Le calcul tensoriel continu
Les ∞-variétés

Antoine Balan

December 17, 2020

Abstract

We introduce the continuous tensor calculus which is the tensor calculus when the index is continuous instead of being discreet.

1 Le calcul tensoriel

Pour une variété différentielle M, il est possible de faire un calcul tensoriel en considérant les espaces tangent et cotangent. Pour ce faire, on tensorise les espaces en on introduit des coordonnées locales (x_i). Un tenseur peut alors s'écrire par exemple :

$$A_{lp}^{ijk}$$

avec des règles de transformation quand on fait des changements de coordonnées.

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$$

On multiplie alors les tenseurs par ces fonctions pour obtenir le tenseur dans les nouvelles coordonnées. Par exemple :

$$\tilde{A}^i = A^j \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$$

Avec la notation d'Einstein.

2 Le calcul tensoriel continu

Il est possible de faire un calcul tensoriel continu lorsque l'indice du tenseur est continu, par exemple, si x^t sont les coordonnées locales, le tenseur A^t par changement de coordonnées $\tilde{x}^t$ donne :

$$\tilde{A}^t = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{t'} (\frac{\partial \tilde{x}^t}{\partial x^{t'}}) dt'$$

On a la règle de cohérence suivante, pour les changements de coordonnées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial \tilde{x}^t}{\partial x^{t'}})(\frac{\partial x^{t'}}{\partial \tilde{x}^{t''}}) dt' = \delta(t - t'')$$

δ est la fonction de Dirac. Avec les notations d'Einstein, on a ainsi :

$$\frac{\partial \tilde{x}^t}{\partial x^{t'}}\frac{\partial x^{t'}}{\partial \tilde{x}^{t''}} = \delta(t-t'')$$

L'espace de base est l'espace de Fréchet des fonctions de Schwartz. De sorte que :

$$x^t(f) = f(t) = \delta_t(f)$$

Les fonctions sur cet espace sont les fonctionnelles des fonctions de Schwartz. Une fonctionnelle $\mathcal{F}$ est dérivable si la limite suivante existe pour tout h :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathcal{F}(g+\epsilon h)-\mathcal{F}(g)}{\epsilon} = d\mathcal{F}_g(h)$$

et si la différentielle est linéaire et continue, c'est une distribution. Une fonctionnelle est lisse si on peut itérer les différentielles. Les dérivations des fonctionnelles lisses s'identifient au point avec les fonctions. On a l'égalité suivante :

$$X(\mathcal{F}(g)) = d\mathcal{F}_g(X)$$

La différentielle d'une fonction est :

$$d\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^t}dx^t dt$$

On a par changement de variables :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^t} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{x}^{t'}}\frac{\partial \tilde{x}^{t'}}{\partial x^t}dt'$$

Pour $\mathcal{F} = x^{t''}$ et $\tilde{x}^{t'} = x^{t'}$, on obtient ainsi :

$$\delta(t-t'') = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t')\delta(t'-t'')dt'$$

La métrique est un 2-tenseur tel que :

$$g(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_{tt'}X^tY^{t'}dtdt'$$

La métrique est riemannienne si la métrique est une forme quadratique définie positive.

Définition :

Les variétés de dimension infinie modelées sur l'espace de Schwartz des fonctions lisses réelles à décroissance plus que polynômiale à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées sont les ∞-variétés.