b>                           | 1,92E+61   | 2,82E+61                         | 40,4%                           | 19                                 | <b>67</b>  | 2,50E+61                         | 1,73E+62 | 12,6% |
| 5                               | <b>11</b>                          | 2,02E+61   | 3,73E+61                         | 35,1%                           | 20                                 | <b>71</b>  | 2,51E+61                         | 1,83E+62 | 12,1% |
| 6                               | <b>13</b>                          | 2,10E+61   | 4,66E+61                         | 31,1%                           | 21                                 | <b>73</b>  | 2,53E+61                         | 1,92E+62 | 11,6% |
| 7                               | <b>17</b>                          | 2,16E+61   | 5,60E+61                         | 27,9%                           | 22                                 | <b>79</b>  | 2,54E+61                         | 2,02E+62 | 11,2% |
| 8                               | <b>19</b>                          | 2,22E+61   | 6,54E+61                         | 25,3%                           | 23                                 | <b>83</b>  | 2,55E+61                         | 2,12E+62 | 10,7% |
| 9                               | <b>23</b>                          | 2,26E+61   | 7,50E+61                         | 23,2%                           | 24                                 | <b>89</b>  | 2,56E+61                         | 2,22E+62 | 10,3% |
| 10                              | <b>29</b>                          | 2,30E+61   | 8,47E+61                         | 21,4%                           | 25                                 | <b>97</b>  | 2,57E+61                         | 2,32E+62 | 10,0% |
| 11                              | <b>31</b>                          | 2,33E+61   | 9,43E+61                         | 19,8%                           | 26                                 | <b>101</b>                                       | 2,58E+61                         | 2,42E+62 | 9,7%  |
| 12                              | <b>37</b>                          | 2,36E+61   | 1,04E+62                         | 18,5%                           | 27                                 | <b>103</b>                                       | 2,59E+61                         | 2,52E+62 | 9,3%  |
| 13                              | <b>41</b>                          | 2,39E+61   | 1,14E+62                         | 17,3%                           | 28                                 | <b>107</b>                                       | 2,60E+61                         | 2,62E+62 | 9,0%  |
| 14                              | <b>43</b>                          | 2,41E+61   | 1,24E+62                         | 16,3%                           | 29                                 | <b>109</b>                                       | 2,61E+61                         | 2,72E+62 | 8,8%  |
| 15                              | <b>47</b>                          | 2,43E+61   | 1,33E+62                         | 15,4%                           | 30                                 | <b>113</b>                                       | 2,62E+61                         | 2,82E+62 | 8,5%  |

## 21. СКРЫТАЯ МАТЕРИЯ ВО ВСЕЛЕННОЙ.

В этой и последующих главах приводятся самые любопытные факты из *космологии* – общей науке о Вселенной. В основном цифры и факты взяты со слов академика Валерия Рубакова («Независимая газета» №17-2004) и из новой научно-популярной книги профессора МГУ Михаила Сажина [26].

Итак, приведем ряд общепризнанных фактов на тему темной материи.

1). Ученые давно заметили, что распределение гравитационного поля почему-то не соответствует распределению звезд, и галактики (их скопления) попросту распались бы, если бы они содержали только вещество, наблюдаемое всеми известными научными методами. Поэтому, дабы не подвергать сомнению основные законы физики, была введена концепция так называемой *скрытой (темной, невидимой) материи*. Впервые о ней заговорил в 30-х годах XX в. швейцарский астроном Фриц Цвикки (1898–1974). В настоящее время скрытая материя – это головная боль для всех ученых.

2). В конце 1998 г. астрономы обнаружили *ускоренное* расширение нашей Вселенной. Параметром этого ускорения является  $\Lambda$ -член (*лямбда-член, космологическая постоянная*), который оказался равным  $\sim 10^{-56}$  см<sup>-2</sup>. Это было самое интересное и неожиданное открытие науки в конце XX

века! Космологическая постоянная  $\Lambda \sim 10^{-56} \text{ см}^{-2}$  соответствует энергии вакуума, которая не изменяется при расширении Вселенной. Космологи недавно

предложили варианты – формы скрытой энергии, названной *квинтэссенцией*<sup>1</sup> с отрицательной энергией, которая может постепенно ослабевать.

3). В ранней Вселенной  $\Lambda$ -член обеспечивал инфляцию. Величина  $\Lambda$ -члена тогда была значительно больше, чем сейчас, причем  $\Lambda$ -член не являлся новой фундаментальной константой (см. гл. 24), а генерировался в результате некоторых процессов, происходящих в ранней Вселенной.

4). Современный  $\Lambda$ -член (в нашу эпоху) также может иметь «динамическое» происхождение, он может быть результатом неких физических процессов, которые ученые пока не понимают.

5). Возможно существование *однородного фона* скрытой материи (70 ÷ 80% всей скрытой материи). Не исключено, что именно пустое пространство (вакуум) обладает такими свойствами. Если бы вакуум имел небольшую, но конечную плотность энергии, то как раз она бы подходила для того, чтобы описать динамику Вселенной. Энергия вакуума из-за того, что у него отрицательное давление, должна ускорять разлет Вселенной. И наблюдательно видно, что расширение Вселенной ускоряется, т.е., вероятно, 2/3 жизни Вселенной в ней доминирует вакуумоподобная (скрытая) энергия.

Вероятно, 20 ÷ 30% скрытой материи может иметь *неоднородные* (кластеризованные) *формы*: чёрные дыры массой около 100 солнечных; «комки» вещества массой порядка  $10^{-8}$  масс Солнца; сферические гало (как в нашей Галактике); тёмные карлики («юпитеры», которые не светит); колоссальные «облака» из нейтралитно (элементарные слабозаимодействующие частицы); невидимый барионный компонент (обычная атомная масса) во Вселенной; газ из частиц типа массивных нейтрино; аксионы; не открытые пока элементарные частицы. В настоящее время различают два варианта: горячая скрытая масса (HDM) и холодная скрытая масса (CDM).

6). На долю *обычной материи* приходится менее 10% общей плотности во Вселенной (обычная материя по своим свойствам близка к пыли). На долю *скрытой материи* приходится свыше 90% общей плотности во Вселенной. На долю светящейся материи (звезд, газа, пыли) приходится менее 1% общей массы Вселенной. Проявления скрытой материи наблюдали впервые в нашей Галактике. С темной материей тесно связаны исследования гравитационных линз и крупномасштабной структуры Вселенной.

---

<sup>1</sup> *Квинтэссенция* – пятая сущность (эфир) в античной философии (наряду с водой, землей, воздухом, огнем); тончайшая субстанция. Основа, самая суть чего-либо, самое главное.

7). Возраст Вселенной оказывается больше почти в два раза, если соглашаться с тем, что 90% общей плотности Вселенной приходится на скрытую материю, а 10% на обычное вещество.

8). При расширении Вселенной (гл. 25) плотность скрытой материи остается *почти постоянной*, а не убывает как плотность обычного вещества.

9). Если в однородном мире (в моделях Фридмана) параметр Хаббла ( $H$ ) уменьшался со временем, то при наличии  $\Lambda$ -члена имеем  $H \sim \sqrt{\Lambda}$ .

10). *Проблема динамической генерации  $\Lambda$ -члена*. В физике есть понятие «физический вакуум» – это море виртуальных (эфемерных) частиц, которые проявляют себя странным образом: они как бы и не взаимодействуют с окружающим внешним миром, переопределяя только массы элементарных частиц, заряды и моменты (кстати, этого достаточно, чтобы константы классической физики менялись, см. гл. 24).

Но наиболее всего странно следующее свойство физического вакуума. В каждой точке пространства-времени содержится бесконечно много виртуальных частиц, и все они весят бесконечно много. Проблема бесконечной массы физического вакуума является проблемой номер один в теоретической физике. Её называют проблемой динамической генерации  $\Lambda$ -члена.

**Рефлексия №1** – «отражения» (см. гл. 1) структурой натурального ряда вышеизложенных фактов реального мира (соответственно по пунктам):

1). «Отражением» *обычной материи* будем считать параметр  $\rho$  – плотность отрезка, см. гл. 19. «Отражением» *скрытой материи* будем считать параметр  $\delta$  – скрытая плотность отрезка, см. гл. 20. При этом получаем:

2). «Отражение»  $\Lambda$ -члена. считая, что  $1\text{м} \sim 10^{35} \text{эви}$  (см. гл.1), переведем космологический  $\Lambda$ -член в элементарные временные интервалы:  $\Lambda \sim 10^{-56} \text{см}^{-2} \sim 10^{-52} \text{м}^{-2} \sim 10^{-122} \text{эви}^{-2}$ . Это число можно встретить в рамках ГТНЧ:

- а). В конце Большого отрезка доля обычной плотности  $Q < 10^{-112}$ , причем вполне может быть, что  $Q \sim 10^{-122}$  (см. в конце гл. 20);
- б).  $M^* \approx 0,82 \cdot 10^{122}$  – сумма всех делителей на БО (см. гл. 5);
- с).  $K \approx 0,5 \cdot 10^{122}$  – количество всех камней в Пирамиде при  $N \sim 10^{61}$  (гл. 5);
- д).  $m \approx 0,25 \cdot 10^{122}$  – масса всех камней в Стволе при  $N \sim 10^{61}$  (см. гл.5).

Трудно переоценить значение делителей, поэтому черные камни (их количество равно  $M^*$ ) вполне претендуют на звание *квинтэссенции* Пирамиды. Кроме того,  $M^*$  – это также *богатство* Пирамиды (см. гл. 9).

Смысл параметра  $K^{-1}$  – это доля одного камня в Пирамиде (см. рис. 5.1). И мы также вправе сказать, что именно все камни (белые, серые, черные) – это *квинтэссенция* Пирамиды. Очевидно, можно “обыграть” параметр  $m^{-1}$ , и прочие фантомы  $10^{-122}$ , которые, наверняка, ещё есть в мире чисел.

Так какой же параметр в ГТНЧ «отражает»  $\Lambda$ -член? Будем считать, что именно доля обычной плотности  $Q$  (см. гл. 20) «отражает»  $\Lambda$ -член.

3). В начале натурального ряда (при  $N \sim 10 \div 100$ ) скрытая плотность  $\delta$  растет по экспоненте (20.4), а затем  $\delta$  плавно меняет закон своего роста на степенной (20.5). Экспоненциальный рост (как, например, и у масштабного фактора  $R$ ) это характерная особенность стадии инфляции (см. гл. 25).

В начале натурального ряда (т.е. «в ранней Вселенной») доля  $Q$  ( $\Lambda$ -член) обычной плотности была значительно больше, см. формулу (20.9).

Возможно, что  $\Lambda \sim N^{-2}$ , где  $N$  – правая граница отрезка (см. ниже п. 9).

4). Параметр  $Q$  ( $\Lambda$ -член), безусловно, не является константой, и с полным правом можно сказать, что он имеет «динамическое» происхождение, что он «генерируется» самой Пирамидой (её архитектурой, см. гл. 5).

5). Также с полным правом можно говорить о существовании *однородного фона* скрытой плотности  $\delta$  отрезка (см. начало гл. 20). Вакуум в ГТНЧ – это «скрытые» единицы в канонических разложениях натуральных чисел. Именно он обладает такими свойствами, что вносит свой вклад в полную плотность материи  $\psi$  (см. в конце гл. 20).

6). На Большом отрезке доля  $Q$  обычной плотности  $\delta$  при рассмотрении первых 25-ти простых чисел ( $P = 2, 3, 5, \dots, 97$ ) убывает до  $Q = 10\%$  (см. табл. 20.1). В природе нельзя обнаружить химические элементы с атомным номером свыше 94, т.е. за плутонием (у америция и т.д.) ядра атомов уже неустойчивы. Поэтому такие элементы из таблицы Д. И. Менделеева можно получить только в ядерных реакциях (можно только синтезировать).

7). Большой отрезок (возраст нашей Вселенной) оказывается больше почти в два раза, если соглашаться с тем, что существуют *скрытые числа*  $N^*$  (см. в конце гл. 20). Т.к. почти у каждого обычного числа  $N$  есть  $N^*$ .

8). При расширении Вселенной её объем ( $V$ ) увеличивается пропорционально кубу характерного размера ( $N$ ) Вселенной, т.е.  $V \sim N^3$ . Если параметр  $\rho$  «отражает» *обычную материю*, то плотность параметра  $\rho$  («плотность плотности») – это, увы, накладка принятой нами терминологии) с ростом  $N$  будет убывать (как и в реальном мире), поскольку  $\rho/V \sim \rho/N^3 \sim N^{-2} \cdot \ln \ln N$ , см. формулу (19.17). Если параметр  $\delta$  «отражает» *скрытую материю*, то плотность параметра  $\delta$  (опять «плотность плотности») с ростом  $N$  будет оставаться почти постоянной (как и в реальном мире), поскольку  $\delta/V \sim \delta/N^3 \sim N^{-0,1503}$ , см. формулы (20.3)  $\div$  (20.8).

9). «Отражения» столь значимого теперь числа  $10^{-122}$  (см. выше п. 2) можно добавить ещё одним: параметр  $N^{-2}$  (где  $N$  – правая граница отрезка) – суть «отражение»  $\Lambda$ -члена [поскольку (!) в конце Большого отрезка

имеем  $(10^{61})^{-2} = 10^{-122}$ ]. Тогда из данного «отражения» следует, что  $N^{-1} \sim \sqrt{\Lambda}$

С другой стороны, параметр  $H_n$  в ГТНЧ (см. в конце гл.2) – может быть неким «отражением» космологического параметра Хаббла:  $H \sim H_n$  (см. гл. 25), причем  $H_n \sim N^{-1}$  [т.е. мы считаем, что  $P_n = N$ , см. формула (2.23)].

Таким образом, мы приходим к выражению из космологии:  $H \sim \sqrt{\Lambda}$ .

10). Два “отражения” *Проблемы динамической генерации  $\Lambda$ -члена*:

а). «Отражение» Проблемы можно усмотреть в «наиболее необычайном законе чисел», открытом Эйлером (см. гл.8). Этот закон гласит, что *богатство* любого числа  $N$  – это некая комбинация богатств предшествующих чисел. Уникальная (неповторимая) комбинация, как единый «шнурок» связывает число  $N$  со *всеми* предшествующими числами. Именно данный закон приводит к тому, что в богатстве Пирамиды высотой  $N$  (т.е. в сумме богатств всех  $N$  чисел) возникает *поправка Эйлера* – загадочная «связующая нить» между *бесконечно большим* (рядом натуральных чисел) и *бесконечно малым* (суммой бесконечно малых величин). Образно говоря, каждое натуральное число (каждое мгновение в *нашей* Вселенной) через поправку Эйлера (через тончайшую «нить», «горловину») сообщается с миром бесконечно малых величин (с недоступной нам другой вселенной). См. также рефлексии в гл. 23.

б). «Отражение» Проблемы можно усмотреть в «*числовом вакууме*» – море виртуальных (эфемерных) «скрытых» единиц (см. в конце гл. 20) в канонических разложениях натуральных чисел. Можно с полным правом сказать, что «скрытые» единицы проявляют себя странным образом: они как бы и не взаимодействуют с окружающим миром чисел, «переопределяя» только значения натуральных чисел, их делители и свойства чисел.

Но наиболее всего странно следующее свойство числового вакуума. У каждого натурального числа  $N$  содержится как бы бесконечно много «скрытых» единиц (ведь сколько раз не умножай число  $N$  на единицу – ничего не меняется). В этом проявляется загадочная «многоликость» и «неисчерпаемость» единицы (числа  $N=1$ ). Познание тайны числа  $N=1$  является проблемой номер один в ГТНЧ. В связи с этим можно вспомнить о *белой* Пирамиде (гл. 30, рефлексия № 12).

## 22. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ – «БАЗИС» МАТЕРИИ

Сразу оговоримся, что мы будем различать элементарные частицы и фундаментальные частицы (только в целях доходчивости изложения).

1). *Элементарные частицы* – это предельная форма неживой материи до размеров  $10^{-18}$  м ( $10^{17}$  эви, а что ниже *глубины проникновения* в микромир

– пока неизвестно, см. гл. 1). Это группа частиц, подчиненных условию, что они не являются атомами или атомными ядрами (кроме протона). Массы элементарных частиц лежат в интервале от нуля (у фотона) до 175000 масс электрона; у большинства частиц масса порядка  $\sim 10^{-24}$  г (масса протона), а размеры  $\sim 10^{-15}$  м и меньше. Из элементарных частиц строится всё обычное вещество во Вселенной и, возможно, часть скрытой материи.

2). Всего известно 55 стабильных и квазистабильных частиц (вместе с античастицами); более 300 короткоживущих частиц (время жизни в 2–2000 раз больше ядерного времени  $\sim 10^{-24}$  с). Таким образом, открыто более 350 видов частиц (в основном нестабильных), причем число видов продолжает расти и, скорее всего, *неограниченно велико*.

3). Все элементарные частицы, за исключением фотона, разбиваются на два основных класса: **адроны** (более 350 частиц, но есть теоретические модели, где счет идет на тысячи) и **лептоны** (счет у теоретиков идет на десятки частиц). Адроны – это частицы, которые участвуют в *сильном взаимодействии*, они имеют сложную внутреннюю структуру и живут обычно  $10^{-23}$  с (иногда  $10^{-8}$  с). К адронам относят все барионы («тяжелые» частицы) и мезоны, включая резонансы. Лептоны – это частицы, которые не участвуют в сильных взаимодействиях.

Фундаментальные частицы Таблица 22.1

|         | Поколение 1                                       | Поколение 2                                     | Поколение 3                                  | Заряд          |
|---------|---|---|--|----------------|
| Кварки  | <b>u</b><br>“верхний”                             | <b>c</b><br>“очарованный”                       | <b>t</b><br>“t-кварк”                        | $\frac{2}{3}$  |
|         | <b>d</b><br>“нижний”                              | <b>s</b><br>“странный”                          | <b>b</b><br>“b-кварк”                        | $-\frac{1}{3}$ |
| Лептоны | <b><math>\nu_e</math></b><br>электронное нейтрино | <b><math>\nu_\mu</math></b><br>мюонное нейтрино | <b><math>\nu_\tau</math></b><br>тау-нейтрино | 0              |
|         | <b>e</b><br>электрон                              | <b><math>\mu</math></b><br>мюон                 | <b><math>\tau</math></b><br>тау-лептон       | -1             |

4). Общее количество элементарных частиц в нашей Вселенной, как утверждал ещё А. Эддингтон (1882–1944), – ровно  $136 \cdot 2^{256}$  протонов и столько же электронов, т. е. в сумме около  $3,14 \cdot 10^{79}$  частиц.

5). **Фундаментальные частицы** – это 12 стабильных элементарных частиц, из которых состоят все остальные частицы (известные на данный момент физикам). Сейчас кандидатами на роль фундаментальных частиц являются **кварки** и **лептоны** (см. табл. 22.1). Лептоны, в отличие от кварков, не участвуют в сильных взаимодействиях. Всего известно 6 кварков и 6 лептонов. Кварки и лептоны объединяют в три поколения. Разумеется, каждая фундаментальная частица имеет античастицу. Обычное вещество, протоны и нейтроны, а также химические элементы, которые они составляют, состоят только из частиц 1-го поколения.

Возможно, что на размерах менее  $10^{-18}$  м кварки и лептоны – это кластеры (объединения) ещё более фундаментальных частиц. Более того, не исключено, что последовательность всё более мелких строительных блоков нескончаема и фундаментальных частиц не существует вообще.

6). Как уже сказано выше, к элементарным частицам причисляют *фотоны* – кванты электромагнитного поля, а также *нейтрино*, появляющиеся в процессах  $\beta$ -распада ядер. Фотоны и нейтрино – это так называемые релятивистские частицы. Именно в них сосредоточена современная *энтропия* Вселенной (пояснение энтропии см. в п. 6 рефлексии № 2). Безразмерная энтропия (т.е. в единицах постоянной Больцмана  $k_B$ ) в единице объема для релятивистских частиц есть  $s \approx 4(n_\gamma + n_\nu + \dots)$ . В современную эпоху плотность фотонов  $n_\gamma \approx 500 \text{ см}^{-3}$  (частиц в  $\text{см}^3$ ), а плотность всех нейтрино  $\sum n_\nu \approx 400 \text{ см}^{-3}$ . Отсюда следует, что *энтропия* Вселенной внутри сегодняшнего горизонта (с объёмом  $V$ ) равна  $S_U \sim V \cdot s \sim 10^{90}$ , а внутри горизонта в планковскую эпоху (при зарождении Вселенной) энтропия составляла  $S_{HOR} \sim 1$ .

Отношение числа фотонов к числу протонов (барионов) во Вселенной равно  $\sim 10^9$  – это один из важнейших космологических параметров нашей Вселенной (см. гл. 30, рефлексия № 21). Плотность *энтропии* теплового излучения пропорциональна плотности фотонов, поэтому число  $10^9$  является также и мерой энтропии на один протон во Вселенной.

### **Рефлексия № 2 («отражения» в части элементарных частиц).**

1). *Простые числа*, являясь базисом натуральных чисел (см. гл. 2), вполне могут быть неким «отражением» элементарных частиц. Простые числа являются базисом также и для *скрытых чисел*  $N^*$  (см. конец гл. 20).

2). В природе существует около 25 стабильных и квазистабильных элементарных частиц (т.к. без учета античастиц имеем  $55/2 \approx 25$ ), при этом доля обычного вещества во Вселенной равна 10% (см. гл. 21). Но, как уже говорилось, на Большом отрезке доля  $Q$  обычной плотности  $\rho$  по 25-ое простое число ( $P = 97$ ) составляет 10% (см. табл. 20.1).

Количество простых чисел на БО согласно формуле (2.3) составляет около  $7 \cdot 10^{58}$ , т.е. по человеческим меркам оно «неограниченно велико».

3). Все простые числа можно разбить «на два основных класса», скажем, с  $R$ -фактором равным 6 (таких чисел больше всего, см. [9] гл. 1.13) и все прочие простые числа. Возможны ли другие разбиения простых чисел «на два основных класса»? Очевидно, прежде необходимо понять, что в мире чисел может «отражать» сильное взаимодействие.

Среди элементарных частиц исключительное место занимает *фотон*, а в мире чисел исключительное место у первого простого числа  $N=2$  (только у него  $R$ -фактор равен 1), и у первого натурального числа  $N=1$ .



4). Количество всех камней в Пирамиде высотой  $N=10^{61}$  равно  $2,11 \cdot 10^{91}$  (см. табл. 5.2). Где ещё в ГТНЧ может быть «зашифровано» общее количество элементарных частиц?

5). Почему фундаментальных частиц именно 12? Ответа нет, но в качестве «отражений» такого ответа попробуем «обыграть» мир чисел:

а). На отрезке  $[1; 37]$  первые 12-ть простых чисел ( $P = 2, 3, 5, \dots, 37$ ) имеют 100%-ую *распространенность* ( $\sum p_p$  в % от  $p$ ), т.е. в канонических разложениях первых 37 натуральных чисел нет никаких других простых чисел. На отрезке  $[1; 10^{17}]$  – распространенность первых 12-ти простых чисел упадет до  $\sum p_p/p = 47,2\%$ , а на Большом отрезке – до  $\sum p_p/p = 37,7\%$ . Как видим, на БО распространенность первых 12-ти простых чисел остается ещё довольно большой: 37,7% простых чисел во всех канонических разложениях – будут числа  $P = 2, 3, 5, \dots, 37$  (12-ть чисел, см. в конце гл. 19).

б). Средняя поправка ( $R_s$ ) плавно убывает только у первых 12- простых чисел, а дальше происходит некий срыв (см. рис.19.1).

в). На БО по формуле (2.27) получаем *порог*  $n=12$  (порог «фундаментальности»? ). В конце стадии инфляции (в очень ранней Вселенной при  $N=10^7$  *эви*) по указанной формуле получаем  $n \approx 3 \div 4$ , то есть фундаментальных частиц почти не было («реальных частиц практически нет», см. гл. 28). При возрасте Вселенной около 567 лет ( $N \sim 10^{53}$  *эви*) порог  $n$  был на единицу меньше современного значения (и было 11 фундаментальных частиц?).

6). В термодинамике существует величина, называемая *энтропией*, физическое толкование которой – мера беспорядка системы. Если система имеет четко выраженную структуру и в ней царит порядок, то ее энтропия мала. Напротив, системы с высокой энтропией беспорядочны и хаотичны. Энтропию можно также связать с *информацией*: *когда энтропия растет, информация утрачивается* (если беспорядочно перемешать все буквы на данной странице, то информация, полученная читателем, устремляется к нулю). Второе начало термодинамики гласит, что *энтропия Вселенной не может уменьшаться*, т. е. порядок всегда стремиться уступить место беспорядку. (Этот принцип хорошо уяснили россияне за последние 12 лет: много труднее построить новую экономику в стране, чем разрушить старую).

За время существования Вселенной её энтропия выросла от  $S_{HQR} \sim 1$  до  $S_U \sim 10^{90}$  (см. выше). ГТНЧ дает, например, такие «отражения» энтропии:

а). Количество всех камней в Стволе (Пирамиды) высотой  $N=10^{61}$  равно числу  $2,11 \cdot 10^{90}$  (см. табл. 5.1). Такому же числу равна ещё и масса всех черных камней в Стволе, или, иначе говоря, на Большом отрезке  $[1; 10^{61}]$  сумма всех малых делителей у всех натуральных чисел равна  $\sim 10^{90}$ .

б). При очень большом желании энтропию Большого отрезка можно оценить как  $\sum H \sim \sum H_p \sim 1,6 \cdot 10^{89} \div 10^{90}$  (см. в конце гл. 16).

### 23. ЭНЕРГИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Физиками предприняты многочисленные попытки объединения всех сил в природе (взаимодействий) в единую теорию. В связи с этим необходимо сказать ещё несколько слов о частицы и взаимодействиях. Все элементарные частицы делят на две большие группы: фермионы и бозоны.

*Фермионы.* У них полуцелый спин ( $1/2, 3/2$ ). Они подчиняются статистике, открытой Э. Ферми. При взаимодействиях каждый фермион занимает «свою полочку». Такие частицы являются аналогом твердых тел, ведь последние также не могут занять одно место в пространстве. Фермионы обязательно должны отличаться по своим характеристикам: либо энергетическим, либо пространственным. Два фермиона с одинаковыми импульсами, скажем, не могли занимать одинаковое положение в фазовом пространстве. Фазовое пространство в отличие от обычного дополнено ещё характеристиками энергии частицы.

*Бозоны.* У них целый спин ( $0, 1, 2$ ). Они подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Бозоны обеспечивают взаимодействия между лептонами и кварками. При взаимодействиях бозоны, в отличие от фермионов, стремятся занять одно положение в фазовом пространстве и обладать одинаковыми энергетическими характеристиками. Физики говорят, что образуется *бозонный конденсат*. В классической физике также есть объекты, которые могут занимать одно место в пространстве. Это, например, волны на поверхности воды от камней, брошенных рядом (интерференция волн).

Бозоны, которые обеспечивают взаимодействие между кварками, называются глюонами. Восемь глюонов обеспечивают существование ядерных сил. Слабые взаимодействия обеспечивают бозоны  $W^\pm$  и  $Z$ , которые называются вионами. Фотон – это также бозон.

*Электрослабые взаимодействия* – так называется объединение электромагнитных и слабых взаимодействий, которое удалось описать в одной теории. Частицы, которые несут «заряд» этих сил называются лептонами, а взаимодействие переносится фотонами,  $W^\pm$ -бозонами и  $Z$ -бозонами.

*Ядерные силы* (квантово-хромодинамические взаимодействия) пока не удалось достоверно объединить с электрослабым взаимодействием, т.е. теории объединения уже есть, но они не проверены в эксперименте. Заряд хромодинамических взаимодействий (цветовой заряд) «спрятан» в кварках.

*Гравитационное взаимодействие* пока не удается включить в объединенную схему (двух выше названных взаимодействий). Зарядом здесь является масса – самое универсальное свойство материи. Переносчиком взаимодействия является гравитационное поле – метрическое поле, описываемое тензором второго ранга и обладающее спином 2.

В многочисленных попытках объединения всех взаимодействий в единую теорию возникают дополнительные поля и частицы. Одним из самых важных, которое появляется в любых схемах объединений, является так называемое *скалярное поле*. При разработке квантовой теории слабых взаимодействий и квантовой хромодинамики выяснилось, что так называемая *процедура перенормировки* (это триумф квантовой электродинамики!) в названных теориях не работает. Для разрешения проблемы был придуман механизм динамической генерации масс элементарных частиц (*механизм Хиггса*). Основная идея здесь в том, что поля взаимодействуют *не линейно*, что частица, изначально безмассовая, приобретает массу из-за взаимодействия с конденсатом некоторого скалярного поля.

*Конденсат скалярного поля* по всем основным характеристикам подобен *вакууму виртуальных частиц*. Поэтому он называется состоянием вакуума скалярного поля. Само поле – *нелинейное*, оно взаимодействует само с собой и потенциальная энергия взаимодействия ( $V$ ) в зависимости от величины поля ( $F$ ) представляет сложную функцию. Причем график зависимости  $V=f(F)$  имеет две точки (при  $F=0$  и  $F=F_0$ ), в которых касательная к графику параллельна горизонтальной оси  $F$  (см. рис. 23.1)



Рис. 23.1. Функция  $V=f(F)$

Физическое поле, описывающее, например,  $W^+$ -бозон, взаимодействует с таким скалярным полем, причем величина скалярного поля ( $F$ ) играет роль массы поля  $W^+$ -бозона. В результате такого взаимодействия  $W^{\pm}$ - и  $Z$ -бозоны приобретают массу, что и было названо *механизмом динамической генерации массы*. При малых энергиях взаимодействующих частиц их массы обеспечиваются средней величиной скалярного поля, при повышении энергии массы исчезают. При этом масса частицы становится функцией энергии взаимодействующих частиц и начинает работать процедура перенормировки, позволяющая точно рассчитать характеристики взаимодействий частиц. Итак, поле может быть линейным и нелинейным.

## Рефлексия № 3 (приводятся «отражения» полей двух разных типов).

### 1). Сумма Эйлера – это “отражение” линейного поля.

Удивительный закон Эйлера (см. гл. 8) интересен для нас, прежде всего тем, что указывает на таинственную связь между природой *бесконечно большого* (в лице бесконечного ряда натуральных чисел, их целых делителей) и *бесконечно малого* (в лице чисел  $x$ , “предшествующих” единице). В стремлении осмыслить эту связь в рамках ГТНЧ была изучена сумма Эйлера, ведь именно она “породила” столь «необычайный закон” Эйлера.

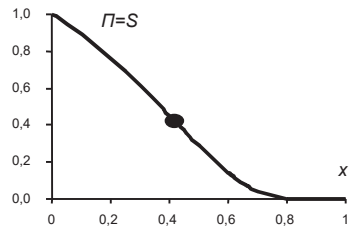


Рис. 23.2. Функция  $S=f(x)$

Напомним, что сумма Эйлера это *бесконечная* сумма, имеющая вид

$$S \equiv 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \dots, \quad (23.1)$$

где  $0 \leq x \leq 1$ , а показатели степени образуют *ряд Эйлера*:  $E=1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, \dots$ . Будем считать (сошлёмся на интуицию), что сумма Эйлера как-то «отражает» *энергию* физического поля.

Поведение суммы Эйлера на отрезке  $0 \leq x \leq 0,997693$  представлена на рис. 23.2, где кружком обозначена *точка перегиба* функции  $S=f(x)$  в которой, вероятно,  $S=x$  (так, при  $x=0,41960035$  имеем  $S=0,419600356\dots$ ). Вплоть до  $x=0,68$  функция  $S=f(x)$  – это почти прямая линия, уравнение которой:

$$S^* \equiv 1 - e^{1/3} \cdot x \approx 1 - 1,3956 \cdot x. \quad (23.2)$$

Таким образом, сумма Эйлера «отражает» именно *линейное* поле. При  $x > 1$  сумма Эйлера расходится (числового предела не имеет) [12].

### 2). Сумма $IS$ – это “отражение” нелинейного скалярного поля.

Если из бесконечного ряда натуральных чисел «изъять» бесконечный ряд Эйлера  $E=1, 2, 5, 7, 12, 15, \dots$ , то у нас останется также бесконечный *ряд*  $I=3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, \dots$ . Он генерирует, скажем, *IS-сумму*:

$$IS \equiv 1 - x^3 - x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} - x^{13} - x^{14} - x^{16} - \dots, \quad (23.3)$$

где  $0 \leq x \leq 1$ , а показатели степени – это, скажем, ряд  $I$ , и правило знаков у слагаемых “сохраняет” закономерности правила знаков в сумме Эйлера (см. гл. 8). Иначе говоря, *IS-сумма* составлена «по образу и подобию» суммы Эйлера. В связи с этим, мы вправе ожидать от *IS-суммы* неких необычных свойств, возможно, не менее значимых, чем у суммы Эйлера. И опять будем считать, что *IS-сумма* как-то «отражает» *энергию* физического поля.

Опишем точный алгоритм построения  $IS$ -суммы.

Все слагаемые в  $IS$ -сумме с точки зрения знака перед ними можно разбить на группы: в первой группе ( $G=1$ ) только одно положительное слагаемое – единица; во 2-й группе ( $G=2$ ) – два отрицательных слагаемых; в 3-й группе ( $G=3$ ) – пять положительных слагаемых и т. д. Короче говоря, в *нечетных группах* (с номерами  $G=1, 3, 5, 7, \dots$ ) – все слагаемые положительные, а в четных группах (с номерами  $G=2, 4, 6, 8, \dots$ ) – все слагаемые отрицательные. Начиная со 2-й группы, количества слагаемых ( $K_g$ ) в группах образуют бесконечную арифметическую прогрессию: 2, 5, 8, 11, 14, ..., поэтому для любой группы ( $G \geq 2$ ) мы можем записать

$$K_g = 3 \cdot G - 4 \quad (23.4)$$

*Важное правило:* в  $IS$ -сумме показатель степени у любого слагаемого, вообще говоря, на 1 больше показателя степени предыдущего слагаемого. Исключения составляют только первое и ( $G-1$ )-ое слагаемое в любой  $G$ -й группе, у которых показатель степени больше предыдущего на 2 единицы.

Таким образом, выше мы полностью описали «архитектуру»  $I$ -ряда и  $IS$ -суммы. Теперь можем найти закон изменения  $IS$ -суммы:  $IS=f(x)$ . Он показан на рис. 23.3. Жирные точки на графике:  $x=0,568\dots$  ( $IS=0,7674\dots$ ) – точка первого перегиба;  $x^*=0,7483018\dots$  ( $IS=0,6434\dots$ ) – точка минимума (дно «ямы»);  $x=0,8443\dots$  ( $IS=0,6806\dots$ ) – точка второго перегиба. При  $x \rightarrow 1$  наша  $IS$ -сумма устремляется к значению  $3/4=0,75$  по следующему закону

$$IS \approx 3/4 + \pi^{-1} \cdot \ln x \approx 0,75 + 0,3183 \cdot \ln x \quad (23.5)$$

А теперь сравните рис. 23.1 и рис. 23.3. Невольно напрашивается вывод, что  $IS$ -сумма «отражает» энергию именно *нелинейного скалярного поля*. Это «отражение» «Зеркала» в высшей степени сомнительно, и чтобы хоть как-то его прояснить, скажем, ещё пару слов в части  $IS$ -суммы.

Например, если в формуле (23.1) у всех слагаемых, кроме первого (кроме единицы), поменять знак на противоположный, то мы получим некую новую сумму, скажем,  $IS^\wedge$ . Причем, оказывается, что для любого значения  $x$  будет выполняться следующее равенство:  $IS^\wedge + IS = 2$ , т. е. сложение числовых пределов двух сумм всегда будет давать число 2.

Если в характере сходимости суммы Эйлера мы не обнаружим ничего необычного [12], то у  $IS$ -суммы возникают любопытные картины, и мы покажем это на конкретном примере. Пусть  $J=1, 2, 3, \dots$  – это порядковый номер слагаемого в  $IS$ -сумме, т. е. у первого слагаемого (у единицы) имеем

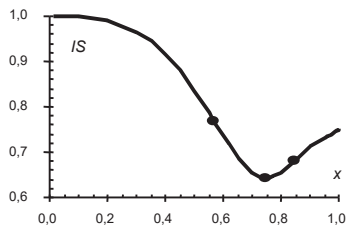


Рис.23.3. Функция  $IS = f(x)$

$J=1$ . Тогда для  $0 < x < 0,97$  можно сказать, что с ростом номера  $J$  текущая  $IS$ -сумма сходится к пределу (для каждого  $x$  он, разумеется, свой) после некоторых колебаний. Причем с ростом  $x$  эти колебания становятся всё более затяжными, интенсивными, и зрительно на графике  $IS = \varphi(J)$  они воспринимаются как “затухающие” колебания. А вот при  $x > 0,97$  уже становится заметным овал “ядра”, образованного текущими значениями  $IS$ -суммы (т. е. при текущих  $J$  для данного  $x$ ). На рис. 23.4 показано ядро для  $x=0,998$ , а жирной точкой обозначен *центр ядра* ( $J_{я}$ ) – номер  $J$ , при котором текущая  $I$ -сумма достигает максимального значения ( $J_{я}=223$ ;  $IS_{я}=11,8875\dots$ ). Затем текущая сумма убывает, “стягиваясь” к своему пределу (“хвост” на графике): после  $J=18475$  имеем  $IS=0,7493\dots$ , и при *больших*  $J$  изменения суммы «уходят» за 15-ю цифру после запятой и компьютер их уже «не видит».

С ростом  $x$  центр ядра «уходит» вправо (к бесконечности) по закону

$$J_{я} \approx 0,5 \cdot (1-x)^{-1}; \quad IS_{я} \approx 0,5 \cdot (1-x)^{-0,5}, \quad (23.6)$$

причем, для  $J_{я}$  имеем  $\text{abs}(ОП) < \pm 20\%$ , а для  $IS_{я}$  имеем  $ОП < 10\%$ . Например, при  $x=0,9999999999999999$  (15 девяток) получаем  $J_{я} \approx 5 \cdot 10^{14}$ ;  $IS_{я} \approx 1,58 \cdot 10^7$ .

При  $x=1$  центр ядра находится в таинственной бесконечности, причем, горизонтальная ось колебаний текущих значений  $IS$ -суммы проходит через точку  $IS = 3/4 = 0,75$ , поэтому мы и считаем, что здесь  $IS = 3/4$  (по аналогии с суммой Эйлера при  $x = 1$ ). При  $x = 1$  наша  $IS$ -сумма расходится [12].

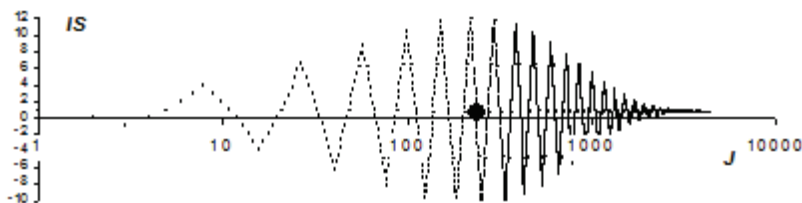


Рис. 23.4. Изменение текущей  $IS$ -суммы для  $x=0,998$  (график «обрезан» при  $J=4400$ )

## 24. ПОСТОЯННАЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ – НЕ КОНСТАНТА

В физике насчитывается около двух десятков фундаментальных величин. Буквально до конца XX века считалось, что эти величины – *константы*, т.е. они якобы были неизменны с момента зарождения нашей Вселенной. Приведем некоторые из физических констант [44, 1991 г.]:

$c = 299\,792\,458$  м/с – скорость света в вакууме;

$e = 1,602\ 177\ 33 \cdot 10^{-19}$  Кл – элементарный заряд (заряд электрона);

$h = 6,626\ 075\ 5 \cdot 10^{-34}$  Дж – постоянная Планка;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  – магнитная постоянная, где  $\pi = 3,14\dots$  (число «пи»);

$G = 6,672\ 59 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup> · кг<sup>-1</sup> · с<sup>-2</sup> – гравитационная постоянная;

$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$  кг – масса покоя протона (в 1836 раз больше массы  $e$ ).

Комбинируя различным образом эти константы, можно получить множество производных от них величин. Причем некоторые из них могут выражать очень важные (фундаментальные) свойства природы, или, точнее говоря, структуры пространства-времени (см. табл. 24.1).

Пояснения к таблице:  $1 \text{ эви} \approx 5,4 \cdot 10^{-44}$  с (элементарный временной интервал,  $t_{pl}$ ) – это время, за которое фотоны света проходят элементарную длину  $l_{pl}$ . Энергия  $E_{pl}$  – это полная энергия, содержащаяся в протоне.

Таблица. 24.1. Планковские величины

| Формула                                     | Значение  | Наименование                                   |
|---|---|--|
| $l_{pl} \equiv (Gh/2\pi c^3)^{1/2}$         | <b>1,6·10<sup>-35</sup></b> м                   | планковская (элементарная) длина               |
| $t_{pl} \equiv l_{pl}/c$                    | <b>5,4·10<sup>-44</sup></b> с                   | элементарный временной интервал ( <i>эви</i> ) |
| $m_{pl} \equiv (ch/2\pi G)^{1/2}$           | <b>2,2·10<sup>-8</sup></b> кг                   | планковская масса                              |
| $E_{pl} \equiv m_{pl} \cdot c^2$            | <b>2,0·10<sup>16</sup></b> эрг                  | планковская энергия                            |
| $\rho_{pl} \equiv m_{pl} \cdot l_{pl}^{-3}$ | <b>5,2·10<sup>93</sup></b><br>г/см <sup>3</sup> | планковская плотность                          |
| $T_{pl} \equiv E_{pl} \cdot k^{-1}$         | <b>1,4·10<sup>32</sup></b> °К                   | планковская температура                        |

Важнейшей физической величиной (из ряда производных величин) является *постоянная тонкой структуры* ( $\alpha$ ). Это *безразмерная* величина, образованная из универсальных физических постоянных [44]:

$$\alpha = 0,5 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot c \cdot e^2 / h = 0,007\ 297\ 353\ 08 \quad (24.1)$$

$$\text{или } \alpha^{-1} \equiv 1/\alpha = 137,035\ 989\ 5. \quad (24.2)$$

Величина  $\alpha$  входит в описание всех процессов, включающих взаимодействие вещества и излучения, вот почему её фундаментальную роль в физике невозможно переоценить. Она определяет *тонкое* расщепление уровней энергии атома (а, следовательно, и спектральных линий). Величина тонкого расщепления пропорциональна  $\alpha^2$ . Расщепление сильно возрастает с увеличением заряда ядра атома ( $Z$ ) и для уровней энергии тяжелых атомов уже перестает быть «тонким». В квантовой электродинамике  $\alpha$  – естественный параметр, характеризующий «силу» электромагнитного взаимодействия (поэтому  $\alpha$  ещё называют *константой электромагнитного взаимодействия*).

ствия). Именно это взаимодействие определяет структуру атомов, а, следовательно, описывает всю картину явлений в химии и физике (за исключением ядерных процессов).

Согласно измерениям, основанным на *эффекте Джозефсона*, к 1977 г. физиками было установлено, что  $\alpha^{-1} = 137,0359 \pm 0,0004$  [38, т.26, стр. 73]. К 1984 г. значение уточнили:  $\alpha^{-1} = 137,035987$  [45]. А к 1991 г. была найдена 7-я цифра после запятой:  $\alpha^{-1} = 137,0359895$  [44]. Таким образом, в числовом значении  $\alpha^{-1}$  цифры после запятой даются физикам весьма непросто, и чем дальше цифра от запятой, тем труднее установить её.

Ситуация с физическими константами радикально изменилась в конце XX века, когда был открыт *механизмом динамической генерации массы* (см. гл. 23). После этого многие физические константы стали рассматриваться как величины, которые генерируются динамическим способом. В частности, *константы связи*, описывающие различные взаимодействия.

Констант связи известно четыре, по числу сил в природе:

- $\alpha^{-1} = 137,0359895$  – постоянная тонкой структуры;
- $\alpha_w \equiv g_w \cdot m_p^2 \cdot c / (h/2\pi)^3 = 10^{-5}$  – постоянная слабого взаимодействия;
- $\alpha_s \equiv g_s^2 / (ch/2\pi) = 15$  – постоянная сильного взаимодействия;
- $G = 6,672 \cdot 59 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$  – гравитационная постоянная.

Теперь константы связи рассматриваются как функции энергии частиц, которые участвуют во взаимодействиях. Зависят они, правда, по-разному. Постоянная тонкой структуры  $\alpha$  *увеличивается* (хотя и очень медленно), когда энергия взаимодействующих частиц растет. Две другие константы  $\alpha_w$  и  $\alpha_s$  уменьшаются. Все три константы сближаются и сравниваются, когда энергия взаимодействия становится равной примерно  $10^{15}$  ГэВ. То есть до  $10^{-35}$  секунды ( $10^8$  эви) от момента зарождения нашей Вселенной (см. гл. 28) константы  $\alpha^{-1}$ ,  $\alpha_w$  и  $\alpha_s$  были неразличимы. Так образуется единое взаимодействие, что означает объединение трех фундаментальных взаимодействий (трех сил в природе): электромагнитная сила (между электрически заряженными частицами); слабая сила (действует между лептонами); сильная или ядерная сила (действует между адронами).

Конечно, это всего лишь пока теоретическая модель описания природы. Как устроены взаимодействия при сверхвысоких энергиях (в области  $10^{15}$  ГэВ и выше) пока никто не знает. Однако описанная модель убедительна.

**Рефлексия №4** («отражение» постоянная тонкой структуры  $\alpha^{-1}$ ).

ГТНЧ (см. гл. 14) позволяет сформулировать любопытную  $\alpha$ -гипотезу:

**В конце Большого отрезка дисперсия  $D_2$  численно равна  $\alpha^{-1}$ .**



Более того, в конце БО дисперсия  $D_2$ , возможно, устремляется к *наиболее вероятной дисперсии* (у чисел с ненулевым kernom, см. гл. 17). Поэтому, возможно,  $\alpha^{-1}$  – это *наиболее вероятная дисперсия* в конце БО.

Напомним, что  $D_2$  – дисперсия у верхних лидеров частых миров (см. гл. 13, 14), а  $\alpha^{-1} \approx 137$  – постоянная тонкой структуры (константа связи).

Выбранное нами в качестве правой границы Большого отрезка значение  $N = 8 \cdot 10^{60}$  – весьма условно (см. гл.1). Поэтому, вероятно,  $\alpha$ -гипотезу следует понимать так: БО заканчивается именно там, где  $D_2 = \alpha^{-1}$ . Причем  $D_2$  – это некая, пока точно неизвестная нам, функция  $D_2 = f(N)$  правой границы  $N$  рассматриваемого отрезка  $[1; N]$ , т.к. последний (старший) верхний лидер, наверняка, будет меньше последнего натурального числа  $N$  на БО. Таким образом,  $\alpha$ -гипотеза позволяет *вычислить* точный возраст нашей Вселенной, для этого надо “всего лишь” установить истинный вид закона роста дисперсии  $D_2 = f(N)$  [формула (14.1) вызывает большие сомнения].

Соглашаясь с  $\alpha$ -гипотезой, мы вправе сравнить аналитические выражения для  $D_2$  и  $\alpha^{-1}$ . Из формул (24.2) и (24.1) можно получить следующее:

$$\alpha^{-1} = (2\pi)^{-1} \cdot (\xi/e)^2 = 137,035\ 989\ 5, \quad (24.3)$$

где  $\xi \equiv (10^7 \cdot h \cdot c^{-1})^{0,5} \approx 4,7 \cdot 10^{-18}$  (Дж·с·м<sup>-1</sup>)<sup>0,5</sup> – это некий параметр, «сконструированный» нами так, чтобы формулы (24.3) была похожа на формулу (14.14) из ГТНЧ:  $D_2 = (2\pi)^{-1} \cdot (T/K)^2$ , где  $T$  – количество всех делителей у верхнего лидера  $N$  из частых миров, а  $K$  – kern верхнего лидера  $N$  (количество делителей у числа  $N$  на центральном интервале). Как было установлено в гл. 14, с ростом  $N$  растут и  $T$ , и  $K$ , но рост  $T$  – более быстрый, поэтому в формуле (14.14) дисперсия  $D_2$  *растет* относительно медленно.

Как всегда, говоря о феномене «Зеркала», мы подразумеваем, что увеличение правой границы  $N$  отрезка на единицу эквивалентно увеличению физического времени на 1 *эви* (на  $5,4 \cdot 10^{-44}$  сек, см. гл.1). Таким образом, закон (14.14) “отражает” динамику роста величины  $\alpha^{-1}$  во времени.

**Рефлексию №4 можно проверить.** Суть состоит в следующем. Найденный нами закон (14.4) для дисперсии:  $D_2 \approx Q \cdot (\ln N)^q$ , дает возможность оценить рост дисперсии  $D_2$  (а значит и  $\alpha^{-1}$ ) не только на Большом отрезке, но и за его пределами, т.е. «в ближайшем будущем». Делая такой прогноз, мы будем использовать *эви-конвертацию* (после которой БО соответствует отрезку времени длиной 13.700.000.000 лет, см. гл. 1). Заметим также, что приведенные в прогнозе цифры ориентировочные и требуют уточнения:

Девятая цифра (после запятой – здесь и далее) в значении  $D_2$  ( $\alpha^{-1}$ ) увеличится на единицу примерно через 34 года (т. е. после увеличения  $N = 8 \cdot 10^{60}$  *эви* в 1,000000002466 раз). Восьмая цифра увеличится на единицу примерно через 134 года, седьмая цифра – через 1141 год, шестая цифра – через 11209

лет, пятая цифра – через 111885 лет. Как видим, согласно  $\alpha$ -гипотезе, темп роста  $D_2$  ( $\alpha^{-1}$ ) в нашу эпоху – исчезающе мал (по человеческим меркам). А вот за первый год существования Вселенной величина  $\alpha^{-1}$  могла вырасти «из ничего» до 79,6% от современного значения, и  $\alpha^{-1}$  достигла 99% – ко времени появления нашей планеты (4,7 млрд. лет назад).

Любопытно, что уловить изменение  $\alpha^{-1}$  можно *не дожидаясь* изменения времени. Например, российские ученые из Физико-технического института им. Иоффе, придумали метод обнаружения возможного изменения  $\alpha$  с использованием квазаров. Правда, к 2003 г. никаких изменений  $\alpha$  данным методом не обнаружили, а вот группа зарубежных ученых, используя якобы более точный метод, обнаружила... рост  $\alpha$  (т.е. *убывание*  $\alpha^{-1}$ , что противоречит нашей  $\alpha$ -гипотезе). Однако рост  $\alpha$  пока не считается доказанным.

**Ремарка** (об «охоте» за постоянной тонкой структуры  $\alpha^{-1} = 137$ ).

В рамках ГТНЧ неоднократно тот или иной «сконструированный» параметр в конце Большого отрезка оказывался численно близким к константе  $\alpha = 0,007297$  (или  $\alpha^{-1} = 137,036\dots$ ). Например, по формуле (7.11) мы получаем в конце БО значение вероятности равное  $P_s \approx 0,003748\dots$ , и тут же подразумеваем, что формула (7.11) «грешит» ровно на столько, сколько не хватает до значения  $\alpha$ . Но в таких случаях желаемое, скорее всего, выдается за действительное, ведь экстраполировать столь грубую формулу с отрезка  $[1; 10^{15}]$  на отрезок  $[1; 10^{61}]$  – более чем опасно! Это предостережение, как не печально, в известной степени относится и к  $\alpha$ -гипотезе.

И раньше в работах автора [8, 9, 12] проводилась своеобразная «охота» за константой  $\alpha^{-1}$ . Ну а количество виртуознейших попыток других «энтузиастов науки» раскрыть тайну числа 137 – просто не поддается счету. Главная причина этого ажиотажа в том, что  $\alpha^{-1}$  – единственная из списка *важнейших* физических величин, которая *не имеет размерности* (это просто число). Поэтому  $\alpha^{-1}$  может померещиться где угодно и кому угодно (было бы желание). Причем рефлексия № 4 – это, пожалуй, одна из наиболее оригинальных попыток «обнаружения»  $\alpha^{-1}$  в мире чисел.

## 25. РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

В 1929 г. американский астроном Эдвин Хаббл (1889–1953) установил, что все галактики разбегаются от нас, причем в “организованном порядке”: чем дальше галактика, тем быстрее она удаляется. Относительная скорость изменения расстояний называется **параметром Хаббла**:

$$H = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt}, \quad (25.1)$$

где  $R$  – **масштабный фактор**, т.е., например, расстояние между теми или иными двумя далекими объектами (скажем, галактиками);  $dR/dt$  – скорость изменения масштабного фактора во времени. По оценке ученых (2002 г.):

$H = 65 \pm 7$  км/(с·Мпк), где *1 парсек* (пк)  $\approx 3 \cdot 10^{16}$  метров – единица расстояний в астрономии. Например, при  $H=65$  км/(с·Мпк) два скопления галактик, между которыми  $R=10$  Мпс (около 30 млн. световых лет) удаляются друг от друга со скоростью  $dR/dt = H \cdot R \approx 650$  км/с.

На рис. 25.1 показано изменение масштабного фактора  $R$  от времени  $t$ , т.е. поведение некой функции  $R = f(t)$ . График наглядно показывает, что в начальный момент (в *сингулярности* при  $t \rightarrow 0$ ) имело место *взрывообразное начало* Вселенной, поскольку при  $R \rightarrow 0$  имеем  $H \rightarrow \infty$ . После прохождения сингулярности скорость изменения масштабного фактора ( $dR/dt$ ), которая равна тангенсу угла наклона касательной к функции  $R=f(t)$  в момент времени  $t$ , начинает уменьшаться. Размерность величины  $H$  – обратна размерности времени ( $c^{-1}$ ), следовательно, величина, обратная  $H$ , дает фундаментальную единицу времени (*время Хаббла*), определяющую изменение космологических параметров.

Если к графику  $R=f(t)$  мы проведем касательную в точке “нашего” времени  $t^*$  (на рис. 25.1 – это крайняя точка справа на оси времени), то эта касательная пересечет ось времени в точке  $x = -t^*/2$ , а время Хаббла будет равно  $H^{-1} = t^* - x = (3/2) \cdot t^*$ . Таким образом, время Хаббла ( $H^{-1}$ ) приблизительно (с точностью до множителя  $3/2$ ) равно возрасту Вселенной  $t^*$ . Например, если, считать возраст Вселенной равным  $10^{61}$  *эви* (или  $t^* \approx 17$  млрд. лет, см. гл. 1), то время Хаббла будет равно  $t_H \approx 25,5$  млрд. лет.

Из открытия Э. Хаббла следовал однозначный вывод – Вселенная находится в нестационарном состоянии, в состоянии *расширения*, т.е. она постоянно изменяется, у нее есть биография. Причем расширение Вселенной – это расширение самого пространства, а не перемещение галактик

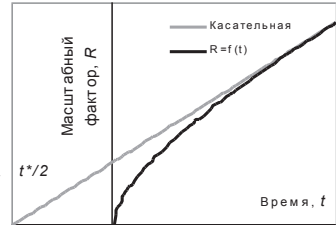


Рис. 25.1. Расширение Вселенной

“наружу”, в некую прежде пустую область. Говоря о расширении Вселенной, галактики (их скопления) часто сравнивают с изюминками в сыром тесте: когда тесто набухает в размерах (от наличия в нём дрожжей), то изюминки «разбегаются» друг от друга подобно галактикам.

Космологию иногда называют теорией «Большого взрыва», что требует некоторых разъяснений. Так, при любом взрыве возникает неоднородное распределение вещества, а наша Вселенная *однородна* – контраст плотности в больших масштабах (пока не затронутых гравитационной неустойчивостью) составляет не более  $10^{-5}$ . При любом взрыве также существует и остаётся центр взрыва, а в нашей Вселенной ничего подобного не наблюдается (*центр отсутствует*). Тогда почему наша Вселенная расширяется? Ответ был найден в самом конце XX века. Закон расширения Хаббла – это наследие стадии *инфляции*, т.е. очень ранней стадии в эволюции Вселенной (см. гл. 28). Именно стадия инфляции играла роль «взрыва».

Движущая сила расширения Вселенной – сила гравитационного *отталкивания* (!), возникающая на стадии инфляции. Эта сила была вызвана *конденсатом скалярного поля* (см. гл. 23), который эквивалентен  $\Lambda$ -члену (см. гл. 21). В 1981 г. Алан Гус на основе работ Киржница и Линде разработал *теорию инфляции*, согласно которой приливные силы, генерируемые  $\Lambda$ -членом, достигали чудовищной величины  $10^{74} \text{ с}^{-2}$ . Эти силы обеспечивают «разгон» вещества Вселенной в течение эпохи инфляции. Причем эти силы возникают в однородной Вселенной, они сами выравнивают всякие градиенты давления и температуры, способствуя образованию однородного распределения вещества.

Если работает инфляционная модель Вселенной, то её характерный признак – гравитационные волны, образовавшиеся во время раздувания (инфляции) Вселенной. Это гравитационные волны самых разных длин волн, в том числе и очень больших. Про эти волны ученые сегодня не знают ничего. Но теория предсказывает, что они должны оставлять след в реликтовом излучении (в его анизотропии и в его поляризации).

Длительность инфляционной стадии – пока нерешённая проблема. Весьма условно её обозначают так: от  $10^{-42}$  с до  $10^{-36}$  с (от  $10^1$  *эви* до  $10^7$  *эви*) от момента зарождения Вселенной (от Большого взрыва).

На *стадии инфляции* масштабный фактор  $R$  – это расстояние между двумя пробными частицами (т.к. ещё нет никаких галактик!). Причем на стадии инфляции масштабный фактор  $R$  со временем  $t$  растёт *экспоненциально*:  $R = R_0 \cdot \exp(H \cdot t)$ . Поэтому производная  $dR/dt$  (от экспоненты!) с точностью до численного множителя [а это параметр Хаббла  $H$  в тот период, см. формулу (25.1)] совпадает с самой функцией  $R=f(t)$ . Иначе говоря, ско-

рость  $dR/dt$  между двумя пробными частицами увеличивается пропорционально<sup>1</sup> самому расстоянию  $R$  между частицами. Так в первые мгновения Вселенной формировался закон Хаббла. Во время самой инфляции параметр Хаббла  $H$  остается практически постоянным (время его изменения, умноженное на само значение параметра  $H$ , гораздо больше единицы).

После окончания инфляционной стадии Вселенная продолжила расширяться по инерции. Правда, теперь уже масштабный фактор  $R$  стал изменяться со временем  $t$ . Причем, для более ранней Вселенной, доминированной излучением, это изменение происходило по закону  $R \sim t^{1/2}$ , а для современной Вселенной, доминированной пылью, имеем  $R \sim t^{2/3}$  (заметим, что  $2/3$  уже ближе к 1, т.е. больше, чем  $1/2$ ). Кстати, теперь должно быть ясно, что параметр Хаббла  $H$  не является постоянной величиной (хотя его иногда ещё называют постоянной Хаббла), ведь  $R$  – это функция времени  $t$ .

### Рефлексия №5 («отражения» в части расширения Вселенной)

1). Натуральный ряд, безусловно, дискретен и, в определенном смысле, *расширяется*, ибо каждое последующее число образуется путем прибавления единицы:  $1=1$ ;  $2 = 1 + 1$ ;  $3 = 2 + 1$ ;  $4 = 3 + 1$ ; ... и т.д.

Да, галактики (скопления галактик) в нашей Вселенной разбегаются... Но означает ли это, что расширяется само *пространство-время* (в т. ч. физические тела и мы с Вами)? Над эти вопросом думали лучшие умы, вот, например, мнение великого Анри Пуанкаре<sup>2</sup>: “Часто делалось замечание о том, что если бы все тела во Вселенной начали одновременно и в одинаковой пропорции расширяться, то у нас не было бы никаких средств заметить это... После этого расширения мир продолжал бы свой ход и ничто не говорило бы нам, что произошло столь важное событие... Пространство может подвергнуться любой деформации, и ничто не откроет нам этого, если наши инструменты испытали ту же самую деформацию... Если бы все процессы в природе замедлились и если бы то же самое произошло с нашими часами, то мы бы ничего не заметили...” [23].

---

<sup>1</sup> В экономике период, когда рост денежной массы пропорционален самой массе называется инфляцией. По аналогии Алан Гус удачно назвал свою теорию – *инфляционной*. За несколько месяцев до статьи Гуса (ставшей *точкой отсчета* теории ранней Вселенной) русский ученый Валерий Рубаков опубликовал препринт, в котором дал правильное решение энтропии. А до этого была модель А. Старобинского, и ещё раньше – идеи Глинера и Дымниковой...

<sup>2</sup> Французский математик Анри Пуанкаре (1854–1912) написал более 500 (!) статей и книг. Он оставил печать своего гения почти во всех областях науки. Именно Пуанкаре *почти* создал специальную теорию относительности, но слава досталась Альберту Эйнштейну (1879–1955). Подобные истории – не редкость в науке. Такое случилось и с *теорией инфляции* (см. выше).

2). Что в мире чисел «отражает» масштабный фактор  $R$ ?

Пусть  $N$  – правая граница отрезка  $[1; N]$ , а  $T_{max}$  – максимально возможное количество делителей у числа  $N$  (его максимально возможный тип). Помимо формул (4.3) и (4.4) для  $T_{max}$  мы вправе также утверждать, что:

$$T_{max} \approx \exp[a \cdot (\ln N)^{2/3}] \quad \text{или} \quad \ln(T_{max}) \approx a \cdot (\ln N)^{2/3}, \quad (25.2)$$

где  $a = 0,9631$  для отрезка  $[1; 10^{22}]$  и ОП =  $\pm 8\%$ , т.е. не хуже, чем у (4.3);

$a = 1$  для отрезка  $[10^{22}; 10^{61}]$  и ОП почти как у формулы (4.4).

Учитывая формулу (25.2), примем *RT-гипотезу*: масштабный фактор  $R$  «отражает» параметр  $\ln(T_{max})$ , а время  $t$  «отражает» параметр  $\ln N$ .

Тогда формула (25.2) означает, что  $R \approx a \cdot t^{2/3}$ . Таким образом, мы получаем «отражение» реального закона  $R \sim t^{2/3}$ , правда, характерного только для современной Вселенной (эквивалентной отрезку  $[10^{56}; 10^{61}]$ , см. гл. 1).

В начале натурального ряда (в ранней Вселенной) не удастся обнаружить ни экспоненциального роста  $R$  со временем  $t$ , ни закона  $R \sim t^{1/2}$ . Можно только добавить, что на отрезке  $[6; 840]$  с ОП =  $\pm 8\%$  работает формула:

$$\ln(T_{max}) \approx 0,4163 \cdot \ln N + 0,7237, \quad (25.3)$$

т.е. ещё можно «выделить» линейный участок, где  $R \approx 0,4163 \cdot t + 0,7237$ , как грубое приближение к участку экспоненциального роста  $R$ .

3). Что в мире чисел «отражает» параметр Хаббла  $H$ ?

Соглашаясь с *RT-гипотезой* и формулой (25.2) мы получаем «отражение» параметра Хаббла  $H_n$  для  $n$ -го верхнего лидера из частых миров:

$$H_n \equiv V_n/R_n, \quad \text{где} \quad V_n \equiv dR/dt \approx (R_{n+1} - R_n)/(t_{n+1} - t_n). \quad (25.4)$$

где  $R_n \equiv \ln(T_{max})$ ;  $t_n \equiv \ln N$ ;  $T_{max}$  – тип  $n$ -го верхнего лидера  $N$  из частых миров (при  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  имеем  $N = 2, 6, 12, 24, \dots$  и  $T_{max} = 2, 4, 6, 8, \dots$ ).

В сингулярности масштабный фактор  $R$  испытывает сильнейшие флуктуации (см. гл. 26). Нечто подобное происходит и в мире чисел. Поэтому, получаемые  $H_n$  образуют шлейф точек (см. рис. 25.2), а мы заменяем точки линией тренда на графике  $H_n = f(\ln N)$ , уравнение которой:

$$H \sim (\ln N)^{-1}. \quad (25.5)$$

Значит, как и в космологии, величина, обратная  $H$ , дает время (ведь у нас  $\ln N \equiv t$ ). Формулу (25.3) сравните с формулой  $H \sim N^{-1}$  (см. гл. 21, рефлексия №1, п. 9), которая приводила к соотношению  $H \sim \sqrt{\Lambda}$  (а теперь его получить не удастся).

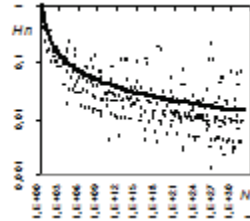


Рис. 25.2.  $H$  в мире чисел

4). Если принять  $RT$ -гипотезу, то можно получить график, аналогичный приведенному на рис. 25.1. Суть «отражения»: касательная, проведенная к графику  $R=f(t)$  в точке  $t^* \approx \ln(10^{61})$ , пересечет горизонтальную ось времени в точке  $x \approx \ln(10^{-30})$ , для которой окажется, что  $x \approx -t^*/2$ .

5). В законах роста масштабного фактора  $R$  степень равна  $1/2$  и  $2/3$ , но именно числа  $1/2$  и  $2/3$  присутствуют в важных законах Пирамиды. Так, количество всех камней в Пирамиде устремляется к выражению

$$K \sim (1/2) \cdot N^{2/1} \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (25.6)$$

Общая масса черных камней в Стволе  $m^*$  (т.е. сумма малых делителей в Стволе) устремляется к количеству всех камней в Стволе  $k$ , причем

$$m^* \sim (2/3) \cdot N^{3/2} \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (25.7)$$

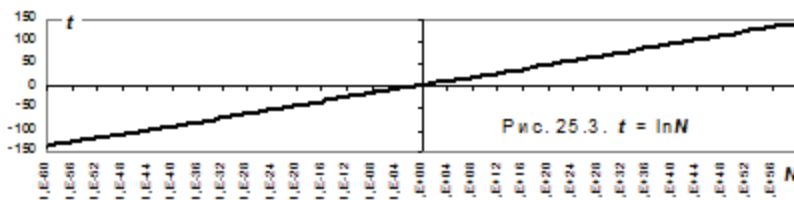
Однако как нам “обыграть” числа  $1/2$  и  $2/3$  в рамках ГТНЧ?

**Замечание.** Из  $RT$ -гипотезы следует, что есть два времени:  $t$  (доступное нам в ощущениях?) и  $N$ , причем  $t = \ln N$ . И если время  $N$  – равномерное (абсолютное, как натуральный ряд), то время  $t$  – ускоряется (см., скажем, геохронологию [9, 38]). И какой бы отрезок времени  $\Delta N = 10^m$  (отображаемый в  $\Delta t$ ) мы не брали от зарождения Вселенной (от  $N=1$  и  $t=0$ ) – в современную эпоху  $\Delta N$  (став  $\delta t$ ), длится в  $M$  раз короче, причем верна такая оценка:

$$M \equiv \Delta t / \delta t \approx 10^{61} \cdot \ln(10^m) \cdot \exp(-2,30258 \cdot m). \quad (25.8)$$

Так, 1-ая секунда ( $\Delta N = 10^{43}$  эви по оси абсциссе) из биографии Вселенной отображалась в  $\Delta t$  (по оси ординат), а одна “наша” секунда отображается в  $\delta t$  и  $M \equiv \Delta t / \delta t \approx 10^{20}$ , а 1-ый год длился в  $M \sim 10^{13}$  раз дольше, чем он длится теперь. Итак, формула (2.3) говорит о соотношении двух времен ( $N/t$ )?

У Вселенной могла быть богатая *предыстория*: при  $0 \leq n \leq 1$  (перед  $N$ ) текло отрицательное время  $-\infty < t \leq 0$  (см. рис. 25.3). Или, быть может, всё иначе – Вселенная эволюционирует одновременно в *двух направлениях*: вправо от 1 ( $N$  растет) и влево от 1 ( $n$  убывает). Причем обе области связаны (взаимодействуют) друг с другом (см. гл. 8).



## 26. ДИСКРЕТНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Вселенная начинает расширяться из *сингулярности* – области, где царят планковские величины (см. табл. 24.1). При столь колоссальной энергии, температуре, давлении и плотности для описания происходящего надо привлекать *квантовую теорию* гравитационного поля, в которой одно из основных понятий – это *нулевые флуктуации квантов* данного поля. Но поле в гравитации – метрика пространства-времени, т.е. сама геометрия. Поэтому нулевые флуктуации геометрии образно назвали «*пенной*» *пространства-времени*. В сингулярности масштабный фактор  $R$  (см. гл. 25) испытывает сильнейшие флуктуации. Это флуктуации самого пространства-времени (классического пространства-времени ещё нет), поэтому эту область условно ещё называют «*ничто*». Так представляют сегодня сингулярность.

К сожалению, ученым пока не удастся сформулировать теорию квантовой гравитации. А дело в том, что её построение эквивалентно построению квантовой (дискретной) геометрии пространства-времени. При этом возникает много трудностей (скорее формально-математических).

Например, в квантовой механике нет понятия «траектория» частицы, а есть понятие *вероятности* найти выбранную частицу в заданной точке пространства-времени. Приближением к понятию «классическая траектория» здесь будет являться *среднее значение* координаты частицы по квантовомеханическим реализациям. Реальные положения частицы будут располагаться вокруг классической траекторией, построенной по средним значениям. В теории поля понятие частицы заменяют понятием величины поля (с некой амплитудой, фазой, частотой). В квантовой теории поля мы имеем дело с вероятностями амплитуды, фазы и частоты. А поскольку в теории квантовой гравитации роль поля играет сама геометрия, то в этой теории необходимо работать с вероятностью иметь какую-либо геометрию пространства-времени (и уже *дискретного*, а не непрерывного).

В квантовой теории поля вероятность рождения Вселенной *из ничего* вычисляется подобно подбарьерному (туннельному) прохождению  $\alpha$ -частицы в атомное ядро (при котором у  $\alpha$ -частицы не существует классической траектории). То есть *переход* от сингулярности (когда масштабный фактор равен нулю,  $R=0$ ) к однородной и изотропной геометрии (когда  $R=H^{-1}$ ) рассматривается как некий квантовый процесс. И существует, например, так



называемое *решение де Ситтера*, при котором удалось вычислить вероятность указанного перехода за конечное время  $\tau^1$ . Причем, наиболее вероятно рождение Вселенной с радиусом кривизны порядка планковской длины  $l_{pl} \sim 1,6 \cdot 10^{-35}$  м.

Дискретность пространства-времени («пена» и прочие эффекты квантовой гравитации) должна проявляться только при планковских масштабах длины и времени ( $l_{pl}$  и *эви*, см. табл. 24.1). А глубина проникновения ученых в микромир «только»  $L=10^{-18}$  м ( $10^{-26}$ с или  $10^{17}$  *эви*, см. гл.1). Соотношение масштабов  $L/l_{pl} = 10^{17}$  – пока безнадежно огромно и лишает нас малейшей возможности увидеть картину микромира ( $10^{17}$  равно количеству всех секунд в возрасте Вселенной). При таком гигантском соотношении  $L/l_{pl}$  пространство-время выглядит как непрерывное, без всякого намёка на дискретность (“пену”). Ведь даже пролетая над тайгой на высоте  $H \sim 10$  км, мы видим только ровный зеленый ковер, а не нагромождение деревьев ( $h \sim 10$  м), хотя  $H/h = 10^3$  на 14-ть (!) порядков меньше, чем  $L/l_{pl} = 10^{17}$ .

Считается, что сингулярность длится всего несколько планковских времен, скажем 10 *эви*, и это для нас невообразимо меньше, чем один миг. Однако, с учетом *RT*-гипотезы (см. Замечание в конце гл. 25), самые первые 10 *эви* в жизни Вселенной могли длиться в  $M \sim 10^{60}$  раз дольше современных нам 10 *эви*. Вообще, *время* – это самое таинственное понятие в физике.

### Рефлексия №6 («отражения» дискретности пространства-времени).

1). Область квантовой эволюции Вселенной (область «ничто») в мире чисел может «отражать» отрезок  $[0; 1]$ , который «предшествует» натуральному ряду. В этом отрезке бесконечно много бесконечно малых величин (вещественных чисел  $0 \leq n \leq 1$ ). Ещё Эйлера поразил тот факт, что мир натуральных чисел непосредственно связан с указанным отрезком (см. гл. 8). По сути, Эйлер первым обнаружил «туннельный переход» в мире чисел, но объяснил его просто как некий результат математических «уловок».

2). В сингулярности не применимы любые законы физики...

В самом начале натурального ряда также, безусловно, существует *сингулярность* – отрезок  $[1; N^*]$ , на котором буквально все формулы *теории чисел* и ГТНЧ практически «не работают». Например, важнейшая формула теории чисел  $K \sim N/\ln N$  (см. гл.2) при  $N=1$  просто теряет законный смысл (деление на ноль в математике запрещено). Условно можно считать, что правая граница сингулярности равна  $N^* \sim 10$  *эви* (но и после этого многие формулы в мире чисел изрядно «грешат», см. гл. 28, рефлексию №8, п.2).

---

<sup>1</sup> У физиков есть такая гипотеза: Вселенная сначала пребывала в стационарном состоянии (оно описывается, например, теорией суперструн, см. гл. 27), причем, как угодно долго; а потом произошел самопроизвольный распад из сверхплотного состояния (с планковскими энергиями или даже выше), аналогичный спонтанному  $\alpha$ -распаду ядра. Если гипотеза верна, то при рождении Вселенной из сингулярности роль *Создателя* оказывается лишней.

На отрезке  $[1; N^*]$  “зарождается” *неимоверно сложная* структура мира чисел, причем самым *элементарнейшим* образом  $(1+1+1+\dots)$ .

3). Нет сомнений в том, что ряд натуральных чисел  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  – это *дискретный* объект. У математиков также нет сомнений и в *фундаментальном* значении натуральных чисел (теории чисел). А вот, физики, увы, пока равнодушны к натуральным числам, хотя и признают, что математическим знанием исчерпываются все современные знания относительно различных аспектов физической реальности. Ведь истины математики – абсолютны! Например, в иных цивилизациях (у далеких звезд) может быть всё по-другому, кроме математики. У инопланетян аксиомы, теоремы, теории (и что там ещё у них есть) должны приводить к тем же результатам, что и наша математика (языки и формы представления значения не имеют).

4). На рис. 14.1 показаны все делители ( $d_i$ ) числа  $N$ . Делители выстраиваются на графике  $\ln(d_i) = \varphi(i)$  в виде волнистой линии (тильды), где  $i = 1, 2, 3, \dots, 10080$  – номер делителя. Но если центральный фрагмент тильды рассмотреть в *большем* масштабе, то линия «рассыпится», и мы увидим картину как на рис. 14.2: делители (точки) располагаются вокруг воображаемой линии тренда, построенной по точкам (центрального фрагмента).

Подобную картину («колебание» делителей) можно наблюдать у множества натуральных чисел. Более того, в рамках ГТНЧ мы то и дело сталкиваемся именно с «колебаниями» того или иного параметра. Поэтому очень часто для описания мира чисел удобней всего использовать язык *теории вероятности* (см. гл. 13 ÷ 17). Всё это напоминает вероятностный подход к описанию геометрии реального пространства-времени.

## 27. «ТЕОРИЯ ВСЕГО» (СУПЕРСТРУНЫ)

*Теория суперструн* – это одна из новейших теорий в физике и ещё далека от своего завершения. Благодаря своей универсальности она вполне может стать «Теорией всего». Но даже сейчас эта теория начинает решать казалось бы тупиковые парадоксы теории квантовой гравитации.

Основной вопрос к теории суперструн – структура сингулярности. Существует ли стационарное образование, которое можно ассоциировать с вакуумным состоянием в этой теории? Проблема эта очень трудная. Кроме того, теорию суперструн пока нельзя проверить экспериментально в лаборатории (но не исключена проверка в предельных черных дырах).

В теории струн элементарные частицы представляются в виде одномерного объекта, похожего на струну. Один размер у суперструны мал, порядка планковского размера  $\sim 10^{-35}$  м, а второй размер – исполинский (более  $10^{20}$

м). Существуют моды колебаний суперструн, частота каждой моды определяет частицу и её энергию. Известные частицы интерпретируются как различные моды колебаний единой струны.

Эти струны могли образовываться в ранней Вселенной (теоретиками механизм уже описан). Они являлись некими зародышами: тяжелыми, массивными. На них потом якобы «сваливается» вещество, и в результате этого образуются тела из обычного вещества (галактики и их скопления).

В теории суперструн силы природы действуют в мире, расширенном до большего числа измерений. Причем, в обычных условиях мы не замечаем 6 пространственных измерений, т.к. они «свернуты» («скрыты»). Их радиус кривизны менее  $10^{-19}$  м (до  $10^{-35}$  м), у 3-х других измерений радиус кривизны заведомо больше чем  $10^{26}$  м (характерный размер нашей Вселенной). Взаимодействий (сил природы) в таком мире гораздо больше, чем в привычном нам 4-х мерном мире. Многие из них можно отождествлять с привычными нам частицами и полями. Гравитация включается в теорию суперструн естественным образом, как одна из степеней свободы.

По словам академика В. Рубакова, эксперименты по измерению анизотропии *реликтового излучения* выходят на новый этап (точность измерений – до тысячных долей процента от  $2,7^\circ\text{K}$ ), что позволит через несколько лет понять работает или нет теория струн (сейчас у ряда ученых она популярностью не пользуется). Если не работает, то это означает, что этих струн (если они вообще существуют) во Вселенной немного, и не они определяют, из чего произошли все известные структуры (состоящие из обычного вещества). В этом случае последние произошли просто в результате нарастания акустических волн, которые ходили в плазме ранней Вселенной. Потом за счет гравитационного притяжения, неустойчивости образовывались галактики и их скопления – в этом ученые сегодня твердо уверены.

Но в любом случае струны вполне могут быть обнаружены. И это будет гигантским делом, т.к. речь идет о масштабах энергии  $10^{15} \div 10^{16}$  ГэВ (погонная плотность энергии у струн). Для примера: самый мощный ускоритель у физиков – это всего-навсего  $1,4 \cdot 10^4$  ГэВ. *Космическая струна* – это «веревка» диаметром  $10^{-30}$  м ( $10^5$  планковских длин) и очень большой длины (никто не знает какой именно), заведомо больше десятков и сотен килопарсек ( $1$  парсек =  $3$  световых года =  $3,1 \cdot 10^{16}$  м). Причем очень массивная! Погонный вес этой «веревки» –  $10^{18} \div 10^{19}$  кг/м длины (т.е.  $600$  км такой нити могут весить как наша Земля!). Благодаря этому струну можно обнаружить исключительно путем гравитационного взаимодействия.

Обнаружение космических струн будет означать, что на масштабах энергий  $10^{15} \div 10^{16}$  ГэВ имеется нетривиальное и не обнаруженное до сих пор

свойство частиц, полей, которое и формирует эту струну. Это подтвердило бы, что физика даже на таких масштабах более или менее похожа на известную нам физику.

### Рефлексия №7 (очень зыбкие «отражения», только общие идеи).

1). Посмотрите на Пирамиду (рис. 5.1). Каждый вертикальный столбец – это некая струна («размером» 1 *эви* или  $10^{-35}$  м). Каждая струна имеет свои «моды колебаний» – в каждом столбце черные камни чередуются своим шагом (он равен номеру струны, струна №1 – вся черная). «Закрепление» струн (их черные «макушки») образуют лесенку, уходящую вниз под  $45^\circ$ . Каждое натуральное число  $N$  (в столбце “ $N$ ”) – это неповторимый набор его делителей, т.е. черных камней в  $N$ -ой строке Пирамиды или, иначе говоря, результат указанного «закрепления» всех струн и сочетания их «мод колебаний». Таким путем можно построить «теорию струн» в мире чисел?

2). Исходя из предыдущего пункта, рассуждаем дальше. Пусть масса Вселенной равна  $M \sim 10^{52}$  кг (см. [9], стр.188), а плотность струны  $\rho \sim 10^{19}$  кг/м длины (см. выше данные В. Рубакова). Тогда общая длина всех струн во Вселенной будет равна  $L_1 = M/\rho \sim 10^{52}/10^{19} \sim 10^{33}$  м  $\sim 10^{33}$  м  $\cdot 10^{35}$  *эви*  $\sim 10^{68}$  *эви* (после *эви*-конвертации, см. гл. 1). Заметим, что длина  $L_1$  соответствует единичному диаметру струн, т.е.  $d_1 \sim 1$  *эви*. Пусть диаметр струн равен  $d \sim 10^5$  *эви* (см. выше), тогда длина всех струн во Вселенной равна  $L = L_1/d \sim 10^{68}/10^5 \sim 10^{63}$  *эви*. Что за число ( $10^{63}$ ) мы получили в итоге? Согласно табл. 5.2. количество черных камней в Пирамиде высотой  $N = 10^{61}$  *эви*, или, что тоже самое, общее количество всех делителей у всех натуральных чисел на Большом отрезке  $[1; 10^{61}]$  равно именно числу  $10^{63}$ .

3). Можно «обыграть» канонические разложения натуральных чисел (см. гл. 2):  $N = P_1^a \cdot P_2^b \cdot P_3^c \cdot \dots \cdot P_n^m$ . Скажем, простые числа  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  – некие «струны», показатели степени  $a, b, c, \dots, m$  – некие «моды колебаний» (или наоборот?).

4). Быть может, факты из мира чисел, перечисленные в рефлексии №14 (гл. 30) могут в какой-то мере «отражать» идеологию теории струн.

Автор не берется дальше «гадать на кофейной гуще». Ясно одно, что «отражение» теории струн – это некий нетрадиционный, неожиданный взгляд на структуру натурального ряда, взгляд под новым углом зрения, который раскроет «все на свете» тайны архисложного мира чисел.

## 28. ЭТАПЫ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ

В табл. 28.1. приведены основные эпохи (стадии, этапы) в биографии нашей Вселенной. Точнее говоря, приведены моменты *начала* этих этапов

от зарождения Вселенной (в секундах или годах, а также в *эви*, см. гл.1). Ещё указана температура ( $^{\circ}K$ ), характерная для каждой эпохи (стадии).

Ниже приводится очень краткая характеристика каждой эпохи.

**Эпоха рождения Вселенной.** Здесь, согласно теории так называемого “Большого взрыва”, происходит зарождение классического пространства-времени из пространственно-временной “пены”. Вселенная начинает расширяться: её объём растёт, а температура понижается. Когда плотность вещества, убывая, достигает планковского значения  $10^{93}$  г/см<sup>3</sup> начинают проявляться эффекты квантовой (или струнной) гравитации. Эта эпоха длится несколько планковских времен (*эви*). См. также гл. 26.

**Стадия инфляции.** До того, как Вселенная начала расширяться по законам инфляции все наблюдаемая её часть умещалась в сфере диаметром  $10^{-29}$  м, а её масса составляла  $\sim 10^4$  г (т.е. плотность была колоссальная). Из такого состояния Вселенная начала раздуваться и уже через  $10^{-33}$  с приобрела размеры порядка сантиметра, а массу порядка  $10^{57}$  г. И эта масса была значительно больше, чем в настоящее время, т.к. большая часть массы-энергии при расширении Вселенной «ушла» в потенциальную энергию гравитационного поля.

Стадия инфляции характеризуется предельно сильным *отрицательным* давлением (состоянием фальшивого вакуума), когда ещё *не работают сами законы* обычной гравитационной физики. Вещество становится источником отталкивания. Вселенная “разгоняется” и приобретает большую кинетическую энергию, за счет которой в дальнейшем она будет расширяться по инерции (хаббловское расширение). См. также гл. 23, 25.

Температура очень быстро падает до нуля (стадия инфляции – это, в основном, “холодная стадия”). Реальных частиц практически нет, материя

Таблица 28.1. Основные эпохи (стадии) эволюции Вселенной

| №  | Наименование эпохи (стадии)                 | $t$ , <i>эви</i> | Начало эпохи ( $t$ )    | $^{\circ}K$ |
|----|---|------------------|-------------------------|-------------|
| 1  | Рождение Вселенной («Большой взрыв»)        | 1                | $10^{-43}$ с            | $10^{32}$   |
| 2  | Стадия инфляции (скалярного поля)           | $10^1$           | $10^{-42}$ с            | изменяется  |
| 3  | Рождение вещества (обычной материи)         | $10^7$           | $10^{-36}$ с            | $10^{29}$   |
| 4  | Рождение избытка вещества (бариосинтез)     | $10^8$           | $10^{-35}$ с            | $10^{28}$   |
| 5  | Электрослабый фазовый переход               | $10^{33}$        | $10^{-10}$ с            | $10^{17}$   |
| 6  | Рождение протонов и нейтронов               | $10^{39}$        | $10^{-4}$ с             | $10^{11}$   |
| 7  | Эпоха нуклеосинтеза легких ядер ( $A < 5$ ) | $10^{43}$        | 1 с                     | $10^{10}$   |
| 8  | Эпоха доминирования скрытой материи         | $10^{53}$        | 700 лет                 | 300000      |
| 9  | Эпоха образования (рекомбинации) водорода   | $10^{56}$        | $7 \cdot 10^5$ лет      | 3000        |
| 10 | Образование сверхскоплений галактик         | $10^{58}$        | $\sim 10^8$ лет         | 30          |
| 11 | Современная эпоха (настоящее время)         | $10^{61}$        | $1,3 \cdot 10^{10}$ лет | 2,725       |

представлена одним или несколькими скалярными полями (второе название эпохи инфляции – эпоха *доминирования скалярного поля*). На стадии инфляции из вакуумных квантовых флуктуаций скалярного поля рождаются возмущения плотности (“зародыши” будущих галактик и их скоплений), а из квантовых флуктуаций метрики – гравитационные волны.

Фальшивый вакуум обладает колоссальной плотностью потенциальной энергии ( $\sim 10^{98}$  эрг/см<sup>3</sup>), но такое состояние вещества неустойчиво и довольно быстро кончается (состояние распадается). Запасенная в фальшивом вакууме потенциальная энергия выделяется в виде рождения частиц и их кинетической (тепловой) энергии. Образуется горячая плазма, состоящая из элементарных частиц. То есть в конце эпохи рождается *обычная материя*.

**Рождение избытка вещества** над антивеществом (бариоситез). Эта эпоха пока далека от понимания: теорией хватает, а вот экспериментальные данные почти отсутствуют. Теория различает высокотемпературный бариосинтез и низкотемпературный бариогенез, а между ними лежит так называемая «пустыня взаимодействий», т.е. физики не усматривают на этом этапе биографии Вселенной ничего интересного. Наблюдения Вселенной в современную нам эпоху показывают, что вещество явно преобладает над антивеществом.

**Электрослабый фазовый переход.** В эту эпоху слабые и электромагнитные взаимодействия, бывшие до этого момента времени *едиными* взаимодействиями, расщепляются на обычные электромагнитные взаимодействия (основной их квант – фотон), и слабые взаимодействия с участием нейтрино (основные кванты которых –  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозоны).

**Рождение протонов и нейтронов.** До этой эпохи во Вселенной существовал так называемый “кварковый суп”. Но с расширением Вселенной и падением температуры кварки начинают соединяться, образуя протоны и нейтроны. В дальнейшем в обычных условиях кварки и глюоны (переносчики взаимодействия кварков) как свободные частицы уже не существуют (явление “невыветания кварков” или конфаймента).

**Эпоха нуклеосинтеза** легких ядер. На этой стадии синтезируются легкие ядра с атомным весом  $A < 5$  (гелий, литий и их изотопы), более тяжелые ядра (например, железо) синтезируются позже в звездах. Вселенная в эту эпоху была подобна сверхбольшому термоядерному реактору, в котором «варилось» привычное нам вещество. Эта эпоха длится от 1 до  $\sim 100$ -й секунды и условно завершает собой “раннюю Вселенную”.

**Эпоха доминирования скрытой материи.** Начиная с этой эпохи, растут малые возмущения плотности вещества, из которых в будущем появятся галактики, звезды, планеты и проч. В настоящее время наш мир на 90% состоит из вещества непонятной природы (*скрытой материи*, см. гл. 21).

**Эпоха образования (рекомбинации) водорода.** До этой эпохи во Вселенной существует горячая плазма, состоящая из частиц скрытой материи, протонов, электронов, фотонов и некоторого количества легких ядер. Когда начинается эпоха рекомбинации, то протоны и электроны объединяются и образуют водород – самый распространенный элемент во Вселенной.

Одновременно с рекомбинацией исчезает плазма (в ней фотоны не распространяются свободно) и Вселенная становится прозрачной. Фотоны, рассеянные последний раз, доходят до наблюдателя, практически не взаимодействуя с веществом по дороге. Эти фотоны в наше время образуют реликтовое излучение с температурой  $2,725^\circ \text{ К}$ .

**Эпоха образования сверхскоплений галактик.** Сначала во Вселенной образуется крупномасштабная структура – сверхскопления галактик. А уже после этого идет образование обычных галактик, звезд, планет и проч.

Основные характеристики вещества – это плотность, давление и температура. Именно они распределены во Вселенной однородно и изотропно, правда, это выявляется в масштабах начиная с 200 МПк ( $6 \cdot 10^{24}$  м). В меньших масштабах контраст плотности уже значителен.

**Рефлексия № 8** («отражения» двух эпох во Вселенной).

1). «Отражение» 1-й эпохи во Вселенной – см. рефлексию № 6 (п.1 и 2).

2). «Отражение» 2-й эпохи (стадии инфляции), которая заканчивается при  $t \sim 10^7$  эви, состоит в следующем. Буквально все формулы ГТНЧ (да и теории чисел), в которых аргумент  $N$  является границей отрезка  $[1; N]$ , не работают при  $N < 10^7$ . То есть на отрезке  $[1; 10^7]$  относительная погрешность (ОП) многих формул очень большая, а ряд формул «требует» введения поправок [как формула (2.5)], или даже теряет смысл [как формула (2.3) при  $N=1$ ]. Но при  $N > 10^7$  у этих формул ОП уменьшается, т.е. формулы начинают работать [см. оценку ОП, например, для (2.9) и (2.10)].

Ранее [9, 12] в качестве «отражения» стадии инфляции предлагалось брать число  $N^* \sim 10^{12}$  (хотя у разных формул, вообще говоря, своя граница  $N^*$ ). И делалось это скорее из эстетических соображений. Просто в теории чисел есть такая теорема: всякое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем 800000 простых чисел. И нетрудно убедиться, что сумма первых 800000 простых чисел (наименьшая из всех возможных указанных сумм) равна  $\sim 10^{12}$ . Столь красивая теорема и «размытость» правой границы  $N^*$  привели к гипотезе:  $N^* \sim 10^{12}$ .

## 29. ВИДОВОЕ МНОГООБРАЗИЕ ВО ВСЕЛЕННОЙ

В данной главе очередная **Рефлексия № 9** тесно переплетена с тем, что она «отражает», поэтому ниже идет своеобразный «смешанный» текст.

При натуральном разбиении *верхних лидеров* имеют место логнормальные распределения их делителей. Поэтому в конце Большого отрезка (в “настоящее время”) у старшего (последнего) верхнего лидера наибольшая доля всех делителей находится в центральном интервале. Именно там вероятность встречи с делителями наибольшая ( $P_{max} \approx 0,034$ , см. гл. 14, рис. 14.3).

Таблица 29.1. Основные структурные единицы Вселенной

| Структурная единица   | В эви               | В секундах           | В годах              | В метрах             |
|-----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Планковское время     | 1                   | $5,4 \cdot 10^{-44}$ | $1,7 \cdot 10^{-51}$ | $1,6 \cdot 10^{-35}$ |
| Кварки, лептоны       | $6,2 \cdot 10^{15}$ | $3,3 \cdot 10^{-28}$ | $1,1 \cdot 10^{-35}$ | $1,0 \cdot 10^{-19}$ |
| Глубина проникновения | $6,2 \cdot 10^{17}$ | $3,3 \cdot 10^{-26}$ | $1,1 \cdot 10^{-34}$ | $1,0 \cdot 10^{-18}$ |
| Протоны, нейтроны     | $1,9 \cdot 10^{20}$ | $1,0 \cdot 10^{-23}$ | $3,2 \cdot 10^{-31}$ | $3,0 \cdot 10^{-15}$ |
| Ядра атомов           | $6,2 \cdot 10^{20}$ | $3,3 \cdot 10^{-23}$ | $1,1 \cdot 10^{-30}$ | $1,0 \cdot 10^{-14}$ |
| Атомы                 | $6,2 \cdot 10^{24}$ | $3,3 \cdot 10^{-19}$ | $1,1 \cdot 10^{-26}$ | $1,0 \cdot 10^{-10}$ |
| Органические молекулы | $6,2 \cdot 10^{27}$ | $3,3 \cdot 10^{-16}$ | $1,1 \cdot 10^{-23}$ | $1,0 \cdot 10^{-7}$  |
| Живые клетки          | $6,2 \cdot 10^{29}$ | $3,3 \cdot 10^{-14}$ | $1,1 \cdot 10^{-21}$ | $1,0 \cdot 10^{-5}$  |
| Человек               | $1,0 \cdot 10^{35}$ | $5,4 \cdot 10^{-9}$  | $1,7 \cdot 10^{-16}$ | 1,62                 |
| Астероиды             | $6,2 \cdot 10^{39}$ | $3,3 \cdot 10^{-4}$  | $1,1 \cdot 10^{-11}$ | $1,0 \cdot 10^5$     |
| Планеты               | $6,2 \cdot 10^{41}$ | $3,3 \cdot 10^{-2}$  | $1,1 \cdot 10^{-9}$  | $1,0 \cdot 10^7$     |
| 1 секунда             | $1,9 \cdot 10^{43}$ | 1                    | $3,2 \cdot 10^{-8}$  | $3,0 \cdot 10^8$     |
| Звезды                | $6,2 \cdot 10^{43}$ | $3,3 \cdot 10^0$     | $1,1 \cdot 10^{-7}$  | $1,0 \cdot 10^9$     |
| Планетные системы     | $6,2 \cdot 10^{45}$ | $3,3 \cdot 10^2$     | $1,1 \cdot 10^{-5}$  | $1,0 \cdot 10^{11}$  |
| 1 год                 | $5,9 \cdot 10^{50}$ | $3,2 \cdot 10^7$     | 1                    | $9,5 \cdot 10^{15}$  |
| Звездные скопления    | $6,2 \cdot 10^{52}$ | $3,3 \cdot 10^9$     | $1,1 \cdot 10^2$     | $1,0 \cdot 10^{18}$  |
| Галактики             | $6,2 \cdot 10^{55}$ | $3,3 \cdot 10^{12}$  | $1,1 \cdot 10^5$     | $1,0 \cdot 10^{21}$  |
| Скопления галактик    | $6,2 \cdot 10^{57}$ | $3,3 \cdot 10^{14}$  | $1,1 \cdot 10^7$     | $1,0 \cdot 10^{23}$  |
| Наша Вселенная (БО)   | $8,0 \cdot 10^{60}$ | $4,3 \cdot 10^{17}$  | $1,4 \cdot 10^{10}$  | $1,3 \cdot 10^{26}$  |

У центрального интервала (самого «густонаселенного» разными делителями) границы такова:  $(1,4 \div 3,7) \cdot 10^{-13}$  с или  $4 \cdot 10^{-5} \div 10^{-4}$  м (см. гл. 1).

В реальном мире наибольшее видовое многообразие, вероятно, также приходится на интервал размеров  $4 \cdot 10^{-5} \div 10^{-4}$  м. Например, размер  $10^{-5}$  м – это характерный размер живых клеток (сложнейших упорядоченных структур), из которых «построено» всё живое на Земле (см. табл. 29.1). Размер  $10^{-4}$  м характерен<sup>1</sup> для наименьших живых организмов нашей планеты. Напомним, что живая материя считается «венцом» творения природы.

<sup>1</sup> Слово «характерен» говорит о немалой степени условности. Например, в данном случае, можно добавить, что мельчайшие известные (к 1984 г.) живые объекты на Земле – это *вириды*, которые состоят менее чем из 10000 атомов [25]. То есть вириды порядка  $10^{-9}$  м.



Всё живое на Земле состоит из *органических молекул*, поэтому можно предположить, что вершину пирамиды видового многообразия структур в масштабах всей Вселенной, венчает именно живая материя (с характерным размером клеток  $10^{-5} \div 10^{-4}$  м), которая наиболее богата «красками» (а в мире чисел здесь больше всего делителей). Ведь ученые насчитали уже порядка  $10^{11} \div 10^{12}$  типов органических молекул<sup>2</sup> (но на Земле только около 50 из них участвуют в фундаментальных процессах жизнедеятельности) [25].

В свете именно *такого* понимания графика на рис. 14.3 (вероятность **P** говорит о «видовом» многообразии структур с характерным размером **L**) интересно применить к указанному графику «правило трех сигм» (где сигма  $\sigma \equiv \sqrt{D}$ ; см. конец гл.12). Результат по трём диапазонам представлен в табл. 29.2, где **K** – это процент от всех видов природных объектов, чей характерный размер попадает в указанный диапазон значений **L** (в метрах).

Рассмотрим диапазоны размеров, которые указаны в табл. 29.2.

Наибольшее «видовое» многообразие (68,3% всех «видов») приходится на «центральный» диапазон: от размера атомов ( $\sim 10^{-10}$  м, науке известно свыше 100 различных атомов) – до размера крупных животных на Земле (где одной только фауны было около 500 млн. видов за всю историю).

Таблица 29.2

| <b>K</b> | <b>L</b> (м)            |
|----------|-------------------------|
| 68,3%    | $10^{-10} \div 4$       |
| 95,4%    | $10^{-14} \div 10^6$    |
| 99,7%    | $10^{-20} \div 10^{10}$ |

Около 27,1% (т.к.  $95,4 - 68,3 = 27,1$ ) «видов» приходится на два диапазона. Во-первых, от размера атомных ядер ( $\sim 10^{-14}$  м, это различные объединения нуклонов) – до размера атомов. Во-вторых, от размера крупных животных Земли – до размера крупных астероидов и планет ( $\sim 10^6$  м). В этих диапазонах разных «видов» уже меньше, чем в «центральном» диапазоне.

Всего 4,3% (т.к.  $99,7 - 95,4 = 4,3$ ) «видов» приходится на следующие два диапазона. Во-первых, от размера  $10^{-20}$  м (здесь 6 кварков и 6 лептонов, а что ниже *глубины проникновения* в микромир – неизвестно, см. гл. 1) – до размера атомных ядер. Во-вторых, от размера планет – до размера больших звезд ( $\sim 10^{10}$  м). В указанных диапазонах «видов» ещё меньше, чем в двух предыдущих диапазонах.

И только 0,3% «видового» многообразия приходится на крайние диапазоны. Во-первых, на размеры менее  $10^{-20}$  м (гипотетические прекварки, а в фундаменте всего сущего – «пена» пространства-времени на предельном размере  $10^{-35}$  м). Во-вторых, на размерах свыше  $10^{10}$  м: скопления звезд ( $\sim 10^{18}$  м), которые образуют галактики ( $\sim 10^{21}$  м), а те, в свою очередь, также

<sup>2</sup> Справочник, носящий имя русского химика Ф. Ф. Бейльштейна (1838–1906) насчитывает 28 томов, где перечисляются все органические молекулы. С 1951 г. выпускается в Германии.

объединены в скопления ( $\sim 10^{23}$  м). Скопления галактик образуют сверхскопления, которые образуют цепочку сверхскоплений. А вот дальше ( $\sim 10^{26}$  м) иерархия образований, скорее всего, обрывается. Характерный размер нашей Вселенной  $\sim 1,3 \cdot 10^{26}$  метров (что соответствует возрасту около 13,7 млрд. лет или  $4,3 \cdot 10^{17}$  секунд). Крайние диапазоны совсем скудны по количеству «видов», их счет устремляется буквально к единице (правда, их важность вырастает до самого фундаментального значения).

Итак, «считанное» нами с графика (рис.14.3) логнормальное распределение из мира чисел качественно (а местами ещё точнее) повторяет закономерности реального «видового» многообразия: чем дальше мы уходим от характерного размера  $L=10^{-4} \div 10^{-5}$  м (вершина графика) в меньшую или большую стороны, тем меньше различных «видов» (разновидностей объектов природы) мы насчитываем во Вселенной.

Всё сказанное приводит к выводу: поскольку характерный размер  $L$  для живой материи расположен на вершине “видового” многообразия, то жизнь во Вселенной – явление обычное, заурядное. Очевидно, у многих звезд есть планетные системы, на которых процветают разные формы жизни<sup>1</sup>. Вероятнее всего, инопланетные организмы будут “построены” из живых клеток с характерным размером  $L \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$  м. Причем разумные существа по силе интеллекта, скорее всего, будут близки к нам, т.к. разум человека – это «средний» разум во Вселенной (см. гл. 30, рефлексия № 16).

### 30. МОЗАИКА ПАРАДОКСАЛЬНЫХ РЕФЛЕКЦИЙ

В данной главе приводится мозаика «отражений» (рефлекций, см. гл. 1) реального мира в самых разных его аспектах (продолжение гл. 21÷29).

#### Миром правит “Его Величество Случай”?

Нормальные и логнормальные распределения (см. гл. 12) удивительно широко встречаются во всех проявлениях природы. Только одно это обстоятельство дает нам право утверждать, что миром правит “Его Величество Случай”, что наша Вселенная построена на вероятности и т. д. [31].

---

<sup>1</sup> По итогам симуляции 85 планетных систем ученые допускают, что в нашей Галактике до 25% всех планетных систем пригодны для жизни. В сентябре 2004 г. впервые удалось *сфотографировать* планету у другой звезды, до которой 230 световых лет. Ярко красная планета по размерам близка к Юпитеру, но имеет твердую поверхность. Правда, высокая температура на планете ( $\sim 1000^\circ\text{C}$ ) почти исключает наличие жизни.

Издавна известны попытки объяснить это. Теоретическое обоснование исключительной роли нормального распределения дают *предельные теоремы* теории вероятности. Качественно соответствующий результат может быть объяснен следующим образом. Нормальное распределение служит хорошим *приближением* каждый раз, когда рассматриваемая *случайная* величина представляет собой сумму большого числа *независимых случайных* величин (подчиняющихся *каким угодно* законам распределения), причем максимальная из которых мала по сравнению со всей суммой. И чем большее количество случайных величин суммируется, тем точнее нормальное распределение приближается к реальному распределению в природе.

Следует заметить, что нормальное распределение может появляться также как *точное решение* некоторых задач (в рамках принятой математической модели явления). Так обстоит дело в теории случайных процессов (в модели броуновского движения). Классические примеры возникновения нормального распределения как точного: закон распределения ошибок наблюдения, закон распределения скоростей молекул.

**Рефлексия №10.** В мире чисел мы сплошь и рядом сталкиваемся с нормальными и логнормальными распределениями (и не только в связи с рассмотрением логнормальных чисел, см. гл. 13, 15, 16). Объяснение, приведенное выше, очевидно, в полной мере годится и для мира чисел. Вообще, следует признать, что очень часто язык *теории вероятности* – это лучший инструмент для описания структуры мира натуральных чисел.

### **Хаос во Вселенной – иллюзия нашего разума?**

Физиками в свое время была выдвинута концепция, допускающая, что среди первичного хаоса Вселенной был *заложен некий план* – *тонкая организация движений*. Возможно, огненный шар первых мгновений Вселенной лишь предстает нашему взгляду как беспорядок микроскопических движений – мы просто не способны различить скрытую согласованность поведения бесчисленного множества частиц. Возможно, во Вселенной существует скрытый порядок, “замаскированный” среди, казалось бы, беспорядочно движущихся ее составных частей. Все мгновения реального мира могут быть строго взаимоувязаны, т.е. картина мира строго детерминирована, определена. Однако за время существования Вселенной мгновение было так много ( $\sim 10^{61}$ ?), что ученые пока обходятся гипотезой о всеобщем Хаосе (правит Его Величество Случай, т.е. вероятностные законы).

**Рефлексия №11.** Формирование типа *T* у любого натурального числа *N* – это псевдослучайный процесс. Тип любого числа задан алгоритмом по-

строения Пирамиды, он словно «забетонирован» в Пирамиде (см. гл. 5). Бесконечные хитросплетения мира чисел (теория чисел – труднейший раздел высшей математики) скрывают за собой *элементарную* архитектуру Пирамиды, а также совершенно простые факты – дискретность и «непрерывное расширение» ряда натуральных чисел (см. рефлексии № 6, 5).

### Единство бесконечно большого и малого

Ещё академик М. А. Марков (1908 –1994) выдвинул гипотезу о том, что исчезающе малый *фридмон* с планковской массой  $\sim 10^{-8}$  кг (почти ничто) может заключать в себе... бесконечно большую вселенную [19].

В настоящее время установлено, что горловина, соединяющая почти замкнутое пространство и обычное бесконечное пространство (нашу Вселенную), с точки зрения наблюдателя в обычном пространстве представляет собой «черную дыру». Но наблюдателю внутри полузамкнутого пространства последняя представляется целой вселенной с большими размерами. А наша Вселенная с высокой степенью точности плоская, т.е. *бесконечная*. Может быть, конечно, что она и замкнутая, но только этот размер заметно больше видимой части Вселенной (то, что мы в принципе можем увидеть, существенно меньше, чем полный объем Вселенной).

А. Гус и А. Линде в результате исследований выяснили даже тот факт, что вселенную, по-видимому, можно создать искусственно (в т.ч. в лаборатории), в нашем почти плоском мире. И всё это благодаря тому, что возможно изменение свойств вакуума нашего пространства, а значит, и изменение физических свойств окружающего мира.

**Рефлексия №12.** Мир чисел наглядно демонстрирует: единица и бесконечность «соприкасаются» друг с другом. Подробно об этом сказано в [9, 12], а в качестве некой условной иллюстрации феномена обратимся к *белой Пирамиде*. К данному понятию нас приводят следующие рассуждения (см. рис. 5.1). Что находится справа от числа  $N=1$  на самой вершине нашей Пирамиды? Там черный камень с символом «1». А к этому черному камню... примыкает камень с символом « $+\infty$ ». Правда, последний просто не показан, как не показана вся *перевернутая вниз вершиной белая* Пирамида (белое поле на рис. 5.1.). Белая Пирамида – это перевернутая на  $180^\circ$  копия нашей Пирамиды. Таким образом, белая Пирамида является яркой иллюстрацией возможного «соседства» *единицы и бесконечности*. А тот факт, что Пирамида (натуральный ряд) – бесконечна, очевидно, сомнений не вызывает.

См. также рефлексии №3 и №6 (п.1).

## Загадочное явление дуализма

Физикам хорошо известен *дуализм корпускулярно-волновой*. Его суть: в основе квантовой теории лежит представление о том, что в поведении микроробъектов (микрочастиц) проявляются как корпускулярные, так и волновые черты. Например, свет, имеющий волновую природу, в ряде случаев обнаруживает сходство с потоком частиц (корпускул – фотонов). Корпускулярно-волновой дуализм объясняется в рамках *квантовой механики*.

**Рефлексия № 13.** Мир чисел также обнаруживает некий дуализм: при рассмотрении логнормального натурального числа  $N$  «под разными углами зрения», его структура обладает либо дискретными, либо непрерывными свойствами (всё зависит от способа рассмотрения, см. в конце гл. 15).

### «Ядерная демократия» (бутстрап)

В микромире, возможно, ВСЁ состоит из ВСЕГО, и тогда неверно искать «последнюю» элементарную частицу, её просто нет. Каждая частица оказывается бесконечно сложной. Все зависит от всего, и нет малых параметров. Такие воззрения получили название *«ядерной демократии»*, а механизм её обуславливающий обозначают словом *«бутстрап»* (от английского «зашнуровка», ведь каждая частица как бы связана единым «шнурком»). Причем понятия «ядерной демократии», бутстрапа идут вразрез с доктриной кварков, ведь при демократии не может быть частиц-аристократов, какими являются кварки и лептоны – «кирпичики» мироздания. Бутстрап – это очень сложное понятие, и считается, что его ещё не удалось сформулировать на строгом языке математики.

**Рефлексия №14.** Не исключено, что лучшее представление о бутстрапе нам дает именно мир натуральных чисел, где ВСЁ зависит от ВСЕГО и нет малых параметров. Это ярко иллюстрируют, например, следующие факты:

1). Формула Римана (2.12) для определения  $\pi(x)$  – количества всех *простых чисел* на отрезке  $[1; x]$ . Это рецепт с бесчисленными ингредиентами.

2). «Наиболее необычайный закон» чисел, открытый Эйлером (см. гл. 8), который гласит: *богатство* любого числа  $N$  (сумма его делителей) – это хитроумнейшая комбинация богатств всех предшествующих чисел.

3). Структура богатства Пирамиды (сумма богатств всех чисел на отрезке от 1 до  $N$ , см. гл. 9), как любопытное следствие закона Эйлера.

4). Понятие о *скрытой плотности* натурального числа  $N$ , которое учитывает все простые числа, предшествующие данному числу  $N$  (см. гл. 20).

## Предельный КЗП не более 77,5568%?

В физике существует интересный вопрос – чему равен предельный коэффициент заполнения пространства (КЗП). Согласно оценкам ученых (1988 г.) предельный КЗП  $\leq 77,84\%$  [12, 28]. Следует заметить, что укладка идеальных одинаковых шаров даст всего-навсего КЗП = 74,05% – эту чисто геометрическую задачу сможет решить и школьник.

**Рефлексия №15.** Возможно, мир чисел (хотя бы потому, что он – самый совершенный из абстрактных миров) «подсказывает» искомое наукой значение: предельный КЗП  $\leq 77,5568\dots\%$ , что «улучшает» оценку ученых на 0,28% (и это очень много!). Поясним, как мы «докатались» до такого открытия. Дело в том, что максимально возможная доля мира №8 (при  $N = 999994$ ) равна 22,4432...% (см. гл. 3). Тогда на отрезке  $[1; N=999994]$  минимально возможная доля всех остальных миров (без мира №8) будет равна  $100\% - 22,4432\% = 77,5568\%$ , причем на *больших* отрезках  $[1; N]$  указанные доли недостижимы. После *эви*-конвертации числа  $N=999994$  получаем, что это всё происходит в микромире при  $\sim 10^{-38}$  с, то есть на размере  $\sim 10^{-29}$  м (что, увы, ниже глубины проникновения в микромир, см. гл. 1). Полученные таким образом 77,5568% мы и принимаем за предельный КЗП.

## Сверхразум умнее нас в миллиард раз?

В природе обращает на себя внимание некое, скажем, *предельное число*  $\Pi \sim 10^{11} \div 10^{12}$  (точное значение пока неясно). Вот перечень некоторых наиболее ярких его проявлений: количество всех галактик во Вселенной  $\sim 10^{11} \div 10^{12}$ ; количество звезд в типичной галактике  $\sim 10^{11} \div 10^{12}$ ; на Земле насчитывается  $10^{11} \div 10^{12}$  типов органических молекул (кирпичиков живой материи); голубой кит (30 м) почти в  $10^{11}$  раз больше, чем вириода (мельчайший живой объект на Земле, см. гл. 29); количество всех людей, когда-либо живших на Земле, приближается к числу  $10^{11}$  (и не исключен конец человеческой цивилизации); ёмкость человеческой памяти около  $10^{11}$  бит (единиц информации); интенсивность звука, воспринимаемого человеком может меняться в  $10^{11}$  раз; состояние самого богатого человека скоро достигнет  $10^{11}$  долларов (в  $10^{11}$  раз больше, чем у самого бедного человека); и т.д.

И мы получим любопытную гипотезу, всего-навсего «продолжив» («дополнив») указанный ряд: *Сверхразум в  $10^{11} \div 10^{12}$  раз мощнее первичного разума.* Обладателем последнего можно считать, например, устрицу, «интеллект» которой, по оценке французских биологов, примерно в 100 раз уступает интеллекту «среднего» (среднестатистического) человека [9].

А как оценить разум «среднего» человека? Скорее всего, как заурядный, характерный для большинства цивилизаций Вселенной. Скажем, мощностью в 140 условных единиц. Это мы получаем по аналогии со средним типом  $T_s \approx 140$  (см. ниже рефлексию №16), а также с учетом “французской устрицы”. О заурядности “среднего” ума свидетельствуют многие факты: сомнительная стратегия развития человечества, всё нарастающий социальный разлад в обществе, рост непримиримого антагонизма (в т.ч. на религиозной почве), и т.д. Скудоумие большинства в обществе особенно заметно в ярком блеске Мысли его лучших представителей<sup>1</sup> (они крайне редки в силу *логнормального распределения интеллекта* среди людей [9, 11]).

Оценивая разум Человека как посредственный (по Вселенским меркам) можно сослаться на мнение знаменитого английского математика, логика и философа Бертрانا Рассела (1872–1970): «Со времени Коперника стало ясно, что Человек не обладает той космической важностью, которую он прежде приписывал себе. Ни один человек, который не смог усвоить этот факт, не имеет права называть свою философию научной» [24].

Короче говоря, можно предположить, что *Сверхразум примерно в миллиард раз мощнее «среднего» разума* (поскольку  $10^{11}/140 \approx 10^9$ ). И мы для *Сверхразума* даже не «устрицы», а куда более тривиальные существа. Возможно, поэтому *Он* не помогает в земных тяготах даже самым набожным людям. Однако, отождествляя *Сверхразум* с Богом, мы, наверняка, чудовищно искажаем и обедняем Истину (ближе всего к ней, конечно, наука).

**Рефлексия № 16.** В конце Большого отрезка (в «настоящее время») у натуральных чисел  $N$  максимально возможный тип достигает значения  $T_{max}=10^{11} \div 10^{12}$  (наибольшее количество делителей у чисел  $N$  в конце БО, см. гл. 4). При этом средний тип всех чисел дорастает всего-навсего до  $T_s \approx 140$  (см. гл. 3), что красноречиво говорит о количественном преобладании чисел  $N$  с малыми типами  $T$ . Напомним, что нижняя граница всех возможных типов  $T_{min}=2$  (у простых чисел) остается неизменной, начиная с первого простого числа  $N=2$ . Возможно, что в реальном мире число  $\Pi \sim 10^{11} \div 10^{12}$  – это своеобразная «метка» времени, признак того, что возраст Вселенной близок именно к 13,7 млрд. лет (как  $T_{max}=10^{11} \div 10^{12}$  признак того, что правая граница равна именно  $N = 8 \cdot 10^{60}$ ). Создавая, в связи с этим, гипотезу о мощности *Сверхразума* (см. выше), мы, фактически, подменяем одну религию (веру в Бога), другой – верой в сверхпредназначение мира чисел.

---

<sup>1</sup> Это корифеи точных наук. Их интеллект не идет ни в какое сравнение с мышлением «среднего» человека. Причем сейчас именно «неоднородность мозгов» (как и денег) в обществе считается двигателем прогресса. Очевидно, многих ученых это устраивает ...

## Малые особи более распространены, чем крупные

Природа отдает явное предпочтение малым числам перед большими. Так, наше пространство трехмерно (четвертое измерение – время); материя строится только из 6 кварков и 6 лептонов, у которых только 4 типа заряда и 3 разных поколения (см. табл. 22.1); существует не более 3-х фундаментальных сил в природе; число типов нейтрино – не более 3; существуют только 2 вида электрических зарядов («+» и «-»); «фактор Больцмана» в физике оказывает предпочтение частицам меньших масс [5, 9]; во Вселенной 75% водорода (H) и почти 25% гелия (He), причем это самые легкие из веществ в природе; “магическое” число равно 7 (см. рефлексию № 23); природе «нравиться» корень квадратный (см. рефлексию № 22); и т.д.

Короче говоря, в природе малые особи (в самом широком понимании, а не только живые существа) более распространены, чем крупные, и часто именно этим можно объяснить бесконечное множество логнормальных распределений (см. рефлексию № 18).

**Рефлексия № 17.** Мир чисел также отдает явное предпочтение *малым* типам  $T$  (см. гл.4), *малым* значениям богатства  $S$  (см. гл. 6, 7), *малым* значениям дисперсий  $D$  (см. гл. 14, 17); *малым* простым числам  $P$  в канонических разложениях (см. в конце гл. 19); и т.д., и т.п. Вообще, как только мы в рамках ГТНЧ начинаем рассматривать распределение какой-нибудь величины (параметра), то всякий раз убеждаемся что *малые* «особи», безусловно, более распространены, чем крупные. См. также рефлексии № 22, 23.

## Тильда-распределения богатства

В окружающем нас мире мы повсеместно находим тильда-распределения богатства [7 ÷ 12]. При этом термин «богатство» понимается в двояком смысле. Богатство в *широком смысле* – это самые разные ресурсы, объекты, величины и т. д., созданные как человеком (обществом), так и самой природой (на Земле, в солнечной системе, в Галактике и т. д.). Закон распределения богатства в *узком смысле*, т.е. в смысле распределения денежных доходов, понятен и актуален для большинства людей. Так, уже более 10 лет в России существует *тильдаобразное* распределение доходов: подавляющее большинство людей живет «средне» (более чем скромно), а количество крайне нищих и очень богатых людей – незначительно [10, 11].

**Рефлексия №18.** У целого ряда натуральных чисел *богатство* (сумма всех их делителей) образует *тильда-распределение* (см. гл. 6). Разумеется,



здесь правильней говорить о *логнормальном распределении* делителей (см. гл. 13), однако тильда наглядней и доступней для большинства людей.

### Количество «вложенных» материи – ограничено?

Все вещества состоят из атомов. Атомы – это объединения электронных оболочек (орбит) вокруг ядра атома (см. периодическую систему элементов Д. И. Менделеева). Ядра атомов – это объединения нуклонов (протонов и нейтронов), которые, в свою очередь, являются объединением кварков (см. табл. 22.1). Возможно, что эта иерархия на каком-то шаге (где-то за кварками) обрывается. На ранних стадиях Вселенной многих «уровней» материи (скажем, выше кварков) вообще ещё не было (см. гл. 28).

**Рефлексия № 19.** У целого ряда натуральных чисел  $N$  их делители распределяются по орбитам, максимально возможное количество которых увеличивается с ростом самого числа  $N$  (см. гл. 18). То есть на Большом отрезке не может быть чисел  $N$ , у которых орбит больше, чем, скажем,  $X$  штук (этот предел пока не установлен). Для «орбитных»  $N$  можно указать некие числа (радиусы орбит), в «окрестности» которых существует наибольшая вероятность встретить делители этого  $N$  (разумеется, в логарифмической шкале). Так, у верхних лидеров радиус орбиты равен  $\ln\sqrt{N}$ .

*Уровни вложений*, но уже совсем с другим смыслом, можно неоднократно встретить в рамках ГТНЧ (например, см. гл. 3, п. «Миры чисел»).

### Принцип неопределенности Гейзенберга

В физике (в квантовой теории) хорошо известен *принцип неопределённости*: любая физическая система не может находиться в состояниях, в которых координаты её центра инерции и импульс *одновременно* принимают вполне определенные, точные значения, т.е. чем точнее определена одна из величин, тем менее точно определено значение другой.

Принцип неопределённости (с несколько иным смыслом) существует также для таких фундаментальных физических величин, как энергия и время. Указанный принцип был открыт в 1927 г. немецким физиком Вернером Гейзенбергом (1901–1976) и явился важным этапом в построении системы современных научных взглядов. Указанный *принцип Гейзенберга* проявляется в основном для явлений атомных (и меньших) масштабов.

**Рефлексия №20.** В *теории чисел* очень важное значение имеет вопрос о  $\pi(x)$  – количестве *простых чисел*, не превосходящих натуральное число  $x$ . И самым лаконичным ответом на этот вопрос является формула (2.3):  $\pi(x) \sim x/\ln x$ . Однако данная формула одновременно и самая грубая (неточная) из

всех известных. Так, формула Гаусса (2.6) работает гораздо лучше, но у неё уже довольно «внушительный» вид. И, очевидно, нет необходимости доказывать невероятную громоздкость *точной* формулы Римана (2.12) для  $\pi(x)$ . Ситуация с выражениями для  $\pi(x)$  – это яркая иллюстрация «отражения» принципа Гейзенберга в мире чисел: чем точнее формула определяет  $\pi(x)$ , тем сложнее эта формула (тем труднее ей оперировать).

### Число $10^9$ – важный космологический параметр

В космологии безразмерное число  $10^9$  – это один из важнейших параметров нашей Вселенной [5, 9, 44]. Им характеризуется отношение числа фотонов к числу барионов во Вселенной (см. гл. 22, 23).

**Рефлексия № 21.** В конце Большого отрезка мы получаем:  $T_{max}/T_s \approx 10^9$  (см. гл. 4). В самом начале натурального ряда имеем  $N=1$  и  $T_{max}/T_s = 1$ , что также в  $10^9$  раз меньше, чем в конце БО (т.е. с ростом  $N$  отношение  $T_{max}/T_s$  увеличивается, и, скажем, при  $N=50400$  оно равно уже 10). При желании, число  $10^9$  можно неоднократно «обнаружить» в рамках ГТНЧ, причем в самых разных её разделах [9].

### «Любимая» арифметическая операция Создателя

Извлечение корня квадратного или возведение в квадрат – это одна из самых «любимых» арифметических операций Создателя. Для подтверждения данной истины приведем ряд фундаментальных законов природы:

- закон всемирного тяготения (закон Ньютона).....  $F = G \cdot (m_1 \cdot m_2) / r^2$ ;
- основной закон электростатики (закон Кулона).....  $F = k \cdot (e_1 \cdot e_2) / r^2$ ;
- формула Эйнштейна о связи энергии и массы тела...  $E = m \cdot c^2$ ;
- элементарная (планковская) длина (см. гл. 24).....  $l = (Gh/2\pi c^3)^{1/2}$ ;
- элементарная (планковская) масса (см. гл. 24).....  $m = (hc/2\pi G)^{1/2}$ ;
- формула красоты женской фигуры.....  $m = \psi \cdot h^2$ .

Поясним последнее выражение:  $m$  – масса тела (кг);  $h$  – рост женщины (м);  $\psi = 18 \div 19$  (кг/м<sup>2</sup>) – индекс упитанности ( $\psi = 18,5 \div 24,9$  – это нормальная упитанность) по данным Университета Ньюкасла в Великобритании.

**Рефлексия № 22.** Мир чисел также отдает явное предпочтение извлечению корня квадратного или возведению в квадрат. В этом нас убеждает и ГТНЧ, и теория чисел. Например,  $\sqrt{N}$  характеризует *малые делители* числа  $N$  (его своеобразный «паспорт», см. гл. 3 и табл. 5.1), а также – *кern* числа

$N$  (важнейший его параметр в рамках ГТНЧ, см. гл. 13, 14). Дисперсия натурального числа  $N$  равна  $D = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot (T/K)^2$  (см. гл. 17). В мире простых чисел имеем (см. гл. 2):  $(R_n)_{max} \sim (\ln n)^2$ ;  $H_{min} = P_n^{-2}$ ;  $H_{max} < P_n^{-1/2}$ .

### «Магия» числа 7

В природе совершенно очевидна «магия» семёрки (вернее, числа  $7 \pm 2$ ).

Можно привести множество *серьезных* примеров («придуманных» самой природой): **6** «свернутых» пространственных измерений в теории суперструн (см. гл. 27); кирпичики мироздания – это **6** кварков и **6** лептонов (см. гл. 22); **8** глюонов обеспечивают существование ядерных сил; **7** периодов и **8** групп в таблице Д. И. Менделеева; **7** бит (единиц) информации, хранящейся в «кратковременной» памяти человека; **7** букв в «среднем» слове русского языка (и многих других языках мира?) и т. д.

Количество *несерьезных* примеров (придуманных человеком) вообще не поддаётся учету: семерка в пословицах и поговорках (в русском языке – их множество!); **7** цветов радуги; **7** дней недели; **7** книг Ветхого завета; **7** книг Нового завета (семёрка в его притчах встречается в 25 сюжетах, исключая повторы); **7** дней творения Бога; **7** групп дорожных знаков и т. д., и т. п. [9].

**Рефлексия №23.** В рамках ГТНЧ число  $7 \pm 2$ , безусловно, обладает большой «магией». Например, есть основания считать, что именно у мира №8 (у чисел, имеющих **7** правильных делителей) – наибольшая вероятность появления в натуральном ряду (см. гл. 3) [9]. Зачастую магия семёрки “созревает” к концу Большого отрезка, например: отношение количества различных частых миров к количеству редких  $\approx 7$  (см. гл. 4); отношение  $T_{max}$  в частых к  $T_{max}$  в редких мирах  $\approx 7$  (см. гл. 4); максимально возможная кратность  $KR2_{max} \approx 8$  (см. гл. 7). То есть, «магия» семёрки – это ещё и своеобразная «визитная карточка» (или «метка») конца Большого отрезка (эпохи, когда суждено жить человечеству).

### «Золотое сечение» – «призрак» мира чисел

В математике ещё с древних времен есть такое понятие – «золотое сечение» (гармоническое деление отрезка, число Фидия). Оно характеризуется числом  $g \equiv 2/(1+\sqrt{5}) = 0,618\dots$ , или обратным ему числом  $G = 1/g \equiv (1+\sqrt{5})/2 = 1,618\dots$ , причем  $g = G - 1$ . Понятие «золотое сечение» известно не только математикам. Оно давно и широко используется в архитектуре, в живописи, в технике, и т. д. [8, 9]. Более того, с ним связано множество околонуточных спекуляций, ему приписывают всевозможные мистические значения.

**Рефлексия № 24.** В рамках ГТНЧ неоднократно встречаются величины, численно близкие к пресловутому «золотому сечению», например:  $\pi^2/6 \approx 1,64$  (гл. 5);  $\sqrt{e} \approx 1,64$  (гл. 7);  $\sqrt{24}/3 \approx 1,63$  (гл.9) и т.д. Скорее всего, «золотому сечению» просто «повезло» в том, что оно оказалось похожим (и не более того) на указанные величины из ГТНЧ, которые по-настоящему *значимы* в мире чисел (а значит и в реальном мире?). Иначе говоря, ощущение гармонии у нас возникает не от «применения» числа  $g$  ( $G$ ), скажем, в архитектурных пропорциях, а из-за некоего *соответствия* творений человеческих рук фундаментальным природным закономерностям («зашифрованным» в мире чисел?). В ходе эволюции природа просто «приучила» человека воспринимать такое соответствие как некую идеальную гармонию.

### **Истина проста, но её доказательство – архисложно**

Думающий человек (даже далекий от математики) должен согласиться, что *доказательство* фундаментальных Истин, вообще говоря, требует больших жертв, таланта, интеллекта, хотя сама *формулировка* Истин, зачастую, поразительно проста. Например, в математике и физике – это предельно лаконичные формулы:  $\pi(x) \sim x/\ln x$ ;  $E = m \cdot c^2$ , и т.д.

Здесь будет уместно привести древнюю латинскую поговорку: «*Simplex sigillum veri*» («Простота – это признак истинности»). А также слова гениального физика Альберта Эйнштейна (1879–1955): «Наш опыт убеждает нас, что природа – это сочетание самых простых математических идей» [20]. Приведенные изречения относятся не только к физике, их можно понимать и в более широком смысле. Его точно подметил ещё великий итальянец Леонардо да Винчи (1452–1519): «Тот, кто порицает высшую точность математики, кормится за счет путаницы и никогда не отступится от уловок софистских наук, порождающих бесконечную болтовню». ... «Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой».

Вот почему напрасно искать Истины в религии, философии, искусстве, не говоря уже об истории, политике. И неслучайно английский математик и логик Бертран Рассел (1872–1970), взявшись за философию, «камня на камне не оставил» от этой псевдонауки [24].

**Рефлексия № 25.** Свыше 150 лет понадобилось математикам, чтобы строго доказать *предельно лаконичный* закон распределения простых чисел  $\pi(x) \sim x/\ln x$  (см. гл. 2); около 350 лет понадобилось лучшим математикам для доказательства Великой теоремы Ферма (Э. Уайлс, 1995 г., см.[28]), которая формулируется *предельно просто*: при  $n > 2$  уравнение  $x^n + y^n = z^n$  не имеет решений. Причем текст доказательства этой теоремы занял около 200

страниц, и понять его во всей полноте способны не более 10% специалистов по *теории чисел* (а это – сложнейший раздел высшей математики!).

Таким образом, мир чисел «отражает» общее правило: Истина может быть удивительно простой, но её доказательство (с математической строгостью), наверняка, окажется чрезвычайно сложным делом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идея отождествления натурального ряда с потоком времени (когда единица эквивалентна планковскому времени  $5,4 \cdot 10^{-44}$  с) представляется весьма плодотворной. Она делает мир чисел наглядным, более понятным, интересным для самой широкой публики. Что весьма актуально, т.к. природа натуральных чисел (их делителей), увы, продолжает оставаться в большой степени недооцененной даже профессиональными математиками.

Но великий немецкий математик Карл Гаусс (1777–1855) однажды сказал пророческие слова: «Математика – королева наук, а *теория чисел* – королева математики» [29]. И, надо полагать, справедливость этих слов вскоре ни у кого не будет вызывать сомнений. Как уже нет сомнений в том, что только математика способна адекватно описать реальный мир (математика давно стала королевой наук). Дело за «малым» – осталось признать исключительную роль *теории чисел* в построении общей картины мироздания.

Что касается приведенных «отражений» (рефлексий) ГТНЧ, то не беда, если они так и не сойдутся в «едином фокусе», оставаясь лишь осколками гипотетического «Зеркала». Но даже отблески этих осколков будут лишний раз напоминать, что нас окружает *единый* мир, который и не догадывается о существовании столь многочисленных и *разных* наук (в т.ч. математики и физики), созданных умом человека на пути к Истине. В любом случае, свежий взгляд на мир чисел, безусловно, принесет свои плоды...

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Боревич З. И.*, Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1972.
2. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.
3. *Галочкин А. И. и др.* Введение в теорию чисел. М.: Издательство МГУ, 1995.
4. *Дагаев М. М. и др.* Астрономия. М.: Просвещение, 1983.
5. *Девис П.* Случайная вселенная. М.: Мир, 1985.
6. *Исаев А. В.* Графическая теория натуральных чисел. СПб: ВМВ, 1997.
7. *Исаев А. В.* Закон распределения богатства. Санкт-Петербург: ЛИСС, 1998.
8. *Исаев А. В.* Параллельные миры... С-Петербург: Всемирная литература, 2001.
9. *Исаев А. В.* Параллельные миры II ... Санкт-Петербург: ЛИСС, 2002.

10. *Исаев А. В.* Тайны российской статистики .... Санкт-Петербург: ЛИСС, 2002.
11. *Исаев А. В.* Тайны статистики .... Санкт-Петербург: ЛИСС, 2003.
12. *Исаев А. В.* Леонард Эйлер и космология чисел .... С-Петербург: ЛИСС, 2003.
13. *Ичас М.* О природе живого: механизмы и смысл. М.: Мир, 1994.
14. *Капица С. П.* Общая теория роста человечества. М.: Наука, 1999.
15. *Картер П., Хайфилд Р.* Эйнштейн. Частная жизнь. М.: ЗАХАРОВ, 1998.
16. *Кеннеди П.* Вступая в двадцать первый век. М.: Весь мир, 1997.
17. *Кудрявцев П. С.* Курс истории физики. М.: Просвещение, 1974.
18. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001.
19. *Марков М. А.* Избранные труды: в 2 т. Т. II Гравитация... М.: Наука, 2001.
20. *Пайс А.* Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. М.: Наука, 1982.
21. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
22. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
23. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983.
24. *Рассел Б.* История западной философии. Сибирское университет. изд-во, 2003.
25. *Саган К.* Космос: Эволюция Вселенной, жизни и цивилизации. Амфора, 2004.
26. *Сажин М. В.* Современная космология в популярном излож-и. М.: УРСС, 2002.
27. *Силк Дж.* Большой взрыв (рождение и эволюция Вселенной). М.: Мир, 1982.
28. *Сингх С.* Великая теорема Ферма. М.: МЦНМО, 2000.
29. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984.
30. *Сухонос С. И.* Масштабная гармония Вселенной. М.: Новый Центр, 2002.
31. *Тарасов Л. В.* Мир, построенный на вероятности. М.: Просвещение, 1984.
32. *Фолсом К.* Происхождение жизни. М.: Мир, 1982.
33. *Харди Г.* Двенадцать лекций о Рамануджане. М.: Институт КИ, 2002.
34. *Хокинг С.* Краткая история времени. Санкт-Петербург: Амфора, 2001.
35. *Чирков Ю. Г.* Охота за кварками. М.: Мол. гвардия, 1985.
36. *Шкловский И. С.* Звезды: их рождение, жизнь и смерть. М.: Наука, 1984.
37. *Шкловский И. С.* Вселенная, жизнь, разум. М.: Наука, 1987.
38. Большая Советская Энциклопедия. (В 30 томах). М.: Сов. энциклопедия, 1978.
39. Большой энциклопедический словарь. Санкт-Петербург: Норинт, 1997.
40. Гиннесс. Большая книга знаний. Назрань: Издательство АСТ, 1999.
41. Математический энциклопедический словарь. М.: Б. рос. энциклопедия, 1995.
42. Политехнический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1977.
43. Физическая энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.
44. Физические величины. Справочное издание. М.: Энергоатомиздат, 1991.
45. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1984.