THÉORIE CONCEPTUELLE DES CONCORDANCES FONDAMENTALES

YVES DE-MERVENT & SARRA NEJI

contact@sarra-neji.fr

RÉSUMÉ

La théorie des nombres repose sur plusieurs conventions. Nous reprenons la notion d'entiers naturels afin de montrer la pertinence de la remise en question de ces conventions, permettant d'apporter de nouveaux résultats. Nous démontrons des événements similaires entre les nombres premiers et les nombres composés d'un côté, et entre les couples de nombres premiers jumeaux et les couples de nombres composés jumeaux d'un autre côté. Nous démontrons une analogie entre les nombres entiers naturels et les rhésus sanguins du systèmes ABO.

ABSTRACT

Number theory is based on several conventions. We study the concept of natural numbers to show the relevance of questioning these conventions, enabling it to bring new results. We demonstrate similar events between prime numbers and composite numbers on the one hand, and between pairs of twin primes and pairs of twin composite numbers on the other hand. We demonstrate an analogy between natural numbers and the Rh blood groups of the ABO system.

YVES DE-MERVENT
Autiste Asperger

SARRA NEJI
Enseignante en mathématiques à l'école d'ingénieur l'EPITA à Rennes.
Diplômée de l'Université de Rennes 1 : Master 2 en Mathématiques et Application, et Master 2 en Mathématiques, mention Enseignement de l'éducation et de la Formation 2nd degré.

THÉORIE CONCEPTUELLE DES CONCORDANCES FONDAMENTALES

Première partie

Seconde partie

THÉORIE CONCEPTUELLE DES CONCORDANCES FONDAMENTALES

PARTIE I

L'objet de cette théorie est le fondement des mathématiques, sa base première et naturelle : **les nombres entiers naturels.** L'objectif est d'en comprendre la structure rigoureuse et solide, sans convention, interprétation ou raisonnement probabiliste.

Il est donc normal que les notions utilisées soient simples. La nouveauté réside dans le regard vierge de l'auteur sur ces entiers et dans la rigueur de leur étude.

Pour cela, nous mettrons en lumière dans cette première partie :

- l'unique répartition probante de l'ensemble des entiers naturels ;
- les piliers 1, 2 et 3 qui génèrent ces nombres ;
- la distribution des entiers premiers et des entiers composés parmi les entiers $\mathbb{N}^*$;
- le comportement des nombres premiers ;
- l'agencement des couples de premiers jumeaux.

À chaque étape, nous montrerons que seule cette structure organisationnelle est pertinente et apporte des résultats.

Cette étude mettra à notre disposition de nouveaux outils. Grâce à eux, nous apporterons des résultats inédits sur les conjectures mathématiques traitant des nombres premiers (spirale d'Ulam, conjecture (p, p+2), conjecture de Goldbach, conjecture de Collatz, HR…). Ces analyses confirmeront la fiabilité des outils de la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales.

Notre approche étant globale et fondamentale, nous ne nous limiterons pas à la mathématique pure. Cette architecture naturelle des nombres se retrouve de façon analogue dans d'autres domaines, tels que la biologie dans ses fondements.

PRÉ-REQUIS

- Nous travaillons dans l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ ou $\mathbb{N}^*$: l'ensemble des entiers naturels, privé de zéro (les ordinaux).
- **Congruence :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux entiers a et b sont congrus modulo n lorsque a – b est divisible par n. On note $a \equiv b\ [n]$
- **Lemme d'Euclide :** Soient a et b deux entiers naturels. Si un nombre premier p divise le produit a x b, alors p divise a ou b.

On note **{6k} l'ensemble des entiers naturels qui sont multiples de 6,** c'est-à-dire l'ensemble suivant :

$$\{6k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

On pourra aussi dire que les éléments de cet ensemble sont « de la forme » 6k.

On note **{6k±1} l'ensemble des entiers naturels qui sont congrus à +1 ou à -1 modulo 6,** c'est-à-dire l'ensemble suivant :

$$\{6k+1 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k-1 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k+5 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k-5 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

ou plus simplement :

$$\{6k+1 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k-1 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1\}$$

On pourra aussi dire que les éléments de cet ensemble sont « de la forme » 6k±1.

De la même façon, on note **{6k±2} l'ensemble des entiers naturels qui sont congrus à +2 ou à -2 modulo 6**, c'est-à-dire l'ensemble suivant :

$$\{6k+2 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k-2 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k+4 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k-4 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

ou plus simplement :

$$\{6k+2 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k-2 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2\}$$

On pourra aussi dire que les éléments de cet ensemble sont « de la forme » 6k±2.

On note **{6k±3} l’ensemble des entiers naturels qui sont congrus à +3 ou à -3 modulo 6,** c’est-à-dire l’ensemble suivant :

$$\{6k+3 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6k-3 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

On pourra aussi dire que les éléments de cet ensemble sont « de la forme » 6k±3.

Une partition d'un ensemble A est un ensemble de parties de A, non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est A.

Ici, {{6k}, {6k±1}, {6k±2}, {6k±3}} est une partition des entiers naturels $\mathbb{N}^*$. En effet, comme les restes des divisions euclidiennes d’un entier par 6 sont 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, tout entier naturel est de la forme 6k, 6k±1, 6k±2 ou 6k±3.

1 - LES ENTIERS NATURELS, LES NOMBRES COMPOSÉS, LES NOMBRES PREMIERS

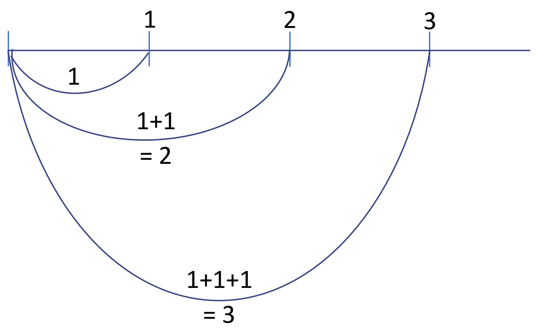
1.1 - Unité, symbole ou nombre ?

Un nombre entier naturel est une quantité mesurable. Qui dit mesure, dit unité. Or, tout nombre entier naturel est défini à partir de l'unité 1. C'est la base qui nous permet de mesurer un nombre (comme l'unité de masse est le gramme).

- Ainsi, **1 est l'unité de mesure pour les nombres.**
- De plus, 1 étant mesurable par l'unité, **1 est aussi un nombre**.
- Il peut aussi être utilisé comme **symbole (qu'on appelle en particulier « chiffre »)** dans l'écriture en base 10 : par exemple **17**.

Lorsque nous avons plusieurs unités, nous pouvons les additionner : **nous créons les nombres entiers naturels.**

Sur une représentation graphique, l'unité 1 est représentée par un segment. Les autres nombres entiers naturels sont représentés par plusieurs segments de l'unité.



** Représentation des nombres entiers naturels construits grâce à l'unité.*

CONCLUSION

- **1 est l'unité, un symbole et un nombre ;**
- **2 est un symbole et un nombre ;**
- **17 est un nombre (composé de deux symboles).**

Remarque : zéro est seulement un symbole (un chiffre).

1.2 - Primalité de certains nombres entiers naturels

DÉFINITION : **Un nombre entier naturel est « composé » s'il peut s'écrire comme produit de nombres entiers naturels autres que l'unité et que lui-même.**

Exemples : 15 = 3 x 5 = 5 x 3 = 15 x 1 = 5 x 3 x 1
126 = 63 x 2 = 7 x 9 x 2 = 7 x 3 x 3 x 2 = 7 x 3 x 3 x 2 x 1

Remarque : Les nombres entiers naturels composés peuvent être mesurés par 1, eux-mêmes et les facteurs présents dans tous les produits. Ainsi, 126 est mesurable par 1, 126, 63, 2, 7, etc.

DÉFINITION : **Un nombre entier naturel est dit « premier » s'il n'est pas composé.**

Exemples : 3 = 3 x 1 = 1 x 3
29 = 29 x 1 = 1 x 29
1 = 1 x 1
1 n'est pas composable. Il n'y a pas de raison d'exclure 1 de la liste des nombres premiers.

Remarque : Les nombres entiers naturels premiers peuvent être mesurés par eux-mêmes et l'unité uniquement.

CONCLUSION

1 est premier.

1.3 - Théorème fondamental de l'arithmétique

La convention par laquelle 1 est exclu des nombres premiers depuis des années a été établie pour simplifier l'énoncé de nombreux résultats. Notamment pour l'unicité du théorème fondamental de l'arithmétique : « tout nombre entier supérieur à 1 s'écrit de façon unique comme un produit de facteurs premiers (à l'ordre près des facteurs) ».

Si on prend en compte le fait que 1 est premier, la décomposition n'est plus unique.

De plus, d'après ce théorème, quelle est la décomposition en produit de facteurs premiers de 5, 17 ou 31 si 1 n'est pas premier ? Cette question a obligé à une nouvelle convention, qui dit qu'un nombre seul est considéré comme un produit de facteurs.

Admettre deux conventions sous prétexte de simplifier l'écriture de certains énoncés apparaît comme un compromis déséquilibré, altérant les propriétés fondamentales.

Ainsi, il apparaît manifestement que le théorème fondamental de l'arithmétique est incomplet. Essayons de l'écrire sans compromis (c'est-à-dire sans convention), tout en respectant son intérêt et son sens, ainsi que le fait que 1 soit premier.

> ***« Tout nombre entier naturel strictement supérieur à 1 s'écrit de façon unique comme un produit de nombres premiers (à l'ordre des facteurs près), dans lequel le facteur 1 n'apparaît qu'une seule fois. »***

Dans ce théorème, nous avons supprimé les conventions citées précédemment : les nombres premiers peuvent s'écrire comme le produit d'eux-mêmes et de 1. Ainsi, la décomposition existe pour tout entier naturel.

Pour l'unicité, il faut nécessairement fixer le nombre de 1 inscrits dans la décomposition. Il n'est pas nécessaire de faire apparaître plus d'une fois l'unité pour avoir l'unicité.

Remarque : Cela n'altère pas le fait que 1 = 1 x 1.
En effet, nous avons vu que 1 est un nombre, donc il est mesurable par l'unité. Mais le fait de ne pas décomposer 1 a un sens : c'est le seul nombre entier naturel qui n'est pas partageable en plusieurs parties entières et égales.

DÉMONSTRATION DU THÉOREME

Démontrons donc le théorème pour $n \geq 2$:

Existence : Démonstration par récurrence forte de la propriété $\forall n \geq 2$, P(n) :

« n s'écrit de façon unique comme un produit de nombres premiers (à l'ordre des facteurs près), dans lequel le facteur 1 n'apparaît qu'une seule fois. ».

Initialisation : Pour n = 2 : on a bien 2 = 1 x 2.

Hérédité : Supposons P(2), P(3), ..., P(n) vraies. Montrons que P(n+1) est vraie.

Soit n+1 est premier. Alors sa décomposition en produit de facteurs premiers existe et est 1 x (n+1) ;

Soit n+1 = a x b, où a et b sont strictement inférieurs à n+1. Par hypothèse de récurrence, a et b possèdent chacun une décomposition. En les plaçant dans le produit a x b et en ne gardant qu'une seule fois le facteur 1, on obtient la décomposition de n+1.

Unicité : Supposons qu'il existe $a_1, \ldots, a_r$ et $b_1, \ldots, b_s$ nombres premiers différents de 1 tels que :

$$n = 1 \times a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_r = 1 \times b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_s$$

Quitte à inverser, on suppose $r \leq s$.
Pour les comparer, on peut simplifier les expressions par 1 :

$$n = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_r = b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_s$$

Si n est un nombre premier différent de 1, on a nécessairement r = s = 1, donc $a_1 = b_1$ et n s'écrit de façon unique sous forme d'un produit de nombres premiers (à l'ordre des facteurs près), dans lequel le facteur 1 n'apparaît qu'une seule fois.

Si n n'est pas premier, d'après le Lemme d'Euclide, comme a_1 divise $b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_s$, il divise l'un des nombres premiers $b_1, \ldots, b_s$. Donc a_1 est égal à l'un de ces nombres. Quitte à changer l'ordre des $b_1, \ldots, b_s$, on peut supposer que $a_1 = b_1$.

On a alors : $a_2 \times \ldots \times a_r = b_2 \times \ldots \times b_s$

On réitère ce procédé et on montre que $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, etc.
Finalement, il reste $a_r = b_r \times \ldots \times b_s$
Comme ce ne sont que des nombres premiers différents de 1, on a forcément $a_r = b_r$ et r = s. Les deux décompositions sont identiques.

■

Pour illustrer ce théorème, nous pouvons trouver la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel n en utilisant un algorithme naïf qui divise l'entier n par le plus grand nombre premier $p \leq n$ diviseur de n. Puis on réapplique cet algorithme au quotient obtenu lors de la division. On s'arrête quand on obtient un quotient égal à 1 (on ne fait pas de division avec un dividende égal à 1).

Exemples :

18 = **3** x 6 (Quotient = 6)
6 = **3** x 2 (Quotient = 2)
2 = **2** x **1** (Quotient = 1)
D'où **18 = 3** x **3** x **2** x **1**

7 = **7** x **1** (Quotient = 1)
D'où **7 = 7** x **1**

Pour 1, le dividende est déjà égal à 1. Donc on ne le factorise pas.

1.4 - Infinité des nombres premiers

Le fait que 1 soit premier modifie légèrement la démonstration d'Euclide prouvant l'infinité des nombres premiers.

PROPRIÉTÉ : **Il existe une infinité de nombres premiers.**

DÉMONSTRATION :

Supposons par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $\{1, p_1, p_2, ..., p_n\}$ avec $p_1, p_2, ..., p_n$ différents de 1.

Soit P le produit de ces nombres premiers auquel on ajoute 1, c'est-à-dire
$P = 1 \times p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$. Donc P est strictement plus grand que 1.

- Le reste de la division de P par p_1 est 1 ;
- Le reste de la division de P par p_2 est 1 ;
- ... ;
- Le reste de la division de P par p_n est 1.

P n'est divisible par aucun nombre premier différent de 1 et P est différent de 1.

Donc P est un nombre premier n'appartenant pas à l'ensemble $\{1, p_1, p_2, ..., p_n\}$, ce qui contredit l'hypothèse que cet ensemble contient la totalité des nombres premiers différents de 1.

Ainsi, les nombres premiers différents de 1 ne sont pas en nombre fini, mais infini.

■

2 – LA RÉPARTITION FONDAMENTALE DES ENTIERS NATURELS : LE MODULO 6

2.1 - Repérage des nombres premiers

Regardons maintenant ces nombres premiers jusqu'à 100 (comme cela est régulièrement fait) mais en y incluant notre nouveau résultat (1 premier) :

1 **2** **3** 4 **5** 6 **7** 8 9 10 **11** 12 **13** 14 15 16 **17** 18 **19** 20 21 22 **23** 24 25 26 27 28 **29** 30 **31** 32 33 34 35 36 **37** 38 39 40 **41** 42 **43** 44 45 46 **47** 48 49 50 51 52 **53** 54 55 56 57 58 **59** 60 **61** 62 63 64 65 66 **67** 68 69 70 **71** 72 **73** 74 75 76 77 78 **79** 80 81 82 **83** 84 85 86 87 88 **89** 90 91 92 93 94 95 96 **97** 98 99 100

** Liste des entiers jusqu'à 100 dans laquelle les nombres premiers sont en bleu.*

Nous remarquons que la plupart des nombres premiers semblent se situer autour d'un multiple de 6. Vérifions cela.

PROPRIÉTÉ : **L'ensemble des nombres premiers (dont 1), différents de 2 et de 3, est inclus dans l'ensemble {6k±1}.**

DÉMONSTRATION : On peut réécrire cette propriété de cette manière :

« $\forall$ p $\in \mathbb{N}^*\backslash\{2, 3\}$, si p est un nombre premier, alors p $\in$ {6k±1} »

Démonstration par contraposée :

« $\forall$ p $\in \mathbb{N}^*\backslash\{2, 3\}$, si p $\notin$ {6k±1}, alors p n'est pas premier »

Soit p $\in \mathbb{N}^*\backslash\{2, 3\}$. On suppose p $\notin$ {6k±1}. Alors p $\in$ {6k} ou p $\in$ {6k±2} ou p $\in$ {6k±3}.

- Cas n°1 : p $\in$ {6k}. Alors p est divisible au moins par 1, par 6, par 2 et par 3. Donc p n'est pas premier.
- Cas n°2 : p $\in$ {6k±2}. Alors p est divisible par 2. Or p ≠ 2. Donc p n'est pas premier.
- Cas n°3 : p $\in$ {6k±3}. Alors p est divisible par 3. Or p ≠ 3. Donc p n'est pas premier.

Conclusion : p n'est pas premier.

■

Remarque : La réciproque est fausse : 25 $\in$ {6k±1}, or 25 = 1 x 5 x 5 donc 25 n'est pas premier.

CONCLUSION

L'ensemble des nombres premiers différents de 2 et de 3 est inclus dans l'ensemble {6k±1}.

{6k}	{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}
6	**1**	**2**	**3**
12	**5**	4	9
18	**7**	8	15
24	**11**	10	21
30	**13**	14	27
36	**17**	16	33
42	**19**	20	39
48	**23**	22	45
54	25	26	51
60	**29**	28	57
66	**31**	32	63
72	35	34	69
78	**37**	38	75
84	**41**	40	81
90	**43**	44	87
96	**47**	46	93
	49	50	99
	53	52	
	55	56	
	59	58	
	61	62	
	65	64	
	67	68	
	71	70	
	73	74	
	77	76	
	79	80	
	83	82	
	85	86	
	89	88	
	91	92	
	95	94	
	97	98	
		100	

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 6 jusqu'à 100.*
Les éléments surlignés sont les nombres premiers.

C'est donc l'arithmétique modulaire que nous utiliserons pour travailler sur les nombres et leur répartition. En particulier, nous travaillerons modulo 6. C'est ce modulo qui va nous permettre d'obtenir de nouveaux résultats sur la répartition des nombres entiers naturels.

À ce stade, les présences du nombre 2 dans l'ensemble {6k±2} et du nombre 3 dans l'ensemble {6k±3} paraissent insatisfaisantes puisque ces deux nombres sont isolés des autres nombres premiers. En fait, cette particularité a un sens et donne un rôle essentiel aux nombres 2 et 3, sans leur retirer leur primalité.

2.2 - Les ''générateurs'' d'ensembles : 1, 2 et 3

Nous essayons ici de comprendre l'ordonnancement des nombres entiers naturels. Nous n'allons donc pas rester focalisés sur les nombres premiers. Il faut regarder l'ensemble des entiers naturels et donc les nombres composés. C'est à cette condition que la pertinence de la répartition modulo 6 va se révéler.

L'ENSEMBLE {6K±1}

Dans cet ensemble, on observe deux sous-ensembles :

- **Les nombres premiers :** 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37... Nous noterons cet ensemble **{6k±1}' (ses éléments seront notés p).**
- **Les nombres composés** de la forme 6k±1 : 25, 35, 49... qui sont exclusivement des produits de 1 et d'au moins deux nombres premiers p différents de 1 (2 et 3 exclus puisqu'ils ne sont pas de la forme 6k±1). Nous noterons cet ensemble **{6k±1}'' (ses éléments seront notés pp).**

Il faut donc observer les entiers naturels jusqu'à 25 au minimum, sinon on ne verra pas ces sous-ensembles apparaître.

Il se passe un phénomène similaire dans les autres ensembles :

L'ENSEMBLE {6K±2}

- **Les puissances de 2 :** 2, 4, 8, 16... Nous noterons cet ensemble **{6k±2}'.**
- **Les autres :** 10, 14, 20, 22, 26... qui sont :
  - non puissances de 2,
  - multiples de 2,
  - non multiples de 3.

  Nous noterons cet ensemble **{6k±2}''.**

L'ENSEMBLE {6K±3}

- **Les puissances de 3 :** 3, 9, 27, 81... Nous noterons cet ensemble **{6k±3}'.**
- **Les autres :** 15, 21, 33, 39... qui sont :
  - non puissances de 3,
  - multiples de 3,
  - non multiples de 2.

  Nous noterons cet ensemble **{6k±3}''.**

L'ENSEMBLE {6K}

- **Les puissances de 6 (2 x 3) :** 6, 36, 216... Nous noterons cet ensemble **{6k}'.**
- **Les autres :** 12, 18, 24, 30... qui sont :
  - non produits de puissances de 2 et de 3,
  - multiples de 6 (multiples de 2 et de 3).

  Nous noterons cet ensemble **{6k}''**

{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}	{6k}
1 = 1	**2 = 1 x 2**	**3 = 1 x 3**	**6 = 1 x 2 x 3**
5 = 1 x 5	**4 = 1 x 2 x 2**	**9 = 1 x 3 x 3**	12 = 1 x 2 x 2 x 3
7 = 1 x 7	**8 = 1 x 2 x 2 x 2**	15 = 1 x 3 x 5	18 = 1 x 2 x 3 x 3
11 = 1 x 11	10 = 1 x 2 x 5	21 = 1 x 3 x 7	24 = 1 x 2 x 2 x 2 x 3
13 = 1 x 13	14 = 1 x 2 x 7	**27 = 1 x 3 x 3 x 3**	30 = 1 x 2 x 3 x 5
17 = 1 x 17	**16 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2**	33 = 1 x 3 x 11	**36 = 1 x 2 x 2 x 3 x 3**
19 = 1 x 19	20 = 1 x 2 x 2 x 5	39 = 1 x 3 x 13	42 = 1 x 2 x 3 x 7
23 = 1 x 23	22 = 1 x 2 x 11	45 = 1 x 3 x 3 x 5	48 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
25 = 1 x 5 x 5	26 = 1 x 2 x 13	51 = 1 x 3 x 17	54 = 1 x 2 x 3 x 3 x 3
29 = 1 x 29	28 = 1 x 2 x 2 x 7	57 = 1 x 3 x 19	60 = 1 x 2 x 2 x 3 x 5
31 = 1 x 31	**32 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2**	63 = 1 x 3 x 3 x 7	66 = 1 x 2 x 3 x 11
35 = 1 x 5 x 7	34 = 1 x 2 x 17	69 = 1 x 3 x 23	72 = 1 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3
37 = 1 x 37	38 = 1 x 2 x 19	75 = 1 x 3 x 5 x 5	78 = 1 x 2 x 3 x 13
41 = 1 x 41	40 = 1 x 2 x 2 x 2 x 5	**81 = 1 x 3 x 3 x 3 x 3**	84 = 1 x 2 x 2 x 3 x 7
43 = 1 x 43	44 = 1 x 2 x 2 x 11	87 = 1 x 3 x 29	90 = 1 x 2 x 3 x 3 x 5
47 = 1 x 47	46 = 1 x 2 x 23	93 = 1 x 3 x 31	96 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
49 = 1 x 7 x 7	50 = 1 x 2 x 5 x 5	99 = 1 x 3 x 3 x 11	
53 = 1 x 53	52 = 1 x 2 x 2 x 13		
55 = 1 x 5 x 11	56 = 1 x 2 x 2 x 2 x 7		
59 = 1 x 59	58 = 1 x 2 x 29		
61 = 1 x 61	62 = 1 x 2 x 31		
65 = 1 x 5 x 13	**64 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2**		
67 = 1 x 67	68 = 1 x 2 x 2 x 17		
71 = 1 x 71	70 = 1 x 2 x 5 x 7		
73 = 1 x 73	74 = 1 x 2 x 37		
77 = 1 x 7 x 11	76 = 1 x 2 x 2 x 19		
79 = 1 x 79	80 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 5		
83 = 1 x 83	82 = 1 x 2 x 41		
85 = 1 x 5 x 17	86 = 1 x 2 x 43		
89 = 1 x 89	88 = 1 x 2 x 2 x 2 x 11		
91 = 1 x 7 x 13	92 = 1 x 2 x 2 x 23		
95 = 1 x 5 x 19	94 = 1 x 2 x 47		
97 = 1 x 97	98 = 1 x 2 x 7 x 7		
	100 = 1 x 2 x 2 x 5 x 5		

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 6 accompagnés de leur factorisation. Les éléments des sous-ensembles « prime » sont en bleu, les éléments des sous-ensembles « seconde » sont en vert.*

Ainsi apparaît l'idée d'entiers « générateurs d'ensembles » :

1 est ''générateur'' de l'ensemble {6k±1}, c'est-à-dire :

- du fait d'être le plus petit élément de l'ensemble {6k±1}, 1 est le premier élément de l'ensemble {6k±1} ;
- aucun des éléments de l'ensemble {6k±1} n'est multiple de 2 ou de 3.

2 est ''générateur'' de l'ensemble {6k±2}, c'est-à-dire :

- du fait d'être le plus petit élément de l'ensemble {6k±2}, 2 est le premier élément de l'ensemble {6k±2} ;
- les éléments de l'ensemble sont créés par le produit d'un ou plusieurs facteurs 2, et de la factorisation de nombres de la forme 6k±1 ;
- aucun des éléments de l'ensemble {6k±2} n'est multiple de 3.

3 est ''générateur'' de l'ensemble {6k±3}, c'est-à-dire :

- du fait d'être le plus petit élément de l'ensemble {6k±3}, 3 est le premier élément de l'ensemble {6k±3} ;
- les éléments de l'ensemble sont créés par le produit d'un ou plusieurs facteurs 3, et de la factorisation de nombres de la forme 6k±1 ;
- aucun des éléments de l'ensemble {6k±3} n'est multiple de 2.

2 et 3 sont ''générateurs'' de l'ensemble {6k}, c'est-à-dire :

- du fait d'être le plus petit élément de l'ensemble {6k}, 6 est le premier élément de l'ensemble {6k}. 6 étant composé, ce sont ses facteurs premiers 2 et 3 qui donnent naissance à l'ensemble {6k} ;
- les éléments de l'ensemble sont créés par le produit d'un ou plusieurs facteurs 2, d'un ou plusieurs facteurs 3, et de la factorisation de nombres de la forme 6k±1 ;
- tous les éléments de l'ensemble {6k} sont multiples de 2 et de 3.

CONCLUSION

Nous obtenons une répartition organisée des entiers naturels :

- **en 4 ensembles ;**
- **en 8 sous-ensembles.**

{6k±1}		**{6k±2}**		**{6k±3}**		**{6k}**	
Nombres premiers p	**Nombres composés pp**	**Puissances de 2**	**Produits de puissances de 2 et de 6k±1**	**Puissances de 3**	**Produits de puissances de 3 et de 6k±1**	**Puissances de 6 (2 x 3)**	**Produits de puissances de 2, 3 et de 6k±1**
Aucun multiple de 2 ou de 3		*Multiples de 2. Aucun multiple de 3.*		*Multiple de 3. Aucun multiple de 2.*		*À la fois multiples de 2 et 3*	

3 - PERTINENCE DE L'ÉTUDE MODULO 6

3.1 - Comparaison avec les autres modulos

On peut se demander : « Pourquoi analyser cette répartition modulo 6 ? Pourquoi pas modulo 4, 7, 8, 10 ou 39 ? ». Une meilleure répartition existe peut-être avec un autre modulo. Surtout que les nombres 2 et 3 n'appartiennent pas à l'ensemble {6k±1} qui contient tous les autres nombres premiers (1 inclus), ce qui n'est pas tout à fait satisfaisant.

Nous allons ensemble déplacer ce curseur et regarder ce qui se passe. Tout d'abord, combien d'ensembles se construisent modulo n ?

PROPOSITION : **Le nombre d'ensembles décrits par un modulo n ∈ ℕ* est :**

- **n/2 + 1 si n est pair,**
- **(n+1)/2 si n est impair.**

DÉMONSTRATION : Par récurrence sur n ∈ ℕ*.

Initialisation :

- Pour n = 1, il n'y a que l'ensemble {1k}.
  De plus, (1+1)/2 = 1.
- Pour n = 2, on peut construire les ensembles {2k} et {2k±1}.
  De plus, 2/2 + 1 = 1 + 1 = 2.

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle l'est aussi au rang n+2.
Pour n pair, pour passer du modulo n au modulo n+2, on va rajouter un ensemble par rapport au rang n ce qui donne : n/2 + 1 + 1 = n/2 + 2 ensembles.
Or (n+2)/2 + 1 = n/2 + 1 + 1 = n/2 + 2.

On procède de la même manière pour les modulos impairs.

■

Exemples : Modulo 7, il y a 4 ensembles : {7k±1}, {7k±2}, {7k±3} et {7k}.
Modulo 14, il y a 8 ensembles : {14k±1}, {14k±2}, {14k±3}, {14k±4}, {14k±5}, {14k±6}, {14k±7} et {14k}.

Ainsi, plus le modulo n choisi sera grand, plus les nombres seront dispersés dans davantage d'ensembles.

Rappel du tableau de la répartition des entiers naturels en quatre ensembles modulo 6 :

{6k}	{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}
6	**1**	**2**	**3**
12	**5**	4	9
18	**7**	8	15
24	**11**	10	21
30	**13**	14	27
36	**17**	16	33
42	**19**	20	39
48	**23**	22	45
54	25	26	51
60	**29**	28	57
66	**31**	32	63
72	35	34	69
78	**37**	38	75
84	**41**	40	81
90	**43**	44	87
96	**47**	46	93
	49	50	99
	53	52	
	55	56	
	59	58	
	61	62	
	65	64	
	67	68	
	71	70	
	73	74	
	77	76	
	79	80	
	83	82	
	85	86	
	89	88	
	91	92	
	95	94	
	97	98	
		100	

Les nombres premiers sont regroupés.

À l'exception du nombre 2 (qui appartient à l'ensemble {6k±2}) et du nombre 3 (qui appartient à l'ensemble {6k±3}), l'ensemble des nombres premiers est réuni dans un même ensemble : {6k±1}.

Les puissances sont regroupées.

Le nombre 1 appartient à l'ensemble {6k±1} dans lequel sont aussi les nombres entiers qui ne sont mesurables que par eux-mêmes et l'unité, c'est-à-dire les nombres premiers p : 1, 5, 7, 11, 13, 17…

Le nombre 2 appartient à l'ensemble {6k±2} dans lequel sont aussi incluses les puissances de 2 : 2, 4, 8, 16, 32, 64…

Le nombre 3 appartient à l'ensemble {6k±3} dans lequel sont aussi incluses les puissances de 3 : 3, 9, 27, 81, 243…

Le nombre 6 (2 x 3) appartient à l'ensemble {6k} dans lequel sont aussi incluses les puissances de 6 : 6, 36, 216, 1 296…

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 6 jusqu'à 100.*
Les éléments surlignés sont les nombres premiers.

Ainsi, en établissant la répartition des nombres entiers naturels modulo 6, on trouve une distribution logique de ces entiers qui va au-delà de la seule construction modulaire. Les ensembles sont formés en fonction des propriétés de leurs éléments et, notamment, de l'élément générateur (comme vu précédemment).

Est-ce le cas pour d'autres répartitions ?

3.1.1 - MODULOS STRICTEMENT SUPÉRIEURS À 6

{7k±1}	{7k±2}	{7k±3}	{7k}
1	**2**	**3**	**7**
6	**5**	4	14
8	9	10	21
13	12	**11**	28
15	16	**17**	35
20	**19**	18	42
22	**23**	24	49
27	26	25	56
29	30	**31**	63
34	33	32	70
36	**37**	38	77
41	40	39	84
43	44	45	91
48	**47**	46	98
50	51	52	
55	54	**53**	
57	58	**59**	
62	**61**	60	
64	65	66	
69	68	**67**	
71	72	**73**	
76	75	74	
78	**79**	80	
83	82	81	
85	86	87	
90	**89**	88	
92	93	94	
97	96	95	
99	100		

Au-delà du modulo 6, les nombres premiers se dispersent dans plusieurs ensembles. Plus le modulo est grand, plus il y aura d'ensembles contenant des nombres premiers.

Les puissances sont mélangées. Exemple avec modulo 7 : le nombre 2 appartient à l'ensemble {7k±2} alors que certaines de ses puissances appartiennent à l'ensemble {7k±3} (comme 4, 32...) ou à l'ensemble {7k±1} (comme 8, 64...).

La répartition des nombres via un modulo supérieur à 6 construit des ensembles dont les éléments n'ont pas de propriétés fondamentales communes autres que la construction par le modulo.

* Tableaux des répartitions des entiers naturels modulo 7 et modulo 14 jusqu'à 100. Les éléments surlignés sont les nombres premiers.

{14k±1}	{14k±2}	{14k±3}	{14k±4}	{14k±5}	{14k±6}	{14k±7}	{14k}
1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	14
13	12	**11**	10	9	8	21	28
15	16	**17**	18	**19**	20	35	42
27	26	25	24	**23**	22	49	56
29	30	**31**	32	33	34	63	70
41	40	39	38	**37**	36	77	84
43	44	45	46	**47**	48	91	98
55	54	**53**	52	51	50		
57	58	**59**	60	**61**	62		
69	68	**67**	66	65	64		
71	72	**73**	74	75	76		
83	82	81	80	**79**	78		
85	86	87	88	**89**	90		
97	96	95	94	93	92		
99	100						

3.1.2 - MODULO 5

{5k±1}	{5k±2}	{5k}
1	**2**	**5**
4	**3**	10
6	**7**	15
9	8	20
11	12	25
14	**13**	30
16	**17**	35
19	18	40
21	22	45
24	**23**	50
26	27	55
29	28	60
31	32	65
34	33	70
36	**37**	75
39	38	80
41	42	85
44	**43**	90
46	**47**	95
49	48	100
51	52	
54	**53**	
56	57	
59	58	
61	62	
64	63	
66	**67**	
69	68	
71	72	
74	**73**	
76	77	
78	**79**	
81	82	
84	**83**	
86	87	
89	88	
91	92	
94	93	
96	**97**	
99	98	

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 5 jusqu'à 100.*
Les éléments surlignés sont les nombres premiers.

Les nombres premiers sont dispersés dans plusieurs ensembles.

Le nombre premier 5 est isolé dans l'ensemble {5k}. Le reste des nombres premiers se disperse dans plusieurs ensembles : {5k±1} et {5k±2}.

Les puissances sont mélangées.

Le nombre 3 appartient à l'ensemble {5k±2} alors que certaines de ses puissances (comme 9 ou 81) appartiennent à l'ensemble {5k±1}. Il en va de même pour le nombre 2, qui est séparé de 4, 16…

La répartition des nombres modulo 5 construit des ensembles dont les éléments n'ont pas de propriétés fondamentales communes autres que la construction modulaire.

3.1.3 - MODULO 2

{2k±1}	{2k}
1	**2**
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	38
39	40
41	42
43	44
45	46
47	48
49	50
51	52
53	54
55	56
57	58
59	60
61	62
63	64
65	66
67	68
69	70
71	72
73	74
75	76
77	78
79	80
81	82
83	84
85	86
87	88
89	90
91	92
93	94
95	96
97	98
99	100

Les nombres premiers sont regroupés.

Le nombre premier 2 (le seul nombre premier pair) est isolé dans l'ensemble {2k}. Tous les autres nombres premiers sont regroupés dans l'ensemble {2k±1}. Cela semble plus satisfaisant que l'organisation modulo 6 dans laquelle les nombres 2 et 3 sont isolés des autres nombres premiers.

Cependant, beaucoup de nombres composés impairs sont mélangés avec les nombres premiers, ce qui rend leur étude difficile.

Notons tout de même qu'**une logique se dessine** clairement puisque la construction modulo 2 répartit les entiers en fonction d'une de leurs propriétés fondamentales communes : leur parité.

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 2 jusqu'à 100.*
Les éléments surlignés sont les nombres premiers.

3.1.4 - MODULO 3

{3k±1}		{3k}
1	50	**3**
2	52	6
4	**53**	9
5	55	12
7	56	15
8	58	18
10	**59**	21
11	**61**	24
13	62	27
14	64	30
16	65	33
17	**67**	36
19	68	39
20	70	42
22	**71**	45
23	**73**	48
25	74	51
26	76	54
28	77	57
29	**79**	60
31	80	63
32	82	66
34	**83**	69
35	85	72
37	86	75
38	88	78
40	**89**	81
41	91	84
43	92	87
44	94	90
46	95	93
47	**97**	96
49	98	99
	100	

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 3 jusqu'à 100.*
Les éléments surlignés sont les nombres premiers.

Les nombres premiers sont regroupés.

À l'exception du nombre 3 qui appartient à l'ensemble {3k}, l'ensemble des nombres premiers est réuni dans un même ensemble : {3k±1}. Cela semble plus satisfaisant que l'organisation modulo 6 dans laquelle les nombres 2 et 3 sont isolés des autres nombres premiers.

Cependant, comme pour le modulo 2, trop de nombres composés sont mélangés avec les nombres premiers : des nombres pairs sont mélangés avec les nombres premiers. Ils alourdissent donc l'ensemble et empêchent une étude des nombres premiers.

3.1.5 - MODULO 4

{4k±1}	{4k±2}	{4k}
1	**2**	4
3	6	8
5	10	12
7	14	16
9	18	20
11	22	24
13	26	28
15	30	32
17	34	36
19	38	40
21	42	44
23	46	48
25	50	52
27	54	56
29	58	60
31	62	64
33	66	68
35	70	72
37	74	76
39	78	80
41	82	84
43	86	88
45	90	92
47	94	96
49	98	100
51		
53		
55		
57		
59		
61		
63		
65		
67		
69		
71		
73		
75		
77		
79		
81		
83		
85		
87		
89		
91		
93		
95		
97		
99		

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 4 jusqu'à 100.*
Les éléments surlignés sont les nombres premiers.

Les nombres premiers sont regroupés.

Les nombres premiers sont tous regroupés dans l'ensemble {4k±1} sauf le nombre 2, ce qui semble plus satisfaisant que l'organisation modulo 6 dans laquelle les nombres 2 et 3 sont isolés des autres nombres premiers.

Cependant, il y a davantage de nombres composés impairs mélangés avec les nombres premiers qu'en modulo 6.

Les puissances sont mélangées.

Le nombre 2 appartient à l'ensemble {4k±2}, tandis que ses puissances appartiennent à l'ensemble {4k} : 4, 8, 16…

Le nombre 6 appartient à l'ensemble {4k±2}, tandis que ses puissances appartiennent à l'ensemble {4k} : 36…

Remarque : Jusqu'à 100, il y a une répartition homogène des nombres :

- 1/2 des entiers sont de la forme 4k±1,
- 1/4 des entiers sont de la forme 4k±2,
- 1/4 des entiers sont de la forme 4k.

Parmi toutes les autres, et si l'on excepte l'étude modulo 6, l'étude modulo 4 paraît être la plus pertinente. En effet, c'est le modulo avec lequel les nombres premiers restent regroupés dans un même ensemble $\{4k\pm1\}$, à l'exception d'un seul nombre premier : 2. Alors que modulo 6, deux nombres premiers sont isolés : les nombres 2 et 3.

D'ailleurs, Pierre de Fermat avait remarqué que tous les nombres premiers hormis le 2 appartenaient à l'ensemble $\{4k\pm1\}$, ce qui lui a permis d'énoncer le théorème des deux carrés. Alors pourquoi s'attacher malgré tout aux nombres de la forme $6k\pm1$?

3.2 - Théorème des deux carrés de Pierre de Fermat

Rappel du théorème des deux carrés de Pierre de Fermat :

> **Un nombre premier p impair est la somme de deux carrés parfaits si et seulement si p est congru à 1 modulo 4.**
>
> Autrement dit :
>
> **Soit p un nombre premier impair, on note $\Sigma = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists\, a, b \in \mathbb{N}^*,\ n = a^2+b^2\}$.**
> **On a : $p \in \Sigma \Leftrightarrow p \equiv 1\ [4]$.**

Pour illustrer ce théorème, nous pourrions lister tous les nombres de la forme 4k+1, identifier ceux qui sont premiers et trouver les sommes de carrés correspondantes. Or, si nous faisons cette même opération modulo 6, nous nous retrouvons avec moins de nombres composés à exclure, ce qui rend la manipulation plus rapide.

Plus précisément, pour $k \in \mathbb{N}^*$, nous alternons les 6k+1 et les 6k-1 à chaque multiple de 6 :

- si k est pair, on retiendra le 6k+1 ;
- si k est impair, on retiendra le 6k-1.

En effet, ces éléments se retrouvent dans l'ensemble des nombres de la forme 4k+1.

DÉMONSTRATION : Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

- Pour k pair, on note k = 2n avec $n \in \mathbb{N}^*$. On a : 6(2n)+1 = 12n+1 = **4(3n)+1**.
- Pour k impair, on note k = 2n+1 avec $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a : 6(2n+1) -1 = 12n+6 -1 = 12n+5 = 4(3n)+4+1 = **4(3n+1)+1**.

Notons que l'alternance des 6k+1 et des 6k-1 à chaque multiple de 6 n'écarte aucun nombre premier de la forme 4k+1 (et donc somme de deux carrés). En effet, les nombres de la forme 4k+1 que nous évitons sont de la forme 4(3n+2)+1. Et aucun de ces nombres n'est premier car :

4(3n+2)+1 = 12n+9 = 3(4n+3) est divisible par 3, et 3 n'est pas de la forme 4k+1.

■

Listons ces éléments :

- Pour k = 1, on retiendra 6 x 1 - 1 = **5 (premier)**. On a **5 = 2^2+1^2 ;**
- Pour k = 2, on retiendra 6 x 2 + 1 = **13 (premier)**. On a **13 = 3^2+2^2 ;**
- Pour k = 3, on retiendra 6 x 3 - 1 = **17 (premier)**. On a **17 = 4^2+1^2**
- Pour k = 4, on retiendra 6 x 4 + 1 = 25 (composé). On a 25 = 3^2+4^2 (Pythagore, 25 = 5^2) ;
- Pour k = 5, on retiendra 6 x 5 - 1 = **29 (premier)**. On a **29 = 5^2+2^2 ;**
- …

Liste des entiers naturels de la forme 4k+1	**Liste des entiers naturels de la forme 6k±1 en alternance**
4k+1 = 5	6k-1 = 5
4k+1 = 9	6k+1 = 13
4k+1 = 13	6k-1 = 17
4k+1 = 17	6k+1 = 25
4k+1 = 21	6k-1 = 29
4k+1 = 25	6k+1 = 37
4k+1 = 29	6k-1 = 41
4k+1 = 33	6k+1 = 49
4k+1 = 37	6k-1 = 53
4k+1 = 41	6k+1 = 61
4k+1 = 45	6k-1 = 65
4k+1 = 49	6k+1 = 73
4k+1 = 53	6k-1 = 77
4k+1 = 57	6k+1 = 85
4k+1 = 61	6k-1 = 89
4k+1 = 65	6k+1 = 97
4k+1 = 69	
4k+1 = 73	
4k+1 = 77	
4k+1 = 81	
4k+1 = 85	
4k+1 = 89	
4k+1 = 93	
4k+1 = 97	

** Les éléments surlignés en bleu sont les nombres composés. On remarque qu'ils sont plus nombreux sous la forme 4k+1 que sous la forme 6k±1 alternée.*

Jusqu'à 100, on rencontre 13 nombres composés en 4k+1, contre seulement 5 nombres composés en 6k±1. Pourtant, on énumère bien tous les nombres premiers qui s'écrivent sous la forme 4k+1. **La recherche et l'énumération des nombres premiers s'écrivant comme somme de deux carrés est donc plus rapide en alternant les 6k±1 qu'en énumérant les 4k+1.**

NB : Malgré sa primalité, 1 n'appartient pas à la liste. En effet, il ne possède pas de prédécesseur. Nous ne pouvons donc pas l'écrire comme somme d'entiers, encore moins comme somme de carrés.

Ce nouveau théorème sera noté Y.D.M. (pour Yves De-Mervent). Il améliore significativement le théorème de Pierre de Fermat.

THÉORÈME Y.D.M.

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3. On note $p = 6k \pm 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. p est la somme de deux carrés parfaits si et seulement si

- **$p \equiv +1\ [6]$ quand k pair,**
- **$p \equiv -1\ [6]$ quand k impair.**

4 - PRODUITS DES NOMBRES DE LA FORME 6K±1 ET REPÉRAGE DES NOMBRES PREMIERS

4.1 - Construction de l'ensemble {6k±1} par le produit

PROPRIÉTÉ : **Le produit de deux éléments de l'ensemble {6k±1} est un élément de l'ensemble {6k±1}.**

DÉMONSTRATION : Soit $(k, k') \in \mathbb{N}^{*2}$:

- $1 \times (6k\pm1) = 6k\pm1$
- $(6k+1) \times (6k'+1) = 36kk' + 6k + 6k' + 1 = 6 \times (6kk'+k+k') + 1$
- $(6k+1) \times (6k'-1) = 36kk' - 6k + 6k' - 1 = 6 \times (6kk'-k+k') - 1$
- $(6k-1) \times (6k'-1) = 36kk' - 6k - 6k' + 1 = 6 \times (6kk'-k-k') + 1$

■

On en déduit, en particulier, que les éléments de l'ensemble {6k±1} s'engendrent au fur et à mesure par le produit des uns avec les autres. En effet, les p et les pp génèrent de nouveaux pp :

Soient $(p_1, p_2) \in \{6k\pm1\}'^2$ et $(pp_1, pp_2, pp_3, pp_4) \in \{6k\pm1\}''^4$,

- $p_1 \times p_2 = pp_1$ avec p_1 et p_2 différents de 1,
- $p_1 \times pp_1 = pp_2$,
- $pp_2 \times p_2 = pp_3$,
- $pp_1 \times pp_2 = pp_4$.

Au sein de l'ensemble {6k±1}, la répartition des nombres composés pp est donc déterminée par le produit des nombres premiers et des nombres composés entre eux. En effet, au fur et à mesure des produits des éléments de l'ensemble {6k±1}\{1} (c'est-à-dire les voisins directs des multiples de 6), les nombres composés pp se créent et s'installent autour des multiples de 6. Ainsi, les places restées vacantes autour des multiples de 6 sont identifiées comme étant des nombres premiers p. On comprend donc que les nombres premiers p se répartissent en fonction de la construction des nombres composés pp.

Ces deux catégories de nombres sont donc dépendantes l'une de l'autre. Cela implique que leurs répartitions au sein de l'ensemble {6k±1} dépendent aussi l'une de l'autre.

Au sein de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}^*$, cette construction reste valable. En effet, l'ensemble {6k±1} est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{N}^*$. Donc les répartitions des nombres premiers p et des nombres composés pp s'appliquent aussi au sein de l'ensemble $\mathbb{N}^*$.

CONCLUSION

Au sein des entiers naturels ℕ*, les nombres composés pp sont construits par le produit des éléments de l'ensemble {6k±1}\{1} entre eux. Leur répartition est donc déterminée. Or la répartition des nombres premiers p dépend de la répartition des nombres composés pp.
Ceci montre que les nombres premiers n'apparaissent pas de façon aléatoire.

4.2 - Test de primalité et recherche des facteurs premiers d'un produit

La construction autonome de l'ensemble {6k±1} par le produit va nous permettre d'établir un test de primalité des éléments de cet ensemble.

A – TEST DE PRIMALITÉ

Afin de tester la primalité d'un nombre entier naturel, nous allons décrire un algorithme utilisant les éléments de l'ensemble {6k±1}.

Étape 1 - On multiplie entre eux tous les éléments de l'ensemble {6k±1}. Le produit sera un élément de l'ensemble {6k±1}. De plus, on stocke l'ensemble de chaque produit (c'est-à-dire les facteurs et le résultat du produit).

5 x 5 = **25**	7 x 7 = **49**	11 x 11 = **121**	13 x 13 = **169**
5 x 7 = **35**	7 x 11 = **77**	11 x 13 = **143**	13 x 17 = **221**
5 x 11 = **55**	7 x 13 = **91**	11 x 17 = **187**	13 x 19 = **247**
5 x 13 = **65**	7 x 17 = **119**	11 x 19 = **209**	13 x 23 = **299**
5 x 17 = **85**	7 x 19 = **133**	11 x 23 = **253**	13 x 25 = **325**
5 x 19 = **95**	7 x 23 = **161**	11 x 25 = **275**	
5 x 23 = **115**	7 x 25 = **175**		
5 x 25 = **125**			

17 x 17 = **289**	19 x 19 = **361**	23 x 23 = **529**	25 x 25 = **625**
17 x 19 = **323**	19 x 23 = **437**	23 x 25 = **575**	etc.
17 x 23 = **391**	19 x 25 = **475**		
17 x 25 = **425**			

Remarque : Ici, on n'effectuera pas de produit avec le nombre 1, puisqu'il générera l'ensemble des nombres de la forme 6k±1 et que cela n'apportera rien à notre recherche. Cette mise de côté n'enlève rien à l'appartenance de 1 à l'ensemble {6k±1} et à sa primalité.

Étape 2 - Ensuite, on se fixe une limite pour générer tous les produits inférieurs ou égaux à cette limite, sans en oublier. Exemple avec **145** : nous devons effectuer le produit 5 x 29.

Étape 3 - Enfin, on place les produits trouvés autour des multiples de 6 pour observer les éléments manquants.

_	6	_	_	12	_	_	18	_	_	24	**25**	_	30	_
35	36	_	_	42	_	_	48	**49**	_	54	**55**	_	60	_
65	66	_	_	72	_	**77**	78	_	_	84	**85**	_	90	**91**
95	96	_	_	102	_	_	108	_	_	114	**115**	**119**	120	**121**
125	126	_	_	132	**133**	_	138	_	**143**	144	**145**			

Les places restées vacantes sont donc des nombres premiers de la forme 6k±1. De cette manière, nous avons identifié tous les nombres premiers inférieurs à 145 : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139.

Ainsi, on décrit un algorithme qui prend en entrée un entier n ≥ 5 de la forme 6k±1, puis qui cherche dans les produits stockés s'il retrouve n.

- Si oui, l'algorithme donne n accompagné de sa factorisation.
- Si non, l'algorithme ne donne pas de solution.

C'est donc l'absence de réponse de l'algorithme qui permettra d'identifier un nombre premier.

Exemples :

- Si n = 97, l'algorithme ne donnera pas de réponse.
  Cette absence de réponse signifie que 97 est premier.

- Si n = 437, l'algorithme donnera la réponse suivante : 437 = 19 x 23.
  Donc 437 est un nombre composé.

- Si n = 125, l'algorithme donnera la réponse suivante : 125 = 5 x 25.
  Donc 125 est un nombre composé.

B – APPLICATION AU CHIFFREMENT RSA

Le chiffrement RSA est un système algorithmique inventé à la fin des années 1970 et très répandu actuellement pour sécuriser la transmission d'informations confidentielles et les transactions bancaires sur Internet. Son principe est de générer une clé publique par le produit de deux nombres premiers p et q, où p et q sont cachés (clés privées). L'objectif est, à partir de ce produit p x q, de retrouver les nombres premiers p et q.

Un nombre RSA étant le produit de deux nombres premiers p, il est nécessairement un nombre composé pp de l'ensemble {6k±1} et sera donc présent dans le stock de produits qu'a généré notre algorithme.

Ainsi, si nous mettons un nombre RSA en entrée, l'algorithme nous donnera forcément une réponse : le nombre RSA en tant que produit accompagné de sa factorisation.

Étant donnée la définition d'un nombre RSA, cette factorisation sera composée de deux nombres premiers, que l'algorithme nous donnera.

CONCLUSION

La manière dont les nombres premiers p et les nombres composés pp vivent au sein de l'ensemble {6k±1} nous permet d'établir un algorithme de test de primalité d'un entier n, sans que l'algorithme lui-même n'utilise la notion de primalité.
De plus, dans le cas d'un nombre RSA, cet algorithme donne la factorisation de ce nombre composé pp. Le nombre étant identifié comme un nombre de la forme RSA, ses facteurs sont nécessairement premiers.

Remarque : Nous avons ouvert une parenthèse sur le chiffrement RSA afin de montrer que les outils découverts dans la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales s'appliquent à des problèmes actuels. Ce qu'il faut retenir, c'est l'application efficace des outils. Le chiffrement RSA est un exemple choisi parmi tant d'autres. Nous pouvons maintenant refermer la parenthèse.

5 - PROPORTION DES ENTIERS NATURELS DANS LES ENSEMBLES

5.1 - Proportion des ensembles jusqu'à 102

PROPRIÉTÉ : **Dans un ensemble d'entiers consécutifs compris entre 1 et un multiple de 6,**

- **les éléments de l'ensemble {6k±1} représentent 1/3 du nombre total d'entiers ;**
- **les éléments de l'ensemble {6k±2} représentent 1/3 du nombre total d'entiers ;**
- **les éléments de l'ensemble {6k±3} représentent 1/6 du nombre total d'entiers ;**
- **les éléments de l'ensemble {6k} représentent 1/6 du nombre total d'entiers.**

DÉMONSTRATION : On cherche à prouver que $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, l'ensemble {1, 2, 3, ..., 6n} contient

- 1/3 d'entiers appartenant à l'ensemble {6k±1},
- 1/3 d'entiers appartenant à l'ensemble {6k±2},
- 1/6 d'entiers appartenant à l'ensemble {6k±3},
- 1/6 d'entiers appartenant à l'ensemble {6k}.

Démonstration par récurrence sur n.

Initialisation : Pour n = 1, l'ensemble est {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Il contient :

- 2 entiers de la forme 6k±1, soit 2/6 = 1/3,
- 2 entiers de la forme 6k±2, soit 2/6 = 1/3,
- 1 entier de la forme 6k±3, soit 1/6,
- 1 entier de la forme 6k, soit 1/6.

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que l'ensemble {1, 2, 3, ..., 6n} contient :

- 1/3 d'entiers appartenant à l'ensemble {6k±1},
- 1/3 d'entiers appartenant à l'ensemble {6k±2},
- 1/6 d'entiers appartenant à l'ensemble {6k±3},
- 1/6 d'entiers appartenant à l'ensemble {6k}.

Prouvons qu'elle est vraie au rang n+1.

Soit l'ensemble {1, 2, 3, ..., 6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5, 6n+6} constitué de 6n+6 éléments. Cet ensemble contient :

- 1/3 x 6n entiers de l'ensemble {6k±1} + 2, soit 2n+2. Soit une proportion d'1/3,
- 1/3 x 6n entiers de l'ensemble {6k±2} + 2, soit 2n+2. Soit une proportion d'1/3,
- 1/6 x 6n entiers de l'ensemble {6k±3} + 1, soit n+1. Soit une proportion d'1/6,
- 1/6 x 6n entiers de l'ensemble {6k} + 1, soit n+1. Soit une proportion d'1/6.

■

Pour une meilleure vue d'ensemble, nous listons les entiers naturels jusqu'à 102 qui, lui, est un multiple de 6.

{6k}	{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}
6	**1**	**2**	**3**
12	**5**	4	9
18	**7**	8	15
24	**11**	10	21
30	**13**	14	27
36	**17**	16	33
42	**19**	20	39
48	**23**	22	45
54	25	26	51
60	**29**	28	57
66	**31**	32	63
72	35	34	69
78	**37**	38	75
84	**41**	40	81
90	**43**	44	87
96	**47**	46	93
102	49	50	99
	53	52	
	55	56	
	59	58	
	61	62	
	65	64	
	67	68	
	71	70	
	73	74	
	77	76	
	79	80	
	83	82	
	85	86	
	89	88	
	91	92	
	95	94	
	97	98	
	101	100	

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 6 jusqu'à 102.*
Les éléments surlignés sont les nombres premiers.

TAILLE RÉGULIÈRE DES ENSEMBLES : INITIALISATION À 102

Nous allons répartir les nombres entiers naturels jusqu’à 102 afin de conserver les proportions 1/3, 1/3, 1/6 et 1/6 vues précédemment (102 = 17 x 6, donc 102 est bien un multiple de 6).

Nous aurions pu choisir d’aller jusqu’à 24. Nous aurions bien vu les ensembles se dessiner, avec les bonnes quantités. Par contre, nous n’aurions pas eu les sous-ensembles de l’ensemble {6k±1} puisque 25 n’est pas dedans : 25 est le premier nombre composé pp du sous-ensemble {6k±1}'' à apparaître.

Ainsi, allons jusqu'à 102 (et non pas jusqu’à 100) :

	Taille des ensembles :
{6k±1}	34 entiers (1/3 de 102)
{6k±2}	34 entiers (1/3 de 102)
{6k±3}	17 entiers (1/6 de 102)
{6k}	17 entiers (1/6 de 102)

RÉPARTITION DES NOMBRES JUSQU'À 102

34 nombres de la forme 6k±1 jusqu'à 102 (1/3 de 102)
1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 85, 89, 91, 95, 97, 101
(Nombres premiers p et nombres composés pp)

34 nombres de la forme 6k±2 jusqu'à 102 (1/3 de 102)
2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34, 38, 40, 44, 46, 50, 52, 56, 58, 62, 64, 68, 70, 74, 76, 80, 82, 86, 88, 92, 94, 98, 100
(Puissances de 2 et nombres divisibles par 2 non divisibles par 3)

17 nombres de la forme 6k±3 jusqu'à 102 (1/6 de 102)
3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99
(Puissances de 3 et nombres impairs divisibles par 3)

17 nombres de la forme 6k jusqu'à 102 (1/6 de 102)
6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102
(Puissances de 6 et nombres pairs simultanément divisibles par 2 et par 3)

Remarque : Une autre manière de trouver le nombre d'éléments de l'ensemble $\{6k\pm1\}$ jusqu'à 102 est la suivante :

- Jusqu'à 102, comptons le nombre d'éléments autour des multiples de 6 : il y a 102/6 = 17 multiples de 6.
- Donc autour de ces multiples de 6, il y a 17 x 2 = 34 éléments.
- Parmi ces 34 éléments, on trouve 103 mais pas 1. Il faut donc retrancher le nombre 103 (34 éléments – 1 = 33) et ajouter le nombre premier 1. On obtient finalement 33+1, soit 34 éléments.

DÉVELOPPEMENT JUSQU'À 10^n+2

PROPRIÉTÉ : **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, 10^n+2 est divisible par 6.**

DÉMONSTRATION : Par récurrence.

Initialisation : Pour n = 1, 102 = 17 x 6.

Hérédité : On suppose 10^n+2 est divisible par 6 au rang n. Prouvons que $10^{n+1}+2$ est divisible par 6.

$\exists k \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
10^n + 2 &= 6k \\
10^{n+1} + 2 \times 10 &= 10 \times 6 \times k \\
10^{n+1} + 2 + 18 &= 10 \times 6 \times k \\
10^{n+1} + 2 &= 10 \times 6 \times k - 18 \\
10^{n+1} + 2 &= 6 \times (10 \times k - 3)
\end{aligned}
$$

Donc $10^{n+1}+2$ est bien divisible par 6.

■

De cette manière, on peut dire que la répartition des ensembles que nous avons observée jusqu'à 102 est aussi valable jusqu'à 10^n+2, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cette borne est plus pertinente que 100 puisqu'elle permet d'avoir des proportions exactes ; et ce, aussi loin que nous irons dans les grands nombres. Elle nous permet aussi d'avancer tous les 10^n+2 et de continuer l'étude de la répartition des nombres premiers. Notamment, il se passe plusieurs événements autour de 1 002 (10^3+2).

5.2 - Proportion des sous-ensembles autour de 1 002.

Pour étudier la répartition des nombres premiers et des couples de premiers jumeaux, **il est impérativement nécessaire de regarder ce qui se passe pour les autres entiers naturels.** Ainsi, dans un premier temps, nous allons comparer **la proportion de nombres premiers de l'ensemble {6k±1}' à la proportion de nombres composés de l'ensemble {6k±1}''.**

Rappelons les notations utilisées :

- les éléments de l'ensemble {6k±1}' seront notés « p » pour désigner les nombres premiers de la forme 6k±1 ;
- les éléments de l'ensemble {6k±1}'' seront notés « pp » pour désigner les nombres composés de la forme 6k±1.

QUE SE PASSE-T-IL AVANT 996 (DERNIER MULTIPLE DE 6 AVANT 1 000) ?

Qu'importe le multiple de 6 plus petit que 996 que vous choisirez, le nombre de nombres premiers p de l'ensemble sera toujours plus important que le nombre de nombres composés pp.

Exemple : Jusqu'à n = 282, on observe :

- 59 nombres premiers p de la forme 6k±1 ;
- 35 nombres composés pp de la forme 6k±1.

NOUS OBSERVONS À N = 996 (DERNIER MULTIPLE DE 6 AVANT 1 000) QUE, POUR LA PREMIÈRE FOIS, IL Y A ÉGALITÉ DES PROPORTIONS :

- **166 nombres premiers p** de la forme 6k±1 (le premier étant 1, le dernier 991),
- **166 nombres composés pp** de la forme 6k±1 (le premier étant 25, le dernier 995),
- 166 nombres de la forme 6k (996/6 = 166) (le premier étant 6 et le dernier 996),
- 166 nombres de la forme 6k±3 (le premier étant 3 et le dernier 993),
- 166 couples de nombres pairs jumeaux (2k, 2k+2) dont chaque membre est de la forme 6k±2 (le premier couple étant (2, 4), le dernier (992, 994)).

Ces égalités correspondent bien aux proportions vues sur les ensembles modulo 6 (1/3, 1/3, 1/6, 1/6).

Entre 996 et 1 002, les p dominent toujours car le prochain entier à apparaitre est un nombre premier p : 997.

PLAÇONS-NOUS MAINTENANT À N = 1 002 (PREMIER MULTIPLE DE 6 APRÈS 1 000). NOUS OBSERVONS QUE, POUR LA SECONDE FOIS, IL Y A ÉGALITÉ DES PROPORTIONS :

- **167 nombres premiers p** de la forme 6k±1 (le premier étant 1, le dernier 997),
- **167 nombres composés pp** de la forme 6k±1 (le premier étant 25, le dernier 1 001),
- 167 nombres de la forme 6k (996/6 = 166) (le premier étant 6 et le dernier 1 002),
- 167 nombres de la forme 6k±3 (le premier étant 3 et le dernier 999),
- 167 couples de nombres pairs jumeaux (2k, 2k+2) dont chaque membre est de la forme 6k±2 (le premier couple étant (2, 4), le dernier (998, 1 000)).

C'est précisément une fois franchie la frontière 1 002 que les nombres composés pp de la forme 6k±1 dominent pour la première fois les nombres premiers p de la forme 6k±1 : à 1 003, les pp sont strictement plus nombreux que les p.

Exemple : Jusqu'à n = 2 451, on observe :

- 362 nombres premiers p de la forme 6k±1 ;
- 455 nombres composés pp de la forme 6k±1.

Nous précisons bien que c'est la première fois car il arrive qu'ensuite les nombres premiers p retrouvent la majorité (notamment à 1 021 ou à 1 033), avant de la perdre définitivement à 1 075 (voir tableau ci-après).

En effet, c'est à 1 075 (un nombre composé pp de la forme 6k±1) que les nombres composés pp prennent définitivement la majorité. C'est-à-dire que, même si à certains multiples de 6, les p et les pp sont en quantités égales, ce sont tout de même les pp qui apparaissent avant les p.

À RETENIR

On identifie deux événements entre les p et les pp :

- **À 996 (dernier multiple de 6 avant 1 000), les nombres premiers p et les nombres composés pp sont, <u>pour la première fois</u>, en quantités égales.**

- **En dépassant la frontière 1 002 (premier multiple de 6 après 1 000), les nombres composés pp sont, <u>pour la première fois</u>, strictement plus nombreux que les nombres premiers p.**

Nombres premiers p		Nombres composés pp	
8 nombres premiers p avant l'apparition du premier nombre composé pp ***95 nombres premiers p avant 504***	**1 5 7 11 13 17 19 23** 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 **503** 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983	**25** 35 49 55 65 77 85 91 95 115 119 121 125 133 143 145 155 161 169 175 185 187 203 205 209 215 217 221 235 245 247 253 259 265 275 287 289 295 299 301 305 319 323 325 329 335 341 343 355 361 365 371 377 385 391 395 403 407 413 415 425 427 437 445 451 455 469 473 475 481 485 493 **497** 505 511 515 517 527 529 533 535 539 545 551 553 559 565 575 581 583 589 595 605 611 623 625 629 635 637 649 655 665 667 671 679 685 689 695 697 703 707 713 715 721 725 731 737 745 749 755 763 767 775 779 781 785 791 793 799 803 805 815 817 833 835 841 845 847 851 865 869 871 875 889 893 895 899 901 905 913 917 923 925 931 935 943 949 955 959 961 965 973 979 985 989	***1er nombre composé pp*** ***73 nombres composés pp avant 504***
166 nombres premiers p à 996	991	995	***166 nombres composés pp à 996***
167 nombres premiers p à 1 002	997	1001	***167 nombres composés pp à 1 002***
167 nombres premiers p à 1 008		1003 1007	***169 nombres composés pp à 1 008***
169 nombres premiers p à 1 014	1009 1013		***169 nombres composés pp à 1 014***
170 nombres premiers p à 1 020	1019	1015	***170 nombres composés pp à 1 020***
171 nombres premiers p à 1 026	1021	1025	***171 nombres composés pp à 1 026***
172 nombres premiers p à 1 032	1031	1027	***172 nombres composés pp à 1 032***
173 nombres premiers p à 1 038	1033	1037	***173 nombres composés pp à 1 038***
174 nombres premiers p à 1 044	1039	1043	***174 nombres composés pp à 1 044***
175 nombres premiers p à 1 050.	1049	1045	***175 nombres composés pp à 1 050***
176 nombres premiers p à 1 056	1051	1055	***176 nombres composés pp à 1 056***
177 nombres premiers p à 1 062	1061	1057	***177 nombres composés pp à 1 062***
178 nombres premiers p à 1 068	1063	1067	***178 nombres composés pp à 1 068***

179 nombres premiers p à 1 074	1069	1073	***179 nombres composés pp à 1 074***
179 nombres premiers p à 1 080		1075 1079	***181 nombres composés pp à 1 080***
179 nombres premiers p à 1 086		1081 1085	***183 nombres composés pp à 1 086***
181 nombres premiers p à 1 092	1087 1091		***183 nombres composés pp à 1 092***
183 nombres premiers p à 1 098	1093 1097		***183 nombres composés pp à 1 098***
184 nombres premiers p à 1 104	1103	1099	***184 nombres composés pp à 1 104***
185 nombres premiers p à 1 110	1109	1105	***185 nombres composés pp à 1 110***
185 nombres premiers p à 1 116		1111 1115	***187 nombres composés pp à 1 116***
186 nombres premiers p à 1 122	1117	1121	***188 nombres composés pp à 1 122***
187 nombres premiers p à 1 128	1123	1127	***189 nombres composés pp à 1 128***
188 nombres premiers p à 1 134	1129	1133	***190 nombres composés pp à 1 134***
188 nombres premiers p à 1 140		1135 1139	***192 nombres composés pp à 1 140***
188 nombres premiers p à 1 146		1141 1145	***194 nombres composés pp à 1 146***
189 nombres premiers p à 1 152	1151	1147	***195 nombres composés pp à 1 152***

** Liste des nombres premiers p et des nombres composés pp de la forme 6k±1. À certains multiples de 6, on met en évidence le nombre total de nombres premiers p (respectivement de nombres composés pp) dans la colonne de gauche (respectivement colonne de droite).*

5.3 - Proportion de couples de jumeaux (premiers et composés).

Afin de poursuivre l'étude des nombres premiers au sein de l'ensemble des entiers naturels, nous allons aussi nous intéresser aux couples de premiers jumeaux. Mais les nombres premiers vivant avec les nombres composés, il nous faut réitérer ce travail de comparaison.

C'est pourquoi nous allons maintenant introduire une nouvelle notion : **les couples de composés jumeaux.**

DÉFINITION : **Deux nombres premiers p de la forme 6k±1 sont dits jumeaux s'ils ne diffèrent que de 2 unités. On les notera (p, p+2).**

De la même façon, deux nombres composés pp de la forme 6k±1 sont dits jumeaux s'ils ne diffèrent que de 2 unités. On les notera (pp, pp+2).

Exemple : (119, 121) est le premier couple de composés jumeaux.
En effet, 119 = 17 x 7. Donc 119 est un composé pp (produit de deux nombres premiers de la forme 6k±1).
Et 121 = 11 x 11. Donc 121 est un composé pp (produit de deux nombres premiers de la forme 6k±1).

Remarque : Dans ces exemples, nous avons pris des nombres composés qui sont le produit de deux nombres premiers p. Évidemment, ces nombres composés pp qui forment les couples de composés jumeaux peuvent aussi être :

- le produit d'un p avec un pp ;
- le produit d'un pp avec un pp.

De la même manière que précédemment, nous allons comparer les proportions des couples de premiers jumeaux et des couples de composés jumeaux.

On remarque que c'est autour de 1 002 que la bascule s'effectue : **1 003, qui forme le couple de composés jumeaux avec 1 001, marque le changement d'ordre des proportions.**

NB : On remarque que le couple (3, 5) n'apparaît pas dans notre liste de couples de nombres premiers jumeaux. En effet, malgré sa primalité, le nombre 3 n'est pas de la forme 6k±1. Cette observation remet notamment en question la constante de Viggo Brun (1919). Nous retrouverons celle-ci lors de l'étude de la conjecture (p, p+2) sur les couples de premiers jumeaux[1].

[1] Étude disponible sur https://www.pontcerq.fr/livres/theorie-conceptuelle-des-concordances-fondamentales/

Couples (p, p+2)		Couples (pp, pp+2)	
	5, 7	**119, 121**	***1er couple de (pp, pp+2)***
	11, 13	143, 145	
	17, 19	185, 187	
	29, 31	203, 205	
	41, 43	215, 217	
	59, 61	245, 247	
	71, 73	287, 289	
	101, 103	299, 301	
9 couples de (p, p+2) jusqu'à l'apparition du 1er (pp, pp+2) = (119, 121)	**107, 109**	323, 325	
	137, 139	341, 343	
	149, 151	413, 415	
	179, 181	425, 427	
	191, 193	**473, 475**	***13 couples de (pp, pp+2) avant le nombre 504***
	197, 199	515, 517	
	227, 229	527, 529	
	239, 241	533, 535	
	269, 271	551, 553	
	281, 283	581, 583	
	311, 313	623, 625	
	347, 349	635, 637	
	419, 421	665, 667	
	431, 433	**695, 697**	***22 couples de (pp, pp + 2) avant le nombre 702***
23 couples de (p, p+2) avant le nombre 504	**461, 463**	713, 715	
	521, 523	779, 781	
	569, 571	791, 793	
	599, 601	803, 805	
	617, 619	815, 817	
	641, 643	833, 835	
29 couples de (p, p+2) avant le nombre 702	**659, 661**	845, 847	
	809, 811	869, 871	
	821, 823	893, 895	
	827, 829	899, 901	
	857, 859	923, 925	
34 couples de (p, p+2) jusqu'à 996	881, 883		
		959, 961	***34 couples de (pp, pp+2) jusqu'à 996, les (pp, pp+2) égalisent les (p, p+2)***
		1001, 1003	***35 couples de (pp, pp+2). Ici, les (pp,pp+2) prennent l'avantage pour la 1ère fois depuis 996, et le garderont définitivement.***
35 couples de (p, p+2). Dans la suite, jamais plus les (p, p+2) ne reviendront sur les (pp, pp+2).	1019, 1021		
		1025, 1027	***36 couples de (pp, pp+2)***
36 couples de (p, p+2)	**1031, 1033**		
		1043, 1045	***37 couples de (pp, pp+2)***
37 couples de (p, p+2)	**1049, 1051**		
		1055, 1057	***38 couples de (pp, pp+2)***
38 couples de (p, p+2)	**1061, 1063**		
		1073, 1075	***39 couples de (pp, pp+2)***
		1079, 1081	***40 couples de (pp, pp+2).***
39 couples de (p, p+2) jusqu'à (1091, 1093).	**1091, 1093**		

** Liste des couples de nombres premiers jumeaux (p, p+2) et des couples de nombres composés jumeaux (pp, pp+2). À certains multiples de 6, on met en évidence le nombre total de couples (p, p+2) (respectivement (pp, pp+2)) dans la colonne de gauche (respectivement colonne de droite).*

À RETENIR

Nous identifions deux similitudes entre le comportement des nombres premiers p et des nombres composés pp d'un côté, et le comportement des couples de premiers jumeaux et des couples de composés jumeaux de l'autre :

- **À 996 (dernier multiple de 6 avant 1 000), les couples de nombres premiers jumeaux (p, p+2) et les couples de nombres composés jumeaux (pp, pp+2) sont en quantités égales.**
- **En dépassant la frontière 1 002 (premier multiple de 6 après 1 000), les couples de composés jumeaux (pp, pp+2) sont strictement plus nombreux que les couples de premiers jumeaux (p, p+2).**

FIN DE LA PARTIE 1

La répartition des nombres premiers est-elle aléatoire ?

1/ L'aléatoire, par définition, c'est le hasard, un événement dont on ne peut expliquer l'apparition. Or **nous avons montré la manière dont les nombres premiers apparaissent : les nombres premiers p et les nombres composés pp sont dépendants les uns des autres** (voir p. 26-27). Ceci montre que les nombres premiers n'apparaissent pas de façon aléatoire. Pouvons- nous répondre aux questions suivantes :

- Quel est le $i^{ème}$ nombre premier ?
- Combien y a-t-il de nombres premiers p avant un nombre n ?

Oui. Mais pour cela, il faut connaître tous les nombres premiers p de la forme 6k±1 apparus précédemment, ainsi que tous les nombres composés pp de la forme 6k±1.

2/ Un autre théorème montre le côté non aléatoire des nombres premiers : les nombres premiers et les nombres composés de l'ensemble {6k±1} s'articulant perpétuellement les uns les autres, il est essentiel de regarder le comportement de ces deux catégories de nombres et de les comparer pour les comprendre.

En cherchant le moment où l'ordre des proportions de nombres premiers p et de nombres pp de la forme {6k±1} bascule, on remarque que :

- **à 996 (dernier multiple de 6 avant 1 000), les nombres premiers p et les nombres composés pp sont, pour la première fois, en quantités égales,**
- **en dépassant la frontière 1 002 (premier multiple de 6 après 1 000) ; les nombres composés pp sont, pour la première fois, strictement plus nombreux que les nombres premiers p.**

Quand on passe à l'observation des couples de premiers jumeaux (p, p+2) et des couples de composés jumeaux (pp, pp+2) de l'ensemble {6k±1}, rien ne peut indiquer que des résultats similaires interviendront à ces mêmes moments.
En effet :

- **dans les couples de premiers jumeaux, on ne prend pas en compte tous les nombres premiers, mais seulement une partie (par exemple, 23 n'est pas dans un couple de premiers jumeaux, tout comme 37 ou 47) ;**
- **de la même manière, dans les couples de composés jumeaux, on ne prend pas en compte tous les nombres composés (par exemple, 25, 35 ou 49 ; d'ailleurs, le premier couple de composés jumeaux est (119, 121)).**

Pourtant, c'est aussi à ces deux moments, 996 et 1 002, que ces couples voient leurs proportions s'égaliser puis inverser leur ordre.

Autant de correspondances montrent que la distribution des nombres premiers au sein des nombres entiers naturels ne peut pas être aléatoire.

Rappelons le contexte de la recherche en arithmétique : les mathématiciens cherchent une répartition des nombres premiers qui ne serait pas aléatoire.
C'est-à-dire qu'ils se demandent si les nombres premiers sont déterminés par avance.

- **Avons-nous rencontré de l'aléatoire dans notre démonstration ? <u>Non, tout est déterminé et rien n'est aléatoire.</u>**
- **La répartition des nombres et en particulier celle des nombres premiers est-elle aléatoire, oui ou non ? <u>Non.</u>**

Donc nous connaissons la répartition non aléatoire des nombres premiers.

« Nous venons de vous proposer une démonstration sur la répartition des nombres entiers naturels dans le but d'affirmer avec preuves conséquentes que les nombres premiers p ne sont pas répartis de façon aléatoire au sein de la suite ℕ.*

Nous avons tout d'abord adopté le principe de quantités entières comme seules entités abstraites préexistant à ce qui est. Nous avons utilisé uniquement les symboles (chiffres) indiens pouvant constituer une numération dite « de position » – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – employés principalement pour le dénombrement des termes de la suite ℕ.*

Il nous a semblé nécessaire de rappeler en tout premier lieu ce qu'est un nombre entier, la façon dont il doit être mesurable ainsi que la définition de la primalité.

Nous nous sommes alors proposé un objectif tel que pourrait l'être l'ascension d'un pic montagneux. Il nous fallait pour cela les outils nécessaires qui nous achemineraient vers l'obtention du sommet. Nous avons fait en sorte de rester simples dans nos explications, aussi simples que le sont les nombres entiers naturels, et ce, dans le but d'être compris du plus grand nombre. Nous avons utilisé et pris en compte pour notre démonstration les notations académiques universitaires, bien que je sois sujet à des troubles autistiques (Asperger) et que je ne possède d'autre bagage scolaire que le certificat d'études primaires.

Sarra s'est tout d'abord évertuée à transférer ma logique en langage plus accessible à cette spécialité qu'est la théorie des nombres premiers. Pas facile, c'est vrai ! La chose était a priori loin d'être acquise.

Quoi qu'il en soit, cette première partie nous montre à quel point il était nécessaire de transformer radicalement l'édifice construit jusqu'à présent, pour enfin l'asseoir sur une base logique solide entièrement nouvelle : une théorie fondamentale sans aucune convention, avec des lois simples, parce que flagrantes à mes yeux et à ma compréhension. Elles le seront aussi pour vous, j'en suis sûr !

Nous ne sommes jamais parvenus aussi loin dans l'histoire de la suite ℕ. Le voyage ne fait que commencer. Nous n'allons pas affabuler la réalité, nous allons la dire, la raconter, la démontrer, et vous verrez que tout comme nous, vous finirez par les aimer, ces nombres tant désirés, et si longtemps tronqués.*

Nous voici donc en pleine ascension de notre sommet et pour l'atteindre nous sommes équipés des outils que nous venons de façonner :

- *Nous avons démontré que mod 6 nous amène très loin dans la description des entiers naturels et leur ordonnancement, et uniquement mod 6.*
- *Nous avons fait apparaître des êtres de la forme $6k\pm1$ composés, que nous avons notés pp et que j'aime particulièrement car ils ont su me rendre sensible à leur histoire. C'est cette histoire, leur histoire, que j'ai voulu vous raconter, parce qu'elle est nécessaire pour expliquer ℕ*.*
- *Nous n'avons en aucune façon que ce soit retiré la primalité des nombres 2 et 3. Nous les avons laissés, pour chacun d'eux, à leur état initial et emplacement naturel. De nombres premiers p, nous en avons fait des premiers p générateurs d'ensembles, $\{6k\pm2\}$ pour 2 et $\{6k\pm3\}$ pour 3.*

- *Nous avons compris avec vous que nous avions quatre ensembles : {6k±1}, {6k±2}, {6k±3}, {6k} aux proportions merveilleuses et engendrant huit sous-ensembles qui nous content une histoire qui ne s'arrêtera jamais.*
- *Nous avons fait le constat que le hasard n'avait pas sa place dans la répartition des termes de la suite ℕ* : pas d'approximation, pas d'aléatoire, pas d'à-peu-près. Nous n'y trouvons pas non plus de probabilité. Nous sommes dans le juste et donc dans le vrai, dans le beau. Et si cela est beau, c'est parce que cela est simple.*

Oui, j'affirme ! Aussi loin que nous irons dans les grands nombres, l'histoire s'écrira modulo 6 en quatre ensembles et huit rhésus !

Rhésus ?...

À tout de suite avec Sarra, dans le monde de la bio-mathématique, celui de la vie. »

YVES DE-MERVENT

THÉORIE CONCEPTUELLE DES CONCORDANCES FONDAMENTALES

PARTIE II

Dans cette seconde partie, nous allons mettre en évidence l'analogie entre le système numérique et la biologie.

En 1900, le docteur Karl Landsteiner (1868–1943), biologiste autrichien, découvre le système ABO. Le sang est réparti, selon les individus, entre quatre groupes sanguins différents : O, A, B et AB. Landsteiner reçoit en 1930 le prix Nobel de médecine pour cette découverte fondamentale qui permettra de sauver un nombre de vies considérable.

Cependant, des accidents de transfusions sanguines persistent. C'est seulement quarante ans plus tard, en 1940, que Landsteiner et son collègue Alexander Wiener affinent le découpage des groupes sanguins en mettant en évidence les rhésus. L'antigène D présent sur les globules rouges divise chaque groupe sanguin en deux : les Rhésus + et les Rhésus -.

Dans cette étude, nous allons uniquement tenir compte du système ABO et RH1 découvert par le docteur Karl Landsteiner.

1 - ANALOGIE ENTRE LA RÉPARTITION DES NOMBRES ENTIERS NATURELS ET LES GROUPES SANGUINS

1.1 - Rappel des compatibilités entre les différents groupes sanguins

Dans le système dit ABO, il existe 4 groupes sanguins : A, B, O et AB. Ces groupes sanguins sont déterminés par la présence ou non de deux antigènes, A et B, à la surface des globules rouges. De plus, la présence d'anticorps anti-A (respectivement anti-B) empêche la présence d'antigène A (respectivement d'antigène B) sur les globules rouges. Ainsi :

- un individu de groupe A a l'antigène A et des anticorps anti-B ;
- un individu de groupe B a l'antigène B et des anticorps anti-A ;
- un individu de groupe AB a les antigènes A et B et n'a pas d'anticorps anti-A ou anti-B ;
- un individu de groupe O n'a pas d'antigène A ou B et a des anticorps anti-A et anti-B.

O	A	B	AB
Anticorps anti-A et anti-B.	**Antigène A. Anticorps anti-B.**	**Antigène B. Anticorps anti-A.**	**Antigènes A et B.**
Aucun antigène A ou B	*Antigènes A. Aucun antigène B.*	*Antigènes B. Aucun antigène A.*	*À la fois des antigènes A et des antigènes B.*

Ces propriétés des groupes sanguins impliquent des règles à respecter lors des transfusions sanguines : les compatibilités et les incompatibilités. Celles-ci dépendent des antigènes et des anticorps présents sur les globules rouges.

Exemples :

- Le groupe A a des antigènes A. Il ne peut donc pas donner au groupe O qui a des anticorps anti-A.
- Les personnes du groupe O, également appelées « donneurs universels », peuvent donner leurs globules rouges à n'importe quel receveur.
- À l'inverse, les personnes du groupe AB sont les « receveurs universels » : ils peuvent recevoir les globules rouges de tous les groupes sanguins.

Nous pouvons résumer ces compatibilités et ces incompatibilités dans le tableau suivant :

		DONNEUR			
		O	**A**	**B**	**AB**
RECEVEUR	**O**	✓	X	X	X
	A	✓	✓	X	X
	B	✓	X	✓	X
	AB	✓	✓	✓	✓

** Table de la compatibilité des groupes sanguins.*
Cases vertes : compatibilités. Cases rouges : incompatibilités.

1.2 - Analogie avec la répartition des entiers naturels modulo 6

Ici, nous allons porter notre attention, non pas sur les éléments des ensembles en tant que tels, mais plutôt sur leurs factorisations.
Reprenons la répartition des entiers en 4 ensembles modulo 6. Nous allons utiliser les factorisations proposées par le théorème fondamental de l'arithmétique que nous avons démontré :

> *« Tout nombre entier naturel strictement supérieur à 1 s'écrit de façon unique comme un produit de nombres premiers (à l'ordre des facteurs près), dans lequel le facteur 1 n'apparaît qu'une seule fois. »*

- Les éléments de l'ensemble **{6k±1}** comportent les **nombres premiers p de la forme 6k±1** ainsi que tous les produits de ces nombres premiers entre eux.

  Exemples : **1** (= 1)
  1 x **5** (= 5)
  1 x **5** x **7** (= 35)

- Les éléments de l'ensemble **{6k±2}** sont construits en multipliant **les factorisations des éléments de l'ensemble {6k±1}** par un ou plusieurs facteurs 2.

  Exemples : **1** x 2 (= 2)
  1 x 2 x 2 x **5** (= 20)
  1 x 2 x **5** x **7** (= 70)

- Les éléments de l'ensemble **{6k±3}** sont construits en multipliant **les factorisations des éléments de l'ensemble {6k±1}** par un ou plusieurs facteurs 3.

  Exemples : **1** x 3 (= 3)
  1 x 3 x **5** (= 15)
  1 x 3 x **5** x **7** (= 105)

- Les éléments de l'ensemble **{6k}** sont construits en multipliant **les factorisations des éléments de l'ensemble {6k±1}** à la fois par un ou plusieurs facteurs 2, et par un ou plusieurs facteurs 3.

Exemples : **1** x 2 x 3 (= 6)
1 x 2 x 3 x **5** (= 30)
1 x 2 x 2 x 3 x **5** (= 60)
1 x 2 x 3 x **5** x **7** (= 210)
1 x 2 x 2 x 3 x **5** x **7** (= 420)

{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}	{6k}
1 = **1**	**2** = **1** x 2	**3** = **1** x 3	**6** = **1** x 2 x 3
5 = **1** x **5**	**4** = **1** x 2 x 2	**9** = **1** x 3 x 3	**12** = **1** x 2 x 2 x 3
7 = **1** x **7**	**8** = **1** x 2 x 2 x 2	**15** = **1** x 3 x **5**	**18** = **1** x 2 x 3 x 3
11 = **1** x **11**	**10** = **1** x 2 x **5**	**21** = **1** x 3 x **7**	**24** = **1** x 2 x 2 x 2 x 3
13 = **1** x **13**	**14** = **1** x 2 x **7**	**27** = **1** x 3 x 3 x 3	**30** = **1** x 2 x 3 x **5**
17 = **1** x **17**	**16** = **1** x 2 x 2 x 2 x 2	**33** = **1** x 3 x **11**	**36** = **1** x 2 x 2 x 3 x 3
19 = **1** x **19**	**20** = **1** x 2 x 2 x **5**	**39** = **1** x 3 x **13**	**42** = **1** x 2 x 3 x **7**
23 = **1** x **23**	**22** = **1** x 2 x **11**	**45** = **1** x 3 x 3 x **5**	**48** = **1** x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
25 = **1** x **5** x **5**	**26** = **1** x 2 x **13**	**51** = **1** x 3 x **17**	**54** = **1** x 2 x 3 x 3 x 3
29 = **1** x **29**	**28** = **1** x 2 x 2 x **7**	**57** = **1** x 3 x **19**	**60** = **1** x 2 x 2 x 3 x **5**
31 = **1** x **31**	**32** = **1** x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	**63** = **1** x 3 x 3 x **7**	**66** = **1** x 2 x 3 x **11**
35 = **1** x **5** x **7**	**34** = **1** x 2 x **17**	**69** = **1** x 3 x **23**	**72** = **1** x 2 x 2 x 3 x 3 x 3
37 = **1** x **37**	**38** = **1** x 2 x **19**	**75** = **1** x 3 x **5** x **5**	**78** = **1** x 2 x 3 x **13**
41 = **1** x **41**	**40** = **1** x 2 x 2 x 2 x **5**	**81** = **1** x 3 x 3 x 3 x 3	**84** = **1** x 2 x 2 x 3 x **7**
43 = **1** x **43**	**44** = **1** x 2 x 2 x **11**	**87** = **1** x 3 x **29**	**90** = **1** x 2 x 3 x 3 x **5**
47 = **1** x **47**	**46** = **1** x 2 x **23**	**93** = **1** x 3 x **31**	**96** = **1** x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
49 = **1** x **7** x **7**	**50** = **1** x 2 x **5** x **5**	**99** = **1** x 3 x 3 x **11**	**102** = **1** x 2 x 3 x **17**
53 = **1** x **53**	**52** = **1** x 2 x 2 x **13**		
55 = **1** x **5** x **11**	**56** = **1** x 2 x 2 x 2 x **7**		
59 = **1** x **59**	**58** = **1** x 2 x **29**		
61 = **1** x **61**	**62** = **1** x 2 x **31**		
65 = **1** x **5** x **13**	**64** = **1** x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2		
67 = **1** x **67**	**68** = **1** x 2 x 2 x **17**		
71 = **1** x **71**	**70** = **1** x 2 x **5** x **7**		
73 = **1** x **73**	**74** = **1** x 2 x **37**		
77 = **1** x **7** x **11**	**76** = **1** x 2 x 2 x **19**		
79 = **1** x **79**	**80** = **1** x 2 x 2 x 2 x 2 x **5**		
83 = **1** x **83**	**82** = **1** x 2 x **41**		
85 = **1** x **5** x **17**	**86** = **1** x 2 x **43**		
89 = **1** x **89**	**88** = **1** x 2 x 2 x 2 x **11**		
91 = **1** x **7** x **13**	**92** = **1** x 2 x 2 x **23**		
95 = **1** x **5** x **19**	**94** = **1** x 2 x **47**		
97 = **1** x **97**	**98** = **1** x 2 x **7** x **7**		
101 = **1** x **101**	**100** = **1** x 2 x 2 x **5** x **5**		

** Tableau représentant la répartition des entiers jusqu'à 102 dans les quatre ensembles modulo 6.*
*Les éléments en **couleurs** sont les facteurs de la forme 6k±1.*

Ainsi, les ensembles sont construits en fonction des facteurs de la décomposition en produit de facteurs premiers de leurs éléments :

{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}	{6k}
Factorisation d'éléments de l'ensemble {6k±1}. Aucun facteur 2 ou 3.	*Factorisation d'éléments de l'ensemble {6k±1} et un ou plusieurs facteurs 2. Aucun facteur 3.*	*Factorisation d'éléments de l'ensemble {6k±1} et un ou plusieurs facteurs 3. Aucun facteur 2.*	*Factorisation d'éléments de l'ensemble {6k±1} et à la fois un ou plusieurs facteurs 2, et un ou plusieurs facteurs 3.*

Pour rappel, les groupes sanguins du système ABO se construisent ainsi :

O	A	B	AB
Aucun antigène A ou B	*Antigènes A. Aucun antigène B.*	*Antigènes B. Aucun antigène A.*	*À la fois des antigènes A et des antigènes B.*

Demandons-nous alors quels sont les ensembles numériques qui sont donneurs et ceux qui sont receveurs et établissons les compatibilités et les incompatibilités entre les ensembles définis modulo 6.

Pour les ensembles d'entiers, nous définirons intuitivement les termes « donneur » et « receveur » comme suit :

- Un donneur est un ensemble dont la factorisation des éléments apparaîtra comme facteur dans la décomposition en produit de facteurs premiers des éléments d'un ensemble receveur.
- Un receveur est un ensemble dont les éléments possèdent, dans leur décomposition en produit de facteurs premiers, des factorisations d'éléments appartenant à un ensemble donneur.

Les membres de l'ensemble {6k±1} n'ont jamais dans leur décomposition un facteur générateur d'un autre ensemble (le nombre 2 ou le nombre 3). Ils ne comportent que des factorisations d'éléments de la forme 6k±1.

En outre, les factorisations des éléments de l'ensemble {6k±1} se retrouvent dans les décompositions en produit de facteurs premiers des éléments des ensembles {6k±1}, {6k±2}, {6k±3} et {6k}.

L'ensemble {6k±1} ne reçoit que des factorisations d'éléments de l'ensemble {6k±1} (pas de nombre 2 ni de nombre 3) et est « donneur universel ».

Illustrations du caractère « donneur » :

- 7 est un nombre de la forme 6k±1, sa décomposition est : **1** x **7**.
- 14 est un nombre de la forme 6k±2 et sa décomposition est : **1** x 2 x **7**.
- 21 est un nombre de la forme 6k±3 et sa décomposition est : **1** x 3 x **7**.
- 42 est un nombre de la forme 6k et sa décomposition est : **1** x 2 x 3 x **7**.

Les membres de l'ensemble {6k±2} sont toujours décomposables en produit d'un ou plusieurs facteurs 2, et de la factorisation d'un élément de la forme 6k±1. En outre, les factorisations d'éléments de l'ensemble {6k±2} se retrouvent dans les décompositions en produit de facteurs premiers des éléments des ensembles {6k±2} et {6k}.

L'ensemble {6k±2} ne reçoit que des facteurs de la forme 6k±1 et 6k±2 et donne aux ensembles {6k±2} et {6k}.

Illustrations du caractère « donneur » :

- 4, un nombre de la forme 6k±2, décomposition : **1 x 2 x 2**.
- 12 est de la forme 6k et sa décomposition est : **1 x 2 x 2** x 3.
- {6k±2} ne donne pas à l'ensemble {6k±1} (respectivement {6k±3}) car nous ne trouverons jamais la factorisation 1 x 2 dans la décomposition en produit de facteurs premiers des éléments de l'ensemble {6k±1} (respectivement {6k±3}).

Les membres de l'ensemble {6k±3} sont toujours décomposables en produit d'un ou plusieurs facteurs 3, et de la factorisation d'un élément de la forme 6k±1. En outre, les factorisations d'éléments de l'ensemble {6k±3} se retrouvent dans les décompositions en produit de facteurs premiers des éléments des ensembles {6k±3} et {6k}.

L'ensemble {6k±3} ne reçoit que des facteurs de la forme 6k±1 et 6k±3 et donne aux ensembles {6k±3} et {6k}.

Illustrations du caractère « donneur » :

- 9, un nombre de la forme 6k±3, décomposition : **1 x 3 x 3**.
- 18 est de la forme 6k et sa décomposition est : **1** x 2 x **3 x 3**.
- {6k±3} ne donne pas à l'ensemble {6k±1} (respectivement {6k±2}) car nous ne trouverons jamais la factorisation 1 x 3 dans la décomposition en produit de facteurs premiers des éléments de l'ensemble {6k±1} (respectivement {6k±2}).

Les membres de l'ensemble {6k} sont toujours décomposables en produit d'un ou plusieurs facteurs 2, d'un ou plusieurs facteurs 3, et de la factorisation d'un élément de la forme 6k±1. Cependant, les factorisations des éléments de l'ensemble {6k} ne se retrouvent dans aucune décomposition d'éléments d'un autre ensemble que lui-même : on ne retrouve jamais les facteurs 1, 2 et 3 réunis (1 x 2 x 3) dans les décompositions en produit de facteurs premiers des éléments des autres ensembles.

L'ensemble {6k} reçoit des facteurs de la forme 6k, 6k±1, 6k±2 et 6k±3 (il est « receveur universel ») et ne donne qu'à l'ensemble {6k}.

Illustrations du caractère « donneur » :

- 6, un nombre de la forme 6k, décomposition : **1 x 2 x 3**.
- 150 est de la forme 6k et sa décomposition est : **1 x 2 x 3** x 5 x 5.

Ces agencements donnent ce tableau des compatibilités et des incompatibilités numériques :

		DONNEUR			
		{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}	{6k}
RECEVEUR	{6k±1}	✓	X	X	X
	{6k±2}	✓	✓	X	X
	{6k±3}	✓	X	✓	X
	{6k}	✓	✓	✓	✓

** Table de la compatibilité des ensembles numériques.*

Cases vertes : compatibilités. Cases rouges : incompatibilités.

Nous pouvons mettre en comparaison les deux tableaux des compatibilités et des incompatibilités :

GROUPES SANGUINS

Table de la compatibilité des groupes sanguins

		DONNEUR			
		O	**A**	**B**	**AB**
RECEVEUR	**O**	✓	X	X	X
	A	✓	✓	X	X
	B	✓	X	✓	X
	AB	✓	✓	✓	✓

ENSEMBLES NUMÉRIQUES

Table de la compatibilité des ensembles numériques

		DONNEUR			
		{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}	{6k}
RECEVEUR	{6k±1}	✓	X	X	X
	{6k±2}	✓	✓	X	X
	{6k±3}	✓	X	✓	X
	{6k}	✓	✓	✓	✓

Nous avons ici, 9 compatibilités et 7 incompatibilités de part et d'autre.

CONCLUSION

Nous avons une analogie significative entre les groupes sanguins et les ensembles des entiers naturels répartis modulo 6. En effet, ils sont construits de manière similaire et ils s'organisent entre eux de la même manière. Ainsi :

- **Le groupe O est analogue à l'ensemble {6k±1} ;**
- **Le groupe A est analogue à l'ensemble {6k±2} ;**
- **Le groupe B est analogue à l'ensemble {6k±3} ;**
- **Le groupe AB est analogue à l'ensemble {6k}.**

La connaissance de la répartition des nombres entiers naturels en 4 ensembles modulo 6 nous amène donc à la même conclusion que celle que le docteur Karl Landsteiner avait établie en 1900 quant aux compatibilités et incompatibilités des 4 groupes sanguins : il y a 9 compatibilités et 7 incompatibilités.

Mais qu'en est-il des sous-ensembles numériques ?

Nous devons les prendre en compte puisque c'est ainsi que les nombres s'organisent. Notamment, nous avons mentionné le fait que l'ensemble {6k±1} était « donneur universel » ; or, comme l'histoire l'a montré par la suite, ce n'est pas tout à fait le cas.
En effet, malgré la découverte des groupes sanguins, des accidents de transfusions sanguines ont persisté jusqu'en 1940. C'est la découverte de l'antigène D présent sur les globules rouges qui a montré que le groupe O n'est pas donneur universel. Chaque groupe sanguin se divise en deux : les Rhésus + et les Rhésus -.

2 - ANALOGIE ENTRE LA RÉPARTITION DES NOMBRES ENTIERS NATURELS ET LES RHÉSUS SANGUINS

2.1 - Rappels sur les rhésus sanguins

Chaque groupe sanguin du système ABO se distingue en deux sous-groupes par leur rhésus. Le rhésus est défini par la présence ou non de l'antigène D sur le globule rouge.

- Si l'antigène D est présent, le rhésus est positif (+).
- Si l'antigène D est absent, le rhésus est négatif (-).

Le Rhésus + est dominant et le Rhésus - est récessif. Cela implique des compatibilités et des incompatibilités entre les différents rhésus, qui s'ajoutent à celles des groupes sanguins précédemment exposées.

Exemples :

- O- est donneur universel car son rhésus restera négatif s'il est donné à un receveur négatif, et il sera dominé s'il est donné à un receveur positif (il ne changera pas le rhésus positif du receveur).
- Le groupe A ne peut donner qu'aux groupes A et AB. Ainsi, A+ ne pourra donner qu'à A+ et à AB+. En effet, pour les receveurs A- et AB-, le rhésus positif du donneur A+ domine le rhésus négatif des receveurs.
- Le groupe A en tant que donneur n'est pas compatible avec le groupe sanguin receveur O, le rhésus ne change pas cette incompatibilité.

		DONNEUR							
		O-	**O+**	**A-**	**A+**	**B-**	**B+**	**AB-**	**AB+**
RECEVEUR	**O-**	✓	X	X	X	X	X	X	X
	O+	✓	✓	X	X	X	X	X	X
	A-	✓	X	✓	X	X	X	X	X
	A+	✓	✓	✓	✓	X	X	X	X
	B-	✓	X	X	X	✓	X	X	X
	B+	✓	✓	X	X	✓	✓	X	X
	AB-	✓	X	✓	X	✓	X	✓	X
	AB+	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

** Table de la compatibilité des rhésus sanguins.*

Cases vertes : compatibilités. Cases rouges : incompatibilités.

2.2 - Analogie avec la répartition des entiers naturels modulo 6

Nous allons maintenant mettre en évidence l'analogie entre les rhésus sanguins et les entiers naturels selon l'ordonnancement vu dans la première partie de la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales.

Nous utiliserons le symbole ~ pour désigner ces analogies.

Dans la constitution de l'ensemble {6k±1} (~ Groupe O), nous trouvons :

{6k±1}' **= {1, 5, 7, 11, 13, etc.}.**
Ce sont les nombres premiers p.

{6k±1}'' **= {25, 35, 49, 55, 65, etc.}.** Ce sont les nombres composés pp. Ils sont tous le produit de, au minimum, deux **nombres premiers p de la forme 6k±1** en plus de l'unité :

25 = 1 x 5 x 5
35 = 1 x 5 x 7
49 = 1 x 7 x 7
55 = 1 x 5 x 11
65 = 1 x 5 x 13

Dans la constitution de l'ensemble {6k±2} (~ Groupe A), nous trouvons :

{6k±2}' **= {2, 4, 8, 16, etc.}.**
Ce sont les puissances de 2 :

2 = 1 x 2
4 = 1 x 2 x 2
8 = 1 x 2 x 2 x 2
16 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2

{6k±2}'' **= {10, 14, 20, 22, etc.}.** Ce sont tous les nombres de la forme 6k±2 autres que les puissances de 2. Ils ont pour autre particularité d'avoir dans leur factorisation (en plus de l'unité qui est de la forme 6k±1) au minimum un autre **nombre premier p de la forme 6k±1** :

10 = 1 x 2 x 5
14 = 1 x 2 x 7
20 = 1 x 2 x 2 x 5
22 = 1 x 2 x 11

Dans la constitution de l'ensemble {6k±3} (~ Groupe B), nous trouvons :

{6k±3}′ = {3, 9, 27, etc.}.
Ce sont les puissances de 3 :

3 = 1 x 3
9 = 1 x 3 x 3
27 = 1 x 3 x 3 x 3

{6k±3}′′ = {15, 21, 33, etc.}. Ce sont tous les nombres de la forme 6k±3 autres que les puissances de 3. Ils ont pour autre particularité d'avoir dans leur factorisation (en plus de l'unité qui est de la forme 6k±1) au minimum un autre **nombre premier p de la forme 6k±1** :

15 = 1 x 3 x 5
21 = 1 x 3 x 7
33 = 1 x 3 x 11

Dans la constitution de l'ensemble {6k} (~ Groupe AB), nous trouvons :

{6k}′ = {6, 36, 216, etc.}.
Ce sont les puissances de 6 :

6 = 1 x 2 x 3
36 = 1 x 2 x 2 x 3 x 3
216 = 1 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3

{6k}′′ = {12, 18, 24, etc.}. Ce sont tous les nombres de la forme 6k autres que les puissances de 6. Ils ont pour autre particularité d'avoir dans leur factorisation les nombres 2 et 3 mais jamais en quantités égales, hormis lorsqu'ils sont accompagnés d'un facteur de la forme 6k±1 en plus de l'unité, tel que : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, ..., etc. :

12 = 1 x 2 x 2 x 3
18 = 1 x 2 x 3 x 3
24 = 1 x 2 x 2 x 2 x 3
30 = 1 x 2 x 3 x 5
42 = 1 x 2 x 3 x 7

{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}	{6k}
1 = 1	**2 = 1 x 2**	**3 = 1 x 3**	**6 = 1 x 2 x 3**
5 = 1 x 5	**4 = 1 x 2 x 2**	**9 = 1 x 3 x 3**	**12** = 1 x 2 x 2 x 3
7 = 1 x 7	**8 = 1 x 2 x 2 x 2**	**15** = 1 x 3 x 5	**18** = 1 x 2 x 3 x 3
11 = 1 x 11	**10** = 1 x 2 x 5	**21** = 1 x 3 x 7	**24** = 1 x 2 x 2 x 2 x 3
13 = 1 x 13	**14** = 1 x 2 x 7	**27 = 1 x 3 x 3 x 3**	**30** = 1 x 2 x 3 x 5
17 = 1 x 17	**16 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2**	**33** = 1 x 3 x 11	**36 = 1 x 2 x 2 x 3 x 3**
19 = 1 x 19	**20** = 1 x 2 x 2 x 5	**39** = 1 x 3 x 13	**42** = 1 x 2 x 3 x 7
23 = 1 x 23	**22** = 1 x 2 x 11	**45** = 1 x 3 x 3 x 5	**48** = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
25 = 1 x 5 x 5	**26** = 1 x 2 x 13	**51** = 1 x 3 x 17	**54** = 1 x 2 x 3 x 3 x 3
29 = 1 x 29	**28** = 1 x 2 x 2 x 7	**57** = 1 x 3 x 19	**60** = 1 x 2 x 2 x 3 x 5
31 = 1 x 31	**32 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2**	**63** = 1 x 3 x 3 x 7	**66** = 1 x 2 x 3 x 11
35 = 1 x 5 x 7	**34** = 1 x 2 x 17	**69** = 1 x 3 x 23	**72** = 1 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3
37 = 1 x 37	**38** = 1 x 2 x 19	**75** = 1 x 3 x 5 x 5	**78** = 1 x 2 x 3 x 13
41 = 1 x 41	**40** = 1 x 2 x 2 x 2 x 5	**81 = 1 x 3 x 3 x 3 x 3**	**84** = 1 x 2 x 2 x 3 x 7
43 = 1 x 43	**44** = 1 x 2 x 2 x 11	**87** = 1 x 3 x 29	**90** = 1 x 2 x 3 x 3 x 5
47 = 1 x 47	**46** = 1 x 2 x 23	**93** = 1 x 3 x 31	**96** = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
49 = 1 x 7 x 7	**50** = 1 x 2 x 5 x 5	**99** = 1 x 3 x 3 x 11	**102** = 1 x 2 x 3 x 17
53 = 1 x 53	**52** = 1 x 2 x 2 x 13		
55 = 1 x 5 x 11	**56** = 1 x 2 x 2 x 2 x 7		
59 = 1 x 59	**58** = 1 x 2 x 29		
61 = 1 x 61	**62** = 1 x 2 x 31		
65 = 1 x 5 x 13	**64 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2**		
67 = 1 x 67	**68** = 1 x 2 x 2 x 17		
71 = 1 x 71	**70** = 1 x 2 x 5 x 7		
73 = 1 x 73	**74** = 1 x 2 x 37		
77 = 1 x 7 x 11	**76** = 1 x 2 x 2 x 19		
79 = 1 x 79	**80** = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 5		
83 = 1 x 83	**82** = 1 x 2 x 41		
85 = 1 x 5 x 17	**86** = 1 x 2 x 43		
89 = 1 x 89	**88** = 1 x 2 x 2 x 2 x 11		
91 = 1 x 7 x 13	**92** = 1 x 2 x 2 x 23		
95 = 1 x 5 x 19	**94** = 1 x 2 x 47		
97 = 1 x 97	**98** = 1 x 2 x 7 x 7		
101 = 1 x 101	**100** = 1 x 2 x 2 x 5 x 5		

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 6 accompagnés de leur factorisation. Les éléments des sous-ensembles « prime » sont en bleu, les éléments des sous-ensembles « seconde » sont en vert.*

Comme précédemment, nous définirons intuitivement les notions « donneur » et « receveur » pour les ensembles d'entiers naturels comme suit :

- Un donneur est un ensemble dont la factorisation des éléments apparaîtra comme facteur dans la décomposition en produit de facteurs premiers des éléments d'un ensemble receveur.
- Un receveur est un ensemble dont les éléments possèdent, dans leur décomposition en produit de facteurs premiers, des factorisations d'éléments appartenant à un ensemble donneur.

Ainsi, pour tous ces ensembles, on peut observer la présence ou non **des factorisations de leurs éléments** au sein des autres ensembles pour en déterminer les compatibilités et les incompatibilités :

L'ensemble {6k±1}' :

- L'ensemble {6k±1}' apparaît :
    - dans les ensembles « prime » grâce au facteur 1.
    - dans les ensembles « seconde » grâce aux factorisations de tous les éléments de l'ensemble {6k±1}' autres que 1.

  {6k±1}' est donc **donneur universel.**

- Cependant, les décompositions de ses éléments ne contiennent aucune factorisation issue des autres ensembles (sauf de lui-même). Il ne peut donc pas recevoir d'autres factorisations que celles des éléments de l'ensemble {6k±1}'.

  >> L'ensemble {6k±1}' est analogue au Rhésus sanguin O-.

L'ensemble {6k±1}'' :

- Les factorisations des éléments de l'ensemble {6k±1}'' se retrouvent dans tous les ensembles « seconde » ({6k±1}'', {6k±2}'', {6k±3}'' et {6k}'') en tant que facteur.
- Les décompositions des éléments de l'ensemble {6k±1}'' contiennent uniquement des factorisations de l'ensemble {6k±1}' et de l'ensemble {6k±1}''. L'ensemble {6k±1}'' ne peut donc pas recevoir de factorisations d'éléments d'ensembles autres que {6k±1}' et {6k±1}''.

  >> L'ensemble {6k±1}'' est analogue au Rhésus sanguin O+.

L'ensemble {6k±2}' :

- Les factorisations des éléments de l'ensemble {6k±2}' (c'est-à-dire les factorisations des puissances de 2) se retrouvent dans les ensembles {6k±2}', {6k±2}'', {6k}' et {6k}'' sous forme de facteurs.
- Les décompositions des éléments de l'ensemble {6k±2}' contiennent uniquement des facteurs 1 et 2, c'est-à-dire des factorisations des éléments des ensembles {6k±1}' et {6k±2}'. L'ensemble {6k±2}' ne peut donc pas recevoir de factorisations d'éléments d'ensembles autres que {6k±2}' et {6k±1}'.

  >> L'ensemble {6k±2}' est analogue au Rhésus sanguin A-.

L’ensemble {6k±2}’’ :

- Les factorisations des éléments de l’ensemble {6k±2}’’ se retrouvent dans les ensembles {6k±2}’’ et {6k}’’ sous forme de facteurs.
- Les décompositions des éléments de l’ensemble {6k±2}’’ contiennent uniquement des factorisations d’éléments des ensembles {6k±1}’, {6k±1}’’, {6k±2}’ et {6k±2}’’. L’ensemble {6k±2}’’ ne peut donc pas recevoir de factorisations d’éléments d’ensembles autres que {6k±1}’, {6k±1}’’, {6k±2}’ et {6k±2}’’.

  >> L’ensemble {6k±2}’’ est analogue au Rhésus sanguin A+.

L’ensemble {6k±3}’ :

- Les factorisations des éléments de l’ensemble {6k±3}’ (c’est-à-dire les puissances de 3) se retrouvent dans les ensembles {6k±3}’, {6k±3}’’, {6k}’ et {6k}’’ sous forme de facteurs.
- Les décompositions des éléments de l’ensemble {6k±3}’ contiennent uniquement des facteurs 1 et 3, c’est-à-dire des factorisations des éléments des ensembles {6k±1}’ et {6k±3}’. L’ensemble {6k±3}’ ne peut donc pas recevoir de factorisations d’éléments d’ensembles autres que {6k±3}’ et {6k±1}’.

  >> L’ensemble {6k±3}’ est analogue au Rhésus sanguin B-.

L’ensemble {6k±3}’’ :

- Les factorisations des éléments de l’ensemble {6k±3}’’ se retrouvent dans les ensembles {6k±3}’’ et {6k}’’ sous forme de facteurs.
- Les décompositions des éléments de l’ensemble {6k±3}’’ contiennent uniquement des factorisations des éléments des ensembles {6k±1}’, {6k±1}’’, {6k±3}’ et {6k±3}’’. L’ensemble {6k±3}’’ ne peut donc pas recevoir de factorisations d’éléments d’ensembles autres que {6k±1}’, {6k±1}’’, {6k±3}’ et {6k±3}’’.

  >> L’ensemble {6k±3}’’ est analogue au Rhésus sanguin B+.

L’ensemble {6k}’ :

- Les factorisations des éléments de l’ensemble {6k}’ (c’est-à-dire les puissances de 6) se retrouvent dans les ensembles {6k}’ et {6k}’’ sous forme de facteurs.
- Les décompositions des éléments de l’ensemble {6k}’ contiennent uniquement des facteurs 1, 2 et 3, c’est-à-dire des factorisations des éléments des ensembles {6k±1}’, {6k±2}’, {6k±3}’ et {6k}’. L’ensemble {6k}’ ne peut donc pas recevoir de factorisations d’éléments d’ensembles autres que {6k±1}’, {6k±2}’, {6k±3}’ et {6k}’.

  >> L’ensemble {6k}’ est analogue au Rhésus sanguin AB-.

L'ensemble {6k}'' :

- Les factorisations des éléments de l'ensemble {6k}'' se retrouvent uniquement dans l'ensemble {6k}'' sous forme de facteurs.
- Les décompositions des éléments de l'ensemble {6k}'' contiennent des factorisations des éléments de tous les ensembles, qu'ils soient « prime » ou « seconde ».

L'ensemble {6k}'' est donc receveur universel.

>> L'ensemble {6k}'' est analogue au Rhésus sanguin AB+.

Exemples :

- L'ensemble {6k±1}' donne à l'ensemble {6k}'' : 18 = **1** x 2 x 3 x 3
- L'ensemble {6k±1}'' donne à l'ensemble {6k±3}'' : 57 = **1** x 3 x **19**
- L'ensemble {6k±2}' ne donne pas à l'ensemble {6k±3}'' : 45 = 1 x 3 x 3 x 5 (il n'y a pas la factorisation complète du nombre 2, c'est-à-dire 1 x 2).
- L'ensemble {6k}'' donne à l'ensemble {6k}'' : 30 = **1 x 2 x 3 x 5**

Ces agencements donnent ce tableau des compatibilités et des incompatibilités numériques :

		DONNEUR							
		{6k±1}'	**{6k±1}''**	**{6k±2}'**	**{6k±2}''**	**{6k±3}'**	**{6k±3}''**	**{6k}'**	**{6k}''**
RECEVEUR	**{6k±1}'**	✓	X	X	X	X	X	X	X
	{6k±1}''	✓	✓	X	X	X	X	X	X
	{6k±2}'	✓	X	✓	X	X	X	X	X
	{6k±2}''	✓	✓	✓	✓	X	X	X	X
	{6k±3}'	✓	X	X	X	✓	X	X	X
	{6k±3}''	✓	✓	X	X	✓	✓	X	X
	{6k}'	✓	X	✓	X	✓	X	✓	X
	{6k}''	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

** Table de la compatibilité des sous-ensembles numériques.*
Cases vertes : compatibilités. Cases rouges : incompatibilités.

Nous pouvons mettre en comparaison les deux tableaux des compatibilités et des incompatibilités :

ENSEMBLES NUMÉRIQUES

Table de la compatibilité numérique

		DONNEUR							
		{6k±1}′	**{6k±1}″**	**{6k±2}′**	**{6k±2}″**	**{6k±3}′**	**{6k±3}″**	**{6k}′**	**{6k}″**
RECEVEUR	**{6k±1}′**	✓	X	X	X	X	X	X	X
	{6k±1}″	✓	✓	X	X	X	X	X	X
	{6k±2}′	✓	X	✓	X	X	X	X	X
	{6k±2}″	✓	✓	✓	✓	X	X	X	X
	{6k±3}′	✓	X	X	X	✓	X	X	X
	{6k±3}″	✓	✓	X	X	✓	✓	X	X
	{6k}′	✓	X	✓	X	✓	X	✓	X
	{6k}″	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

GROUPES SANGUINS

Table de la compatibilité des rhésus sanguins

		DONNEUR							
		O-	**O+**	**A-**	**A+**	**B-**	**B+**	**AB-**	**AB+**
RECEVEUR	**O-**	✓	X	X	X	X	X	X	X
	O+	✓	✓	X	X	X	X	X	X
	A-	✓	X	✓	X	X	X	X	X
	A+	✓	✓	✓	✓	X	X	X	X
	B-	✓	X	X	X	✓	X	X	X
	B+	✓	✓	X	X	✓	✓	X	X
	AB-	✓	X	✓	X	✓	X	✓	X
	AB+	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Nous avons ici, 27 compatibilités et 37 incompatibilités de part et d'autre.

CONCLUSION

Nous avons une analogie significative entre les rhésus sanguins et les sous-ensembles des entiers naturels répartis modulo 6. En effet, ils sont construits et s'organisent entre eux de manière similaire.

Ainsi :

- **Le rhésus O- est analogue au sous-ensemble {6k±1}′ constitué des nombres premiers p de la forme 6k±1 ;**
- **Le rhésus O+ est analogue au sous-ensemble {6k±1}′′ constitué des nombres composés pp de la forme 6k±1 ;**
- **Le rhésus A- est analogue au sous-ensemble {6k±2}′ constitué des puissances de 2 ;**
- **Le rhésus A+ est analogue au sous-ensemble {6k±2}′′ constitué des nombres de la forme 6k±2 non puissance de 2 ;**
- **Le rhésus B- est analogue au sous-ensemble {6k±3}′ constitué des puissances de 3 ;**
- **Le rhésus B+ est analogue au sous-ensemble {6k±3}′′ constitué des nombres de la forme 6k±3 non puissance de 3 ;**
- **Le rhésus AB- est analogue au sous-ensemble {6k}′ constitué des puissances de 6 ;**
- **Le rhésus AB+ est analogue au sous-ensemble {6k}′′ constitué des nombres de la forme 6k non puissance de 6.**

Nous avons donc établi l'analogie entre les nombres entiers naturels et les rhésus sanguins du système ABO. Si nous nous rapportons au contexte historique, la connaissance de cette analogie aurait eu des conséquences considérables.

Le docteur Karl Landsteiner aurait pu soupçonner l'existence de « sous-groupes sanguins » et peut-être aurait-il prolongé son observation, dès 1900, jusqu'à découvrir les rhésus.

3 - COMPARAISON DES PROPORTIONS DES SOUS-ENSEMBLES NUMÉRIQUES À CELLES DES RHÉSUS SANGUINS

3.1 - Résultats préliminaires

Afin de classer les proportions des sous-ensembles numériques, nous allons utiliser les propriétés vues dans la première partie de la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales.

{6k±1}	{6k±2}	{6k±3}	{6k}
1 = 1	**2 = 1 x 2**	**3 = 1 x 3**	**6 = 1 x 2 x 3**
5 = 1 x 5	**4 = 1 x 2 x 2**	**9 = 1 x 3 x 3**	**12** = 1 x 2 x 2 x 3
7 = 1 x 7	**8 = 1 x 2 x 2 x 2**	**15** = 1 x 3 x 5	**18** = 1 x 2 x 3 x 3
11 = 1 x 11	**10** = 1 x 2 x 5	**21** = 1 x 3 x 7	**24** = 1 x 2 x 2 x 2 x 3
13 = 1 x 13	**14** = 1 x 2 x 7	**27 = 1 x 3 x 3 x 3**	**30** = 1 x 2 x 3 x 5
17 = 1 x 17	**16 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2**	**33** = 1 x 3 x 11	**36 = 1 x 2 x 2 x 3 x 3**
19 = 1 x 19	**20** = 1 x 2 x 2 x 5	**39** = 1 x 3 x 13	**42** = 1 x 2 x 3 x 7
23 = 1 x 23	**22** = 1 x 2 x 11	**45** = 1 x 3 x 3 x 5	**48** = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
25 = 1 x 5 x 5	**26** = 1 x 2 x 13	**51** = 1 x 3 x 17	**54** = 1 x 2 x 3 x 3 x 3
29 = 1 x 29	**28** = 1 x 2 x 2 x 7	**57** = 1 x 3 x 19	**60** = 1 x 2 x 2 x 3 x 5
31 = 1 x 31	**32 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2**	**63** = 1 x 3 x 3 x 7	**66** = 1 x 2 x 3 x 11
35 = 1 x 5 x 7	**34** = 1 x 2 x 17	**69** = 1 x 3 x 23	**72** = 1 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3
37 = 1 x 37	**38** = 1 x 2 x 19	**75** = 1 x 3 x 5 x 5	**78** = 1 x 2 x 3 x 13
41 = 1 x 41	**40** = 1 x 2 x 2 x 2 x 5	**81 = 1 x 3 x 3 x 3 x 3**	**84** = 1 x 2 x 2 x 3 x 7
43 = 1 x 43	**44** = 1 x 2 x 2 x 11	**87** = 1 x 3 x 29	**90** = 1 x 2 x 3 x 3 x 5
47 = 1 x 47	**46** = 1 x 2 x 23	**93** = 1 x 3 x 31	**96** = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
49 = 1 x 7 x 7	**50** = 1 x 2 x 5 x 5	**99** = 1 x 3 x 3 x 11	**102** = 1 x 2 x 3 x 17
53 = 1 x 53	**52** = 1 x 2 x 2 x 13		
55 = 1 x 5 x 11	**56** = 1 x 2 x 2 x 2 x 7		
59 = 1 x 59	**58** = 1 x 2 x 29		
61 = 1 x 61	**62** = 1 x 2 x 31		
65 = 1 x 5 x 13	**64 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2**		
67 = 1 x 67	**68** = 1 x 2 x 2 x 17		
71 = 1 x 71	**70** = 1 x 2 x 5 x 7		
73 = 1 x 73	**74** = 1 x 2 x 37		
77 = 1 x 7 x 11	**76** = 1 x 2 x 2 x 19		
79 = 1 x 79	**80** = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 5		
83 = 1 x 83	**82** = 1 x 2 x 41		
85 = 1 x 5 x 17	**86** = 1 x 2 x 43		
89 = 1 x 89	**88** = 1 x 2 x 2 x 2 x 11		
91 = 1 x 7 x 13	**92** = 1 x 2 x 2 x 23		
95 = 1 x 5 x 19	**94** = 1 x 2 x 47		
97 = 1 x 97	**98** = 1 x 2 x 7 x 7		
101 = 1 x 101	**100** = 1 x 2 x 2 x 5 x 5		

** Tableau de la répartition des entiers naturels modulo 6 accompagnés de leur factorisation. Les éléments des sous-ensembles « prime » sont en bleu, les éléments des sous-ensembles « seconde » sont en vert.*

Dans un ensemble d'entiers naturels consécutifs compris entre 1 et un multiple de 6,

- les éléments de l'ensemble {6k±1} représentent 1/3 du nombre total d'entiers ;
- les éléments de l'ensemble {6k±2} représentent 1/3 du nombre total d'entiers ;
- les éléments de l'ensemble {6k±3} représentent 1/6 du nombre total d'entiers ;
- les éléments de l'ensemble {6k} représentent 1/6 du nombre total d'entiers.

COMPARAISON DES PROPORTIONS DES SOUS-ENSEMBLES D'UN MÊME ENSEMBLE.

|{6k±1}'| et |{6k±1}''| : Nous avons montré dans la première partie que le produit des éléments de l'ensemble {6k±1} génèrent de nouveaux pp :

- Les p fabriquent des pp entre eux. 5(p) x 7(p) = 35(**pp**)
- Les p et les pp fabriquent des pp. 7(p) x 25(pp) = 175(**pp**)
- Les pp et les p fabriquent des pp. 49(pp) x 11(p) = 539(**pp**)
- Les pp fabriquent des pp entre eux. 77(pp) x 119(pp) = 9 136(**pp**)

Ainsi, nous avons montré qu'à partir d'un certain palier, les éléments de l'ensemble {6k±1}'' étaient plus nombreux que les éléments de l'ensemble {6k±1}'.

Ce palier est 1 075.

Donc, à partir de 1 075, on a toujours : |{6k±1}'| < |{6k±1}''|.

NB : L'ensemble {6k±1} représentant 1/3 des entiers naturels, on en déduit que l'ensemble {6k±1}'' représente entre 1/6 et 1/3 des entiers naturels (approchant de plus en plus 1/3 en avançant vers les grands nombres).

Pour |{6k±2}'| et |{6k±2}''| :

L'ensemble {6k±2} contient 1/3 des entiers naturels.

L'ensemble {6k±2}' contient toutes les puissances de 2 qui se raréfient extrêmement vite : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048, 4 096, ..., etc. L'ensemble {6k±2}'' contient tous les autres entiers naturels de la forme 6k±2.

Ainsi, à partir d'un certain palier, les éléments de l'ensemble {6k±2}'' sont toujours plus nombreux que les éléments de l'ensemble {6k±2}'.

Ce palier est 26.

Donc, à partir de 26, on a toujours : |{6k±2}'| < |{6k±2}''|.

NB : L'ensemble {6k±2} représentant 1/3 des entiers naturels, on en déduit que l'ensemble {6k±2}'' représente entre 1/6 et 1/3 des entiers naturels (approchant de plus en plus 1/3 en avançant vers les grands nombres).

Pour |{6k±3}'| et |{6k±3}''| :

L'ensemble {6k±3} contient 1/6 des entiers naturels.

L'ensemble {6k±3}' contient toutes les puissances de 3 qui se raréfient extrêmement vite : 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561, 19 683, 59 049, ..., etc. L'ensemble {6k±3}'' contient tous les autres entiers naturels de la forme 6k±3.

Ainsi, à partir d'un certain palier, les éléments de l'ensemble {6k±3}'' sont toujours plus nombreux que les éléments de l'ensemble {6k±3}'.

Ce palier est 39.

Donc, à partir de 39, on a toujours : |{6k±3}'| < |{6k±3}''|.

NB : L'ensemble {6k±3} représentant 1/6 des entiers naturels, on en déduit que l'ensemble {6k±3}'' représente entre 1/12 et 1/6 des entiers naturels (approchant de plus en plus 1/6 en avançant vers les grands nombres).

Pour |{6k}'| et |{6k}''| :

L'ensemble {6k} contient 1/6 des entiers naturels.

L'ensemble {6k}' contient toutes les puissances de 6 qui se raréfient extrêmement vite : 6, 36, 216, 1 296, 7 776, 46 656, 279 936, 1 679 616, ..., etc. L'ensemble {6k}'' contient tous les autres entiers naturels de la forme 6k.

Ainsi, à partir d'un certain palier, les éléments de l'ensemble {6k}'' sont toujours plus nombreux que les éléments de l'ensemble {6k}'.

Ce palier est 18.

Donc, à partir de 18, on a toujours : |{6k}'| < |{6k}''|.

NB : L'ensemble {6k} représentant 1/6 des entiers naturels, on en déduit que l'ensemble {6k}'' représente entre 1/12 et 1/6 des entiers naturels (approchant de plus en plus 1/6 en avançant vers les grands nombres).

3.2 - État initial de la fréquence des sous-ensembles numériques

PROPOSITION : **Aussi loin que nous irons dans les grands nombres multiples de 6, le classement des tailles des ensembles définis modulo 6 dans l'ordre croissant sera :**

|{6k}'| < |{6k±3}'| < |{6k±2}'| < |{6k±1}'| < |{6k±3}''| < |{6k}''| < |{6k±1}''| < |{6k±2}''|

Cette répartition est nommée « l'état initial de la fréquence des sous-ensembles numériques ».

Remarque : Ce classement n'est valable qu'à partir du moment où tous les sous-ensembles ont pris leur placement définitif. C'est-à-dire à partir du palier à hauteur duquel les proportions des sous-ensembles cessent de s'inverser.

DÉMONSTRATION : Nous démontrerons ce classement en plusieurs étapes.

- **Étape 1 : Classement des ensembles « prime »**
  Nous savons que les puissances de 6 sont plus rares que les puissances de 3 qui, elles-mêmes, sont plus rares que les puissances de 2. Nous pouvons donc obtenir le premier segment de notre chronologie.

  |{6k}'| < |{6k±3}'| < |{6k±2}'|

- **Étape 2 : Positionnement de l'ensemble {6k±1}'**

  L'ensemble {6k±1}' contient les nombres premiers p de la forme 6k±1. Nous allons montrer qu'ils sont plus nombreux que les puissances de 2 (c'est-à-dire l'ensemble {6k±2}').

  Le **postulat de Bertrand** qui a été démontré par Tchebychev dit ceci :

  « Pour tout entier $n \geq 2$, il existe au moins un nombre premier p tel que $n<p<2n$. »

  Exemple : Pour n = 612. On a 612 x 2 = 1 224. Entre 612 et 1 224 nous avons très exactement 89 nombres premiers différents. Le 1er nombre premier étant 613 et le dernier 1 223.

  NB : Pour n = 2, le nombre premier appartenant à l'intervalle]2 ; 4[est 3. Nous ne le prendrons pas en compte puisqu'il n'appartient pas à l'ensemble {6k±1}'.

Soit $n \geq 2$. Quel est le nombre de puissances de 2 et de nombres premiers p dans l'intervalle]n ; 2n[?

Si n est une puissance de 2, soit $m \geq 1$ tel que $n = 2^m$. Alors 2n est aussi une puissance de 2. En particulier, $2n = 2 \times 2^m = 2^{m+1}$. Donc n et 2n sont des puissances de 2 consécutives. Ainsi, il n'y aucune puissance de 2 dans l'intervalle]n ; 2n[.
Prenons donc $n = 2^m+1$. On a $2n = 2 \times (2^m+1) = 2^{m+1}+2$.
Nous travaillons alors dans l'intervalle $]2^m+1 ; 2^{m+1}+2[$.
Comme $2^{m+1}+1$ est impair, $2^{m+1}+1$ n'est pas une puissance de 2.
Ainsi, dans l'intervalle $]2^m+1 ; 2^{m+1}+2[$, nous trouvons <u>une seule puissance de 2</u> : 2^{m+1}.
Or le postulat de Bertrand montre qu'il existe <u>au moins un nombre premier p</u> dans cet intervalle.
Donc dans l'intervalle $]2^m+1 ; 2^{m+1}+2[$, **la quantité de nombres premiers p est supérieure ou égale à la quantité de puissances de 2.**

- Au sein de la réunion des intervalles $]2^m+1 ; 2^{m+1}+2[$ pour $m \geq 1$ (qui forme une partition de l'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à 3), la quantité de nombres premiers p est supérieure ou égale à la quantité de puissances de 2.
- Sur l'intervalle [1 ; 3], il y a une puissance de 2 et un nombre premier (1) de la forme $6k\pm1$.
- Sur l'intervalle]9 ; 18[, il y a 3 nombres premiers différents (11, 13 et 17).

Ces trois assertions permettent d'affirmer qu'**aussi loin que nous irons dans les grands nombres, nous trouverons toujours strictement plus de nombres premiers p de la forme 6k±1 que de puissances de 2.**

Nous pouvons donc compléter notre classement avec l'ensemble {6k±1}' :

|{6k}'| < |{6k±3}'| < |{6k±2}'| < |{6k±1}'|

- **Étape 3 : Classement des ensembles « seconde »**

Les ensembles {6k±1} et {6k±2} représentent chacun 1/3 des entiers naturels. Ils ont donc le même nombre d'éléments. De plus, nous avons montré que {6k±2}' contient moins d'éléments que {6k±1}'. Ainsi, **|{6k±1}''| < |{6k±2}''|.**

Les ensembles {6k±3} et {6k} représentent chacun 1/6 des entiers naturels. Ils ont donc le même nombre d'éléments. De plus, nous avons montré que {6k}' contient moins d'éléments que {6k±3}'. Ainsi, **|{6k±3}''| < |{6k}''|.**

De plus, nous avons montré que les ensembles {6k±1}'' et {6k±2}'' représentent chacun entre 1/6 et 1/3 des entiers naturels. Alors que les ensembles {6k±3}'' et {6k}'' représentent chacun entre 1/12 et 1/6 des entiers naturels (ils sont donc moins nombreux).

On en déduit la répartition suivante :

|{6k±3}''| < |{6k}''| < |{6k±1}''|< |{6k±2}''|

- **Étape 4 : |{6k±1}'| < |{6k±3}''|**

L'ensemble {6k±1} contient 1/3 des entiers naturels.

Lorsque les éléments des ensembles {6k±1}' et {6k±1}'' sont en quantités égales, ces deux ensembles représentent respectivement (1/3)/2 = 1/6 des entiers. En avançant dans les grands nombres, les éléments de l'ensemble {6k±1}'' deviennent beaucoup plus nombreux. Les éléments de l'ensemble {6k±1}' deviennent donc de plus en plus rares.

Plus nous avançons dans les grands nombres, plus |{6k±1}'| s'éloigne d'1/6 (sa proportion devient infiniment petite).

L'ensemble {6k±3} contient 1/6 des entiers naturels.

De la même façon, lorsque les éléments des ensembles {6k±3}' et {6k±3}'' sont en quantités égales, ces deux ensembles représentent respectivement (1/6)/2 = 1/12 des entiers. En avançant dans les grands nombres, les éléments de l'ensemble {6k±3}'' deviennent beaucoup plus nombreux. Les éléments de l'ensemble {6k±3}' deviennent donc de plus en plus rares.

Plus nous avançons dans les grands nombres, |{6k±3}''| s'approche de 1/6 (il en est même très proche sans jamais l'atteindre).

L'un s'éloignant significativement d'1/6 et l'autre s'en approchant fortement sans jamais l'atteindre, les cardinaux se croiseront pour ensuite s'inverser et obtenir le classement |{6k±1}'| < |{6k±3}''|.

Illustration : On peut voir cette jonction en regardant les proportions d'éléments des ensembles entre 1 002 et 10 002.

À 1 002, on a 1 002/3 = 334 éléments de la forme 6k±1.
On a vu dans la première partie que les nombres premiers p et les nombres composés pp étaient en quantités égales.
Donc |{6k±1}'| = 334/2 = 167 c'est-à-dire (167 x 100)/1 002 = 16,67 %* des entiers.
|{6k±1}''| = 334/2 = 167 c'est-à-dire (167 x 100)/1 002 = 16,67 %* des entiers.

De plus, on a 1 002/6 = 167 éléments de la forme 6k±3.
Entre 1 et 1 002, on trouve 6 puissances de 3 : 3, 9, 27, 81, 243, 729.
Donc |{6k±3}'| = 6 c'est-à-dire (6 x 100)/1 002 = 0,60 %* des entiers.
|{6k±3}''| = 167 - 6 = 161 c'est-à-dire (161 x 100)/1 002 = 16,07 %* des entiers.

** Les pourcentages sont arrondis au centième près. On insiste sur le fait que ces proportions ne sont pas des probabilités mais bien des fréquences certaines.*

À 10 002, on a 10 002/3 = 3 334 éléments de la forme 6k±1.
Entre 1 et 10 002, on trouve 1 228 nombres premiers p.

Donc |{6k±1}'| = 1 228 c'est-à-dire (1228 x 100)/10 002 = 12,28 %* des entiers.
|{6k±1}''| = 3 334 - 1 228 = 2 106 c'est-à-dire (2 106 x 100)/10 002 = 21,06 %* des entiers.

De plus, on a 10 002/6 = 1 667 éléments de la forme 6k±3.
Entre 1 et 10 002, on trouve 8 puissances de 3 : 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561.

Donc |{6k±3}'| = 8 c'est-à-dire (8 x 100)/10 002 = 0,08 %* des entiers.
|{6k±3}''| = 1 667 - 8 = 1 659 c'est-à-dire (1 659 x 100)/10 002 = 16,59 %* des entiers.

	1 002	10 002
|{6k±1}'|	**16,67 %**	**12,28 %**
|{6k±1}''|	16,67 %	21,06 %
|{6k±3}'|	0,60 %	0,08 %
|{6k±3}''|	**16,07 %**	**16,59 %**

** Tableau des fréquences en pourcentages (arrondies au centième près)*
des éléments de 4 ensembles parmi les entiers naturels.

On observe explicitement l'inversion des proportions des cardinaux |{6k±1}'| et |{6k±3}''| entre 1 002 et 10 002.

- **Étape 5 : Conclusion**

Nous avons établi les classements suivants :

- |{6k}'| < |{6k±3}'| < |{6k±2}'| < |{6k±1}'|
- |{6k±3}''| < |{6k}''| < |{6k±1}''| < |{6k±2}''|
- |{6k±1}'| < |{6k±3}''|

On en déduit le classement suivant :

|{6k}'| < |{6k±3}'| < |{6k±2}'| < |{6k±1}'| < |{6k±3}''| < |{6k}''| < |{6k±1}''| < |{6k±2}''|

■

CONCLUSION

Les outils de la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales nous emmènent bien plus loin que la mise en évidence de la répartition des nombres premiers.
En réunissant tous les théorèmes découverts, nous aboutissons à un résultat ordonnant l'ensemble des entiers naturels entre eux : l'état initial de la fréquence des ensembles numériques :

$$|\{6k\}'| < |\{6k\pm3\}'| < |\{6k\pm2\}'| < |\{6k\pm1\}'| < |\{6k\pm3\}''| < |\{6k\}''| < |\{6k\pm1\}''| < |\{6k\pm2\}''|$$

3.3 - État initial de la fréquence des rhésus sanguins

Maintenant que nous avons établi le classement des sous-ensembles numériques, il est légitime de nous demander ce qu'il en est du classement des fréquences des rhésus sanguins dans la population et s'il possède des similarités avec l'état initial que nous venons de démontrer.

L'état initial de la fréquence des ensembles numériques est :

$$|\{6k\}'| < |\{6k\pm3\}'| < |\{6k\pm2\}'| < |\{6k\pm1\}'| < |\{6k\pm3\}''| < |\{6k\}''| < |\{6k\pm1\}''| < |\{6k\pm2\}''|$$

Si nous suivons l'analogie entre les sous-ensembles numériques et les rhésus sanguins déduits dans la partie 2.2, nous obtenons la fréquence suivante :

AB- < **B-** < **A-** < **O-** < **B+** < **AB+** < **O+** < **A+**

Cette répartition représente donc « l'état initial de la fréquence des rhésus sanguins ».

D'après l'Établissement Français du Sang (EFS)[2], la répartition de la fréquence des rhésus sanguins dans la population française est la suivante :

AB- < **B-** < **AB+** < **O-** < **A-** < **B+** < **O+** < **A+**

On remarque **5 correspondances** et **3 différences** entre l'état initial de la fréquence des rhésus sanguins et la répartition de la fréquence des rhésus sanguins en France.

[2] https://dondesang.efs.sante.fr/comprendre-quest-ce-que-le-sang/les-groupes-sanguins

État initial de la fréquence des rhésus sanguins :

AB- < **B-** < **A-** < **O-** < **B+** < **AB+** < **O+** < **A+**

Répartition de la fréquence des rhésus sanguins dans la population française :

AB- < **B-** < **AB+** < **O-** < **A-** < **B+** < **O+** < **A+**

Le classement de la fréquence des rhésus sanguins dans la population française est donc différent de l'état initial et théorique que nous avons démontré. Évidemment, il aurait été étonnant d'obtenir une correspondance parfaite entre ces deux classements.

D'ailleurs, même si c'était le cas, d'aucune façon cette correspondance ne pourrait servir à confirmer l'état initial de la fréquence des sous-ensembles numériques.

En effet, ce dernier est établi sur des bases solides et déterminées. Nous venons de le démontrer et il ne pourra pas évoluer. D'ailleurs, comme disent les philosophes, « quelles que soient les relations constituant l'espace logique de la nature, elles diffèrent en genre des relations normatives constituant l'espace logique des raisons » : « ce qui, dans l'espace des raisons se justifie ou se garantit de manière inconditionnelle, perd toute absoluité une fois rendu sur le sol de la nature, car sur ce sol ne se rencontre rien d'absolu… »

À contrario, la fréquence des rhésus sanguins :

- est une probabilité établie sur les données des patients recensés en France, donc pas de l'ensemble de la population,
- varie fortement d'un pays à un autre en fonction des populations qui y vivent, des migrations historiques et autres événements multifactoriels.

FIN DE LA PARTIE 2

La connaissance des propriétés et de la répartition des entiers naturels en 8 sous-ensembles nous a permis de lier deux domaines : les nombres et le fluide sanguin.

Le dénouement de toute cette étude est un résultat entièrement nouveau : **l'état initial de la fréquence des sous-ensembles numériques.**

Le poids de ce que nous venons d'établir doit être clair :

- Nous n'avons pas ordonnancé les nombres à notre guise afin de raccorder deux domaines scientifiques. Sinon, on pourrait proposer un autre système qui fonctionne ou on pourrait réfuter un ou plusieurs des résultats obtenus dans la première partie.
- Non, nous avons montré et exhibé ce que sont les nombres, sans convention, amenant à des résultats inédits et fondamentaux ; si fondamentaux, qu'ils sont en concordance avec les caractéristiques du sang, élément vital de notre existence.

Je demande donc au lecteur qui nous a accompagnés tout au long de cette démonstration : comment continuer à admettre et à utiliser des conventions mathématiques et les théorèmes qui en découlent quand ils nous privent d'autant de nouveaux résultats, **dont la vraie nature des nombres ?**

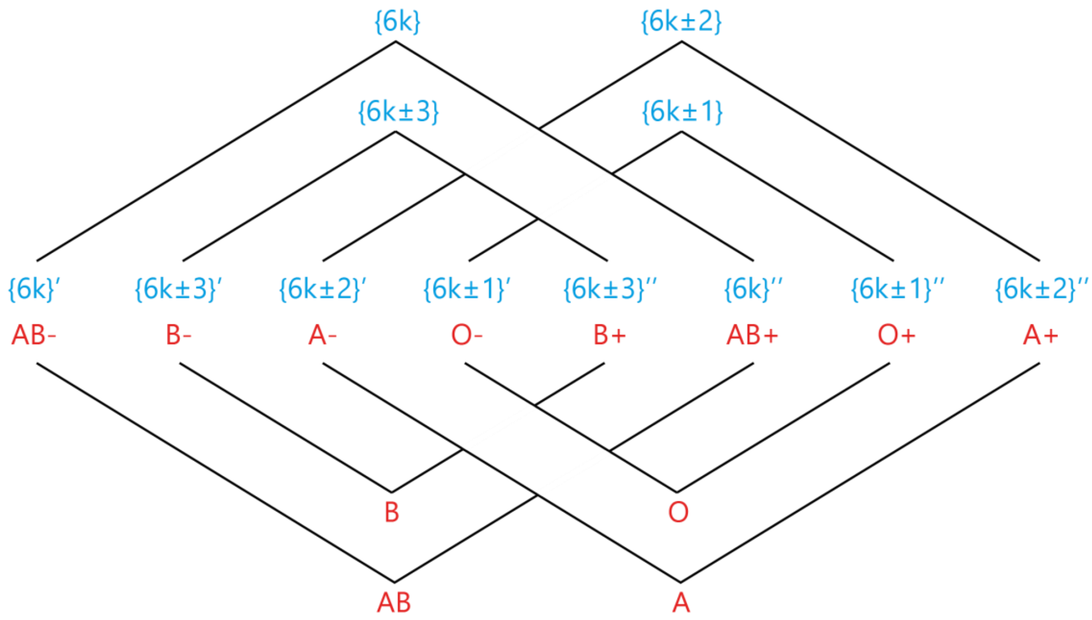
La Théorie Conceptuelle des Concordances Fondamentales d'Yves De-Mervent permet de prouver la non-nécessité de conventionner ou d'utiliser d'autres outils que ceux dont le problème traite, surtout dans un domaine où l'on clame la rigueur à tout prix.

D'ailleurs, je souhaite rappeler que l'ensemble de la démonstration de la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales a été découverte par Yves De-Mervent depuis plusieurs années sans aucune notation mathématique. Elle n'en a pas eu besoin. Et pourtant, elle est bien plus rigoureuse que ce qui est enseigné aujourd'hui sur les nombres entiers naturels.

Tel un chaînon...

{6k}' < {6k±3}' < {6k±2}' < {6k±1}' < {6k±3}'' < {6k}'' < {6k±1}'' < {6k±2}''

AB- < B- < A- < O- < B+ < AB+ < O+ < A+



Pour conclure

Nous venons de clore notre démonstration de la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales.

Nous n'avons eu de cesse de façonner des outils arithmétiques jusqu'alors ignorés de tous ; or ces outils sont strictement nécessaires pour entreprendre la construction de cet immense édifice qu'est la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales. Nous avons pu observer la répartition des nombres premiers et autres entiers naturels, et ce, dans le but ultime de démontrer que les nombres premiers sont régis de façon non aléatoire au sein de la suite $\mathbb{N}^*$*. Nous nous sommes appliqués à ne jamais supposer, suggérer, conjecturer ; et surtout à n'avancer aucune hypothèse que nous n'aurions pu démontrer. Nous avons gardé la logique numérique connue des Anciens et exclu toutes les conventions qui nous paraissaient trop hâtivement admises.*

Notre constat peut paraître surprenant puisque ce que nous affirmons n'a jamais été observé, pas même conjecturé. Plus qu'une simple avancée, nous sommes parvenus à atteindre l'inaccessible, alors que notre but n'a jamais été d'adjoindre à la répartition des entiers naturels (une fois avérée) des lois biologiques fondamentales.

Tous les éléments et théorèmes de la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales sont dépendants les uns des autres : un seul ferait défaut que l'édifice s'effondrerait promptement. Tricher ne servirait donc à rien. L'unité est un nombre premier et il n'y a pas à tergiverser. Profitons-en pour annoncer : M_1 *est un nombre premier de*

Mersenne : puisque $M_1 = 2^1 - 1 = 1$*. Ou alors, la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales est fausse.*

Mais l'histoire ne s'arrête pas là puisque nous vous avions promis les études de quatre conjectures ouvertes :

- *Spirale d'Ulam ;*
- *Conjecture de Collatz (3n+1) ;*
- *Conjecture de Goldbach ;*
- *Conjecture (p, p+2).*

Nous étudierons ces problèmes en toute simplicité, uniquement à l'aide de nombres entiers naturels et des outils de la Théorie Conceptuelle Des Concordances Fondamentales.
Vous pouvez consulter cette analyse sur le site : https://www.pontcerq.fr/livres/theorie-conceptuelle-des-concordances-fondamentales/ .
© ISBN 978-2-919648-32-0

Alors (HR) conjecture de Riemann… vraie ? Indécidable ? Vœu pieux ?

YVES DE-MERVENT