THE WATT-SCHRODINGER EQUATION

Leonardo Rubino
01/03/2021

Abstract: In this paper a new version of the Schrodinger Equation is shown, where the acceleration is held in place of the space and the frequency is held in place of the time. The same happens for the Wave Equation of d'Alembert, for that of Klein-Gordon and finally for that of Dirac.

Here is the classic Schrodinger Equation, in its two versions:

$$\Delta\Psi + \frac{2m_0}{\hbar^2}(H-V)\Psi = 0 \quad , \quad (i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2)\Psi$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is the Laplacian and $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{E}{\hbar}t)} = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{p^2}{2m_0\hbar}t)}$;

moreover:

$E = H - V = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m_0}$, $p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $p^2 \to -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, or $p^2 \to -\hbar^2\nabla^2$ in the three-dimensional case, and $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$.

Now, here is the **Watt-Schrodinger Equation**:

$$\boxed{\Delta_a\Psi + \frac{2m_0}{\hbar_W^2}(H-V)\Psi = 0} \qquad \boxed{(i\hbar_W\frac{\partial}{\partial f})\Psi = (-\frac{\hbar_W^2}{2m_0}\nabla_a^2)\Psi}$$

$\Delta_a = \frac{\partial^2}{\partial a_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_z^2}$ is the Laplacian of Watt-Schrodinger, a is the acceleration, f is the frequency.

$\hbar_W$ has the same value of $\hbar$, but in watt, and $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar_W}\cdot\vec{a} - \frac{E}{\hbar_W}f)}$.

It's like the Schrodinger Equation, but the space x is replaced by the acceleration a and the time t is replaced by the frequency f.
The same similarities hold about the Heisenberg Uncertainty Principle:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2 \\ \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\Delta p \cdot \Delta a \geq \hbar_W/2 \\ \Delta E \cdot \Delta f \geq \hbar_W/2\end{array}}$$

HEISENBERG WATT

Let's see why all this makes sense:

let's start from the Heisenberg Uncertainty Principle (taken with the equal sign, out of simplicity):

$\Delta p \cdot \Delta x = \hbar/2$ $\qquad (\hbar/2 = h/4\pi = 0{,}527 \cdot 10^{-34} J \cdot s)$

($m_e c \cdot r_e = \hbar \cdot \alpha$, where $\alpha = 1/137{,}0359 \cong 1/137$ is the Fine Structure Constant and r_e is the classic radius of the electron: $r_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e \cdot c^2} \cong 2{,}8179 \cdot 10^{-15} m$)

About the units: $[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}][\mathrm{m}] = [\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}]$.

We know that [J x s] is an angular momentum. If now we replace it by a power [W], we will see that the Uncertainty Principle is still standing, but what about the other quantities?

If we hold $\Delta p = m_e c$, then: $[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}][?] = [W]$ and we can say that [?] must be an acceleration; in fact:

$[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}][\mathrm{m/s}^2] = [W]$

We see that the following formula holds:

$\Delta p \cdot \Delta a = \hbar_W / 2 = 0{,}527 \cdot 10^{-34} W$ ($\hbar_W$ has the same value of $\hbar$, but in watt) if:

$\boxed{\Delta a = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{G m_e}{r_e^2}}$, which is exactly an acceleration related to the electron!!!!

If now we want to take the energy-time uncertainty, according to Heisenberg we know that:

$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar / 2$ ($[J][\mathrm{s}] = [J \cdot \mathrm{s}]$), but once again, if we replace [Js] with [W], we have:

$[J][?] = [W]$ and [?] must be [Hz], a frequency:

$[J][\mathrm{Hz}] = [W]$

Once again, if we hold ΔE ($\Delta E = m_e c^2$), then:

$\Delta E \cdot \Delta f = m_e c^2 \cdot \Delta f = \hbar_W / 2 = 0{,}527 \cdot 10^{-34} W$

but, once again, we immediately realize that $\Delta f = \frac{1}{2\pi\alpha h}\frac{G m_e^2}{r_e}$ and this quantity is a frequency strictly related to an electron.

Now, let's go on with this parallelism:

$\vec{p} \cdot \vec{a} = h_W$ and $E \cdot f = h_W$, and about the operators: $p \to -i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a}$, $p^2 \to -\hbar_W^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2}$, or:

$p^2 \to -\hbar_W^2 \nabla_a^2$ and $E \to i\hbar_W \frac{\partial}{\partial f}$.

We just use those operators in the Watt-Schrodinger Equation to get equalities as a confirmation, indeed.

And then, as the commutator of the operator A with the operator B is: $[A,B] = AB - BA$, in case A and B are just numbers, the commutator will be zero, but if they are operators, then something can change.

For the main commutators we have:

$[a_i, a_j] = a_i a_j - a_j a_i = 0$ (a=acceleration)

$[p_i, p_j] = (-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_i})(-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_j}) - (-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_j})(-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_i}) = 0$, $[a_i, p_j] = i\hbar_W \delta_{ij}$;

In fact, if we apply the commutator to an auxiliary and generic commutator φ :

$$[a_i, p_j]\varphi = a_i(-i\hbar_W \frac{\partial \varphi}{\partial a_j}) - (-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_j})(a_i \varphi) = -i\hbar_W a_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_j} + i\hbar_W \frac{\partial a_i}{\partial a_j}\varphi + i\hbar_W a_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_j} = i\hbar_W \delta_{ij}\varphi$$

where δ_{ij} is the Delta of Kronecker, and is 0 if $i \neq j$ and 1 if $i = j$. In fact, as a_i and a_j are orthogonal and independent (as x, y and z are), we really have $\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \delta_{ij}$.

About the commutator $[f,E]$:

$$[f,E]\varphi = if\hbar_W \frac{\partial\varphi}{\partial f} - i\hbar_W \frac{\partial}{\partial f}(f\varphi) = if\hbar_W \frac{\partial\varphi}{\partial f} - i\hbar_W \frac{\partial f}{\partial f}\varphi - if\hbar_W \frac{\partial\varphi}{\partial f} = -i\hbar_W \frac{\partial f}{\partial f}\varphi = -i\hbar_W \varphi$$ and so:

$[f,E] = -i\hbar_W$

Similarly, about the d'Alembert Wave Equation, as: $E^2 = p^2c^2$, we have:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{pc}{\hbar}t)}$$ and $$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2\Psi = c^2(\frac{\hbar}{i}\nabla)^2\Psi,$$ that is: $$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

(and with $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, laplacian, divergence of the gradient): $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$,

which is the d'Alembert Wave Equation .

Therefore, as the **Watt-d'Alembert Equation**: $$\boxed{\nabla_a^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial f^2} = 0}$$

Now, let's consider a more general case of a relativistic particle whose rest mas is not zero; as we did before, as $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$, then, by using such an E in $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{E}{\hbar}t)}$, we have:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}{\hbar}t)}$$ and, as usual, stil by using one formula into the other, we see that Ψ is a solution of the following:

$$(\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}) - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi = 0$$

Which is nothing more than the Klein-Gordon Equation, which is similar to that of d'Alembert, buth has a part more.

So, for the **Watt- Klein-Gordon Equation**:

$$\boxed{(\nabla_a^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial f^2}) - \frac{m_0^2c^2}{\hbar_W^2}\Psi = 0}$$

Let's rewrite the Klein-Gordon Equation in the following way:

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + c^2\nabla^2\Psi - l^2c^2\Psi = 0$$

and let's remember that $i^2 = -1$ and $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, we have that such an equation can be rewritten in the following way:

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - (i\alpha\cdot\nabla - \beta m_0)][i\frac{\partial}{\partial t} + (i\alpha\cdot\nabla - \beta m_0)] = 0,$$

And also like that: $[i\frac{\partial}{\partial t}-(i\alpha\cdot\nabla-\beta m_0)]\Psi=0$ and $[i\frac{\partial}{\partial t}+(i\alpha\cdot\nabla-\beta m_0)]\Psi=0$

and the Klein-Gordon Equation can be developed like this:

$$[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(\alpha\cdot\nabla)^2+im_0\beta(\alpha\cdot\nabla)+im_0(\alpha\cdot\nabla)\beta-\beta^2 m_0^2]\Psi=0$$, where:

$\beta^2=\frac{c^4}{\hbar^2}$, $\alpha\beta+\beta\alpha=0$, $\alpha_i\alpha_j=c^2$ if i=j and $\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0$ if $i\neq j$

The last two conditions on alphas say that just ∇^2 is left and not the mixed terms in ∇. The above equation, here reported:

$(i\frac{\partial}{\partial t}+i\alpha\cdot\nabla-\beta m_0)\Psi=0$ which can be held as the Dirac Equation, which is usually reported in the following way, in natural unit ($\hbar=c=1\rightarrow\beta=1$): $(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_0)]\Psi=0$,

where $i\gamma^\mu\partial_\mu=i\gamma^\mu\,\partial/\partial x^\mu$, which has inside a sum with the Einstein convention, yields, with the change in μ, the derivative over time $\frac{\partial}{\partial t}$ and on x, y and z of $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$: $i\gamma^\mu\partial_\mu\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}+i\alpha\cdot\nabla$

Similarly, as the **Watt-Dirac Equation**, we have the following:

$\boxed{(i\frac{\partial}{\partial f}+i\alpha\cdot\nabla_a-\beta_W m_0)\Psi=0}$, $(\beta_W^2=\frac{c^4}{\hbar_W^2})$

Thank you.
Leonardo RUBINO

L'EQUAZIONE DI WATT-SCHRODINGER

Leonardo Rubino
01/03/2021

Abstract: In questo lavoro si presenta una nuova Equazione di Schrodinger, dove il posto dello spazio viene preso dall'accelerazione e quello del tempo viene preso dalla frequenza. Le stesse considerazioni vengono altresì fatte per l'Equazione delle Onde di d'Alembert, per quella di Klein-Gordon e per quella di Dirac.

Ecco l'Equazione di Schrodinger classica nelle sue due forme:

$$\Delta\Psi + \frac{2m_0}{\hbar^2}(H-V)\Psi = 0 \qquad , \qquad (i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2)\Psi$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è il Laplaciano e $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{E}{\hbar}t)} = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{p^2}{2m_0\hbar}t)}$;

inoltre:

$E = H - V = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{p^2}{2m_0}$, $p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $p^2 \to -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, oppure $p^2 \to -\hbar^2\nabla^2$ nel caso tridimensionale, e $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

Ed ecco invece **l'Equazione di Watt-Schrodinger**:

$$\boxed{\Delta_a\Psi + \frac{2m_0}{\hbar_W^2}(H-V)\Psi = 0} \qquad \boxed{(i\hbar_W\frac{\partial}{\partial f})\Psi = (-\frac{\hbar_W^2}{2m_0}\nabla_a^2)\Psi}$$

$\Delta_a = \frac{\partial^2}{\partial a_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_z^2}$ è il Laplaciano di Watt-Schrodinger, a è l'accelerazione, f è la frequenza, $\hbar_W$ ha lo stesso valore numerico di $\hbar$, ma in watt e $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar_W}\cdot\vec{a} - \frac{E}{\hbar_W}f)}$.

Si tratta della stessa forma dell'Equazione di Schrodinger, ma lo spazio x viene sostituito dall'accelerazione a ed il tempo t viene sostituito dalla frequenza f.
Ne discende lo stesso parallelismo anche riguardo il Principio di Indeterminazione di Heisenberg:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta p \cdot \Delta x \ge \hbar/2 \\ \Delta E \cdot \Delta t \ge \hbar/2\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\Delta p \cdot \Delta a \ge \hbar_W/2 \\ \Delta E \cdot \Delta f \ge \hbar_W/2\end{array}}$$

HEISENBERG WATT

Vediamo perché tutto ciò ha senso:

Partiamo dal Principio di Indeterminazione di Heisenberg (preso col segno di uguale, per semplicità):

$$\Delta p \cdot \Delta x = \hbar/2 \qquad (\hbar/2 = h/4\pi = 0{,}527 \cdot 10^{-34} J \cdot s)$$

($m_e c \cdot r_e = \hbar \cdot \alpha$, dove $\alpha = 1/137{,}0359 \cong 1/137$ è la Costante di Struttura Fine e r_e è il raggio classico dell'elettrone: $r_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e \cdot c^2} \cong 2{,}8179 \cdot 10^{-15} m$)

Riguardo le unità: $[\mathrm{kg \cdot m/s}][\mathrm{m}] = [\mathrm{J \cdot s}]$.

Sappiamo che [J x s] è un momento angolare. Se noi adesso lo sostituiamo con una potenza [W], vedremo che il Principio di Indeterminazione regge ancora, ma che ne è delle alter grandezze?

Se teniamo buono $\Delta p \ = m_e c$, segue che: $[\mathrm{kg \cdot m/s}][?] = [W]$ e possiamo dire che [?] deve essere un'accelerazione; infatti:

$[\mathrm{kg \cdot m/s}][\mathrm{m/s^2}] = [W]$

Vediamo che sussistono le seguenti identità:

$\Delta p \cdot \Delta a \ = \hbar_W / 2 = 0{,}527 \cdot 10^{-34} W$ ($\hbar_W$ ha lo stesso valore di $\hbar$, ma in watt) se:

$\boxed{\Delta a = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{G m_e}{r_e^2},}$ che è esattamente una accelerazione legata all'elettrone!!!!

Se adesso consideriamo l'indeterminazione energia-tempo, in accord con Heisenberg sappiamo che:

$\Delta E \ \cdot \Delta t = \hbar / 2$ ($[J][\mathrm{s}] = [J \cdot \mathrm{s}]$), ma, ancora una volta, se noi sostituiamo [Js] con [W], avremo: $[J][?] = [W]$ e [?] dovrà essere [Hz], una frequenza:

$[J][\mathrm{Hz}] = [W]$

Ancora una volta, se manteniamo ΔE ($\Delta E = m_e c^2$), si avrà:

$\Delta E \ \cdot \Delta f = m_e c^2 \cdot \Delta f = \hbar_W / 2 = 0{,}527 \cdot 10^{-34} W$

ma ancora una volta ci accorgiamo immediatamente che: $\Delta f = \frac{1}{2\pi\alpha h}\frac{G m_e^2}{r_e}$ e questa quantità è una frequenza legata strettamente all'elettrone.

Dunque, continuando col parallelismo:

$\vec{p} \cdot \vec{a} = h_W$ e $E \cdot f = h_W$, e a livello operatoriale: $p \to -i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a}$, $p^2 \to -\hbar_W^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2}$, oppure:

$p^2 \to -\hbar_W^2 \nabla_a^2$ e $E \to i\hbar_W \frac{\partial}{\partial f}$

Basta sostituire tali operatori nell'Equazione di Watt-Schrodinger per ottenere appunto delle identità di conferma.

E poi, visto che si definisce commutatore dell'operatore A con l'operatore B: $[A, B] = AB - BA$, nel caso A e B siano semplici numeri, il commutatore sarà nullo, ma se essi sono invece degli operatori, allora può essere diverso.

Per i commutatori fondamentali, abbiamo:

$[a_i, a_j] = a_i a_j - a_j a_i = 0$ (a=accelerazione)

$[p_i, p_j] = (-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_i})(-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_j}) - (-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_j})(-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_i}) = 0$, $[a_i, p_j] = i\hbar_W \delta_{ij}$;

infatti, immaginando di applicare il commutatore ad un operatore ausiliario φ generico:

$$[a_i, p_j]\varphi = a_i(-i\hbar_W \frac{\partial\varphi}{\partial a_j}) - (-i\hbar_W \frac{\partial}{\partial a_j})(a_i\varphi) = -i\hbar_W a_i \frac{\partial\varphi}{\partial a_j} + i\hbar_W \frac{\partial a_i}{\partial a_j}\varphi + i\hbar_W a_i \frac{\partial\varphi}{\partial a_j} = i\hbar_W \delta_{ij}\varphi$$

con δ_{ij} che è la Delta di Kronecker, e vale 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$. Infatti, essendo ai e aj ortogonali e linearmente indipendenti (come lo sono x, y e z), si ha proprio $\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \delta_{ij}$.

Riguardo invece il commutatore $[f, E]$:

$[f,E]\varphi = if\hbar_W \frac{\partial \varphi}{\partial f} - i\hbar_W \frac{\partial}{\partial f}(f\varphi) = if\hbar_W \frac{\partial \varphi}{\partial f} - i\hbar_W \frac{\partial f}{\partial f}\varphi - if\hbar_W \frac{\partial \varphi}{\partial f} = -i\hbar_W \frac{\partial f}{\partial f}\varphi = -i\hbar_W \varphi$ e dunque:

$[f,E] = -i\hbar_W$

Similmente, riguardo l'Equazione delle Onde, o di d'Alembert, essendo: $E^2 = p^2c^2$, si ha:

$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{pc}{\hbar}t)}$ e $(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2\Psi = c^2(\frac{\hbar}{i}\nabla)^2\Psi$, ossia: $\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$

(e con $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, laplaciano, divergenza del gradiente): $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$,

che è l'Equazione delle Onde, o di d'Alembert.

Dunque, per l'**Equazione di Watt-d'Alembert**: $\boxed{\nabla_a^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial f^2} = 0}$

Considerando ora il caso più generale, ossia particella relativistica e con massa a riposo non nulla, come abbiamo fatto in precedenza, visto che si ha: $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$, allora, sostituendo tale E sempre nella $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{E}{\hbar}t)}$, si avrà: $\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}}{\hbar}t)}$ e, come al solito, sempre per sostituzione, si vede che tale Ψ è soluzione della seguente:

$$(\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}) - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi = 0$$

che altro non è che l'Equazione di Klein-Gordon e che è simile a quella di d'Alembert, ma ha un elemento in più.

Dunque, per l'**Equazione di Watt- Klein-Gordon**:

$$\boxed{(\nabla_a^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial f^2}) - \frac{m_0^2c^2}{\hbar_W^2}\Psi = 0}$$

Riscriviamo ora l'Equazione di Klein-Gordon in questo modo:

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + c^2\nabla^2\Psi - l^2c^2\Psi = 0$$

e ricordando che $i^2 = -1$ e $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, si ha che tale equazione può essere così riscritta:

$$[i\frac{\partial}{\partial t}-(i\alpha\cdot\nabla-\beta m_0)][i\frac{\partial}{\partial t}+(i\alpha\cdot\nabla-\beta m_0)]=0,$$

ossia anche così: $[i\frac{\partial}{\partial t}-(i\alpha\cdot\nabla-\beta m_0)]\Psi=0$ e $[i\frac{\partial}{\partial t}+(i\alpha\cdot\nabla-\beta m_0)]\Psi=0$

e l'Equazione di Klein-Gordon può essere così sviluppata:

$$[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(\alpha\cdot\nabla)^2+im_0\beta(\alpha\cdot\nabla)+im_0(\alpha\cdot\nabla)\beta-\beta^2 m_0^2]\Psi=0$$, con:

$\beta^2=\frac{c^4}{\hbar^2}$, $\alpha\beta+\beta\alpha=0$, $\alpha_i\alpha_j=c^2$ se i=j e $\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0$ se $i\neq j$

Le due ultime condizioni sugli alfa impongono che si ottenga proprio solo il ∇^2 e non termini misti in ∇. L'equazione più sopra, che qui riscriviamo:

$(i\frac{\partial}{\partial t}+i\alpha\cdot\nabla-\beta m_0)\Psi=0$ che può essere considerata come l'Equazione di Dirac, che solitamente viene presentata nella seguente forma, in unità naturali ($\hbar=c=1\rightarrow\beta=1$): $(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_0)]\Psi=0$,

dove $i\gamma^\mu\partial_\mu=i\gamma^\mu\,\partial/\partial x^\mu$, che contiene una sommatoria in convenzione di Einstein, fornisce, al variare di μ, la derivata sul tempo $\frac{\partial}{\partial t}$ e su x, y e z di $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$: $i\gamma^\mu\partial_\mu\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}+i\alpha\cdot\nabla$

Similmente, come **Equazione di Watt-Dirac**, si ha la seguente:

$$\boxed{(i\frac{\partial}{\partial f}+i\alpha\cdot\nabla_a-\beta_W m_0)\Psi=0}\ ,\quad (\beta_W^2=\frac{c^4}{\hbar_W^2})$$

Grazie.
Leonardo RUBINO