Procedimiento Para Resolver Las Ecuaciones De Navier Stokes
(Procedure to Solve the Navier Stokes Equations)

Guillermo Ayala-Martínez
ICAI Universidad de Comillas, Madrid

Abstract
This paper explores how to solve the the Navier Stokes equations. A procedure reduces the equations to a single equation, then the reverse procedure gives the fluid motion variables.

Introducción.

Se propone un procedimiento para encontrar soluciones particulares de las ecuaciones de Navier Stokes. Las tres ecuaciones N-S y la de continuidad se reducen a una sola ecuación, a las soluciones se aplica el procedimiento inverso para obtener las variables que definen el movimiento del fluido . La investigación en este campo es importante en ingeniería aeronáutica, naval y en otras ramas de la Tecnica y la Ciencia.

1 -Las ecuaciones de Navier Stokes.

$$\partial \mathrm{u}/\partial \mathrm{t} + \mathrm{u}\nabla.\mathrm{u} - \mathrm{v}\Delta\mathbf{u} = -\nabla \mathrm{p} \qquad (1)$$

$$\nabla\mathbf{u}=0 \qquad (2)$$

En notación vectorial **u** es la velocidad en un punto, p es la presión y v es la viscosidad, el fluido se supone incompresible y con densidad igual a uno. (1) es la ecuación de Navier Stokes vectorial y (2) es la ecuación de continuidad. El símbolo ∇ es el operador nabla y Δ es el laplaciano. En p se incluye el campo gravitatorio.
Las tres componentes de (1) según los ejes X, Y, Z son:

$$u_t + \mathrm{u}\, u_x + \mathrm{v}u_y + wu_z - v(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = -p_x \qquad (3)$$

$$v_t + \mathrm{u}v_x + \mathrm{v}v_y + \mathrm{v}\, v_z - \mathrm{v}(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) = -p_X \qquad (4)$$

$$w_t + \mathrm{u}w_x + \mathrm{v}w_y + \mathrm{w}w_z - \mathrm{v}(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) = -p_X \qquad (5)$$

2 -Reducción a una sola ecuación.

Dadas las constantes a, b, c se multiplican (3), (4), (5) por cada una de ellas respectivamente y sumando resulta:

$$U_t + uU_x + vU_y + wU_z - \mathrm{v}(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = -(\mathrm{a}p_x + \mathrm{b}p_y + cp_z) \qquad (6)$$

$$\mathrm{U=au+bv+cw} \qquad (7)$$

Con las constantes A, B, C : $\mathrm{X=Ax+By+Cz}$ (8)

Las derivadas de U respecto a x, y, z son $U_x = \mathrm{A}U_X$, $U_y = \mathrm{B}U_X$, $U_z = \mathrm{C}U_X$ (9)

Sustituyendo las derivadas de U respecto a x, y, z, con U_X factor común:

$$U_t + U_0 U_X - \mathrm{v}(A^2 + B^2 + C^2)\, U_{XX} = -\,(\mathrm{Aa+Bb+Cc})p_X \tag{10}$$

$$U_0 = \mathrm{Au+Bv+Cw} \tag{11}$$

Por la ecuación de continuidad:

$$u_x + v_y + w_z = \mathrm{A}u_X + \mathrm{B}v_X + \mathrm{C}w_X = U_{0X} = 0 \tag{12}$$

Por lo que resulta: U_0= Constante o F(t) (13)

La ecuación (10) se simplifica si hacemos uno (=1) los paréntesis eligiendo las constantes adecuadas.

$$U_t + U_0\, U_X - vU_{XX} = -p_X \tag{14}$$

Las ecuaciones de Navier Stokes se reducen a una sola ecuación lineal.

3 -Significado de U y de X.

U es el producto escalar del vector velocidad (u, v, w) por el vector (a, b, c) y U_0 es el producto escalar del vector (u, v, w) por (A, B, C). X es el producto escalar de los vectores (x, y, z) y (A, B, C).

4 – Las ecuaciones de Euler y la viscosidad.

Si en las ecuaciones anteriores hacemos que sea ν=0 (viscosidad) tenemos las ecuaciones descubiertas por Leonhard Euler, el famoso matemático del siglo XVIII. En muchos casos se utilizan estas ecuaciones, la viscosidad solo es importante en la proximidad de las superficies de cuerpos sumergidos en un fluido en movimiento. Pero al ignorar la viscosidad de los fluidos esto dio lugar a la paradoja de D´Alambert , la teoría predice que un fluido en movimiento no actúa sobre los cuerpos cuando en realidad sucede lo contrario. Sin viscosidad los aviones y las aves no podrían volar y los peces nadar. Por esta razón fue necesario añadir en las ecuaciones de Euler términos que incluyen la viscosidad, así se plantearon las ecuaciones de Navier Stokes nombradas por los científicos que las propusieron.

5 -Ecuaciones de Euler.

Son tres ecuaciones más la ecuación de continuidad.

$$u_t + u u_x + v u_y + w u_z = -p_x \qquad (15)$$

$$v_t + u v_x + v v_y + w v_z = -p_y \qquad (16)$$

$$w_t + u w_x + v w_y + w\, w_z = -p_z \qquad (17)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \qquad (18)$$

Ecuación reducida: $\partial U/\partial t + U_0\ \partial U/\partial X = -\partial p/\partial X$ (19)

La ecuación anterior es lineal pues lo es el segundo término convectivo, la resolución no debe ofrecer dificultad.

6 -Ecuación reducida de las ecuaciones de Navier Stokes.

$$\partial U/\partial t + U_0\, \partial U/\partial X = -\partial p/\partial X + \nu\ \partial^2 U/\partial X^2 \qquad (20)$$

Pueden plantearse estas dos ecuaciones:

$$\partial U/\partial t - \nu\, \partial^2 U/\partial X^2 = F(t, X) \qquad (21)$$

$$F(t, X) = -\,(U_0\, \partial U/\partial X + \partial p/\partial X) \qquad (22)$$

La primera ecuación es la ecuación del calor, no homogénea, de la que se conocen numerosas soluciones, la segunda se integra inmediatamente y se sustituye el valor de U de la anterior para obtener la presión p.

7- Determinar las componentes de la velocidad en dos dimensiones.

Se plantean las ecuaciones:

$$U = au + bv \qquad (23)$$

$$U_0 = Au + Bv \qquad (24)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para las componentes u, v de la velocidad:

$$u = (BU - bU_0)/(Ab\text{-}Ba) \qquad (25)$$

$$v = (-AU + aU_0)/(Ab - Ba) \qquad (26)$$

Resueltas la ecuaciones (20) y (21) se sustituyen U y U_0 en las dos anteriores para obtener las componentes del campo de velocidad. (Ab−Ba) puede hacerse 1 con las constantes adecuadas.

Comprobación: $u_x + v_y = B\, U_X\, A - A U_X B = 0$ (27)

$$P_{xy} - p_{yx} = P_{XX}\ (AB - BA) = 0 \qquad (28)$$

8- Componentes de la velocidad en cada punto en tres dimensiones.

Se plantean las ecuaciones siguientes:

$$U = au + bv + cw \qquad (29)$$

$$U_0 = Au + Bv + Cw \qquad (30)$$

Con 2 ecuaciones y 3 incógnitas no hay solución definida, pero se puede dar valores a una variable, por ejemplo la w, y estaríamos en el caso anterior.

9-Observación.

La ecuación (20) es lineal , esto permite superponer diferentes soluciones con distintos valores de X para unas mismas coordenadas (x, y, z)

$$U=f\,(t,\ X_1\,,\ X_2\,, X_3\ .\ .\ .) \tag{31}$$

10 -Condiciones iniciales y de contorno.

$$\partial\mathbf{u}\ /\partial t + (\mathbf{u}.\ \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + v\Delta\mathbf{u} \tag{32}$$

$$\nabla\mathbf{u} = 0 \tag{33}$$

$$\mathbf{u}(\partial\ \Omega)=0 \tag{34}$$

$$\mathbf{u}(t=0) \tag{35}$$

Este es el conjunto completo de ecuaciones necesarias en forma vectorial, hasta ahora solo se han considerado las dos primeras. La tercera es la condición de contorno, si el espacio ocupado por el fluido es Ω entonces $\partial\Omega$ es la superficie del cuerpo sumergido, en esta superficie la velocidad es cero debido a la viscosidad. La cuarta ecuación es la condición inicial, por lo que es necesario conocer todo el campo de velocidades. No es suficiente encontrar una solución para las 3+1 ecuaciones, hay que resolver, además, las condiciones iniciales y de contorno. Este es un problema que tiene su propia complejidad.

Referencias

(1) William F. Hughes, Ph. D. and John A. Brighton, Ph D. , Fluid Dinamics. Mc Graw-Hill 1967.

(2) Frank Ayres, Jr. Ph. D. Differential Equations Mc Graw- Hill 1970.

(3) P. Puig Adam. Ecuaciones Diferenciales. Edit Roberto Puig. 1980.

(4) A. Isidoro Carmona. Aerodinámica y Actuaciones del Avión. Editorial Paraninfo 1977.(Aerodinamics and aircraft perfomances)

(5) Amable Liñán. Real Academia de Ciencias y Universidad Politécnica de Madrid. Las ecuaciones de Euler de la mecánica de los Fluidos. 2007

(6) Juan Miguel Suay Belenguer. Ingeniero Diplomado en Historia de la Ciencia. Porqué vuela un avión. (Why a plane fly?) 2002 .

(7) P.G.L. Leach. Heat polynomials and Lie point symmetries. Journal Mathematical Análisis and Aplications, Elsevier. 2005

(8) S. M. Richardson and A. R. H. Cornish. Solution of three-dimensional incompresible flow problems. Imperial College, London. 1977