The proof of the Riemann Hypothesis and the identification of non-trivial zeros (1/2 + ic) of the Zeta function of Riemann.

Dr. Aziz Arbai

August 1, 2020

Abstract

Nous proposons la démonstration de l'hypothèse de Riemann, ainsi nous exposons une infinité de nombres complexes (1/2) + ic qui sont les zéros (ayant pour partie réelle 1/2) de la fonction Zêta de Riemann, qui va aussi donnez la distribution et l'emplacement des nombres premiers.

Mots-clés: Nombres complexes, fonction Zeta de Riemann,

1 Introduction:

En mathématiques, l'hypothèse de Riemann est une conjecture formulée en 1859 par le mathématicien Bernhard Riemann, selon laquelle les zéros non triviaux et infinis de la fonction zêta de Riemann ont tous une partie réelle égale à 1/2.

Sa démonstration améliorerait la connaissance de la distribution des nombres premiers et ouvrirait de nouveaux domaines aux mathématiques.

Soit, $s = r + ic = \frac{1}{2} + ic$, $c \in IR$,

$$C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

$\Longrightarrow$

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

et

$$C_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s}$$

$$C_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}$$

donc

$$C = C_1 + C_2$$

$$S = C_1 - C_2$$

et

$$C_1 = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} C \quad (1)$$

$$C_2 = C - C_1 = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\right) C$$

avec

$$\alpha = -\ln(2)\, c$$

et

$|C_1|^2 = \frac{|C|^2}{2}$

$|C_2|^2 = \left|1 - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\right|^2 |C|^2$

$\Longrightarrow |C_2|^2 = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{2}}\right) |C|^2$

$$|C_2|^2 = \frac{1}{2}\left[3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right] |C|^2$$

la même chose pour S

$$S = C_1 - C_2 = \left(2\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} - 1\right) C$$

$\Longrightarrow |S|^2 = \left|2\frac{i\alpha}{\sqrt{2}} - 1\right|^2 |C|^2$

comme,

$\left|2\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} - 1\right|^2 = \left(2\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} - 1\right)\left(\overline{2\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} - 1}\right)$

$\left|2\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} - 1\right|^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\alpha} - 1\right)\left(\sqrt{2}e^{-i\alpha} - 1\right)$

$\left|2\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} - 1\right|^2 = 3 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha)$

$\Longrightarrow$

$$|S|^2 = \left(3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right) |C|^2$$

Donc

$$|S|^2 = \frac{|C_2|^2}{2} \quad \text{and} \quad |C_1|^2 = \frac{|C|^2}{2}$$

2 Demonstration:

On à S converge toujours (d'après le critère de convergence de séries alternées).
La même chose pour C_1 et C_2.

Résonnant par l'absurde.

Supposant donc $C \neq 0$:

$C_2 = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\right) C$, $C \neq 0$ et $1 - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \neq 0\ \forall \alpha \Longrightarrow \exists \beta \in IR\ /$

$$C_2 = re^{i\beta} C \quad (2)$$

$\Longrightarrow 1 - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} = re^{i\beta}$ et $r^2 = \frac{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$
$\Longrightarrow e^{i\alpha} = \sqrt{2}\left(1 - re^{i\beta}\right)$
$\Longrightarrow 1 = 2\left[1 + r^2 - 2r\cos(\beta)\right]$
$\Longrightarrow \cos(\beta) = \frac{r^2+\frac{1}{2}}{2r}$
$\Longrightarrow$

$$\cos(\beta) = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}{r} \qquad (3)$$

Soit maintenant $\alpha \in IR\ /\ tg(\alpha) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}}$
on a $3 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha) \succ 0\ \forall \alpha$ (puisque $\cos\alpha \leq 1 \prec \frac{3}{2\sqrt{2}}$)
Comme la fonction Tangente est définit sur $IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ et périodique de période π, on va travailler sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
De plus $tg(\alpha) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}} \succ 0 \Longrightarrow \alpha \succ 0$, d'où l'étude sera faite sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$..
Si non (c'est à dire $\alpha \prec 0$) il suffit de remarquer que $tg(-\alpha) = -tg(\alpha) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}\cos(-\alpha)}{2}}$.

Lemma 1 $\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$tg(\alpha) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}} \Longleftrightarrow 2\sqrt{2}\cos^3\alpha - 5\cos^2\alpha + 2 = 0$.

Proof. $tg(\alpha) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}}$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{3-2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$\Longleftrightarrow \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{3-2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}$
$\Longleftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{5-2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}$
$\Longleftrightarrow 2 = \cos^2(\alpha) \times \left[5 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha)\right]$
$\Longleftrightarrow 2\sqrt{2}\cos^3\alpha - 5\cos^2\alpha + 2 = 0$ ■

Lemma 2 *La fonction f tel que*

$$f(x) = 2\sqrt{2}x^3 - 5x^2 + 2$$

admet deux racines (x telque $f(x) = 0$) sur $[-1, 1]$ x_1 et x_2.

Proof. $f'(x) = 6\sqrt{2}x^2 - 10x = \left(6\sqrt{2}x - 10\right)x$
$f'(x) = 2x\left(3\sqrt{2}x - 5\right)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{5\sqrt{2}}{6}$

$$\left|\begin{array}{lccccccccccc} & -1 & & 0 & 0 & & & 1 & 1 & \frac{5\sqrt{2}}{6} & \frac{5\sqrt{2}}{6} & \\ f' & & + & & & & - & & & - & & + \\ \zeta_f & -\left(2\sqrt{2}+3\right) & \nearrow & 2 & 2 & \searrow & -\left(3-2\sqrt{2}\right) & & & \searrow & & \nearrow \end{array}\right|$$

$f(-1) \times f(0) = -\left(2\sqrt{2} + 3\right) \times 2 \prec 0 \Longrightarrow \exists x_1 \in]-1, 0[\ / \ f(x_1) = 0$
idem sur $]0, 1[$
$f(0) \times f(1) = 2 \times \left[-\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right] \prec 0 \Longrightarrow \exists x_2 \in]0, 1[\ / \ f(x_2) = 0$ ■

Remark 3 $x_1 \cdot x_2 \prec 0$.

Lemma 4 $\exists\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *($\cos\alpha \in]0, 1[$) tel que* $2\sqrt{2}\cos^3\alpha - 5\cos^2\alpha + 2 = 0$.

Proof. D'après Lemma d'avant. ■

Remark 5 *Donc,*

$$\exists\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } tg(\alpha) = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}}$$

Soit maintenant le triangle ABC formé par $(C, C_1, -C_2)$, c'est à dire $C_1 = C - C_2$, tel que

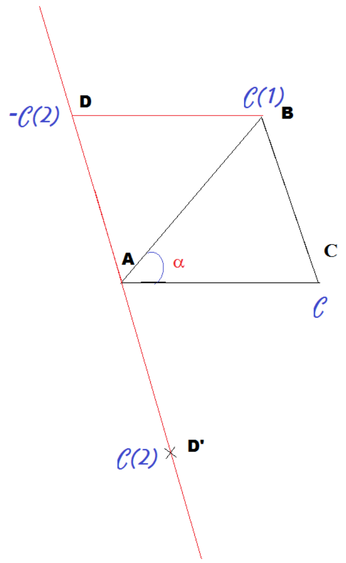
$AB = |C_1|$, $BC = |-C_2| = |C_2|$ $(= AD)$ et $CA = |C|$, D et $D\prime$ tel que $AD = |-C_2|$ et $AD' = |C_2|$ ($D\prime$ et la symétrie du point D par rapport à A qui est le centre)

On a $tg(\alpha) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}\cos(\alpha)}{2}} = r = \frac{|C_2|}{|C|} = \frac{BC}{CA}$ d'aprés (2) $C_2 = re^{i\beta}C$

et $\begin{cases} \alpha = \widehat{BAC} & \text{car (1) } C_1 = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}C \\ \beta = \widehat{D'AC} & \text{car (2) } C_2 = re^{i\beta}C \end{cases}$

$tg(\alpha) = \frac{BC}{CA} \Longrightarrow ABC$ est un triangle rectangle au point C donc $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{2}$(Démonstration par la réciproque du théorème de *Thalès*)

$ABCD$ est un parallélogramme donc $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAD}$ sont supplémentaires
$\widehat{BCA} + \widehat{CAD} = \pi$



$\widehat{BCA} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \widehat{CAD} = \frac{\pi}{2}$

Or $D\prime$ et la symétrie du point D par rapport à $A \Longrightarrow \widehat{CAD} + \widehat{CAD'} = \pi$ (puisque $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CAD'}$ sont suplémentaires)

donc $\widehat{CAD} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \widehat{CAD'} = \frac{\pi}{2}$

D'autre part $AD' = |C_2|$, $AC = |C|$ et $C_2 = re^{i\beta}C \quad (2) \Longrightarrow \beta = \widehat{CAD'}$

$\Longrightarrow \beta = \widehat{CAD'} = \frac{\pi}{2}$

et comme $C_2 = re^{i\beta}C$

alors

$$C_2 = irC$$

$\beta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$

$$\cos\beta = 0 \quad (4)$$

or, d'après (3) on a

$$\cos(\beta) = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}{r}$$

$\Longrightarrow \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}{r} = 0$ (d'après (4))

$\Longrightarrow \cos\alpha = \sqrt{2}$

absurde car $\cos\alpha \leq 1 \prec \sqrt{2} \Longrightarrow \cos\alpha \neq \sqrt{2}\ \forall\alpha$

Conclusion:

$C = 0$ pour $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$

Lemma 6 $\forall\alpha = \alpha_l + 2k\pi \ l \in \{1, 2\} \ k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} S = C_1 = C_2 = C = 0 \\ |S| = |C_1| = |C_2| = |C| = 0 \end{cases}$$

3 Conclusion:

Pour $s = \frac{1}{2} + ic$ tel que $c = -\left(\alpha_l + 2k\pi\right)\frac{1}{\ln(2)}$ $k \in \mathbb{Z}$ (ce qui donne une infinité de zéros pour C ou S) et $\cos\left(\alpha_l\right)$ solution de l'équation $2\sqrt{2}x^3 - 5x^2 + 2 = 0$, nous avons

$$C\left(s\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = S\left(s\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{n^s} = 0 \quad .$$

Ou d'une autre manière

$$\forall l \in \{1, 2\} \ \ , \forall k \in \mathbb{Z} \ \ C\left(\frac{1}{2} - i\frac{\alpha_l + 2k\pi}{\ln\left(2\right)}\right) = 0\cdot$$