Теория геометрических преобразований, как векторных функций (The Theory of Geometric Transformations as a Vector of Functions)

Franz Hermann

Abstract

Данная работа являет собой новое направление в обширном геометрическом разделе, который носит название «Геометрические преобразования». Представление геометрического преобразования в виде векторной функции позволяет рассматривать некоторые вопросы, которые ранее здесь просто не могли бы даже возникнуть. Мы имеем ввиду прежде всего алгебру некоторых геометрических преобразований и формулы их композиций, которые позволяют построить новый математический аппарат в геометрии преобразований.

This work is a new direction in the extensive geometric section, which is called "Geometric transformations". The representation of a geometric transformation as a vector function allows us to consider some questions that previously could not even arise here. We mean first of all the algebra of certain geometric transformations and formulas of their compositions, which allow us to build a new mathematical apparatus in the geometry of transformations.

Франц Герман
franz.h-n@yandex.ru

Теория геометрических преобразований, как векторных функций.

1. Подобие второго рода. Гомотетия. Осевая симметрия.

Известно, что преобразование подобия второго рода (обозначим через $\boldsymbol{P}$) представляет собой коммутативную композицию осевой симметрии Σ_{ox} (относительно оси $\boldsymbol{OX}$) и гомотетии G_O^k, где $\boldsymbol{k}$ - коэффициент подобия.

Известно также, что преобразование $\boldsymbol{P}$ всегда имеет одну неподвижную точку и две, взаимно перпендикулярные неподвижные прямые [1], стр. 108.

Если в качестве осей декартовых координат выбрать неподвижные прямые преобразования подобия второго рода, то преобразование $\boldsymbol{P}$ можно представить в этих координатах как векторную функцию.

Покажем на примере, как можно построить такую систему координат, зная две точки образа и две точки праобраза преобразования подобия второго рода P_2 .

Пусть P_2 : $A \xrightarrow{P_2} A^*$, $B \xrightarrow{P_2} B^*$, где $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{2}$ (Рис. 1).

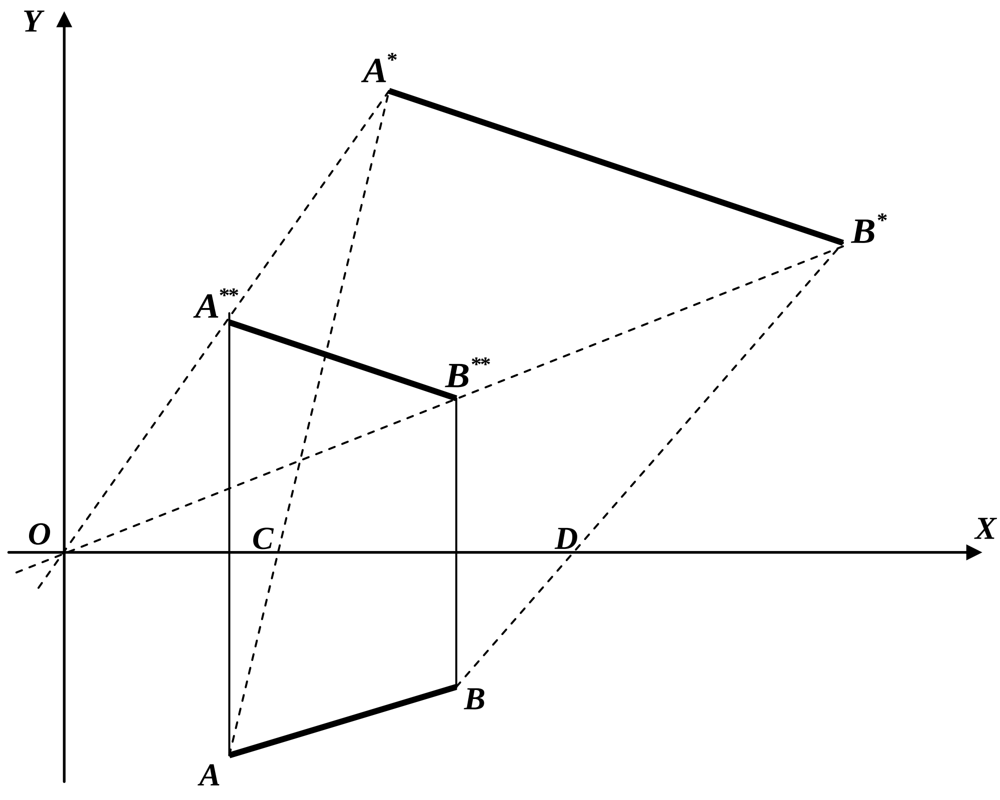

Рис. 1

Разделим отрезки AA^* и BB^* точками C и D соответственно, таким образом, что $A^*C = 2 \cdot CA$ и $B^*D = 2 \cdot DB$.

Прямая CD будет первой неподвижной прямой преобразования P_2 .

Далее построим отрезок $A^{**}B^{**}$, как образ отрезка AB при преобразовании осевой симметрии Σ_{CD}: $A \xrightarrow{\Sigma_{CD}} A^{**}, B \xrightarrow{\Sigma_{CD}} B^{**}$.

Точка $O \equiv A^*A^{**} \cap CD$ (или $O \equiv B^*B^{**} \cap CD$) бедет неподвижной точкой преобразования P_2 .

Примем за ось абсцисс -OX, искомой декартовой системы координат, прямую CD, тогда осью ординат -OY будет прямая, перпендикулярная прямой CD и проходящая через точку O.

Таким образом, мы построили инвариантную систему (ИС) декартовых координат преобразования P_2 .

Покажем, как можно в общем виде записать преобразование P_k в (ИС) координат в виде векторной функции.

Пусть P_k: $A \xrightarrow{P_k} A^*$, где $A(x_A; y_A)$, $A^*(x_A^*; y_A^*)$. Но с другой стороны $x_A^* = k \cdot x_A$, $y_A^* = -k \cdot y_A$ (в качестве наглядной иллюстрации здесь можно воспользоваться примером построения преобразования второго рода, показанного на Рис. 1).

Обозначим через $\overrightarrow{P_k}$ – векторную функцию преобразования P_k . Т. е. запись $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{P_k}$ будем считать равносильной записи P_k : $A \xrightarrow{P_k} A^*$. Тогда

$$\overrightarrow{P_k} = (x_A^* - x_A) \cdot \vec{i} + (y_A^* - y_A) \cdot \vec{j} = (k \cdot x_A - x_A) \cdot \vec{i} + (-k \cdot y_A - y_A) \cdot \vec{j} =$$

$$= (k-1)x_A \cdot \vec{i} - (k+1)y_A \cdot \vec{j}$$

Т. к. в качестве точки $A(x_A; y_A)$ была выбрана произвольная точка, то можем записать в общем виде:

$$\boxed{\overrightarrow{P_k} = (k-1)x \cdot \vec{i} - (k+1)y \cdot \vec{j}} \qquad (1)$$

Пример

Найти векторную функцию преобразования подобия второго рода P_2 и образ A^* для точки $A(2;-1)$ в инвариантной системе координат.

Обозначим начало (ИС) координат через точку O, тогда $\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j}$.

Векторная функция данного преобразования, согласно формуле (1), будет иметь вид:

$$\overrightarrow{P_2} = (2-1) \cdot 2 \cdot \vec{i} - (2+1) \cdot (-1) \cdot \vec{j} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{P_2} = 2\cdot\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\cdot\overrightarrow{i} + 3\cdot\overrightarrow{j} = 4\cdot\overrightarrow{i} + 2\cdot\overrightarrow{j}$$

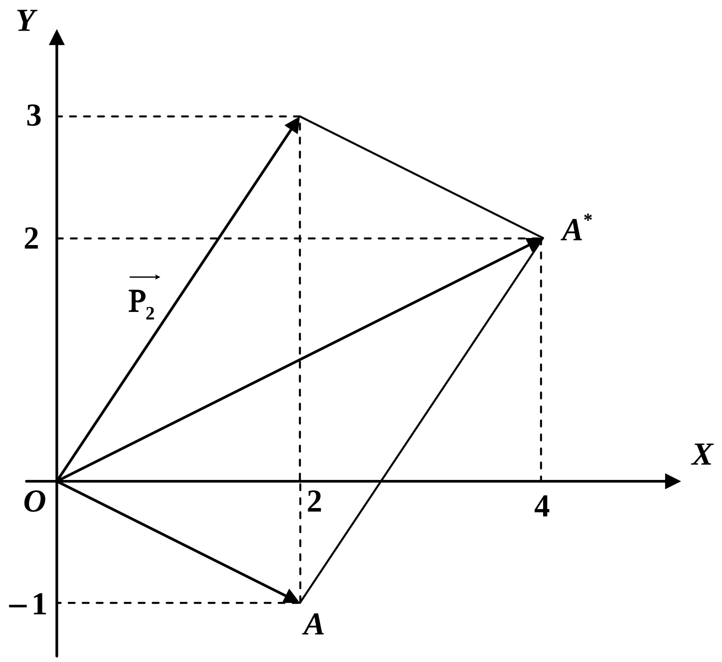

Рис. 2

В дальнейшем все преобразования будем рассматривать в инвариантной для всех $\overrightarrow{P_k}$ системе координат XOY.

Обозначим через G_O^k – преобразование гомотетии, относительно начала координат с коэффициентом подобия k (о преобразовании гомотетии см., например, [2], стр. 82).

Пусть $A(x,y) \xrightarrow{G_O^k} A^*(kx,ky)$, тогда

$$\overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{OA^*} - \overrightarrow{OA} = (kx - x)\cdot\overrightarrow{i} + (ky - y)\cdot\overrightarrow{j} = (k-1)\cdot\left(x\cdot\overrightarrow{i} + y\cdot\overrightarrow{j}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{G_O^k} = (k-1)\cdot\left(x\cdot\overrightarrow{i} + y\cdot\overrightarrow{j}\right)} \qquad (2)$$

Аналогично можно представить преобразование осевой симметрии Σ_{OX}, относительно оси OX в виде векторной функции $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$.

$$\boxed{\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = -2\cdot y\cdot\overrightarrow{j}} \qquad (3)$$

Теперь поговорим о композициях геометрических преобразований. Некоторые вопросы композиций хорошо представлены в [3], стр. 296-310.

Обозначим через ⊕ операцию композиции двух преобразований. Известно, что:

$$P_k \oplus \Sigma_{OX} \to G_O^k; \qquad \text{(a)}$$

$$G_O^k \oplus \Sigma_{OX} \to P_k; \qquad \text{(b)}$$

$$P_k \oplus G_O^n \to P_{kn}; \qquad \text{(c)}$$

$$P_k \oplus P_n \to G_O^{kn}; \qquad \text{(d)}$$

$$G_O^k \oplus G_O^n \to G_O^{kn}; \qquad \text{(e)}$$

$$\Sigma_{OX} \oplus \Sigma_{OX} \to T, \qquad \text{(f)}$$

где T - тождественное преобразование. Ему в соответствие поставим вектор $\overrightarrow{0}$.

Под векторной композицией двух преобразований будем представлять векторное сложение соответствующих векторных функций.

Выведем правила векторных композиций.

Запишем (a) в векторной форме:

$$\overrightarrow{G_O^k} = a \cdot \overrightarrow{P_k} + b \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}},$$

где a и b некоторые, пока неизвестные нам коэффициенты.

Найдём a и b, используя формулы (1), (2) и (3).

$$(k-1)\cdot\left(x\cdot\overrightarrow{i} + y\cdot\overrightarrow{j}\right) = a\cdot\left((k-1)\cdot x\cdot\overrightarrow{i} - (k+1)\cdot y\cdot\overrightarrow{j}\right) + b\cdot\left(-2\cdot y\cdot\overrightarrow{j}\right)$$

В силу этого равенства можем записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} k-1 = a\cdot(k-1) \\ k-1 = -a\cdot(k+1) - 2\cdot b \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу видим, что $a = 1$.

Из второго уравнения находим b:

$$k-1 = -k-1-2\cdot b; \qquad b = -k.$$

Получаем первое правило векторной композиции:

$$P_k \oplus \Sigma_{OX} \to G_O^k \Rightarrow \overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{P_k} - k\cdot\overrightarrow{\Sigma_{OX}}.$$

Найдём правило векторной композиции для (b).

$$\overrightarrow{P_k} = a \cdot \overrightarrow{G_O^k} + b \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Из предыдущего правила можно записать:

$$G_O^k \oplus \Sigma_{OX} \to P_k \Rightarrow \overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Найдём правило для (c).

$$\overrightarrow{P_k} = a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G_O^n}$$

или

$$(kn-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (kn+1)y \cdot \overrightarrow{j} = a\left((k-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (k+1)y \cdot \overrightarrow{j}\right) + b(n-1)\left(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}\right);$$

или в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} kn-1 = a(k-1) + b(n-1) \\ -kn-1 = -a(k+1) + b(n-1) \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим: $2kn = 2ak$, откуда $a = n$

Подставляя полученный результат во второе уравнение, находим $b = 1$. Таким образом:

$$P_k \oplus G_O^n \to P_{kn} \Rightarrow \overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^n}$$

Заметим, что $\overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^n} = k\overrightarrow{P_n} + \overrightarrow{G_O^k}$

Для (d) запишем:

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{P_n}\text{, или}$$

$$(kn-1)\left(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}\right) = a\left((k-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (k+1)y \cdot \overrightarrow{j}\right) + b\left((n-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (n+1)y \cdot \overrightarrow{j}\right)\text{, откуда:}$$

$$\begin{cases} kn-1 = a(k-1) + b(n-1) = ak - a + bn - b \\ kn-1 = -a(k+1) - b(n-1) = -ak - a - bn - b \end{cases}.$$

Сложем оба уравнения и разделим на 2, получим: $kn-1 = -(a+b)$. Теперь вычтем из первого уравнение второе, получим: $ak + bn = 0$.

$$\begin{cases} kn-1 = -(a+b) \\ ak + bn = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений находим ***a*** и ***b:***

$$a = \frac{n(kn-1)}{k-n}, \qquad b = \frac{k(kn-1)}{k-n}$$

Получаем следующее правило для композиции преобразований (d):

$$P_k \oplus P_n \to G_O^{kn} \Rightarrow \overrightarrow{G_O^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n}\right), \qquad k \neq n\,.$$

Запишем векторный вид композиции преобразований (e):

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{G_O^{k}} + b\overrightarrow{G_O^{n}}\,.$$

Используя предыдущее правило, можно записать:

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{G_O^{k}} + b\overrightarrow{G_O^{n}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n}\right) \qquad (4)$$

Ранее было найдено, что $\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^{k}} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$, $\overrightarrow{P_n} = \overrightarrow{G_O^{n}} + n\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$. Подставим эти выражения в (4), получим правило векторной операции для композиции преобразований (e):

$$G_O^k \oplus G_O^n \to G_O^{kn} \Rightarrow \overrightarrow{G_O^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{G_O^{k}} - k\overrightarrow{G_O^{n}}\right).$$

Для композиции (f), имеем очевидное правило:

$$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \vec{0}, \quad \text{где } a = -b,\ a \text{ – любое.}$$

Сведём все полученные формулы в таблицу.

Таблица 1

$G_O^k \oplus \Sigma_{OX} \to P_k$	$\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$		(I)
$P_k \oplus \Sigma_{OX} \to G_O^k$	$\overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{P_k} - k \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$		(II)
$P_k \oplus G_O^n \to P_{kn}$	$\overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^n}$		(III)
$G_O^k \oplus G_O^n \to G_O^{kn}$	$\overrightarrow{G_O^{kn}} = \dfrac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{G_O^k} - k\overrightarrow{G_O^n}\right)$	$k \neq n$	(IV)
$P_k \oplus P_n \to G_O^{kn}$	$\overrightarrow{G_O^{kn}} = \dfrac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n}\right)$	$k \neq n$	(V)
$\Sigma_{OX} \oplus \Sigma_{OX} \to T$	$\vec{\mathbf{0}}$		(VI)

2. Следствия векторных формул

***Следствие* 1.**

$$\overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \vec{0} \Rightarrow G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to T$$

Доказательство.

Заметим, что $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$. Действительно:

$$\overrightarrow{P_1} = (1-1)x \cdot \vec{i} - (1+1)y \cdot \vec{j} = -2y \cdot \vec{j} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Используя (III), можно записать: $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_{k\frac{1}{k}}} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ или $\overrightarrow{P_k} = k\overrightarrow{\Sigma_{OX}} - k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}}$. Зная же (I) - $\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ и складывая с предыдущим выражением, получаем: $\overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \vec{0}$. А это соответствует очевидному $G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to T$, т. е.

$$\overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \vec{0} \Rightarrow G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to T,$$

что и требовалось доказать.

***Следствие* 2**.

$$\frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}} \Rightarrow P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to \Sigma_{OX}$$

Доказательство:

Используя (II) и Следствие 1, можно записать: $\overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{P_k} - k \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ и $\overrightarrow{G_O^k} = -k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}}$. Откуда получаем: $k \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{P_k} + k\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}}$ или $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}}$. Зная известную композицию геометрических преобразований $P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to \Sigma_{OX}$, окончательно можем записать:

$$\frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^{\frac{1}{k}}} = \overrightarrow{\Sigma_{OX}} \Rightarrow P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \to \Sigma_{OX},$$

что и требовалось доказать.

***Следствие* 3.**

$$\overrightarrow{P_k} = \frac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{P_{kn}} + n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}}\right).$$

Доказательство:

Используя (III), запишем: $\overrightarrow{G_O^n} = \overrightarrow{P_{kn}} - n\overrightarrow{P_k}$. Подставляя сюда вместо n $\frac{1}{n}$, получаем: $\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{n}}} = \overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}} - \frac{1}{n}\overrightarrow{P_k}$ или $n\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{n}}} = n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}} - \overrightarrow{P_k}$. Но из Следствия 1 имеем: $\overrightarrow{G_O^n} + n\overrightarrow{G_O^{\frac{1}{n}}} = \vec{0}$. Таеким образом, можно записать:

$$\overrightarrow{P_{kn}} - n\overrightarrow{P_k} + n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}} - \overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_{kn}} + n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}} - (n+1)\overrightarrow{P_k} = \vec{0}.$$

Откуда получаем: $\overrightarrow{P_k} = \frac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{P_{kn}} + n\overrightarrow{P_{k\frac{1}{n}}}\right)$,

что и требовалось доказать.

А при $k = 1$ будем иметь: $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \frac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{P_n} + n\overrightarrow{P_{\frac{1}{n}}}\right)$.

***Следствие* 4.**

Очевидная композиция преобразований $P_k \oplus P_{\frac{1}{k}} \to T$ не имеет векторного аналога.

Доказательство:

Рассмотрим векторное выражение: $a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{P_{\frac{1}{k}}} = \vec{0}$. Ему соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} a(k-1) + b\left(\frac{1}{k} - 1\right) = 0 \\ a(k+1) + b\left(\frac{1}{k} + 1\right) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a(k-1) - \frac{b}{k}(k-1) = 0 \\ a(k+1) + \frac{b}{k}(k+1) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем: $a = \frac{b}{k}$, из второго: $a = -\frac{b}{k}$. Т. е. имеем явное противоречие. Из чего можно заключить, что композиция преобразований $P_k \oplus P_{\frac{1}{k}} \to T$ не имеет векторного аналога

***Следствие* 5**.

$$\overrightarrow{G_O^k} = \frac{k}{1+k}\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_{\frac{1}{k}}}\right)$$

Доказательство:

Из (I) и частного случая Следствия 3 соответственно имеем: $\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{G_O^k}$, $\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \frac{1}{k+1}\left(\overrightarrow{P_k} + k\overrightarrow{P_{\frac{1}{k}}}\right)$. Подставляя второе выражение в первое и приводя подобные члены, получаем искомый результат: $\overrightarrow{G_O^k} = \frac{k}{1+k}\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_{\frac{1}{k}}}\right)$.

3. Алгебра преобразований, векторных функций

Обозначим в целях упрощения векторную функцию $\overrightarrow{G_O^k}$ через $\overrightarrow{G_k}$, т. к. все преобразования $\vec{G}$ рассматириваются относительно точки $O(0,0)$ – начала координат.

Выведем правила, по которым можно производить операции сложения и вычитания между преобразованиями $\vec{G}$, $\vec{\Sigma}$, $\vec{P}$.

Теорема

Преобразования $\overrightarrow{G_0}$ и $\overrightarrow{P_0}$ переводят любую точку плоскости в начало координат.

Доказательство:

Пусть дана точка $A(x_0, y_0)$. Найдём для этой точки её образы $A \xrightarrow{\overrightarrow{G_0(A)}} A^*$ и $A \xrightarrow{\overrightarrow{P_0(A)}} A^*$. Данные преобразования (имеются в виду векторные функции) равны между собой. Действительно:

$$\overrightarrow{G_0(A)} = \overrightarrow{P_0(A)} = -x_0 \cdot \vec{i} - y_0 \cdot \vec{j} \text{ (см. Формулы (1) и (2))}$$

Вектор образа $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{G_0(A)} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} - x_0 \cdot \vec{i} - y_0 \cdot \vec{j} = \vec{0}$. Таким образом, преобразования $\overrightarrow{G_0}$ и $\overrightarrow{P_0}$ переводят любую точку плоскости в начало координат

Что и требовалось доказать.

Выведем следующие правила сложения преобразований и разложения преобразований на элементарные преобразования. Элементарными будем называть такие преобразования, у которых множители равны 1.

Например: $3\overrightarrow{P_2}$ - не элементарное преобразование, а $\overrightarrow{G_3}$ - элементарное.

Зная возможные композиции преобразований (a) – (f), выведем правила для векторных композиций.

Правила сложения

$$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G_n} = x\overrightarrow{P_y} \quad (5)$$

$$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = x\overrightarrow{G_y} \quad (6)$$

$$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = x\overrightarrow{P_y} \quad (7)$$

$$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{G_n} = x\overrightarrow{G_0} \quad (8)$$

Правила разложения на элементарные преобразования

$$a\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{G_y} \quad (9)$$

$$a\overrightarrow{G_k} = \overrightarrow{G_x} \qquad (10)$$

$$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{G_y} \qquad (11)$$

Вывод (5):

Выражение (5) можно представить в виде системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} ak - a + bn - b = xy - x \\ -ak - a + bn - b = -xy - x \end{cases}$$

Решая данную систему, находим: $x = a + b - bn$, $y = \dfrac{ak}{a + b - bn}$. Таким образом, получаем правило сложения:

$$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G_n} = (a + b - bn)\overrightarrow{P_{\frac{ak}{a+b-bn}}}, \text{ где } a + b \neq bn. \qquad (5^*)$$

Вывод (6):

Из $a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = x\overrightarrow{G_y}$ следует система уравнений:

$$\begin{cases} ak - a = xy - x \\ -ak - a - 2b = -xy - x \end{cases},$$

решая которую, находим: $x = a + b$, $y = \dfrac{ak + b}{a + b}$. Т. е. получаем такое правило:

$$a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = (a + b)\overrightarrow{G_{\frac{ak+b}{a+b}}}, \qquad (6^*)$$

где $a \neq -b$.

Вывод (7):

Аналогично предыдущему, из начальной формулы (7), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} ak - a = yx - x \\ ak - a - 2b = -xy - x \end{cases}.$$

И получаем следующие решения это системы: $x = a + b - ak$, $y = \dfrac{b}{a + b - ak}$.
Окончательно:

$$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = (a + b - ak)\overrightarrow{P_{\frac{b}{a+b-ak}}}, \qquad (7^*)$$

Вывод (8):

Исходной формуле $a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{G_n} = x\overrightarrow{G_0}$ соответствует равенство: $ak - a + bn - b = -x$. Т. е. получаем такое правило сложения:

$$a\overrightarrow{G_k} + b\overrightarrow{G_n} = (a + b - ak - bn)\overrightarrow{G_0}. \qquad (8^*)$$

Заметим, что не существует правила сложения, соответствующего композиции (d), т. к. в этом случае получаем противоречивую систему уравнений.

Приступим к выводу формул разложения на элементарные преобразования.

Вывод (9):

Выражению $a\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{G_y}$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} ak - a = x - 1 + y - 1 \\ -ak - a = -x - 1 + y - 1 \end{cases}.$$

Находим решения: $x = ak$, $y = 2 - a$. Получаем первое правило разложения:

$$a\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{P_{ak}} + \overrightarrow{G_{2-a}}. \qquad (9^*)$$

Не составляет труда вывести и остальные два правила разложения.

$$a\overrightarrow{G_k} = \overrightarrow{G_{a(k-1)+1}}. \qquad (10^*)$$

$$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \overrightarrow{P_a} + \overrightarrow{G_{2-a}}. \qquad (11^*)$$

Сведём полученные формулы в таблицу.

Таблица 2

$a\overrightarrow{P_k}+b\overrightarrow{G_n}=(a+b-bn)\overrightarrow{P_{\frac{ak}{a+b-bn}}}$	$a+b\neq bn$	(5*)
$a\overrightarrow{P_k}+b\overrightarrow{\Sigma_{OX}}=(a+b)\overrightarrow{G_{\frac{ak+b}{a+b}}}$	$a\neq -b$	(6*)
$a\overrightarrow{G_k}+b\overrightarrow{\Sigma_{OX}}=(a+b-ak)\overrightarrow{P_{\frac{b}{a+b-ak}}}$	$a+b\neq ak$	(7*)
$a\overrightarrow{G_k}+b\overrightarrow{G_n}=(a+b-ak-bn)\overrightarrow{G_0}$		(8*)
$a\overrightarrow{P_k}=\overrightarrow{P_{ak}}+\overrightarrow{G_{2-a}}$		(9*)
$a\overrightarrow{G_k}=\overrightarrow{G_{a(k-1)+1}}$		(10*)
$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}}=\overrightarrow{P_a}+\overrightarrow{G_{2-a}}$		(11*)

Сделаем небольшое замечание. Из (9*) и (11*) следует: $a\overrightarrow{\Sigma_{OX}}=\overrightarrow{P_a}+a\overrightarrow{P_k}-\overrightarrow{P_{ak}}$ или $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}=\frac{1}{a}\left(\overrightarrow{P_a}+a\overrightarrow{P_k}-\overrightarrow{P_{ak}}\right)$. Для $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ коэффициент подобия k не играет никакой роли, поэтому его можно выбирать произвольно. Например, при $k = 1$ получим $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}=\overrightarrow{P_1}$. А ранее мы действительно отмечали, что $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}=\overrightarrow{P_1}$.

4. Примеры задач

Пиведём примеры задач, при решении которых используются формулы (5*) – (11*).

***Пример* 1.**

Представить композицию преобразований, заданных векторными функциями $3\overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{\Sigma_{OX}}-2\overrightarrow{G_4}$ в виде элементарных преобразований.

Решение:

$$3\overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{\Sigma_{OX}}=(3+1)\overrightarrow{G_{\frac{3\cdot 2+1}{3+1}}}=4\overrightarrow{G_{\frac{7}{4}}}$$

Здесь мы воспользовались правилом (7*). Далее, используя формулу (8*), получаем:

$$4\overrightarrow{G_{\frac{7}{4}}}-2\overrightarrow{G_4}=(4+4-7+8)\overrightarrow{G_0}=9\overrightarrow{G_0}$$

Окончательно приходим к ответу используя формулу (10*)

$$9\overrightarrow{G_0}=\overrightarrow{G_{9(0-1)+1}}=\overrightarrow{G_{-8}}\text{, т. е.}$$

$$3\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{\Sigma_{OX}} - 2\overrightarrow{G_4} = \overrightarrow{G_{-8}}$$

***Пример* 2.**

Решить уравнение $4\overrightarrow{P_3} - 3\overrightarrow{G_2} - \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P_{12}}$ в элементарных преобразованиях.

Решение:

$$4\overrightarrow{P_3} - 3\overrightarrow{G_2} = (4-3+6)\overrightarrow{P_{\frac{12}{4-3+6}}} = 7\overrightarrow{P_{\frac{12}{7}}}\ ,$$

$$7\overrightarrow{P_{\frac{12}{7}}} = \overrightarrow{P_{12}} + \overrightarrow{G_{2-7}} = \overrightarrow{P_{12}} + \overrightarrow{G_{-5}}\ ,$$

$$\overrightarrow{P_{12}} + \overrightarrow{G_{-5}} - \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P_{12}}\text{, откуда } \overrightarrow{X} = \overrightarrow{G_{-5}}$$

В заключение заметим, что полученные результаты можно расширить новыми формулами, введя по аналогии с $\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$ преобразование $\overrightarrow{\Sigma_{OY}}$. Т. е. преобразование осевой симметрии относительно оси *OY*.

5. Литература

1. Г. И. Саранцев, «Сборник задач на геометрические преобразования», М., «Просвещение», 1981

2. П. С. Моденов, А. С. Пархоменко, «Геометрические преобразования», М., «Издательство Московского Университета», 1961

3. А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, «Геометрия», М., «Наука», 1990