Le corps des nombres q-adiques $\mathbf{Q}_q$

Antoine Balan

September 14, 2020

Abstract

En analogie avec le corps des nombres p-adiques, un corps de nombres est défini pour $q = p^n$.

1 Le corps des nombres p-adiques

Le corps des nombres p-adiques $\mathbf{Q}_p$ peut se définir comme le corps des fractions des entiers p-adiques $\mathbf{Z}_p$; ce dernier est défini comme la limite projective des anneaux $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$.

2 Le corps des nombres q-adiques

On considère un corps fini $\mathbf{F}_q$ avec $q = p^n$. Dès lors, on peut exprimer ce corps par :

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]/(P)$$

avec P un polynôme irréductible de degré n. On considère la limite projective :

$$\mathbf{Z}_P = \lim - proj_k\ \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]/(P^k)$$

Cette limite ne dépend pas du choix de P, en effet si on prend un autre polynôme irréductible Q, on a $\mathbf{Z}_P \cong \mathbf{Z}_Q$, pour le voir on considère l'isomorphisme :

$$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]/(P) \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]/(Q)$$

qui envoie a dans $a \circ R$, avec R un polynôme image de X. On peut constater que :

$$P \circ R = QS$$

avec S premier avec Q. En effet, si on avait $S = QT$, on pourrait dériver et comme P et P' sont premier, il faudrait que Q divise R' ce qui est impossible par le degré. On obtient l'isomorphisme en composant avec R. L'anneau obtenu est intègre et son quotient est le corps $\mathbf{Q}_q$.

3 Une généralisation

On peut considérer une généralisation en considérant deux corps $\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{F}_{q'}$ avec $q = p^n, q' = p^m$, et des quotients $\mathbf{F}_q[X]/(P^k)$. On obtient ainsi des corps $\mathbf{Q}_{qq'}$.