Note On The Tolerance of The Closure of The Angles of A Triangle

By

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Général Retraité de l'Office de la Topographie et du Cadastre

abenhadjsalem@gmail.com

Abstract : In this note, we give the expression of the tolerance of the closure of the horizontal angles of a plane triangle and its numerical estimation for an equilateral triangle.

Résumé : Dans cette note, nous donnons l'expression de la tolérance de fermeture des angles horizontaux d'un triangle plan et son estimation numérique pour un triangle équilatéral.

January 27, 2021

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DU TRANSPORT ET DE L'EQUIPEMENT
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

- NOTE SUR LA TOLÉRENCE DE FERMETURE D'UN TRIANGLE -

Par

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

INGÉNIEUR GÉNÉRAL RETRAITÉ DE L'OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE
abenhadjsalem@gmail.com

JANVIER 2021

VERSION 3.

Table des matières

1 Ecart-type d'Un Angle d'Un Triangle Plan 2
2 Calcul de la Tolérance de Fermeture d'Un Triangle Plan 3

NOTE SUR LA TOLÉRANCE DE FERMETURE D'UN TRIANGLE

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

1 Ecart-type d'Un Angle d'Un Triangle Plan

Soit un triangle plan ABC de côtés respectivement a, b et c (Fig. 1).

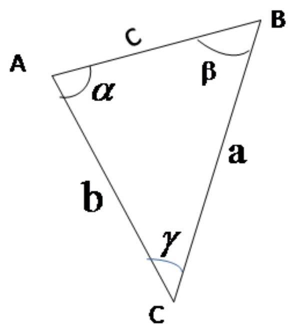

Fig. 1: Le Triangle Plan

Exprimons α en fonction de a, b, c, d'où :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \Rightarrow \quad cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{1}$$

En différentiant (1), on obtient :

$$-sin\alpha d\alpha = \frac{bdb + cdc - ada}{bc} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b^2c^2}(cdb + bdc)$$
$$-sin\alpha d\alpha = \frac{bdb + cdc - ada}{bc} - \frac{cos\alpha}{bc}(cdb + bdc) \tag{2}$$

Soit :

$$-bcsin\alpha d\alpha = (b - ccos\alpha)db + (c - bcos\alpha)dc - ada \tag{3}$$

En passant aux écarts-types, on écrit :

$$b^2c^2sin^2\alpha\sigma_\alpha^2 = (b - ccos\alpha)^2\sigma_b^2 + (c - bcos\alpha)^2\sigma_c^2 + a^2\sigma_a^2 \tag{4}$$

2 Calcul de la Tolérance de Fermeture d'Un Triangle Plan

On suppose que $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c$, on obtient alors :

$$b^2c^2sin^2\alpha\sigma_\alpha^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + cos^2\alpha(b^2 + c^2) - 4bccos\alpha)\sigma_a^2 \tag{5}$$

Soit :

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + cos^2\alpha(b^2 + c^2) - 4bccos\alpha}{b^2c^2sin^2\alpha}\sigma_a^2 \tag{6}$$

Pour un triangle équilatéral, on prend : $a = b = c = L$ et $\alpha = 60°$, par suite :

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{3 + 2cos^2\alpha - 4cos\alpha}{L^2sin^2\alpha}\sigma_a^2 = \frac{3 + 2cos^2\alpha - 4cos\alpha}{L^2sin^2\alpha}\sigma_L^2 \tag{7}$$

Comme $cos\alpha = cos60° = 1/2 = 0.5$, et $sin\alpha = sin60° = \sqrt{3}/2$, on obtient :

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{2}{L^2}\sigma_L^2 \Rightarrow \quad \sigma_\alpha = \sqrt{2}\frac{\sigma_L}{L} = 1.414\frac{\sigma_L}{L} \tag{8}$$

Or la fermeture d'un triangle plan vaut [1] :

$$F = \alpha + \beta + \gamma - \pi \tag{9}$$

Ce qui donne :

$$\sigma_F^2 = 3\sigma_\alpha^2 \Rightarrow \quad \sigma_F = \sigma_\alpha\sqrt{3} \tag{10}$$

Utilisant (8), on obtient :

$$\sigma_F = \frac{\sqrt{3} \times 1.414}{L}\sigma_L = 2.45\frac{\sigma_L}{L} \tag{11}$$

Comme la tolérance vaut :

$$\bar{\sigma}_F = 2.7\sigma_F$$

On arrive à la formule :

$$\boxed{\bar{\sigma}_F = 6.62\frac{\sigma_L}{L}} \tag{12}$$

Application Numérique : On prendra comme écart-type sur la mesure d'un côté d'un triangle 5 cm soit $\sigma_L = 0.05\,m$, on a alors pour un triangle de 5 km

1. On néglige l'excès sphérique. Il vaut pour un triangle équilatéral avec un côté de 5 km : $0.08\,dmgr$.

de côté (cas des travaux topographiques) :

$$\bar{\sigma}_F = \frac{6.62 \times 0.05}{5000} = 0.0042\, gr = 42\, dmgr \tag{13}$$