УДК 517.574 : 517.576 : 517.550.4 : 517.547.2 : 517.518.244

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ВНЕ МАЛЫХ МНОЖЕСТВ

Б.Н. Хабибуллин

Аннотация. Доказано, что выпуклые функции на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и субгармонические функции на $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, конечного порядка, ограниченные сверху вне некоторого множества нулевой относительной лебеговой плотности, ограничены сверху всюду соответственно на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^m$. Отсюда следует, что субгармонические на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, целые и плюрисубгармонические на $\mathbb{C}^n$, а также выпуклые или гармонические функции на $\mathbb{R}^m$ конечного порядка, ограниченные сверху вне некоторого множества нулевой относительной лебеговой плотности, постоянны.

Ключевые слова: целая функция, субгармоническая функция, плюрисубгармоническая функция, выпуклая функция, гармоническая функция, функция конечного порядка, теорема Лиувилля

MSC 2010: 32A15, 30D20, 31C10, 31B05, 31A05, 26B25, 26A51

Основа нашей заметки — классическая для *целых,* т. е. голоморфных на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ или на $\mathbb{C}^n$, где $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, функций

Теорема Лиувилля. *Если целая функция ограничена, то она постоянна.*

Такое же заключение верно и для *ограниченных сверху* субгармонических функций на $\mathbb{C}$ [1, следствие 2.3.4] и, как очевидное следствие, плюрисубгармонических функций на $\mathbb{C}^n$, выпуклых функций на *вещественной прямой* $\mathbb{R}$ и, как мгновенное следствие, на $\mathbb{R}^m$ при $1 < m \in \mathbb{N}$, а также гармонических функций на $\mathbb{R}^m$ при любых $m \in \mathbb{N}$ [2, теорема 1.19].

Недавно в работе [3, лемма 4.2] была дана версия теоремы Лиувилля для целых функций *конечного порядка* на $\mathbb{C}$, ограниченных не всюду, а лишь вне некоторого малого множества $E \subset \mathbb{C}$. В [4, лемма 4.2] её доказательство откорректировано, а перед её формулировкой в [5, преамбула теоремы 2.1] отмечается, что установлена она А. А. Боричевым. Приведённые в [3] и [4] доказательства используют далеко не тривиальные факты и рассуждения теорий функций комплексного переменного.

Теорема B (([3, лемма 4.2], [4, лемма 4.2], [5, теорема 2.1]))**.** *Если целая функция конечного порядка на* $\mathbb{C}$ *ограничена вне множества* $E \subset \mathbb{C}$ *нулевой плоской плотности по плоской мере Лебега* λ *в том смысле, что определён предел*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\lambda\bigl(\{z \in E\colon |z| \le r\}\bigr)}{r^2} = 0, \tag{1}$$

Поступила 3 сентября 2020 г.

то эта функция постоянная.

Основные результаты настоящей статьи развивают и распространяют теорему В на плюрисубгармонические и целые функции на $\mathbb{C}^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а также на выпуклые и гармонические функции на $\mathbb{R}^m$. При этом наше доказательство и для случая целых функций одной комплексной переменной проще и построено на подходе, отличном от применявшегося в предшествующем доказательстве А.А. Боричева теоремы В. Это «одномерное» доказательство уже было представлено в краткой заметке [6] с описанием его перспектив.

Пусть функция M со значениями в *расширенной вещественной прямой* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ определена на положительной полуоси $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$, в $\mathbb{R}^m$ или в $\mathbb{C}^n$, отождествляемом с $\mathbb{R}^{2n}$, с евклидовой нормой $|\cdot|$, но, вообще говоря, вне некоторого замкнутого шара $\overline{B}(r)$ ограниченного радиуса $r \in \mathbb{R}^+$ с центром в нуле. *Порядок* функции M (около ∞) можно определить как

$$\operatorname{\mathsf{ord}}[f] := \limsup_{|x|\to\infty} \frac{\ln\bigl(1 + M^+(x)\bigr)}{\ln|x|} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \tag{2}$$

где $M^+ \colon x \mapsto \max\{0, M(x)\}$ — положительная часть функции M. Порядок целой функции f на $\mathbb{C}^n$ определяется как порядок $\operatorname{\mathsf{ord}}\bigl[\ln|f|\bigr]$ *плюрисубгармонической* функции $\ln|f|$.

Относительной лебеговой плотностью измеримого по мере Лебега λ на $\mathbb{R}^m$ подмножества $E \subset \mathbb{R}^m$ называем величину

$$\mathsf{L}_m(E) := \lim_{r\to+\infty} \frac{\lambda\bigl(E \cap B(r)\bigr)}{r^m}, \tag{3}$$

если предел существует. Определение очевидным образом переносится на $\mathbb{C}^n$, отождествлённое с $\mathbb{R}^{2n}$, как $\mathsf{L}_{2n}(E)$.

Основная теорема. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $E \subset \mathbb{R}^m$ — множество нулевой относительной лебеговой плотности $\mathsf{L}_m(E) = 0$ в $\mathbb{R}^m$. Если субгармоническая функция v конечного порядка на $\mathbb{R}^m$ ограничена сверху на $\mathbb{R}^m \setminus E$, то*

$$\sup_{\mathbb{R}^m} v = \sup_{\mathbb{R}^m\setminus E} v < +\infty. \tag{4}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция на $\mathbb{C}^n$ называется плюрисубгармонической, если её сужение на каждую комплексную прямую — субгармоническая. В частности, при $n = 1$ эти понятия — одно и то же, а каждая плюрисубгармоническая функция на $\mathbb{C}^n$ и субгармоническая на $\mathbb{R}^{2n}$. По нашей основной теореме из классических теорем Лиувилля для плюрисубгармонических и целых функций сразу следует

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $E \subset \mathbb{C}^n$ — множество нулевой относительной лебеговой плотности в $\mathbb{C}^n$ в смысле (3) на $\mathbb{R}^{2n}$, отождествлённом с $\mathbb{C}^n$, т. е. $\mathsf{L}_{2n}(E) = 0$. Если плюрисубгармоническая или целая функция конечного порядка на $\mathbb{C}^n$ ограничена сверху на $\mathbb{C}^n \setminus E$, то она постоянная.*

Субгармонические функции на $\mathbb{R}$ — это в точности выпуклые функции, а при $m \in \mathbb{N}$ каждая выпуклая или гармоническая функция субгармоническая. По нашей основной теореме из классических теорем Лиувилля для выпуклых или гармонических функций на $\mathbb{R}^m$ сразу следует

Теорема 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $E \subset \mathbb{R}^m$ — множество нулевой относительной лебеговой плотности в $\mathbb{R}^m$. Если выпуклая или гармоническая функция конечного порядка на $\mathbb{R}^m$ ограничена сверху на $\mathbb{R}^m \setminus E$, то она постоянная.*

Таким образом, достаточно доказать основную теорему, к чему и переходим.

Для $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $r \in \mathbb{R}^+$ через $\overline{B}(x,r) := \{x' \in \mathbb{R}^m \colon |x'-x| \leq r\}$ обозначаем *замкнутый шар* в $\mathbb{R}^m$ *радиуса r с центром x,* и, как и прежде, $\overline{B}(r) := \overline{B}(0,r)$. Аналогично для $\mathbb{C}^n$, отождествляемом с $\mathbb{R}^{2n}$. Для λ-интегрируемой функции $v \colon \overline{B}(x,r) \to \overline{\mathbb{R}}$ полагаем

$$\mathsf{B}_v(x,r) := \frac{1}{\lambda\bigl(\overline{B}(x,r)\bigr)} \int_{\overline{B}(x,r)} v \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{b_m r^m} \int_{\overline{B}(x,r)} v \, \mathrm{d}\lambda, \quad \mathsf{B}_v(r) := \mathsf{B}_v(0,r), \tag{5}$$

где b_m — *объём единичного шара.* Это соответственно *средние функции v по замкнутым шарам* $\overline{B}(x,r)$ и $\overline{B}(r)$. *Положительность* понимается как ≥ 0, *отрицательность* — это ≤ 0.

Предложение 1. *Пусть v — положительная λ-измеримая функция на замкнутом шаре $\overline{B}(R) \subset \mathbb{R}^m$, $0 < r < R$, и $x \in \overline{B}(r)$. Тогда*

$$\mathsf{B}_v(x, R-r) \leq \Bigl(1 + \frac{r}{R-r}\Bigr)^m \mathsf{B}_v(R). \tag{6}$$

Доказательство. По определению (5), в силу положительности v на $\overline{B}(R)$ и включений $\overline{B}(x,R-r) \subset \overline{B}(R)$ для всех $x \in \overline{B}(r)$ получаем

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_v(x,R-r) \overset{(5)}{=} \frac{1}{b_m(R-r)^m} \int_{\overline{B}(x,R-r)} v \, \mathrm{d}\lambda \leq \frac{1}{b_m(R-r)^m} \int_{\overline{B}(R)} v \, \mathrm{d}\lambda \\ = \frac{b_m R^m}{b_m (R-r)^m} \frac{1}{b_m R^m} \int_{\overline{B}(R)} v \, \mathrm{d}\lambda \overset{(5)}{=} \Bigl(1 + \frac{r}{R-r}\Bigr)^m \mathsf{B}_v(R),\end{aligned}$$

что и требовалось для (6). □

Через $\mathsf{sbh}(S)$ обозначаем класс всех *субгармонических* (*выпуклых* при $m = 1$) *функций* на каких-либо открытых окрестностях множества $S \subset \mathbb{R}^m$. Роль средних по шару из (5) для субгармонических функций обусловлена полностью характеризующим их, при условии полунепрерывности сверху и локальной интегрируемости по мере Лебега λ, неравенством о среднем по шару [1], [2]:

$$v(x) \leq \mathsf{B}_v(x,r) \quad \text{при } v \in \mathsf{sbh}\bigl(\overline{B}(x,r)\bigr). \tag{7}$$

Предложение 2. *Пусть v — субгармоническая функция на замкнутом шаре $\overline{B}(R)\subset\mathbb{R}^m$, $r\in(0,R)$ и $E\subset\overline{B}(r)$ — λ-измеримое множество. Тогда*

$$\int_E v\,\mathrm{d}\lambda\leq\Bigl(1+\frac{r}{R-r}\Bigr)^m\lambda(E)\mathsf{B}_{v^+}(R). \tag{8}$$

Доказательство. Из неравенства (7) о среднем по шару получаем

$$v(x)\leq\mathsf{B}_v(x,R-r)\leq\mathsf{B}_{v^+}(x,R-r)\quad\text{для каждой точки } x\in\overline{B}(r).$$

Интегрирование крайних частей этого неравенства по мере Лебега λ на множестве E даёт неравенство

$$\int_E v\,\mathrm{d}\lambda\leq\int_E\mathsf{B}_{v^+}(x,R-r)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Отсюда, по неравенству (6) предложения 1, применённому к подынтегральному выражению с положительной функцией v^+ в последнем интеграле, получаем

$$\int_E v\,\mathrm{d}\lambda\leq\int_E\Bigl(1+\frac{r}{R-r}\Bigr)^m\mathsf{B}_{v^+}(R)\,\mathrm{d}\lambda(x)=\Bigl(1+\frac{r}{R-r}\Bigr)^m\mathsf{B}_{v^+}(R)\lambda(E),$$

что и даёт (8). □

Основная лемма. *Пусть v — субгармоническая функция на шаре $\overline{B}(R)\subset\mathbb{R}^m$. Тогда для любого числа $r\in(0,R)$ и для любого λ-измеримого подмножества $E\subset\overline{B}(r)$ имеет место неравенство*

$$\mathsf{B}_v(r)\leq\frac{1}{b_mr^m}\int_{\overline{B}(r)\setminus E}v\,\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{b_m}\Bigl(1+\frac{r}{R-r}\Bigr)^m\frac{\lambda(E)}{r^m}\mathsf{B}_{v^+}(R). \tag{9}$$

Доказательство. По определению (5)

$$\mathsf{B}_v(r)=\frac{1}{b_mr^m}\int_{B(r)\setminus E}v\,\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{b_mr^m}\int_E v\,\mathrm{d}\lambda,$$

откуда по неравенству (8) предложения 2, применённому к последнему интегралу, получаем в точности требуемое (9). □

Доказательство основной теоремы. Положим

$$M:=\sup_{\mathbb{R}^m\setminus E}v\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

По условию ограниченности сверху на $\mathbb{R}^m\setminus E$ функции v можно рассмотреть субгармоническую функцию $v-M$, отрицательную на $\mathbb{R}^m\setminus E$. Применим теперь основную лемму при произвольных $0<r\in\mathbb{R}^+$ с $R=2r$ и с множеством-пересечением $E\cap\overline{B}(r)\subset\overline{B}(r)$ в роли множества E к субгармонической функции $(v-M)^+\geq 0$,

где первый интеграл в правой части (9) будет равен нулю, а в итоге получим

$$\mathsf{B}_{(v-M)^+}(r) \leq \frac{1}{b_m}\Bigl(1+\frac{r}{2r-r}\Bigr)^m \frac{\lambda\bigl(E\cap \overline{B}(r)\bigr)}{r^m}\mathsf{B}_{(v-M)^+}(2r)$$
$$= \frac{2^m}{b_m}\frac{\lambda\bigl(E\cap \overline{B}(r)\bigr)}{r^m}\mathsf{B}_{(v-M)^+}(2r) \quad \text{при всех } 0<r\in\mathbb{R}^+.$$

Отсюда по условию $\mathsf{L}_m(E) \overset{(3)}{=} 0$ для функции

$$r \underset{0<r\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \mathsf{B}_{(v-M)^+}(r)\in\mathbb{R}^+ \tag{11}$$

имеем

$$\mathsf{B}_{(v-M)^+}(r) = o\bigl(\mathsf{B}_{(v-M)^+}(2r)\bigr) \quad \text{при } r\to+\infty. \tag{12}$$

Функция (11) конечного порядка $\mathsf{ord}[\mathsf{B}_{(v-M)^+}]\in\mathbb{R}^+$, поскольку $\mathsf{ord}[(v-M)^+]\in\mathbb{R}^+$ ввиду конечности порядка $\mathsf{ord}[v]$. Следовательно, (12) возможно только в случае $\mathsf{B}_{(v-M)^+}\equiv 0$, и, как следствие $(v-M)^+\equiv 0$. Это вместе с (10) даёт (4). □

Замечание. Условие нулевой лебеговой плотности $\mathsf{L}_m(E)=0$ в основной теореме и в теореме 2, как и то же самое с $m:=2n$ в теореме 1, можно заменить на формально более слабое условие: *существует неограниченная последовательность положительных чисел $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$, для которой*

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{r_{k+1}}{r_k}<+\infty \quad \textit{и при этом} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda\bigl(E\cap B(r_k)\bigr)}{r_k^m}=0.$$

Формально, поскольку последнее влечёт за собой $\mathsf{L}_m(E)=0$.

Список литературы

[1] Th. Ransford *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[2] У. Хейман, П. Кеннеди *Субгармонические функции.* М.: Мир. 1980.

[3] A. Baranov, Yu. Belov, A. Borichev *Summability properties of Gabor expansions* // J. Funct. Anal. **274**:9, 2532–2552 (2018).

[4] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev *Summability properties of Gabor expansions,* Version 2, Dec. 5, 2018, https://arxiv.org/abs/1706.05685v2

[5] A. Aleman, A. Baranov, Y. Belov, H. Hedenmalm *Backward shift and nearly invariant subspaces of Fock-type spaces,* July 12, 2020, https://arxiv.org/abs/2007.06107

[6] Bulat N. Khabibullin To the Liouville theorem for entire functions of finite order, Aug 30, 2020, https://arxiv.org/abs/2009.01019

Булат Нурмиевич Хабибуллин

Башкирский государственный университет,г.Уфа, Башкортостан, Россия

Email address: `khabib-bulat@mail.ru`