Une Démonstration de la Formule des sinus en Trigonométrie Sphérique

Abdelmajid Ben Hadj Salem
abenhadjsalem@gmail.com

November 2, 2020

Abstract
In this paper, we give another proof of the formula of sinus of spherical trigonometry.

1 Position du Problème

On va voir ici une autre démonstration de la formule des sinus:

$$\frac{sin(a)}{sin(\hat{A})} = \frac{sin(b)}{sin(\hat{B})} = \frac{sin(c)}{sin(\hat{C})}$$

On note H le projeté orthogonal de A, sur le plan OBC et B' et C' les projetés orthogonaux de H respectivement sur les droites OB et OC.

1. Ecrire les longueurs AB' et AC' en fonction de c et b, respectivement.
2. (a) Expliquer pourquoi l'angle $\widehat{AB'H}$ est égal à $\hat{B}$.
(b) En déduire AH en fonction de AB' et de $\hat{B}$.
3. Ecrire de la même manière AH en fonction de AC' et de $\hat{C}$.
4. Déduire finalement que:

$$sin(c)sin(\hat{B}) = sin(b)sin(\hat{C})$$

2 Données

On considère un repère orthonormé $R(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ et une sphère de rayon 1, centrée au point O. Soit le triangle sphérique ABC tel que:
- A au pôle,
- B sur le méridien origine,
- C dans le premier quadrant.

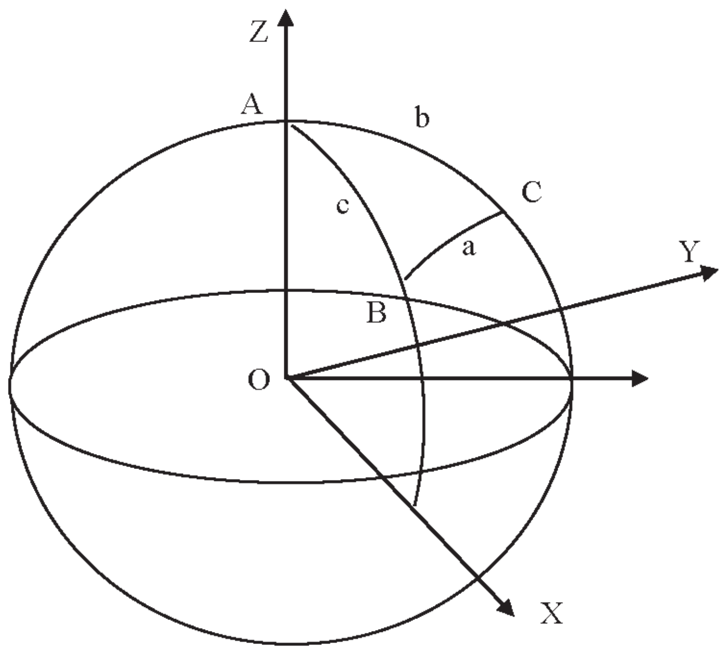

Figure 1: Le Triangle Sphérique ABC

Calculons les coordonnées des points A, B, C:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} sinc \\ 0 \\ cosc \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} sinbcosA \\ sinbsinA \\ cosb \end{pmatrix} \tag{1}$$

Calculons les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OB}$ et $\boldsymbol{OC}$, on a :

$$\boldsymbol{OB} = \left| \begin{array}{l} sinc \\ 0 \\ cosc \end{array} \right., \quad \boldsymbol{OC} = \left| \begin{array}{l} sinbcosA \\ sinbsinA \\ cosb \end{array} \right. \tag{2}$$

Soit $\boldsymbol{N}$ un vecteur normal au plan OBC:

$$\boldsymbol{N} = \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right. \tag{3}$$

On détermine les composantes de $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{N}.\boldsymbol{OB} = 0 \Longrightarrow \alpha sinc + \gamma cosc = 0 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{N}.\boldsymbol{OC} = 0 \Longrightarrow \alpha sinbcosA + \beta sinbsinA + \gamma cosb = 0 \tag{5}$$

D'où les composantes de $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{N} = \beta \left| \begin{array}{l} -\dfrac{sinA}{cosA - \dfrac{tgc}{tgb}} \\ \\ 1 \\ \\ \dfrac{tgcsinA}{cosA - \dfrac{tgc}{tgb}} \end{array} \right. \tag{6}$$

Prenons $\beta = 1$, d'où les composantes d'un vecteur normal au plan OBC:

$$\boldsymbol{N} = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{sinA}{cosA - \dfrac{tgc}{tgb}} \\ \\ 1 \\ \\ \dfrac{tgcsinA}{cosA - \dfrac{tgc}{tgb}} \end{array} \right. \tag{7}$$

3 Question 1

On va calculer les coordonnées du point H projection de A sur le plan OBC. Ecrivons l'équation de la droite passant par A de vecteur directeur $\boldsymbol{N}$, on obtient:

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 + t\alpha \\ y = 0 + t\beta \\ z = 1 + t\gamma \end{array} \right. \tag{8}$$

Soit $M = (x, y, z)^T$ un point du plan OBC, alors l'équation du plan OBC est:

$$\alpha.(x-0) + \beta(y-0) + \gamma(z-1) = 0 \Longrightarrow \tag{9}$$

$$\begin{aligned} -x\frac{sinA}{cosA - \frac{tgc}{tgb}} + y + z\frac{tgcsinA}{cosA - \frac{tgc}{tgb}} &= \frac{tgcsinA}{cosA - \frac{tgc}{tgb}} \Longrightarrow \\ -xsinA + y\left(cosA - \frac{tgc}{tgb}\right) + ztgcsinA &= cosA - \frac{tgc}{tgb} \end{aligned} \tag{10}$$

Pour obtenir les coordonnées de H, on remplace (13) dans (10), on obtient:

$$\begin{aligned} -t\alpha xsinA + t\left(cosA - \frac{tgc}{tgb}\right) + (1+t\gamma)tgcsinA &= cosA - \frac{tgc}{tgb} \\ t(-\alpha sinA + cosA - \frac{tgc}{tgb} + \gamma tgcsinA) &= cosA - \frac{tgc}{tgb} - tgcsina \end{aligned} \tag{11}$$

On obtient t:

$$t = \left(cosA - \frac{tgc}{tgb}\right).\frac{\left(cosA - \frac{tgc}{tgb} - tgcsina\right)}{1 + \frac{tg^2c}{tg^2b} - 2\frac{cosAtgc}{tgb} + tg^2csin^2A} \tag{12}$$

D'où les coordonnées de H:

$$H = \left| \begin{array}{l} x = 0 + t\alpha = \dfrac{\left(-sinacosA + \frac{tgcsina}{tgb} + tgcsin^2 a\right)}{1 + \dfrac{tg^2 c}{tg^2 b} - 2\dfrac{cosAtgc}{tgb} + tg^2 csin^2 A} \\ \\ y = 0 + t\beta = \left(cosA - \dfrac{tgc}{tgb}\right).\dfrac{\left(cosA - \frac{tgc}{tgb} - tgcsina\right)}{1 + \dfrac{tg^2 c}{tg^2 b} - 2\dfrac{cosAtgc}{tgb} + tg^2 csin^2 A} \\ \\ z = 1 + t\gamma = 1 + tgcsinA.\dfrac{\left(cosA - \frac{tgc}{tgb} - tgcsina\right)}{1 + \dfrac{tg^2 c}{tg^2 b} - 2\dfrac{cosAtgc}{tgb} + tg^2 csin^2 A} \end{array} \right. \tag{13}$$

Calculons les longueurs OB' et OC', on a :

$$||\boldsymbol{OB'}|| = \boldsymbol{OB}.\boldsymbol{OH} = t\alpha sinc + (1 + t\gamma)cosc \tag{14}$$

$$||\boldsymbol{OC'}|| = \boldsymbol{OC}.\boldsymbol{OH} = t\alpha sinbcosA + tsinbsinA + (1 + t\gamma)cosb \tag{15}$$

Utilisant les équations (4) et (5), on obtient:

$$||\boldsymbol{OB'}|| = cosc \tag{16}$$

$$||\boldsymbol{OC'}|| = cosb \tag{17}$$

On obtient alors les coordonnées de B' et C':

$$\boldsymbol{OB'} = ||\boldsymbol{OB'}|| \left| \begin{array}{l} sinc \\ 0 \\ cosc \end{array} \right. , \quad \boldsymbol{OC'} = ||\boldsymbol{OC'}|| \left| \begin{array}{l} sinbcosA \\ sinbsinA \\ cosb \end{array} \right. \tag{18}$$

Calculons les composantes de $\boldsymbol{AB'}$ et $\boldsymbol{AC'}$:

$$\boldsymbol{AB'} = \left| \begin{array}{l} coscsinc \\ 0 \\ -sin^2 c \end{array} \right. , \quad \boldsymbol{AC'} = \left| \begin{array}{l} cosb.sinb.cosA \\ cosb.sinb.sinA \\ -sin^2 b \end{array} \right. \tag{19}$$

Par suite:

$$||\boldsymbol{AB'}||^2 = cos^2 c.sin^2 c + sin^4 c = sin^2(c) \Longrightarrow \boxed{||\boldsymbol{AB'}|| = sinc} \tag{20}$$

$$||\boldsymbol{AC'}||^2 = sin^2 b.cos^2 b.cos^2 A + sin^2 b.cos^2 b.sin^2 A + sin^4 b = sin^2(b) \Longrightarrow \boxed{||\boldsymbol{AC'}|| = sinb} \tag{21}$$

4 Question 2

a) Calculons le produit scalaire:$\boldsymbol{AB}$'.$\boldsymbol{OB}$:

$$\boldsymbol{AB}'.\boldsymbol{OB} = (\boldsymbol{AH} + \boldsymbol{HB}').\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{AH}.\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{HB}'.\boldsymbol{OB} \tag{22}$$

Comme OB est dans le plan OBC, et AH est dans le plan orthogonal au plan OBC donc le produit scalaire $\boldsymbol{AH}.\boldsymbol{OB} = 0$. Pour $\boldsymbol{HB}'.\boldsymbol{OB}$, on a B' c'est la projection de H sur OB, d'où $\boldsymbol{HB}'.\boldsymbol{OB} = 0$. Par suite AB' est orthogonal à OB donc à OB', et HB' orthogonal à OB' donc $\widehat{AB'H}$ c'est l'angle dièdre entre les plans OBA et OBC donc $\widehat{AB'H} = \hat{B}$.

b)- On a $\boldsymbol{AH}^2 = \boldsymbol{AH}.\boldsymbol{AH} = (\boldsymbol{AB}' + \boldsymbol{B'H}).\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{AB}'.\boldsymbol{AH} + \boldsymbol{B'H}.\boldsymbol{AH}$ or $\boldsymbol{B'H}.\boldsymbol{AH} = 0$ car le vecteur $\boldsymbol{AH}$ est perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{B'H}$. Il reste: $\boldsymbol{AH}.\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{AB}'.\boldsymbol{AH}$. Le triangle $AB'H$ est rectangle en H, donc l'angle $\widehat{B'AH} = \pi/2 - B$, d'où:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AH}.\boldsymbol{AH} = ||\boldsymbol{AH}||^2 = ||\boldsymbol{AB}'||.||\boldsymbol{AH}||.cos(\pi/2 - B) \Longrightarrow \\ ||\boldsymbol{AH}|| = ||\boldsymbol{AB}'||sinB = sinc.sinB\end{aligned} \tag{23}$$

5 Question 3

De la même manière, on trouve:

$$||\boldsymbol{AH}|| = ||\boldsymbol{AC}'||sinC = sinb.sinC \tag{24}$$

6 Question 4

Par suite, on retrouve donc la formule des sinus:

$$sinc.sinB = sinb.sinC \Longrightarrow \boxed{\frac{sinB}{sinb} = \frac{sinC}{sinc} = \frac{sinA}{sina}} \tag{25}$$

C.Q.F.D