Sur les formules de multiplication de Raabe (On Raabe's Multiplication Formulas)

Méhdi Pascal

November 8, 2020

Abstract

Determination of the classes of polynomials where we can apply Raabe's Multiplication formulas.

Détermination des classes des polynômes où on peut appliquer les formules de Multiplications de Raabe.

Niels Nielsen Mathématicien Danois 1865-1931

Auteur du célèbre livre « Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, 1923 »

Il s'agit d'une formule de Raabe[1], dite la formule de multiplication, Carlitz avait fait une note sur une observation due à Nielsen, voici ce que Carlitz avait exactement écrie.

> and the multiplication theorem.
>
> $$B_n(ka) = k^{n-1}\sum_{s=0}^{k-1} B_n\left(a+\frac{s}{k}\right) \tag{1.11}$$
>
> valid for all integral $k \geq 1$. Nielsen [24] has observed that if a polynomial $f_n(a)$ satisfies
>
> $$f_n(ka) = k^{n-1}\sum_{s=0}^{k-1} f_n\left(a+\frac{s}{k}\right)$$
>
> for some $k > 1$ then we have
>
> $$f_n(a) = C_n \cdot B_n(a),$$
>
> where C_n is independent of a.

Dans ce papier je définie une classe de suite de polynôme où cette formule est valide, et que en dehors de cette classe, aucune suite de polynôme ne peut vérifie cette formule, j'ai donné à cette classe de suite le nom de Nielsen[2], la méthode utilisé est due au mathématicien Gaëtan Bisson.

Définition (1) :

Une suite de polynôme $A_n(x)$ de degré égale à n, est de Nielsen de première espèce si:

1. $\dfrac{d}{dx}A_n(x) = k_n A_{n-1}(x)$ où $k_n \neq 0$ est indépendante de x.
2. $\Delta\left(A_n(x)\right) = \left[A_n(x)\right]_x^{x+1} = A_n(x+1) - A_n(x) = C_n x^{n-1}$ où C_n est indépendante de x.

[]

Sur l'espace $\mathbb{R}[\![x]\!]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{R}$, on définie l'opérateur mixte φ par :

(2) : $$\varphi\left(P(x)\right) = \left(\Delta \mathrm{o} \textstyle\int\right)P(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$$

Soit $A_n(x)$ une suite de polynôme de Nielsen de premier espèce, on a :

(3) : $$\varphi\left(A_n(x)\right) = \int_x^{x+1} A_n(t)dt = \left[\frac{A_{n+1}(t)}{k_{n+1}}\right]_x^{x+1} = \frac{\Delta\left(A_{n+1}(x)\right)}{k_{n+1}} = \frac{C_{n+1}}{k_{n+1}}x^n$$

Pour simplifie on pose parfois $\varphi\left(A_n(t)\right) = \beta_n x^n$ où $\beta_n = \dfrac{C_{n+1}}{k_{n+1}}$ est indépendant de x.

[1] Pour Joseph Ludwig Raabe en 1851, la formule de multiplication est dite par fois la relation de distribution de Raabe.

[2] Ces polynômes n'ont rien avoir avec les polynômes harmoniques que Nielsen avait traiter dans son livre, c'est juste une notation que j'ai choisie pour une classe de polynôme.

L'unicité par l'opérateur φ.

Soient $A_n(x)$ et $B_n(x)$ deux suites de polynôme de Nielsen de premier espèce, on a :

(4) : $$A_n(x)=B_n(x) \text{ si \& seulement si } \varphi\big(A_n(x)\big)=\varphi\big(B_n(x)\big)$$

Preuve :

Le premier sens est évident, pour le second sens, en vertu de (3) posons :

$$\varphi\big(A_n(x)\big)=\frac{C_{n+1}}{k_{n+1}}x^n \quad \& \quad \varphi\big(B_n(x)\big)=\frac{C^{\bullet}_{n+1}}{k^{\bullet}_{n+1}}x^n$$

Donc nous aurons $\frac{C_{n+1}}{k_{n+1}}=\frac{C^{\bullet}_{n+1}}{k^{\bullet}_{n+1}}$, cela veut dire que $C_{n+1}=\alpha C^{\bullet}_{n+1}$ et $k_{n+1}=\alpha k^{\bullet}_{n+1}$, et donc $A_n(t)=\alpha B_n(t)$, où α est indépendante de x.

Cela nous conduit au fait que $\varphi\big(B_n(x)\big)=\varphi\big(A_n(x)\big)=\varphi\big(\alpha B_n(x)\big)=\alpha\varphi\big(B_n(x)\big)$ donc $\alpha=1$.

C.Q.F.D

Une autre démonstration est donné par Mr Gaëtan Bisson, consiste à prouver que l'opérateur φ est un isomorphisme, voir [1].

Théorème (5) :

Une suite de polynôme $A_n(x)$ est de Nielsen de premier espèce, si et seulement si, il vérifie la première formule de multiplication de Raabe, telle que :

$$A_n(qx)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}A_n\left(x+\frac{j}{q}\right) \quad \text{où } q\in\mathbb{N}^*$$

Preuve :

Pour faciliter les calcules on peut remplacer qx par x, la formule de multiplication devient :

$$A_n(x)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)$$

Premier sens :

On part de $\beta_n y^n=\int_y^{y+1}A_n(t)dt$, et on a,

$$\beta_n y^n=\beta_n q^n\left(\frac{y}{q}\right)^n=q^n\int_{\frac{y}{q}}^{\frac{y}{q}+1}A_n(t)dt=q^n\sum_{j=0}^{q-1}\int_{\frac{y}{q}+\frac{j}{q}}^{\frac{y}{q}+\frac{j+1}{q}}A_n(t)dt$$

Un petit changement de variable, tel que,

$$t=\frac{x+j}{q}, \text{ donc } dt=\frac{dx}{q}$$

$$\beta_n y^n=\int_y^{y+1}q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)dx$$

Et l'unicité des polynômes de Nielsen permet d'en déduire.

Second sens :

On part de, $A_n(x)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)$, et on a,

$$\Delta\left(A_n(x)\right)=\Delta\left(q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)\right)$$
$$=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}\left(A_n\left(\frac{x+1+j}{q}\right)-A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)\right)$$

Qui n'est qu'une somme télescopique, qui se réduit à,

$$\Delta\left(A_n(x)\right)=q^{n-1}\left(A_n\left(\frac{x+q}{q}\right)-A_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)$$
$$=q^{n-1}\Delta\left(A_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)$$

Si on pose :

$$\Delta\left(A_n(x)\right)=d_{n-1}x^{n-1}+d_{n-2}x^{n-2}+d_{n-3}x^{n-3}+..[]..+d_1x^1+d_0$$

Alors,

$$q^{n-1}\Delta\left(A_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)=d_{n-1}x^{n-1}+qd_{n-2}x^{n-2}+q^2d_{n-3}x^{n-3}+..[]..+q^{n-2}d_1x^1+q^{n-1}d_0$$

Et l'égalité nécessite que l'on a,

$$d_0=d_1=d_2=..[]..=d_{n-2}=0$$

Et donc,

(6) : $$\Delta\left(A_n(x)\right)=d_{n-1}x^{n-1}$$

Et pour achever la démonstration il faut prouver que l'on a :

$\frac{d}{dx}A_n(x)=k_nA_{n-1}(x)$ où k_n est indépendant de x.

En effet,

$$A_n(qx)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}A_n\left(x+\frac{j}{q}\right)$$

On dérive les deux membres, on obtient,

$$qA_n^{\bullet}(qx)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}A_n^{\bullet}\left(x+\frac{j}{q}\right)$$

Où $A_n^{\bullet}(x)$ est la dérivée de $A_n(x)$

(*) : $$A_n^{\bullet}(qx)=q^{n-2}\sum_{j=0}^{q-1}A_n^{\bullet}\left(x+\frac{j}{q}\right)$$

La formule (6) montre que $\Delta\left(A_n^{\bullet}(x)\right)=k_nx^{n-2}$ elle montre aussi $\Delta\left(A_{n-1}(x)\right)=l_nx^{n-2}$ donc $A_n^{\bullet}(x)=\rho_nA_{n-1}(x)+C^{te}$ on remplace dans (*), et on a,

$$\rho_nA_{n-1}(qx)+C^{te}=q^{n-2}\sum_{j=0}^{q-1}\left(\rho_nA_{n-1}\left(x+\frac{j}{q}\right)+C^{te}\right)$$
$$=\left(q^{n-2}\sum_{j=0}^{q-1}\rho_nA_{n-1}\left(x+\frac{j}{q}\right)\right)+q^{n-1}C^{te}$$

Donc,

$$A_{n-1}(qx)+\frac{C^{te}}{\rho_n}=\left(q^{n-2}\sum_{j=0}^{q-1}A_{n-1}\left(x+\frac{j}{q}\right)\right)+\frac{q^{n-1}C^{te}}{\rho_n}$$

$$\frac{C^{te}}{\rho_n}=\frac{q^{n-1}C^{te}}{\rho_n}$$

D'où, $C^{te}=0$

Ainsi on a, $A_n^{\bullet}(x)=\rho_n A_{n-1}(x)$

C.Q.F.D

Proposition (7) :

Soient $A_n(x)$ et $B_n(x)$ deux suites de polynômes de Nielsen de premier espèce, et on a,

$$A_n(x)=k_nB_n(x)\Leftrightarrow\Delta\left(A_n(x)\right)=k_n\Delta\left(B_n(x)\right)$$

En effet, si $A_n(x)=k_nB_n(x)$ alors on a $\Delta\left(A_n(x)\right)=k_n\Delta\left(B_n(x)\right)$, inversement si $\Delta\left(A_n(x)\right)=k_n\Delta\left(B_n(x)\right)$ alors $A_n(x)=k_nB_n(x)+C^{te}$ et cette dernière constante devrait être nulle, car vu,

$$A_n(qx)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}A_n\left(x+\frac{j}{q}\right)$$

On remplace,

$$k_nB_n(qx)+C^{te}=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}\left(k_nB_n\left(x+\frac{j}{q}\right)+C^{te}\right)$$

$$=\left(q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}k_nB_n\left(x+\frac{j}{q}\right)\right)+q^nC^{te}$$

Donc,

$$B_n(qx)+\frac{C^{te}}{k_n}=\left(q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}B_n\left(x+\frac{j}{q}\right)\right)+\frac{q^nC^{te}}{k_n}$$

$$\frac{C^{te}}{k_n}=\frac{q^nC^{te}}{k_n}$$

D'où, $C^{te}=0$.

C.Q.F.D

Les polynômes de Bernoulli sont aussi des polynômes de Nielsen de première espèce, car ils vérifient les propriétés suivantes :

- $\dfrac{dB_n(x)}{dx}=nB_{n-1}(x)$
- $\Delta\left(B_n(x)\right)=nx^{n-1}$

Donc en vertu de la proposition (7), en déduit la note de Nielsen, à savoir que si une suite de polynôme $f_n(x)$ satisfaite

$$f_n(ka)=k^{n-1}\sum_{s=0}^{k-1}f_n\left(a+\frac{s}{k}\right)$$

Pour un entier $k>1$, alors

$$f_n(a)=C_nB_n(\mathrm{a})$$

Où C_n est indépendante de a.
[]

Mais sur le net, je me suis tombé sur cet article qui est due à Carlitz aussi,

A NOTE ON THE MULTIPLICATION FORMULAS FOR THE BERNOULLI AND EULER POLYNOMIALS

L. CARLITZ

1. Polynomials of order 1. The following three formulas are well known [4, pp. 18, 24]:

$$(1.1)\qquad B_m(kx)=k^{m-1}\sum_{s=0}^{k-1}B_m\left(x+\frac{s}{k}\right),$$

$$(1.2)\qquad E_m(kx)=k^{m}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^sE_m\left(x+\frac{s}{k}\right)\qquad (k\text{ odd}),$$

$$(1.3)\qquad E_{m-1}(kx)=-\frac{2k^{m-1}}{m}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^sB_m\left(x+\frac{s}{k}\right)\qquad (k\text{ even}),$$

where $B_m(x)$, $E_m(x)$ denote the polynomials of Bernoulli and Euler in the usual notation. It is perhaps not so familiar that (1.1) and (1.2) characterize the polynomials. More precisely, as Nielsen has pointed out [3, p. 54], if a normalized polynomial satisfies (1.1) for a single value $k>1$, then it is identical with $B_m(x)$; similarly if a normalized polynomial satisfies (1.2) for a single odd $k>1$, then it is identical with $E_m(x)$. For some generalizations see [1].

The situation for (1.3) is clearly different. For consider the equation

Pour cette raison, je vais ajouter quelques définitions.

(8) : l'opérateur $\nabla\left(f(x)\right):=[\![f(x)]\!]_x^{x+1}:=f(x+1)+f(x)$

(9) : soit $f_n(x)$ une suite de polynôme menu d'une loi fonctionnelle de type $\frac{d}{dx}f_n(x)=\alpha_nf_{n-1}(x)$, et $F(x)$ l'une des primitives de $f_n(x)$ dont le terme constant est déterminer par la même loi fonctionnelle, « $F_n(x)=\frac{1}{\alpha_{n+1}}f_{n+1}(x)$ »

on note par :

(10) : $$\oint_a^b f_n(x)dx:=[\![F(x)]\!]_a^b=F(a)+F(b)$$

Les étapes de manipulation de ce dernier opérateur sont en nombres deux :

1. On calcule une intégrale indéfinie, la constante est déterminée par une loi fonctionnelle comme indiquer plus haut.
   Comme une intégrale indéfinie la règle de changement de variable, est toujours valide, ainsi que la règle d'intégration par partie.
2. au lieu de différentier par une simple soustraction, on différentie par une simple addition, « ∇ au lieu de Δ », donc la règle de Chasles n'est plus valide, mais on peux la remplacer par Chasles alternée.

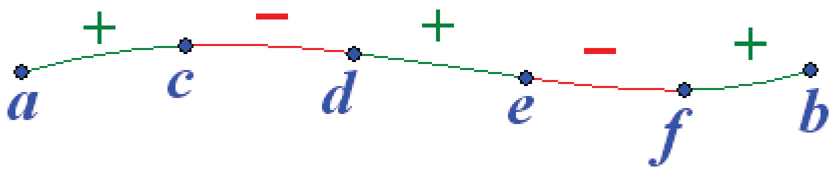
En effet soient a,b,c,d,e, &..[].. des nombres réels, on a :

$$\oint_a^b f(x)dx = \oint_a^c f(x)dx - \oint_c^d f(x)dx + \oint_d^b f(x)dx$$

Ou encore,

$$\oint_a^b f(x)dx = \oint_a^c f(x)dx - \oint_c^d f(x)dx + \oint_d^e f(x)dx - \oint_e^f f(x)dx + \oint_f^b f(x)dx$$

&..[]..



Trajet télescopique

Un nombre pair des stations, et impair pour les trajets.

Donc pour voyager de a à b, on a le droit de se reposer dans un nombre pair des stations, et jamais impair, et donc un nombre impair des trajets, d'où pour une subdivision, on a :

(11) : $$\oint_{a_0}^{a_k} f(x)dx = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \oint_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)dx$$ Où k est impair.

Ou bien,

(12) : $$\left[\!\left[F(x) \right]\!\right]_{a_0}^{a_k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[\!\left[F(x) \right]\!\right]_{a_j}^{a_{j+1}}$$ Où k est impair.

Par analogie de l'opérateur φ de Bisson, on définie l'opérateur ψ, tel que,

(13) : $$\psi\left(P(x)\right) = \left(\nabla o \int\right) P(x) = \oint_x^{x+1} P(t)dt$$

<u>Définition (14) :</u>

Une suite de polynôme $A_n(x)$ de degré égale à n est de Nielsen de seconde espèce si:

1. $\frac{d}{dx}A_n(x) = k_n A_{n-1}(x)$ où $k_n \neq 0$ est indépendante de x.
2. $\nabla\left(A_n(x)\right) = C_n x^n$ où C_n est indépendante de x.

Pour cette seconde classe de polynôme, on a :

(15) : $$\psi\left(A_n(t)\right) = \oint_x^{x+1} A_n(t)dt = \left[\!\left[\frac{A_{n+1}(t)}{k_{n+1}} \right]\!\right]_x^{x+1} = \frac{\nabla\left(A_{n+1}(x)\right)}{k_{n+1}} = \frac{C_{n+1}}{k_{n+1}} x^{n+1} = \beta_n x^{n+1}$$

<u>L'unicité par ψ (16) :</u>

Soient $A_n(x)$ et $B_n(x)$ deux suites de polynômes de Nielsen de second espèce, on a,

$$A_n(x)=B_n(x) \text{ si et seulement si } \psi\left(A_n(x)\right)=\psi\left(B_n(x)\right)$$

Preuve :
Le premier sens est évident, pour le second on pose,

$$\frac{d}{dx}A_n(x)=k_nA_{n-1}(x) \text{ et } \nabla\left(A_n(x)\right)=C_nx^n$$

&

$$\frac{d}{dx}B_n(x)=k_n^{'}B_{n-1}(x) \text{ et } \nabla\left(B_n(x)\right)=C_n^{'}x^n$$

$$\text{Si } \psi\left(A_n(x)\right)=\psi\left(B_n(x)\right) \text{ alors } \frac{C_{n+1}}{k_{n+1}}=\frac{C_{n+1}^{'}}{k_{n+1}^{'}}$$

Soient, $C_{n+1}=\alpha C_{n+1}^{'}$ et $k_{n+1}=\alpha k_{n+1}^{'}$ où α est quelconque, donc les deux suites de polynômes sont proportionnels, tel que $A_n(t)=\alpha B_n(t)$, cela nous conduit au fait que $\psi\left(B_n(x)\right)=\psi\left(A_n(x)\right)=\psi\left(\alpha B_n(x)\right)=\alpha\psi\left(B_n(x)\right)$ donc $\alpha=1$.
C.Q.F.D

Théorème (17) :
Une suite de polynôme $A_n(x)$ est de Nielsen de seconde espèce, si et seulement si, il vérifie la seconde formule de multiplication de Raabe, telle que :

$$A_n(qx)=q^n\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n\left(x+\frac{j}{q}\right)$$

Pour tout entier q impair
Preuve :

On remplace qx par x, la formule de multiplication devient :

$$A_n(x)=q^n\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)$$

Premier sens :
On part de $\beta_n y^{n+1}=\oint_y^{y+1}A_n(t)dt$, et soit q un entier impair, alors on a,

$$\beta_n y^{n+1}=\beta_n q^{n+1}\left(\frac{y}{q}\right)^{n+1}=q^{n+1}\oint_{\frac{y}{q}}^{\frac{y}{q}+1}A_n(t)dt=q^{n+1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\oint_{\frac{y}{q}+\frac{j}{q}}^{\frac{y}{q}+\frac{j+1}{q}}A_n(t)dt$$

Un petit changement de variable, tel que,

$$t=\frac{x+j}{q}, \text{ donc } dt=\frac{dx}{q}$$

$$\beta_n y^{n+1}=\int_y^{y+1}\frac{q^{n+1}}{q}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)dx$$

$$t=x\,,\quad dt=dx$$

$$\beta_n y^{n+1}=\int_y^{y+1}q^n\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n\left(\frac{t+j}{q}\right)dt$$

Et l'unicité permet de conclure.
Second sens :

On part de $A_n(x)=q^n\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)$ $(q \ \ impair)$ et on a,

$$\nabla\left(A_n(x)\right)=\nabla\left(q^n\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)\right)$$

$$\nabla\left(A_n(x)\right)=q^n\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\left(A_n\left(\frac{x+1+j}{q}\right)+A_n\left(\frac{x+j}{q}\right)\right)$$

Qui n'est qu'une somme télescopique qui se réduit à,

$$\nabla\left(A_n(x)\right)=q^n\left(A_n\left(\frac{x+q}{q}\right)+A_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)$$

$$=q^n\nabla\left(A_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)$$

Si on pose :

$$\nabla\left(A_n(x)\right)=d_nx^n+d_{n-1}x^{n-1}+d_{n-2}x^{n-2}+d_{n-3}x^{n-3}+..[]..+d_1x^1+d_0$$

Alors,

$$q^n\nabla\left(A_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)=d_nx^n+qd_{n-1}x^{n-1}+q^2d_{n-2}x^{n-2}+q^3d_{n-3}x^{n-3}+..[]..+q^{n-1}d_1x^1+q^nd_0$$

Et l'égalité nécessite que l'on a,

$$d_0=d_1=d_2=..[]..=d_{n-1}=0$$

Donc,

(18) :
$$\nabla\left(A_n(x)\right)=d_nx^n$$

Et pour achever la démonstration il faut prouver que l'on a,

$$\frac{d}{dx}A_n(x)=k_nA_{n-1}(x)\ .$$

En effet,

$$A_n(qx)=q^n\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n\left(x+\frac{j}{q}\right)$$

On dérive les deux membres, on obtient,

$$qA_n^{\bullet}(qx)=q^n\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n^{\bullet}\left(x+\frac{j}{q}\right)$$

$$A_n^{\bullet}(qx)=q^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j A_n^{\bullet}\left(x+\frac{j}{q}\right)$$

Comme $A_n^{\bullet}(x)$ est de degré n-1, alors en vertu de (18) on a $\nabla\left(A_n^{\bullet}(x)\right)=kx^{n-1}$, de même on a $\nabla\left(A_{n-1}(x)\right)=lx^{n-1}$, donc $\nabla\left(A_n^{\bullet}(x)\right)=\frac{k}{l}\nabla\left(A_{n-1}(x)\right)$.

Or pour deux polynômes quelconques $P(x)$ et $Q(x)$ on a,

$$P(x)=kQ(x)\Leftrightarrow\nabla\left(P(x)\right)=k\nabla\left(Q(x)\right)$$

Ceci est vrai pour tous les polynômes, c'est justifié par identification des coefficients, donc il est vrai pour les polynômes de Nielsen de seconde espèce.

En effet, dans $\mathbb{R}[x]$, l'opérateur ∇ préserve le degré, donc il décrit un isomorphisme, donc en vertu, l'image de la base Canonique $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'opérateur ∇ est aussi une base « $\nabla\left(x^n\right)=\left(x+1\right)^n+x^n$ », d'autre part si par rapport à la base canonique on a $P(x)=kQ(x)$, alors cette identité reste vraie par rapport à n'importe quelle base, se qui preuve l'identification des coefficients par rapport à la base $\nabla\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi $A_n^{\bullet}(x)=\frac{k}{l}A_{n-1}(x)$.

C.Q.F.D

[]

Pour cette troisième formule de multiplication « (1.3) dans l'article de Carlitz »

$$(1.3)\qquad E_{m-1}(kx)=-\frac{2k^{m-1}}{m}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s B_m\left(x+\frac{s}{k}\right)\qquad (k \text{ even}),$$

Soient $A_n(x)$ une suite de polynôme de Nielsen de premier espèce, et $B_n(x)$ une suite de polynôme de Nielsen de seconde espèce, tels que,

(19) :
$$\frac{d}{dx}A_n(x)=k_nA_{n-1}(x) \quad \& \quad \Delta\left(A_n(x)\right)=\alpha_nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}B_n(x)=l_nB_{n-1}(x) \quad \& \quad \nabla\left(B_n(x)\right)=\beta_nx^n$$

Alors on a,

(20) :
$$\nabla\left(B_{n-1}(x)\right)=\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_n}\Delta\left(A_n(x)\right)$$

Ou bien,
$$\left[\!\left[B_{n-1}(t)\right]\!\right]_x^{x+1}=\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_n}\left[A_n(t)\right]_x^{x+1}$$

De même on a,

(21) :
$$\psi\left(B_{n-1}(x)\right)=\frac{\beta_n}{\alpha_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{l_n}\varphi\left(A_n(x)\right)$$

Ou bien,
$$\oint_x^{x+1}B_{n-1}(t)dt=\frac{\beta_n}{\alpha_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{l_n}\int_x^{x+1}A_n(t)dt$$

La relation de Chasles alternée, comme on a vu, est vraie pour une subdivision impaire, tel que,

(22) :
$$\left[\!\left[F(x)\right]\!\right]_{a0}^{a_{2k+1}}=\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\left[\!\left[F(x)\right]\!\right]_{a_j}^{a_{j+1}}$$

Mais si on se force à une subdivision paire, alors on retrouve une formule qui nous permet de passer d'un opérateur à l'autre, tel que,

(23) :
$$\left[F(x)\right]_{a_0}^{a_{2k}}=-\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^j\left[\!\left[F(x)\right]\!\right]_{a_j}^{a_{j+1}}$$

On part de (15) à savoir, $C_{n-1}y^n = \oint_y^{y+1} B_{n-1}(t)dt$ et on a,

$$C_{n-1}y^n = C_{n-1}(2q)^n\left(\frac{y}{2q}\right)^n = (2q)^n \oint_{\frac{y}{2q}}^{\frac{y}{2q}+1} B_{n-1}(t)dt = \frac{\beta_n}{\alpha_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{l_n}(2q)^n \int_{\frac{y}{2q}}^{\frac{y}{2q}+1} A_n(t)dt$$

$$= -\frac{\beta_n}{\alpha_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{l_n}(2q)^n \sum_{j=0}^{2q-1} \oint_{\frac{y}{2q}+\frac{j}{2q}}^{\frac{y}{2q}+\frac{j+1}{2q}} (-1)^j A_n(t)dt$$

Changement de variable, $t = \dfrac{x+j}{2q}$ $\quad dt = \dfrac{dx}{2q}$ ainsi,

$$C_{n-1}y^n = \oint_y^{y+1} -\frac{\beta_n}{\alpha_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{l_n}(2q)^{n-1} \sum_{j=0}^{2q-1} (-1)^j A_n\left(\frac{x+j}{2q}\right)dx$$

Par identification on a,

(24) :
$$B_{n-1}(x) = -\frac{\beta_n}{\alpha_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{l_n}(2q)^{n-1} \sum_{j=0}^{2q-1} (-1)^j A_n\left(\frac{x+j}{2q}\right)$$

C.Q.F.D

Exemple :

Pour les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ on a, $k_n=\alpha_n=n$, et pour les polynômes d'Euler $E_n(x)$ on a, $l_n=n$ et $\beta_n=2$, ainsi,

(25) :
$$E_{n-1}(x) = -\frac{2}{n}(2q)^{n-1} \sum_{j=0}^{2q-1} (-1)^j B_n\left(\frac{x+j}{2q}\right)$$

Ce qu'est équivalant à (1.3) dans l'article de Carlitz.
[]
Sauf erreur.
Fin.

Méhdi Pascal
MehdiPascal38@Gmail.Com

[1] : Autour des nombres et des polynômes de Bernoulli, Par Gaëtan Bisson, https://gaati.org/bisson/tea/bernoulli.pdf

[2] : Bernoulli Numbers, By L.Carlitz, 1968.

[3] : A note on the multiplication formulas for the Bernoulli and Euler Polynomials, by L.Carlitz 1953. https://www.jstor.org/stable/2031788