

## К вопросу о неперiodическом замощении плоскости

**Франц Герман**

franz.h-n@yandex.ru

### Аннотация

Как известно, вопрос о существовании фигуры, при помощи которой можно было бы замостить плоскость только неперiodическими мозаиками до сих пор остаётся открытым. В данной заметке мы хотим предложить вниманию читателя, построенную нами фигуру, при помощи которой, при определённых начальных условиях замощения, неперiodические мозаики строятся с намного большей вероятностью нежели перiodические. Насколько нам известно, данную фигуру пока ещё никто не использовал для построения неперiodических мозаик на плоскости. Забегая вперёд можно сказать, что данные замощения носят характер квазикристаллических мозаик. По нашему мнению, именно этот факт, может быть, будет наиболее интересен для многих читателей.

*Посвящаю Н. М.*

*«История аперiodических мозаик и их связь с математической логикой  
- одна из интереснейших, но ещё недописанных глав в науке о мозаиках»  
Б. Грюнбаум, Дж. Ч. Шепард)\**

### 1. Плашка для мозаики

Как известно, кристаллы обладают симметрией 2, 3, 4 и 6-го порядков. Живой природе присуща в основном симметрия 5-го порядка. Именно наличие этой симметрии и является своего рода защитой от кристаллизации живой природы. А т. к. неперiodичность мозаики как раз и является нарушением кристаллического порядка мы и отталкивались при поиске фигуры для неперiodического замощения плоскости именно от правильного пятиугольника.

Построенная нами фигура по своей сути является геометрической перестройкой правильного пятиугольника. Покажем подробно все этапы построения (перестройки).

Рассмотрим правильный пятиугольник (Рис. 1).

---

\*) [7], стр. 243

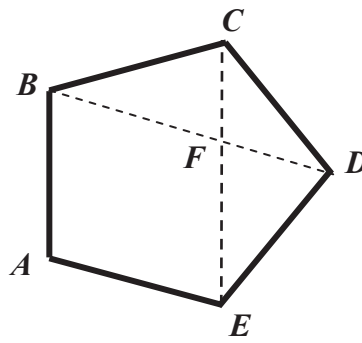


Рис. 1

**Перестройка 1:** параллельный перенос треугольника  $FBC$  на вектор  $\overrightarrow{CE}$  (Рис. 2)

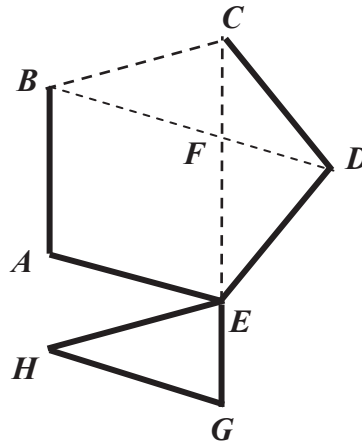


Рис. 2

**Перестройка 2:** поворот ромба  $EABF$  на угол в  $36^\circ$  против часовой стрелки вокруг точки  $E$  (Рис. 3)

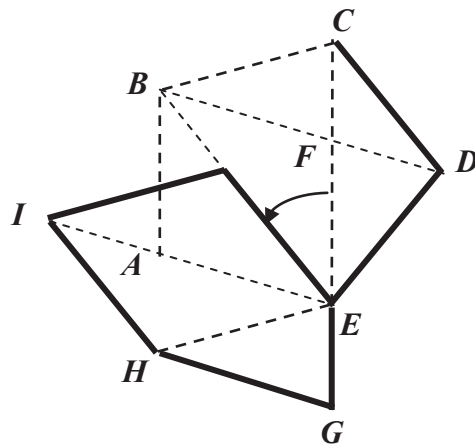


Рис. 3

**Перестройка 3:** зеркальное отражение треугольника  $CDE$  относительно стороны  $CE$  (Рис. 4)

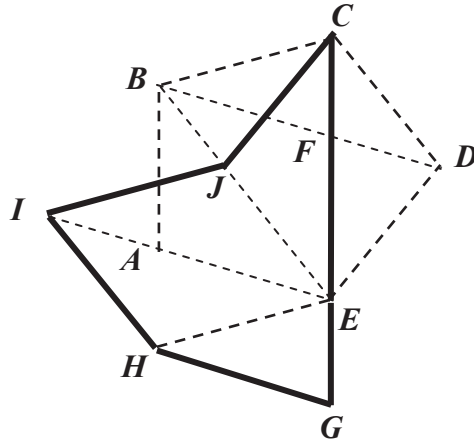


Рис. 4

Фигуру  $GHIJC$  назовём перестройкой правильного пятиугольника и будем обозначать:  $\Pi_5$ . Как видим, построенный пятиугольник имеет четыре одинаковых стороны и одну, существенно отличающуюся от предыдущих четырёх, по длине.

При использовании такой фигуры, для замощения плоскости и в силу предыдущих построений, очевидно, что большая сторона одной фигуры для построения будущих мозаик должна прилегать к большей стороне другой фигуры. А это существенное ограничение. Поэтому мы решили использовать для построения наших будущих мозаик фигуру, которая получается дополнением к фигуре  $\Pi_5$  зеркального её отражения, относительно стороны  $CG$  (Рис 5)

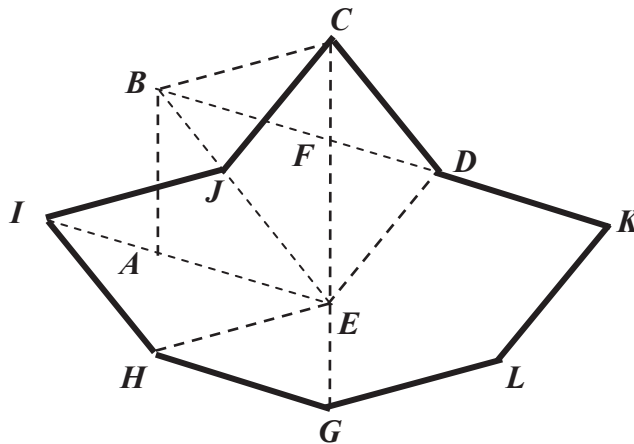


Рис. 5

Данную фигуру будем обозначать  $\Pi_8$ , т. к. она имеет 8 одинаковых сторон и, в общем-то, является перестройкой правильного восьмиугольника (мы не будем здесь заниматься перестройкой правильного восьмиугольника) и для сокращения обозначений в тексте будем называть её *клеткой мозаики* или просто *клеткой*.

Кстати будет сказать, что клетка является частью правильного 10-тиугольника.



Рис. 6

Если площадь правильного 10-тиугольника обозначить через  $S_{10}$ , а площадь фигуры  $\Pi_8$  - через  $F_8$ , то справедливо будет соотношение:

$$S_{10} = \sqrt{5} \cdot F_8 = 2\sqrt{5} \cdot S_5, \quad (1)$$

где  $S_5$  - площадь правильного пятиугольника, при условии, что стороны правильного пятиугольника и правильного 10-тиугольника равны.

В качестве одной из характеристик фигуры  $\Pi_8$  введём понятие *главного направления*. Главное направление задаётся вектором  $\vec{GC}$  (Рис. 5, Рис. 7).

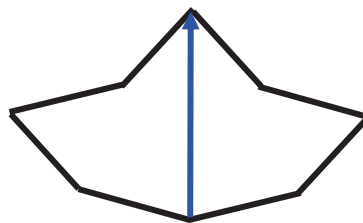


Рис. 7

Т. к. клетка является частью правильного 10-тиугольника, а также в силу её построения, она может иметь в мозаике 10 различных главных направлений.

Покажем примеры всех возможных **относительных главных направлений** относительно неподвижной исходной фигуры (Рис. 8 – Рис. 12)

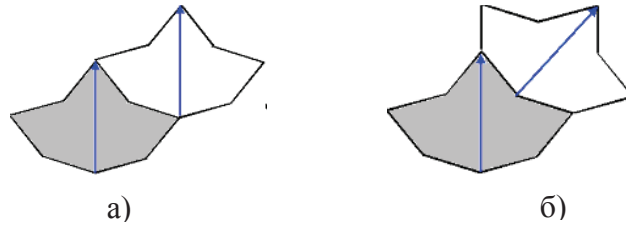


Рис. 8

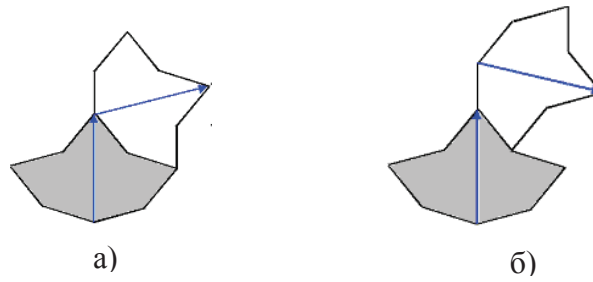


Рис. 9

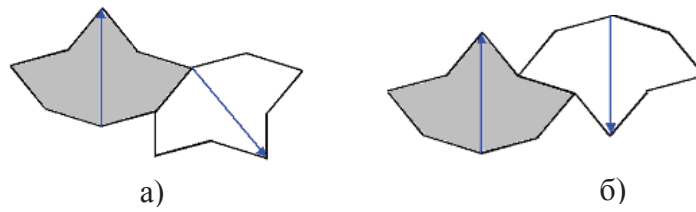


Рис. 10

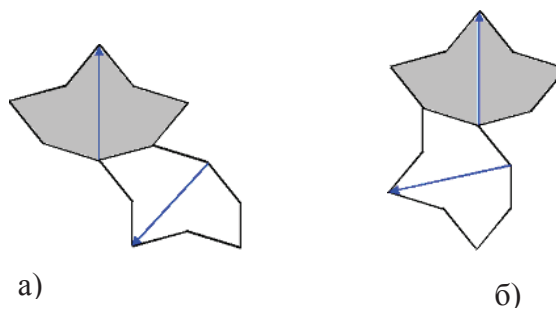


Рис. 11

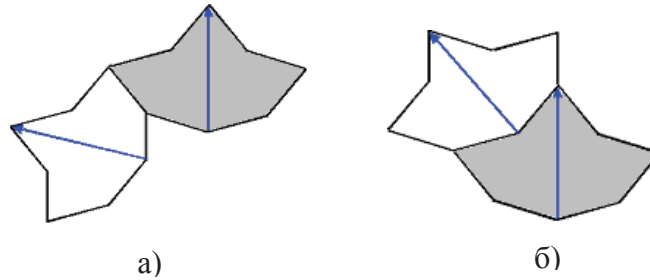


Рис. 12

На Рис. 8 – Рис. 12 положение одной из фигур фиксировано (эта фигура показана серым цветом). Относительное направление будем обозначать символом  $\delta_i$ . Относительное направление – это угловая мера между главными направлениями двух фигур в мозаике. Т. о. на Рис. 8 показаны два относительных направления  $\delta_0 = 0^\circ$  и  $\delta_1 = 36^\circ$ . На Рис. 9 – Рис. 12 показаны соответственно относительные направления  $\delta_2 = 72^\circ$ ,  $\delta_3 = 108^\circ$ ,  $\delta_4 = 144^\circ$ ,  $\delta_5 = 180^\circ$ ,  $\delta_6 = 216^\circ$ ,  $\delta_7 = 252^\circ$ ,  $\delta_8 = 288^\circ$ ,  $\delta_9 = 324^\circ$ .

Очевидно, общая формула для относительного направления в наших обозначениях имеет вид:

$$\delta_i = i \cdot \frac{\pi}{5} \quad (2)$$

Введём понятие сопряжённого относительного направления. Для этого понятия введём обозначение  $\delta_j^*$ . Тогда для относительного направления  $\delta_i$  сопряжённым относительным направлением будет  $\delta_j^*$ , где  $i + j = 10$ .

Очевидно, что множество  $\delta_i$  и множество  $\delta_j^*$  образуют циклические группы 10-го порядка. Бинарной операцией для такой группы будет композиция относительных направлений (т. е композиция вращений):  $\delta_i \circ \delta_j = \delta_k$ , где  $k \equiv (i + j) \pmod{10}$ . Аналогично будем иметь и для сопряжённой группы:  $\delta_i^* \circ \delta_j^* = \delta_k^*$ .

Кроме того, наша клетка, как геометрическая фигура, имеет 20 диагоналей, которые можно разделить на 7 типов относительно их длин. Диагонали будем обозначать через  $d_i$ . Самая короткая по длине диагональ  $d_1$ , самая длинная -  $d_7$ .

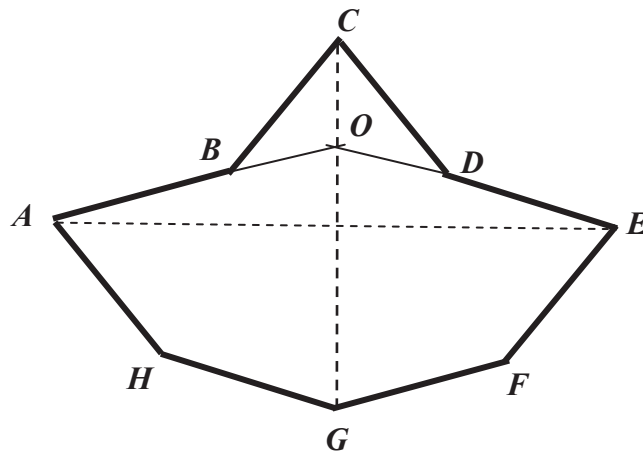


Рис. 13

Диагонали  $d_1$  -  $(BD, DF, BH)$ ,  $d_2$  -  $(BG, GD)$ ,  $d_3$  -  $(EG, DH, FH, FB, AG, CE, CA)$ ,  $d_4$  -  $(HC, AD, BE, CF)$ ,  $d_5$  -  $(CG)$ ,  $d_6$  -  $(HE, AF)$ ,  $d_7$  -  $(AE)$ .

Диагонали  $d_5$  и  $d_7$  можно использовать в качестве локальных ортогональных координат клетки.

Длины диагоналей вычисляются по формулам:

$$d_1 = a\sqrt{3-\varphi}, \quad d_2 = a\sqrt{4-\varphi},$$

$$d_3 = a\sqrt{5-\varphi}, \quad d_4 = a\sqrt{6-\varphi},$$

$$d_5 = a\varphi(3-\varphi), \quad d_6 = a\varphi^2, \quad d_7 = a\varphi\sqrt{5-\varphi}.$$

Из этих формул можно получить несколько очевидных зависимостей:

$$d_2^2 - d_1^2 = d_3^2 - d_2^2 = d_4^2 - d_3^2 = a^2, \quad (3)$$

$$d_1 d_6 = a, \quad (4)$$

$$\frac{d_7}{d_3} = \varphi, \quad (5)$$

$$\frac{d_5 d_6}{d_1} = \varphi^3, \quad (6)$$

где  $a$  – длина стороны нашей клетки,  $\varphi$  - «золотое сечение».

Точка  $O \equiv AB \cap DE$  - является центром описанной окружности правильного 10-тиугольника, частью которго является наша клетка. Точки  $A, H, G, F, E$  принадлежат этой окружности.

## 2. Алгоритмы замощения

Теперь рассмотрим несколько алгоритмов построения неперiodических мозаик при помощи построенной фигуры.

Термин «алгоритм», мы используем здесь, конечно же, не в полном смысле этого слова. Известно, что неперiodические замощения плоскости относятся как раз к неалгоритмическим задачам (см., например [11]). Под «алгоритмом» мы будем понимать некоторые начальные условия для построения мозаик.

### **Алгоритм 1: Выбор случайных относительных направлений.**

1). Первая клетка случайным образом укладывается на плоскости. Главное направление этой клетки будем называть *главным направлением будущей мозаики*.

2). Используя таблицу случайных чисел выбираем несколько относительных направлений  $\delta_i$ . Выбор  $\delta_i$  производится относительно главного направления мозаики. Здесь каждому  $\delta_k$  соответствует цифра  $k$  в таблице случайных чисел.

**Гипотеза 1: Мозаика всегда будет неперiodической если она содержит более 3-х различных направлений  $\delta_i$ .**

3) Использование таблицы случайных чисел прекращается после выбора не менее 4-х различных  $\delta_i$ .

4) Из выбранных клеток, соответствующих различным  $\delta_i$ , произвольным образом строится *ядро мозаики*. Ядром мозаики будем называть несколько выбранных случайным образом клеток, примыкающих друг к другу сторонами.

**Гипотеза 2: Произвольно построенная мозаика вокруг взятого ядра мозаики всегда будет неперiodической.**

Покажем пример мозаики, построенной по данному алгоритму (Рис.14).



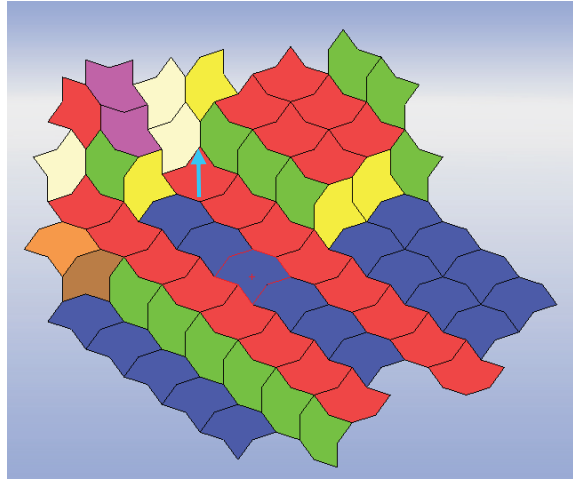


Рис. 14

На Рис. 14 показана мозаика, где разным цветом окрашены клетки, имеющие разные главные направления.

Надо отметить, что построение мозаик случайным способом по Алгоритму 1 может приводить к невозможности построения всей мозаики. Но мы предполагаем что, всегда существует возможность возврата на два-три шага назад, чтобы избежать тупикового развития построения.

На Рис. 15 приведён фрагмент одной из возможных таблиц случайных чисел.

76520	13586	34673	54876	80959	09117
64894	74296	24805	24037	20636	10402
19645	09303	23209	02560	15953	34764
09376	70715	38311	31165	88676	74397
80157	36147	64032	36653	98951	16877
34072	76850	36697	36170	65813	39885
45571	82406	35303	42614	86799	07439
02051	65692	68665	74818	73053	85247
05325	47048	90553	57548	28468	28709
03529	64778	35808	34282	60935	20344
14905	68607	22109	40558	60970	93433
39808	27732	50725	68248	29405	24201
06288	98083	13746	70078	18475	40610
86507	58401	36766	67951	90364	76493
87517	64969	91826	08928	93785	61368

Рис. 15

Рассмотрим комбинацию из трёх клеток (Рис. 16).

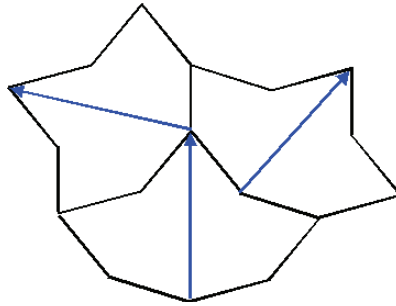


Рис. 16

Фигуру, показанную на Рис. 16, будем называть «**Стандартным Ядром**» или сокращённо – **SC** (аббревиатура от соответствующих английских слов).

**Гипотеза 3:** *Если ядром мозаики является фигура SC, то построенная вокруг такого ядра мозаика всегда будет неперiodической.*

#### **Алгоритм 2: Использование стандартного ядра.**

- 1). В качестве ядра мозаики выбираем фигуру **SC**.
- 2). Дальнейшее построение мозаики осуществляется произвольно.

Покажем несколько примеров подобных мозаик.

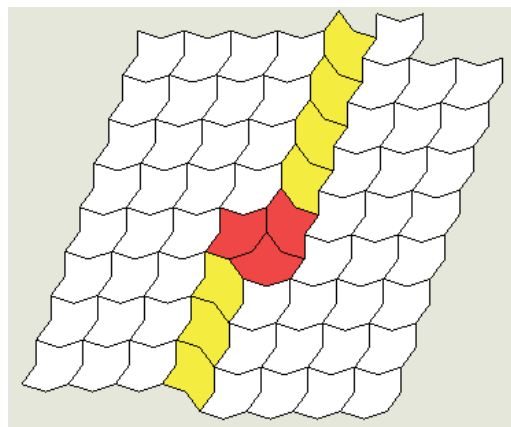


Рис. 17

На Рис. 17 показана простейшая из неперiodических мозаик, использующая для построения «Стандартное Ядро».

Очевидно, что фигура **SC** может быть размещена в подобной мозаике случайным образом неограниченное число раз.

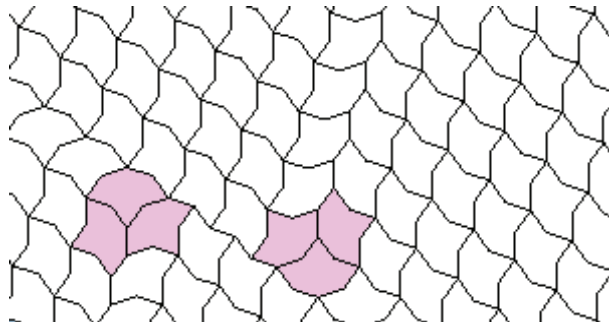


Рис. 18

Приведём примеры других мозаик, ядром мозаики для которых является фигура  $SC$ .

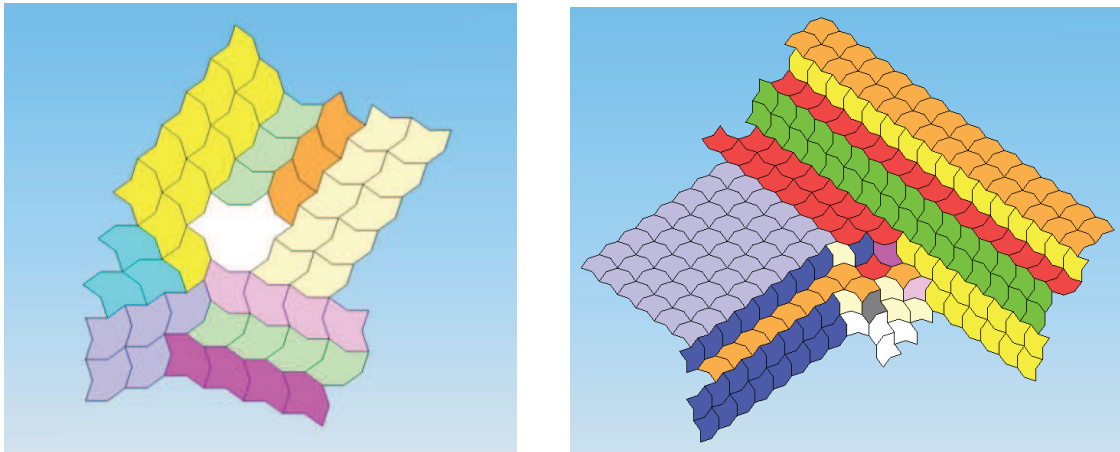


Рис. 19

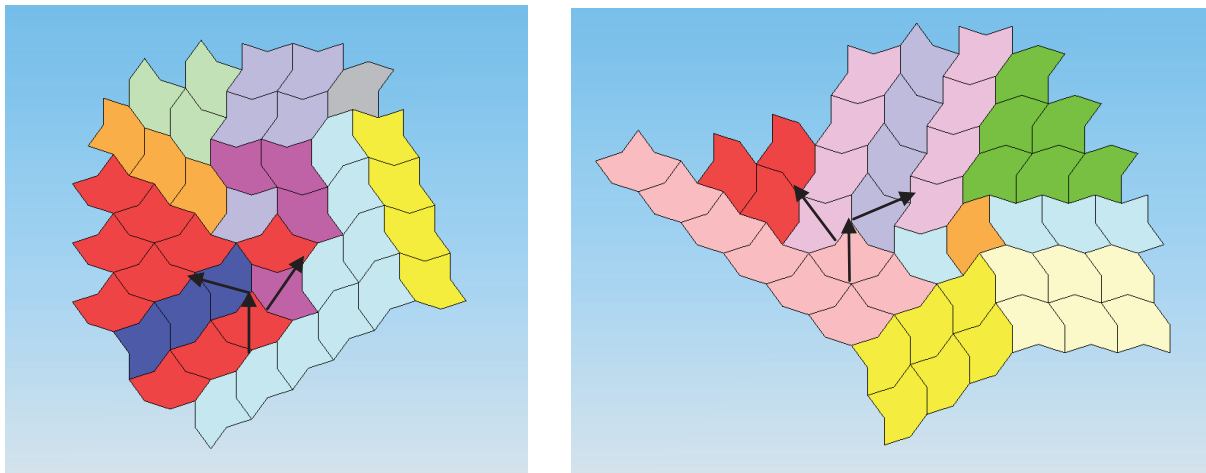


Рис. 20

На Рис. 18 – Рис. 20 клетки разных относительных направлений показаны разным цветом.

Надо отметить, что при помощи нашей клетки можно также строить мозаику, обладающую поворотной симметрией пятого порядка. Пример одной из таких мозаик показан на Рис. 21.

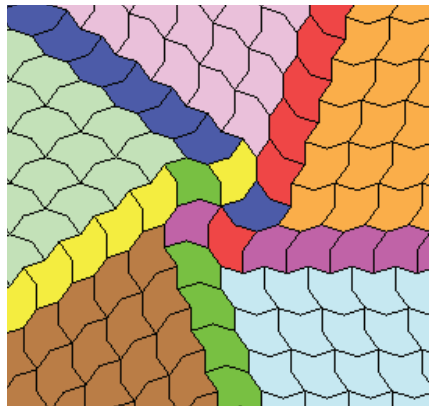


Рис. 21

Для тех, кто заинтересуется дальнейшими самостоятельными исследованиями мозаик, построенных при помощи фигуры  $\Pi_8$ , надо сказать, что фигура  $SC$  допускает внутреннюю перестройку (Рис. 22). Внутренняя перестройка показана пунктирными линиями. По сути внутренняя перестройка и является залогом неперiodичности, т. к. она не зависит от внешней мозаики. Как бы симметрично ни была построена мозаика внутренняя перестройка  $SC$  всегда делает её неперiodической.

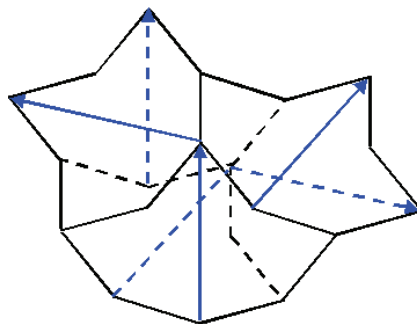


Рис. 22

Две клетки в мозаике будем называть соседними, если они имеют хотя бы одну общую сторону. На Рис. 23 приведён пример мозаики, в которой есть клетки с максимальным и минимальным количеством соседей.

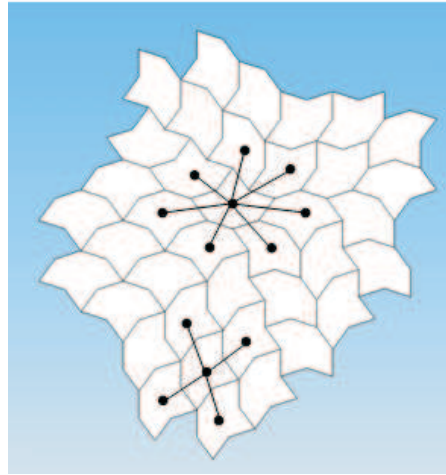


Рис. 23

**Гипотеза 4:** *Если одной из клеток в ядре мозаики является клетка с числом соседей равным 7-ми, то мозаика, построенная на основе этого ядра всегда будет неперiodической.*

**Алгоритм 3:** **Использование групповых свойств относительных направлений.**

1. Для ядра мозаики выбираются две произвольно соседствующие клетки с различными относительными направлениями (например  $\delta_0$  и  $\delta_1$ ).

2. Третья клетка имеет относительное направление равное композиции двух первых:  $\delta_0 \circ \delta_1 = \delta_1$  и произвольно прикрепляется к нашему ядру.

3. Аналогично выбираются четвёртая и пятая клетки, для которых относительные направления будут, соответственно:  $\delta_1 \circ \delta_1 = \delta_2$  и  $\delta_1 \circ \delta_2 = \delta_3$ .

**Гипотеза 5:** *При таком построении ядра, мозаика всегда будет неперiodической.*

Пример такой мозаики показан на Рис. 24

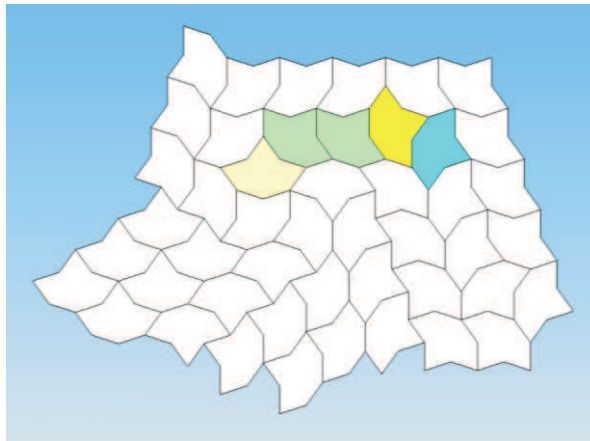


Рис. 24

Можно предложить огромное количество алгоритмов построения ядра мозаики. Например алгоритм, запрещающий иметь в ядре параллельные относительные направления и др. Мы не будем здесь этим заниматься. Ниже приводятся примеры неперидических мозаик, построенных на подобных алгоритмах.



Рис. 25

### 3. Модели кристаллических решёток и неперидические мозаики

Как известно [14], идеальной симметрии в природе не существует. Даже, казалось бы, идеальные кристаллические решётки в основной своей массе не выдерживают дальнего порядка.

Мы приведём здесь несколько моделей таких решёток, взятых из различной литературы. Как нам представляется, мозаики, построенные при помощи нашей клетки, могут быть неплохими иллюстрациями для подобных решёток.

Как было сказано, кристаллическая решётка не выдерживает симметрию дальнего порядка. Кристаллическая природа таких кристаллов носит блочный характер Рис. 26 ([14], Рис. 33, стр.71).

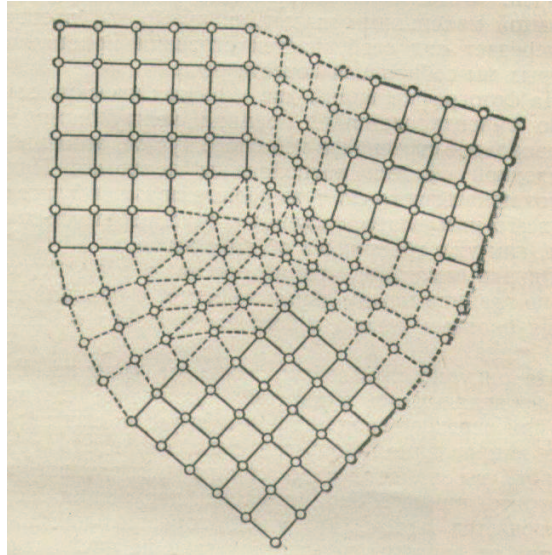


Рис. 26

Мозаики, представленные на Рис. 27, как нам кажется, неплохо иллюстрируют блочную модель кристаллической решётки. Здесь мы нанесли на нашу мозаику сетку, соединяя центры тяжести соседних клеток отрезками прямых. Напоминаем, что клетки называются соседними, если у них есть хотя бы одна общая сторона.

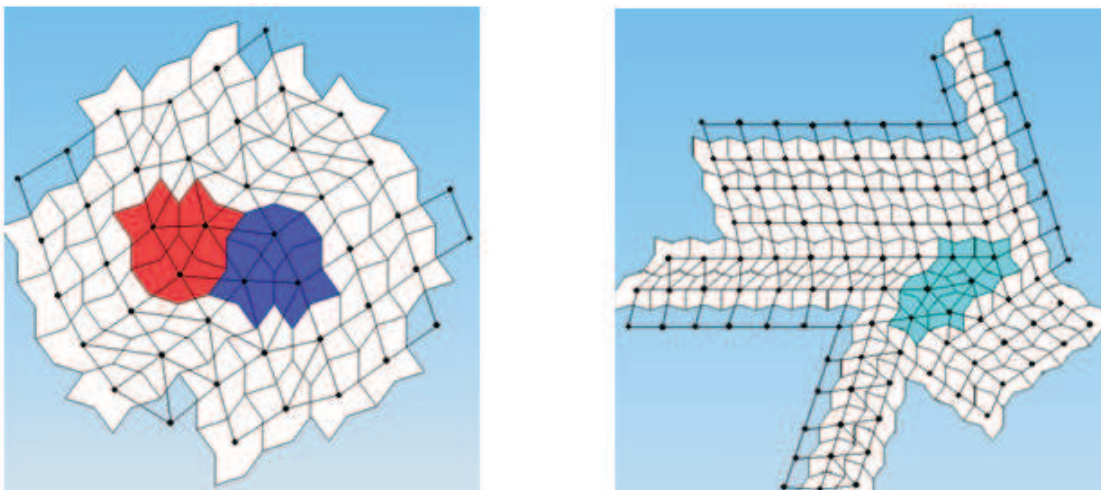


Рис. 27

Как видим, полная триангуляция присутствует в основном только в ядре мозаики, как и на сетке Рис. 26.

Очевидно, что мозаики, показанные на Рис. 27, могут быть продолжены на всю плоскость.

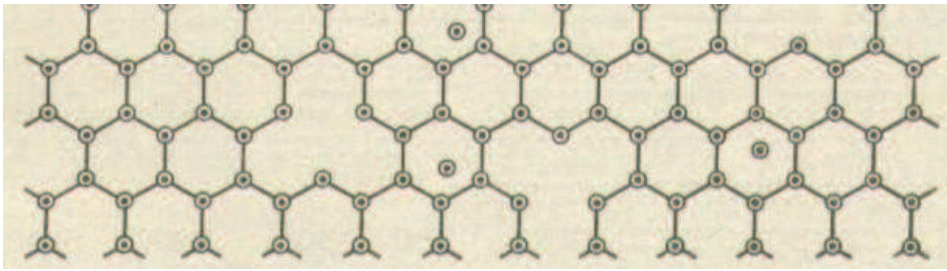


Рис. 28

На Рис. 28 (фрагмент Фиг 1. [1], стр.133), показана изменённая схема решётки кристалла графита после столкновения с нейтроном. Мы видим несколько объединённых по трое гесононалиных колец, что делает всю решётку неперидической.



Рис. 29

Примерно похожую картину мы наблюдаем и в мозаике, показанной на Рис. 29. Здесь для построения неперидической картины использовалась фигура  $SC$ .

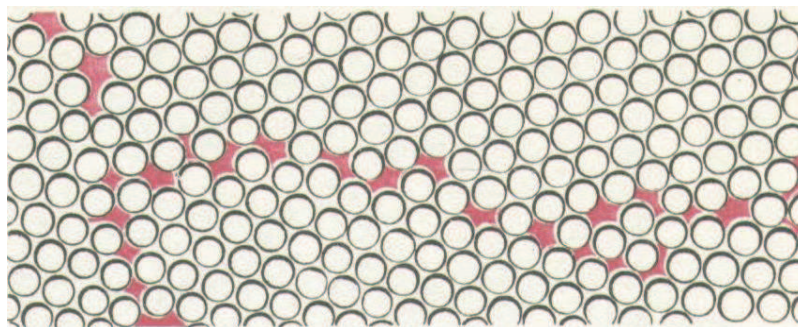


Рис. 30

Для иллюстрации нарушения кристаллического порядка проводился эксперимент ([9], стр. 80). Брался ящик, на дне которого были рассыпаны металлические шарики. После встряхивания исследовалась картина упаковки шариками дна ящика. Почти всегда наблюдалась картина с дефектами, характерными для неперидической мозаики (Рис. 30).



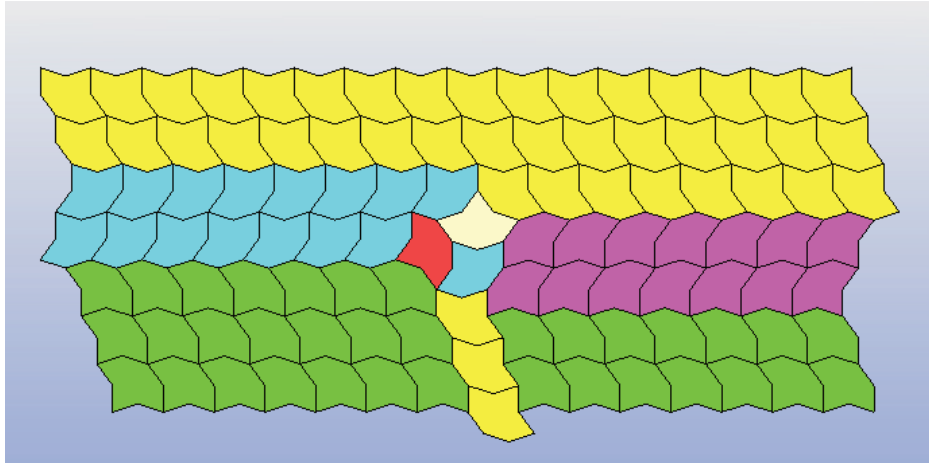


Рис. 31

На Рис. 31 показана неперiodическая мозаика, схематично похожая на ту, что показана на Рис. 30. Как видим, здесь опять присутствует ядро мозаики в виде фигуры  $SC$  (разным цветом показаны клетки, имеющие разные главные направления).

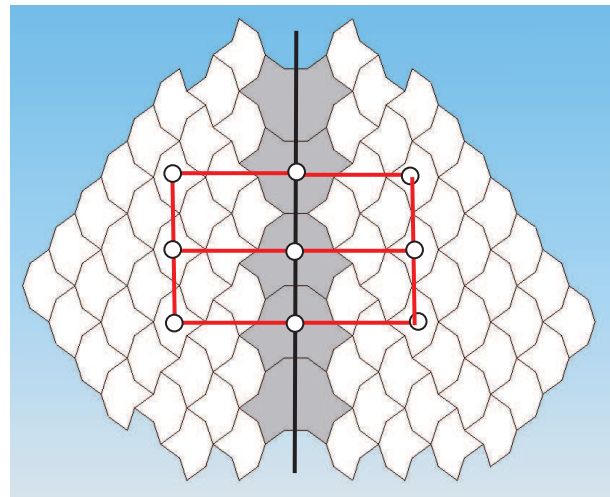
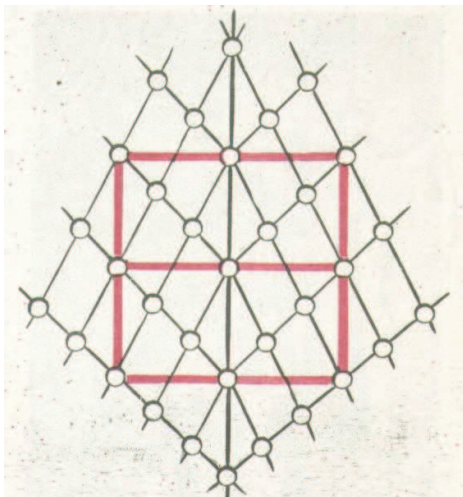


Рис. 32

На Рис. 32 (слева, [9], стр. 79), показана схема сращивания двух кристаллических структур в одну. На этом же рисунке (справа) показано сращивание двух неперiodических мозаик, построенных при помощи нашей клетки замощения. Причём, в зависимости от того как будут располагаться клетки внутри «серых» фигур  $SC$ , общая мозаика может быть центрально-симметричной, зеркально-симметричной или вообще не иметь никакой симметрии.

**Гипотеза 6:** *Каким бы не было ядро неперiodической мозаики, построенной при помощи нашей клетки, с расширением на всю плоскость происходит выравнивание по направлениям сторон правильного 5-тиугольника.*



Рис. 33

Для интереса покажем две мозаики разные по сути, но похожие друг на друга, как «родственники», Рис. 34

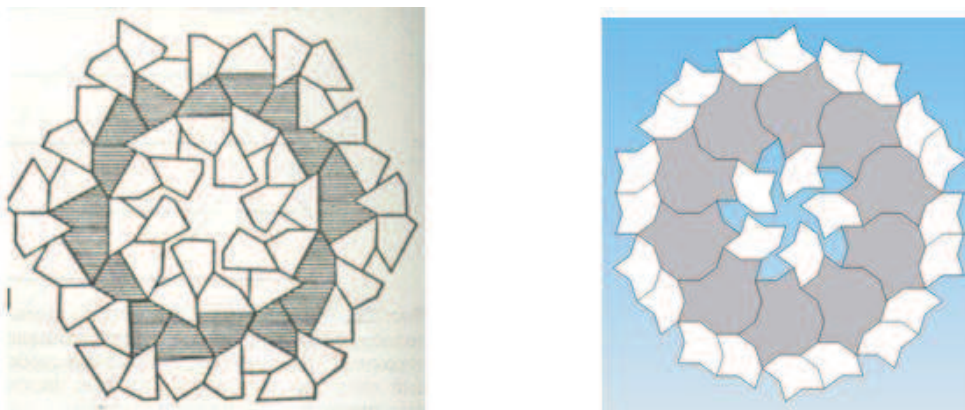


Рис. 34

На Рис. 34 (слева) показан фрагмент известной мозаики Хееша ([7], стр. 242). Этот орнамент имеет симметрию 6-го порядка, «колесо» справа на Рис. 34 имеет симметрию 5-го порядка. Надо заметить, что орнамент Хееша не имеет возможности расширения. Наше же «колесо» при расширении замощает центрально-симметрично всю плоскость.

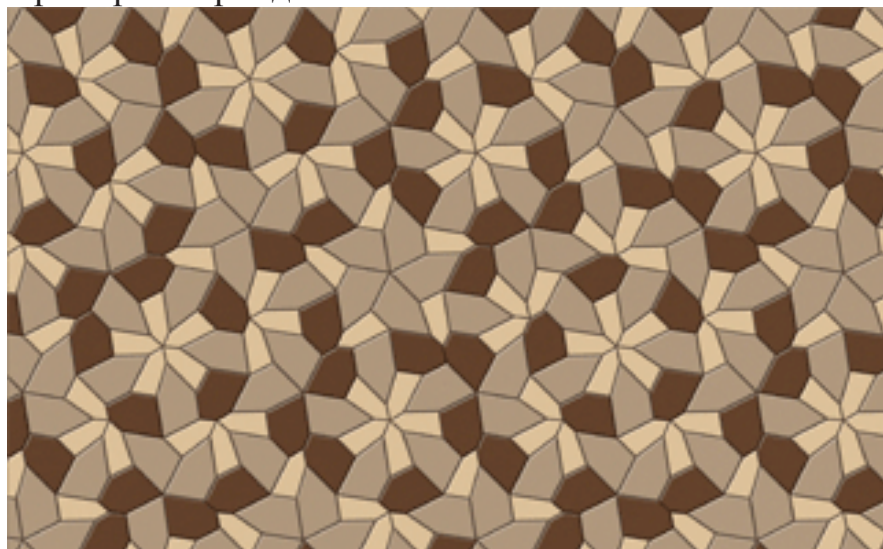
И в заключение данной заметки мы выражаем благодарность Людмиле Шишковой за проявленный интерес и терпение при построении всех цветных иллюстраций примеров наших мозаик.

## Литература

1. Е. Вигнер, «Этюды о симметрии», М., «МИР», 1971
2. Г. Вейль, «Симметрия», М., «НАУКА», 1968
3. Д. Пидоу, «Геометрия и искусство», М., «МИР», 1979
4. К. Левитин, «Геометрическая рапсодия», М., «Знание», 1976
5. А. Сонин, «Постижение совершенства», М., «Знание», 1987
6. М. Сенешаль, Дж. Флек, «Узоры симметрии», М., «МИР», 1980
7. Д. Кланер, «Математический цветник», М., «МИР», 1979
8. М. Гарднер, «Путешествие во времени», М., «МИР», 1990
9. В. Гильде, «Зеркальный мир», М., «МИР», 1982
10. М. Гарднер, «От мозаик Пенроуза к надёжным шрифтам», М., «МИР», 1993
11. Р. Пенроуз, «Тени разума», М., «МИР», 1994
12. Р. Пенроуз, «Новый ум короля», М., «МИР»,
13. Е. Хаеckel, „Kunstformen der Natur“, München-New York, „Prestel“, 1998
14. А. Китайгородский, «Порядок и беспорядок в мире атомов», М., «НАУКА», 1977

## Приложение

Пример неперiodической мозаики Р. Амманна



Пример неперiodической мозаики Р. Пенроуза

