MAJORIZATION IN THE FRAMEWORK OF 2–CONVEX SYSTEMS

GEORGE PRECUPESCU

Abstract. We define a 2-convex system by the restrictions $x_1+x_2+\ldots+x_n=ns$, $e(x_1)+e(x_2)+\ldots+e(x_n)=nk$, $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ where $e:I\to\mathbb{R}$ it's a strictly convex function. We study the compacity/connexity of A_S (the solution's set) and also the variation intervals for x_k. Next we define a majorization relation on A_S by $x\preccurlyeq_p y \overset{def}{\Leftrightarrow} L_k(x)\le L_k(y)\ \ \forall 1\le k\le p-1$ and $R_k(x)\le R_k(y)\ \ \forall p+2\le k\le n$ (for fixed $1\le p\le n-1$) where $L_k(x)=x_1+\ldots+x_k$, $R_k(x)=x_k+\ldots+x_n$. The following Karamata type theorem is given: if $x,y\in A_S$ and $x\preccurlyeq_p y$ then $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\le f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_n)\ \ \forall f:I\to\mathbb{R}$ 3-convex relatively to e. As a consequence, we obtain a more general version for the equal variable method of V. Cartoaje.

1. Introducere. Principalele rezultate, definitii si notatii

DEFINITION 1. Fie I un interval real. O functie continua strict convexa $e:I\to\mathbb{R}$ se numeste *acceptabila* daca ea *nu* mai poate fi prelungita prin continuitate pe $\overline{I}$

Daca $\alpha=\inf(I)\in\overline{\mathbb{R}}$, $\beta=\sup(I)\in\overline{\mathbb{R}}$ deducem ca daca I este deschis in α atunci fie α este $-\infty$, fie α e finit dar $\lim_{x\to\alpha}e(x)$ este $+\infty$ (similar pentru capatul β).

In prima parte a articolului vom studia sisteme de forma:

$$(S):\begin{cases}x_1+x_2+\ldots+x_n=ns\\ e(x_1)+e(x_2)+\ldots+e(x_n)=nk\\ x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\end{cases}$$

unde $n\ge 3$, $e:I\to\mathbb{R}$ este o functie continua strict convexa *acceptabila* iar s,k sunt constante reale cu $s\in\mathring{I}$. Vom denumi un asemenea sistem *2-convex* (sau, mai simplu, *S-sistem)* si vom folosi pentru el notatia $S(e,s,k,n)$.

Pentru intervalul $I=I_S$ vom nota in general cu $\alpha=\inf(I_S),\beta=\sup(I_S)$ iar multimea solutiilor sistemului cu A_S. Sistemul se va numi nevid daca $A_S\neq\varnothing$. Un sistem S nevid se numeste trivial daca A_S are exact un singur element. Din convexitatea lui e vom deduce ca o conditie necesara ca $A_S\neq\emptyset$ este ca $e(s)\le k$ iar daca $e(s)=k$ atunci (S) este trivial caci in acest ultim caz $A_S=\{(s,s\ldots,s)\}$.

Vom demonstra in cadrul articolului ca multimea A_S este *compacta* si *conexa*.

Un rol important in studiul acestor sisteme il vor juca asa numitii *p-invarianti*.

DEFINITION 2. Fie $S(e,s,k,n)$ un S-sistem si $1\le p\le n-1$. Spunem ca (S) admite invarianti de ordin p daca sistemul

$$\begin{cases}px+(n-p)y=ns\\ pe(x)+(n-p)e(y)=nk\\ x\le y\end{cases}$$

este nevid

O asemenea solutie (a_p, b_p) daca exista este unica si este evident ca $(a_p|b_p)_S \stackrel{\text{def}}{=} (a_p, \dots a_p, b_p, \dots b_p) \in A_S$. Daca un sistem S admite invarianti pentru fiecare $1 \le p \le n-1$ vom spune ca este *complet*, caz in care vom considera intervalele

$$I_p := \begin{cases} [a_1, a_{n-1}] & \text{if } p = 1, \\ [a_p, b_{p-1}] & \text{if } 1 < p < n, \\ [b_1, b_{n-1}] & \text{if } p = n \end{cases}$$

Vom arata ca orice sistem $S(e, s, k, n)$ pentru care I_S este deschis este complet iar I_P este exact multimea valorilor posibile ale componentei x_p $(x \in A_S)$.

Este in particular important sa punem in evidenta "polii" sistemului S. Se arata ca exista un unic tuplu ω_L (numit polul stang) pentru care se realizeaza minimul lui x_n respectiv un unic tuplu ω_R (polul drept) pentru care se realizeaza maximul lui x_1 .

Mai precis, $\omega_L = (a_1|b_1)_S$ (daca S are 1-invarianti) respectiv $\omega_R = (a_{n-1}|b_{n-1})_S$ daca S are (n-1)-invarianti dar, in general, ω_L si ω_R au forma

$$\begin{cases} \omega_L = (\overbrace{\alpha, \dots \alpha}^{r \ge 0}, a, b \dots b) \\ \omega_R = (a, \dots a, b, \underbrace{\beta \dots \beta}_{r \ge 0}) \end{cases}$$

unde $\alpha = \inf(I_S), \beta = \sup(I_S)$

In cazul in care e este strict concava vorbim de un sistem 2-concav iar teoria acestora este cu totul similara. In practica putem asocia fiecarui sistem concav $S(u, s, k, n)$ sistemul convex $S'(-u, s, -k, n)$ pentru care $A'_S = A_S$, $\omega'_R = \omega_R$, $\omega'_L = \omega_L$ etc.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ si $1 \le k \le n$ notam $L_k(x) = x_1 + \ldots + x_k$, $R_k(x) = x_k + \ldots + x_n$ (prin conventie $L_0(x) = 0$, $R_{n+1}(x) = 0$).

Daca $x, y \in \mathbb{R}^n$ astfel incat $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ si $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$ atunci $x \preccurlyeq y$ (in sensul clasic al teoriei majorizarii) daca:

$$\begin{cases} x_n \le y_n \\ x_{n-1} + x_n \le y_{n-1} + y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n \le y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \end{cases}$$

adica, mai concis, daca $R_1(x) = R_1(y)$ iar $R_k(x) \le R_k(y)$ $\forall 2 \le k \le n$.

REMARK 1. In aceste articol vom lucra permanent cu siruri **crescatoare** dar o eventuala versiune viitoare a articolului ar putea considera in loc siruri descrescatoare (in acord cu practica curenta in contextul teoriei majorizarii).

Are loc teorema clasica a majorizarii:

THEOREM 1. (Karamata) *Fie* $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ *strict convexa si* $x, y \in I^n$. *Daca* $x \preccurlyeq y$ *atunci*

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leq f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n)$$

cu egalitate daca si numai daca $x = y$.

REMARK 2. Conditia de mai sus $R_k(x) \leq R_k(y)\ \ \forall 2 \leq k \leq n$ se poate inlocui cu:

$$\exists 1 \leq p \leq n \text{ astfel incat} \begin{cases} L_k(x) \geq L_k(y) & \forall 1 \leq k \leq p-1 \\ R_k(x) \leq R_k(y) & \forall p+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

deoarece $L_k(x) \geq L_k(y) \Leftrightarrow R_1(x) - R_{k+1}(x) \geq R_1(y) - R_{k+1}(y) \Leftrightarrow R_{k+1}(x) \leq R_{k+1}(y)$ $\forall 1 \leq k \leq p-1$ si deci $R_k(x) \leq R_k(y)\ \forall 2 \leq k \leq p$ iar aceste inegalitati, in combinatie cu $R_k(x) \leq R_k(y)\ \forall p+1 \leq k \leq n$ ne dau exact $R_k(x) \leq R_k(y)\ \forall 2 \leq k \leq n$.

Pornind de la aceasta reformulare vom defini extrem de similar o relatie de majorizare pe A_S

DEFINITION 3. Fie $x, y \in A_S$ si $1 \leq p \leq n-1$ fixat. Spunem ca $x \preccurlyeq_p y$ daca

$$\begin{cases} L_k(x) \leq L_k(y) & \forall 1 \leq k \leq p-1 \\ R_k(x) \leq R_k(y) & \forall p+2 \leq k \leq n \end{cases}$$

Pentru a putea enunta rezultatul principal al articolului avem nevoie de urmatoarea definitie

DEFINITION 4. Fie $f, e : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue pe I, derivabile pe $\mathring{I}$. Spunem ca f este (strict) 3-convexa relativ la e daca $\exists g : J \to \mathbb{R}$ (strict) convexa cu $e'(\mathring{I}) \subset J$ astfel incat $f' = g \circ e'$.

REMARK 3. In cazul particular $e(x) = x^2$ regasim definitia standard a functiilor 3-convexe (vezi de exemplu [3]).

Putem acum enunta rezultatul principal:

THEOREM 2. (Karamata pentru sisteme 2-convexe) *Fie* $S(e, s, k, n)$ *un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu* e *derivabila pe* $\mathring{I}_S$, $f : I_S \to \mathbb{R}$ *strict 3-convexa relativ la* e *si* $1 \leq p \leq n-1$ *fixat. Atunci* $\forall x, y \in A_S$ *cu* $x \preccurlyeq_p y$ *are loc inegalitatea*

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leq f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n)$$

cu egalitate daca si numai daca $x = y$.

Vom arata ca pentru orice $x \in A_S$ $\exists p, q$ astfel incat $\omega_L \preccurlyeq_p x \preccurlyeq_q \omega_R$ si aceasta permite sa obtinem urmatorul corolar important (generalizare pentru equal variable theorem a lui Vasile Cartoaje).

COROLLARY 1. (extension of the equal variable theorem) *Fie* $S(e, s, k, n)$ *un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu* e *derivabila pe* $\mathring{I}_S$, $f : I_S \to \mathbb{R}$ *strict 3-convexa relativ la* e. *Atunci* $\forall x \in A_S$ *are loc inegalitatea*

$$E_f(\omega_L) \leq E_f(x) \leq E_f(\omega_R)$$

unde $E_f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ *iar* ω_L *si* ω_R *sunt polii sistemului S. Egalitatea are loc doar daca* $x = \omega_L$ *sau* $x = \omega_R$

2. Studiul invariantilor unui sistem $S(e,s,k,n)$

Vom studia in continuare invariantii unui sistem $S(e,s,k,n)$ (v. Definitia 2).

LEMMA 1. *Daca $S(e,s,k,n)$ admite o pereche (a_p, b_p) de invarianti de ordin p pentru un anumit $1 \le p \le n-1$ atunci aceasta pereche este unica.*

Proof. Presupunem prin absurd ca (S) are o a doua pereche de p-invarianti $(a'_p, b'_p) \neq (a_p, b_p)$. Vom avea, de exemplu, $a_p < a'_p$ si atunci, folosind relatia $pa_p + (n-p)b_p = pa'_p + (n-p)b'_p = ns$ deducem $b_p > b'_p$.

Astfel $(a'_p, \dots a'_p, b'_p, \dots b'_p) \prec (a_p, \dots a_p, b_p, \dots b_p)$ (strict) si aplicand Karamata functiei strict convexe e deducem ca $kn < kn$, contradictie. $\square$

LEMMA 2. *Daca $S(e,s,k,n)$ are $e(s) < k$ si exista $(a_p|b_p)_S$ atunci $a_p < s < b_p$.*

Proof. Prin definitie, $pa_p + (n-p)b_p = ns$ iar $a_p \le b_p$.

Astfel $p(a_p - s) + (n-p)(b_p - s) = 0 \quad (*)$ si vom analiza urmatoarele cazuri:

Caz 1. $a_p < s$ Atunci din $(*)$ rezulta ca $b_p > s$ si obtinem $a_p < s < b_p$

Caz 2. $a_p = s$ Atunci din $(*)$ rezulta ca $b_p = s$. Pe de alta parte $pe(a_p) + (n-p)e(b_p) = nk \Rightarrow e(s) = k$, contradictie.

Caz 3. $a_p > s$ Atunci din $(*)$ rezulta ca $b_p < s$ ceea ce contrazice faptul ca $b_p \ge a_p$ $\square$

2.1. Proprietatile extremale ale invariantilor

THEOREM 3. *Fie $S(e,s,k,n)$ nevid si $x \in A_S$.*

(a) Fie $1 \le p \le n-1$. Daca $\exists (a_p|b_p)_S$ atunci $x_p \ge a_p$ iar egalitatea are loc daca si numai daca $x = (a_p|b_p)_S$.

(b) Fie $2 \le p \le n-1$. Daca $\exists (a_{p-1}|b_{p-1})_S$ atunci $x_p \le b_{p-1}$ iar egalitatea are loc daca si numai daca $x = (a_{p-1}|b_{p-1})_S$.

(c) Daca $\exists (a_1|b_1)_S$ atunci $x_n \ge b_1$ cu egalitate doar daca $x = (a_1|b_1)_S$.

(d) Daca $\exists (a_{n-1}|b_{n-1})_S$ atunci $x_1 \le a_{n-1}$ cu egalitate doar daca $x = (a_{n-1}|b_{n-1})_S$.

Proof. (a) Aratam ca daca $x_p < a_p$ atunci $(x_1, \dots x_n) \succ (\underbrace{a_p, \dots a_p}_{p}, \underbrace{b_p, \dots b_p}_{n-p})$

Deoarece $x_1 \le \dots \le x_p < a_p \Rightarrow x_1 < a_p,\ x_1 + x_2 < 2a_p, \dots, x_1 + \dots + x_p < pa_p (*)$

Pe de alta parte, $(x_1 + \dots + x_p) + (x_{p+1} + \dots + x_n) = pa_p + (n-p)b_p = ns$ si cum $x_1 + \dots + x_p < pa_p$ deducem ca $x_{p+1} + \dots + x_n > (n-p)b_p$, deci $\frac{x_{p+1} + \dots + x_n}{n-p} > b_p$

Dar $x_{p+1} \le x_{p+2} \le \dots \le x_n \Rightarrow x_n \ge \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \ge \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{3} \ge \dots \ge \frac{x_n + \dots + x_p}{n-p} > b_p$

si astfel $x_n > b_p,\ x_n + x_{n-1} > 2b_p,\ \dots,\ (x_n + \dots + x_p) > (n-p)b_p (**)$

Din $(*)$ si $(**)$ rezulta ca $x \succ (a_p|b_p)_S$ si aplicand Karamata functiei strict convexe e ajungem la contradictia $kn > kn$.

Deci $x_p \geq a_p$ si, daca are loc egalitatea $x_p = a_p$, atunci $x_p \leq a_p$ si exact ca mai sus ajungem la majorizarea $x \succcurlyeq (a_p|b_p)_S$. Daca, prin absurd, $x \neq (a_p|b_p)_S$ atunci majorizarea e stricta si aplicand Karamata lui e ajungem din nou la contradictia $kn > kn$. Deci $x_p = a_p \Rightarrow x = (a_p|b_p)_S$.

(b) Aratam ca daca $x_p > b_{p-1}$ atunci $x \succ (a_{p-1}|b_{p-1})_S$

Folosind $x_p \leq x_{p+1} \leq \ldots \leq x_n$ rezulta

$$x_n > b_{p-1},\ (x_n + x_{n-1}) > 2b_{p-1}, \ldots, (x_n + \ldots + x_p) > (n-p+1)b_{p-1}(*)$$

Pe de alta parte, $(x_1 + \ldots + x_{p-1}) + (x_p + \ldots + x_n) = (p-1)a_{p-1} + (n-p+1)b_p = ns$ si cum $(x_p + \ldots + x_n) > (n-p+1)b_{p-1}$ deducem ca $x_1 + \ldots + x_{p-1} < (p-1)a_{p-1}$, deci $\frac{x_1+\ldots+x_{p-1}}{p-1} < a_{p-1}$

Dar $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{p-1} \Rightarrow x_1 \leq \frac{x_1+x_2}{2} \leq \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \leq \ldots \leq \frac{x_1+\ldots+x_{p-1}}{p-1} < a_{p-1}$

si astfel $x_1 < a_{p-1}$, $x_1 + x_2 < 2a_{p-1}$, $\ldots$, $(x_1 + \ldots + x_{p-1}) < (p-1)a_{p-1}(**)$

Din $(*)$ si $(**)$ rezulta ca $x \succ (a_p|b_p)_S$ si aplicand Karamata functiei strict convexe e ajungem la contradictia $kn > kn$.

Deci $x_p \leq b_{p-1}$ si daca are loc egalitatea $x_p = b_{p-1}$ atunci $x_p \geq b_{p-1}$ si urmand exact pasii de mai sus ajungem la majorizarea $x \succcurlyeq (a_{p-1}|b_{p-1})_S$. Daca, prin absurd, $x \neq (a_{p-1}|b_{p-1})_S$ atunci majorizarea e stricta si aplicand Karamata lui e ajungem din nou la contradictia $kn > kn$. Deci $x_p = b_{p-1} \Rightarrow x = (a_{p-1}|b_{p-1})_S$.

(c), (d) se procedeaza similar □

COROLLARY 2. *Daca (S) are $e(s) < k$ si admite invariantii (a_p, b_p), (a_q, b_q) cu $p < q$ atunci $a_p < a_q$ si $b_p < b_q$.*

Proof. Fie $u = (a_p|b_p)_S$ si $v = (a_q|b_q)_S$. Observam ca $v_p = a_q$ (caci $p < q$) si aplicand teorema 3a deducem ca $v_p \geq a_p$ adica $a_p \leq a_q$. In acelasi timp, egalitatea $a_p = a_q$ are loc doar daca $u = v$. Dar aceasta e imposibil caci ar insemna ca $s < b_p = u_{p+1} = v_{p+1} = a_{q+1} < s$ ceea ce ar contrazice lema 2.

Astfel $a_p < a_q$ si folosind teorema 3b va rezulta similar ca $b_p < b_q$. □

EXAMPLE 1. Fie $s, k \in \mathbb{R}$ cu $k \geq s^2$, $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data de $e(x) = x^2$ si sistemul 2-convex $S(e,s,k,n)$. Prin calcule algebrice elementare constatam ca $\forall\ 1 \leq p \leq n-1$ sistemul 2 are solutia $(a_p, b_p) = \left(s - \sqrt{\frac{n-p}{p}\Delta},\ s + \sqrt{\frac{p}{n-p}\Delta}\right)$ unde $\Delta = k - s^2 \geq 0$. Astfel S este un sistem complet si $\forall x \in A_S$ cu $x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_n$ avem $x_p \in I_p$ unde

$$I_p = \begin{cases} \left[s - \sqrt{(n-1)\Delta},\ s - \sqrt{\frac{\Delta}{n-1}}\ \right] & \text{daca } p = 1, \\ \left[s - \sqrt{\frac{n-p}{p}\Delta},\ s + \sqrt{\frac{p-1}{n-p+1}\Delta}\right] & \text{daca } 1 < p < n, \\ \left[s + \sqrt{\frac{\Delta}{n-1}},\ s + \sqrt{(n-1)\Delta}\right] & \text{daca } p = n \end{cases}$$

si am regasit astfel inegalitatile Boyd-Hawkins (vezi [4], pg. 155).

Se pot formula desigur multe rezultate de acest tip alegand functii e suficient de simple, de exemplu $e : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $e(x) = \frac{1}{x}$ etc.

2.2. Conditii de existenta ale invariantilor

Fie ca mai sus $S(e,s,k,n)$ un (S)-sistem si $1 \leq p \leq n-1$, $I = I_S$, $\alpha = \inf(I) \in \overline{\mathbb{R}}$, $\beta = \sup(I) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Fie $g_p : J_p \to \mathbb{R}$, $\quad g_p(x) = pe(x) + (n-p)e(\frac{ns-px}{n-p}) - kn$ unde $J_p \subset I \cap (-\infty, s]$ este intervalul maximal cu proprietatea ca $\frac{ns-px}{n-p} \in I \cap [s, \infty)$.

REMARK 4. J_p poate fi precizat mai exact astfel: consideram functia liniara descrescatoare $u : (-\infty, s] \to [s, \infty)$ data de $u(x) = \frac{ns-px}{n-p}$ si vedem ca $J_p = J \cap I$ unde $J = u^{-1}(I \cap [s, \infty)) = \begin{cases} [u^{-1}(\beta), s] & \text{daca } \beta \in I \\ (u^{-1}(\beta), s] & \text{daca } \beta \notin I \end{cases} = \begin{cases} [\gamma_p, s] & \text{daca } \beta \in I \\ (\gamma_p, s] & \text{daca } \beta \notin I \end{cases}$

iar $\gamma_p \overset{def}{=} \frac{ns-(n-p)\beta}{p} \in [-\infty, s]$ si in final obtinem pentru J_p expresia

$$\begin{cases} \text{Daca } \alpha > \gamma_p \text{ atunci } J_p = \begin{cases} [\alpha, s] & \text{daca } \alpha \in I \\ (\alpha, s] & \text{daca } \alpha \notin I \end{cases} \\ \text{Daca } \alpha \leq \gamma_p \text{ atunci } J_p = \begin{cases} [\gamma_p, s] & \text{daca } \beta \in I \\ (\gamma_p, s] & \text{daca } \beta \notin I \end{cases} \end{cases}$$

□

LEMMA 3. *g_p este strict descrescatoare pe J_p*

Proof. Fie $c, d \in \mathring{J}_p$ cu $c < d$. Atunci

$$g_p(c) - g_p(d) = p[e(c) - e(d)] + (n-p)\left[e\left(\frac{ns-pc}{n-p}\right) - e\left(\frac{ns-pd}{n-p}\right)\right]$$

care se poate pune scrie ca

$$\frac{g_p(c) - g_p(d)}{c-d} = p\left[\frac{e(c)-e(d)}{c-d} - \frac{e\left(\frac{ns-pc}{n-p}\right) - e\left(\frac{ns-pd}{n-p}\right)}{\frac{ns-pc}{n-p} - \frac{ns-pd}{n-p}}\right] \tag{1}$$

Observam ca $d < \frac{ns-pd}{n-p} \Leftrightarrow d < s$ (true) si folosind convexitatea lui e deducem ca

$$\frac{e(c)-e(d)}{c-d} < \frac{e(c) - e\left(\frac{ns-pd}{n-p}\right)}{c - \frac{ns-pd}{n-p}} \tag{2}$$

Similar, $c < \frac{ns-pc}{n-p} \Leftrightarrow d < s$ (true) si de aici

$$\frac{e\left(\frac{ns-pd}{n-p}\right) - e(c)}{\frac{ns-pd}{n-p} - c} < \frac{e\left(\frac{ns-pd}{n-p}\right) - e\left(\frac{ns-pc}{n-p}\right)}{\frac{ns-pd}{n-p} - \frac{ns-pc}{n-p}} \tag{3}$$

Din (2) si (3) deducem ca membrul drept al relatiei (1) este negativ $\Rightarrow \frac{g_p(c)-g_p(d)}{c-d} < 0$ $\Rightarrow g_p(c) - g_p(d) > 0$, adica g_p e strict descrescatoare pe $\mathring{J}_p$, deci si pe J_p caci g_p e continua. □

Deducem din lema precedenta ca exista limita

$$L_p \stackrel{def}{=} \lim_{x \to \inf J_p} g_p(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

THEOREM 4. *Fie $S(e,s,k,n)$ un $(S)-$sistem cu $f(s) < k$, $1 \leq p \leq n-1$ si L_p limita definita mai sus. Atunci (S) are invarianti de ordin p daca si numai daca*

$$\begin{cases} L_p \geq 0 & \textit{daca } J_p \textit{ e compact} \\ L_p > 0 & \textit{daca } J_p \textit{ nu e compact} \end{cases}$$

Proof. Observam ca $g_p(s) = n(e(s)-k) < 0$ si teorema rezulta tinand seama de faptul ca g_p este strict descrescatoare (conform lemei anterioare). □

COROLLARY 3. *Fie $S_1(e,s,k_1,n)$ si $S_2(e,s,k_2,n)$ doua S-sisteme nevide cu $k_1 \leq k_2$. Daca S_2 are p-invarianti pentru un anumit $1 \leq p \leq n-1$ atunci si S_1 are p-invarianti.*

Proof. Fie ca mai sus $g_p^1, g_p^2 : J_p \to \mathbb{R}$, $g_p^1(t) = pe(t) + (n-p)e(\frac{ns-pt}{n-p}) - k_1 n$, respectiv $g_p^2(t) = pe(t) + (n-p)e(\frac{ns-pt}{n-p}) - k_2 n$. Observam ca $g_p^1(t) + k_1 n = g_p^2(t) + k_2 n$ $\forall t \in J_p$ si deci

$$\lim_{t \to \inf J_p} g_p^1(t) = \lim_{t \to \inf J_p} g_p^2(t) + (k_2 - k_1)n \geq 0$$

□

THEOREM 5. *Un sistem $S(e,s,k,n)$ cu $e(s) \leq k$ si I_S deschis este nevid si complet.*

Proof. Daca $e(s) = k$ atunci $A_S = \{(s,s\ldots s)\}$ si teorema e trivial adevarata. Putem deci presupune in continuare $e(s) < k$.

Fie $1 \leq p \leq n-1$ si $g_p : J_p = (-\infty, s] \to \mathbb{R}$, $g_p(x) = pe(x) + (n-p)e(\frac{ns-px}{n-p}) - kn$ si avem de aratat ca $L_p = \lim_{x \to \inf J_p} g_p(x) > 0$.

Vom studia mai intai in detaliu cazul $I_S = \mathbb{R}$. Observam ca, in general, o functie strict convexa pe $\mathbb{R}$ are limite la $\pm\infty$, cel putin una fiind $+\infty$.

Caz 1. $I_S = \mathbb{R}$ si e este marginita inferior.
Daca $x \to -\infty$ atunci $\frac{ns-px}{n-p} \to +\infty$ si, conform observatiei anterioare, cel putin una din limitele $\lim_{x \to -\infty} e(x)$ respectiv $\lim_{x \to -\infty} e\left(\frac{ns-px}{n-p}\right)$ va fi $+\infty$. Cum e este marginita inferior rezulta ca cealalta limita este fie $+\infty$, fie o constanta reala. Astfel, indiferent de situatie vom avea $L_p = +\infty$ (deci > 0).

Caz 2. $I_S = \mathbb{R}$ si e este nemarginita inferior. Ca sa facem o alegere, vom presupune ca $\lim_{x \to -\infty} e(x) = -\infty$ iar $\lim_{x \to \infty} e(x) = \infty$. Observam ca pentru $x < s$ putem scrie

$$g_p(x) = p(x-s)\left[\frac{e(x)-e(s)}{x-s} - \frac{e\left(\frac{ns-px}{n-p}\right) - e(s)}{\frac{ns-px}{n-p} - s}\right] + n(e(s)-k) \tag{4}$$

Fie $r_1 < r_2$ fixate arbitrar in $(-\infty, s)$. Pentru $\forall x < r_1$ avem astfel $x < r_1 < r_2 < s < \frac{ns-px}{n-p}$ si folosind stricta convexitate a lui e deducem:

$$\underbrace{\frac{e(x)-e(s)}{x-s}}_{E_1} < \underbrace{\frac{e(r_1)-e(s)}{r_1-s}}_{E_2} < \underbrace{\frac{e(r_2)-e(s)}{r_2-s}}_{E_3} < \underbrace{\frac{e\left(\frac{ns-px}{n-p}\right)-e(s)}{\frac{ns-px}{n-p}-s}}_{E_4}$$

Deducem ca $E_4 - E_1 > E_3 - E_2 \overset{def}{=} \lambda_0 > 0$ si astfel $\forall x < r_1$ avem

$$(x-s)(E_1-E_4) = (s-x)(E_4-E_1) > \lambda_0(s-x) \Rightarrow$$

$$g_p(x) = p(x-s)(E_1-E_4) + n(e(s)-k) > p\lambda_0(s-x) + n(e(s)-k)$$

si astfel $L_p = \lim_{x\to-\infty} g_p(x) = +\infty$ (deci > 0).

Caz 3. $I_S \neq \mathbb{R}$. In acest caz I_S are capatul α sau β finit, de exemplu in β, ceea ce inseamna (conform definitiei functiei acceptabile) ca $\lim_{x\to\beta} e(x) = +\infty$.
In celalalt capat α (finit sau nu) e are limita (caci e este convexa) si aceasta este fie

(a) o limita finita sau $+\infty \Rightarrow e$ este marginita inferior si vom putea proceda exact ca in cazul 1.

(b) limita $-\infty \Rightarrow$ putem proceda ca in cazul 2.

$\square$

THEOREM 6. *Fie $S(e,s,k,n)$ cu $A_S \neq \emptyset$ si $\alpha = \inf(I_S)$, $\beta = \sup(I_S)$. Atunci*

(a) Daca I_S e deschis in α atunci (S) are cel putin invariantul de ordin 1

(b) Daca I_S e deschis in β atunci (S) are cel putin invariantul de ordin $n-1$

Proof. (a) Daca I_S e deschis si in β atunci totul rezulta din teorema anterioara (caci evident $e(s) \geq k$) si deci putem presupune mai departe $I_S = (\alpha, \beta]$, α finit sau nu. Cum $A_S \neq \emptyset \Rightarrow \exists (c_1 \dots c_n) \in A_S$

Fie $g_1 : J_1 \to \mathbb{R}$, $\quad g_1(t) = e(t) + (n-1)e(\frac{ns-t}{n-1}) - kn$

Conform Remark 4 $J_1 = \begin{cases} (\alpha, s] & \text{daca } \alpha > \gamma_1 \\ [\gamma_1, s] & \text{daca } \alpha \leq \gamma_1 \end{cases}$ unde $\gamma_1 = ns - (n-1)\beta$

Caz 1. $\alpha \leq \gamma_1$ atunci $J_1 = [\gamma_1, s]$ si avem de aratat ca $g_1(\gamma_1) \geq 0$.

Observam ca $\beta = \frac{ns-\gamma_1}{n-1}$ deci $g_1(\gamma_1) \geq 0 \Leftrightarrow e(\gamma_1) + (n-1)e(\beta) \geq kn \Leftrightarrow$

$$e(\gamma_1) + (n-1)e(\beta) \geq kn = e(c_1) + \dots e(c_n)$$

ceea ce rezulta din Karamata caci evident $(\gamma_1, \beta \dots \beta) \succcurlyeq (c_1, c_2, \dots c_n)$

Caz 2. $\alpha > \gamma_1$ (caz posibil daca α e finit)

Acum $J_1 = (\alpha, s]$ si avem de aratat ca $\lim_{t\to\alpha} g_1(t) > 0$.

Cum $\alpha > \gamma_1$ deducem imediat ca $s \leq \frac{ns-\alpha}{n-1} < \beta$, deci $\frac{ns-\alpha}{n-1} \in I_S$ si folosind si faptul ca $\lim_{r\to\alpha} e(r) = +\infty$ (e fiind functie acceptabila) deducem ca

$$\lim_{t\to\alpha} g_1(t) = \lim_{t\to\alpha}\left[e(t) + (n-1)e\left(\frac{ns-t}{n-1}\right) - kn\right] = +\infty$$

(b) se procedeaza similar

$\square$

LEMMA 4. *Fie $I = [\alpha,\beta]$ un interval compact, $s \in \mathring{I}$ si $M = \{x \in I^n | x_1 + x_2 + \ldots x_n = ns\}$ Atunci $\exists! u \in M$ de forma $u = (\underbrace{\alpha,\ldots\alpha}_{l_0},\theta,\underbrace{\beta,\ldots\beta}_{n-l_0-1})$ unde $0 \leq l_0 \leq n-1$ iar $\theta \in (\alpha,\beta]$.*

Proof. Fie $\lambda = \frac{\beta-s}{\beta-\alpha} \in (0,1)$ si $l_0 = [n\lambda] \in \{0,\ldots n-1\}$

Definim apoi $\theta = ns - l_0\alpha - (n-l_0-1)\beta$ si un calcul simplu ne da $\theta = \beta - \{n\lambda\}(\beta-\alpha) \in (\alpha,\beta]$, iar $u = (\underbrace{\alpha,\ldots\alpha}_{l_0},\theta,\underbrace{\beta,\ldots\beta}_{n-l_0-1}) \in M$

Pentru unicitate observam ca daca $u' = (\underbrace{\alpha,\ldots\alpha}_{l_0'},\theta',\underbrace{\beta,\ldots\beta}_{n-l_0'-1}) \in M$ cu $0 \leq l_0' \leq n-1$ iar $\theta' \in (\alpha,\beta]$ atunci $\theta' = ns - l_0'\alpha - (n-l_0'-1)\beta$ si de aici obtinem imediat ca $n\lambda - l_0' = \frac{\beta-\theta}{\beta-\alpha} \in [0,1)$ deci $l_0' = [n\lambda] = l_0$ etc.

$\square$

THEOREM 7. *Fie $S(e,s,k,n)$ cu $A_S \neq \emptyset$ si $\alpha = \inf I_S$, $\beta = \sup I_S$. Atunci:*

(a) Daca I_S e inchis in α si (S) nu are invarianti de ordin 1 atunci (S) are solutii de forma $x = (\alpha, x_2 \ldots x_n)$

(b) Daca I_S e inchis in β si (S) nu are invarianti de ordin n-1 atunci (S) are solutii de forma $x = (x_1 \ldots x_{n-1}, \beta)$

Proof. Vom demonstra punctul (a) iar pentru (b) se poate proceda similar.

Fie $\omega \in A_S$ (stim S nevid). Consideram mai intai cazul I_S compact, deci $I_S = [\alpha,\beta]$.

Conform lemei 4 ns are o unica reprezentare de forma $ns = l_0\alpha + \theta + (n-l_0-1)\beta$ cu $\theta \in (\alpha,\beta]$ si $0 \leq l_0 \leq n-1$. Aratam mai intai ca $l_0 \leq 1$, in caz contrar $l_0 = 0$ si fie $\tilde{u} = (\theta,\beta\ldots\beta)$, $\tilde{k} = \frac{e(\theta)+(n-1)e(\beta)}{n}$. Observand ca $(\omega_1,\omega_2\ldots\omega_n) \preccurlyeq (\theta,\beta\ldots\beta)$ deducem din Karamata ca $k \leq \tilde{k}$. Cum evident $\tilde{S}(e,s,\tilde{k},n)$ are invarianti de ordin 1 (caci $\tilde{u} \in A_{\tilde{S}}$) vom deduce din corolarul 3 ca si S are invarianti de ordin 1, contradictie.

Mai observam ca $\alpha \geq \gamma_1 \stackrel{def}{=} ns - (n-1)\beta$ caci in caz contrar $\alpha < \gamma_1$ si cum evident $\gamma_1 \leq \beta$ deducem ca $\gamma_1 \in (\alpha,\beta]$. Astfel $ns = \gamma_1 + (n-1)\beta \Rightarrow l_0 = 0$, fals.

Fie $g_1 : J_1 \to \mathbb{R}$, $g_1(t) = e(t) + (n-1)e(\frac{ns-t}{n-1}) - kn$ unde $J_1 = \begin{cases} [\alpha,s] & ,\alpha \geq \gamma_1, \\ [\gamma_1,s] & ,\alpha < \gamma_1, \end{cases}$ dar $\alpha \geq \gamma_1$ conform observatiei de mai sus, deci $J_1 = [\alpha,s]$.

Cum S nu are invarianti de ordin 1 vom deduce conform teoremei 4 ca $g_1(\alpha) < 0$ adica, notand $\delta = \frac{ns-\alpha}{n-1}$, $e(\alpha) + (n-1)e(\delta) < kn$

Definim $M = \{(x_2, \ldots x_n) \in I^{n-1} | \alpha \le x_2 \le \ldots \le x_n, \alpha + x_2 + \ldots + x_n = ns\}$

Observam ca M este convexa, deci si conexa. Fie apoi $u_1 = (\underbrace{\alpha, \ldots \alpha}_{l_0 \ge 1}, \theta, \underbrace{\beta, \ldots \beta}_{n-l_0-1})$ respectiv $u_2 = (\alpha, \delta \ldots \delta)$ si e clar ca $u_1, u_2 \in M$

Consideram functia $E : M \to \mathbb{R}$, $E(x_2, \ldots x_n) = e(x_2) + \ldots e(x_n)$. Deoarece $g_1(\alpha) < 0$ deducem pe de o parte ca $E(u_2) < kn$. Pe de alta parte, observand ca $\omega \preccurlyeq u_1$ deducem conform Karamata ca $E(\omega) \le E(u_1)$ adica $E(u_1) \ge kn$. Cum evident E e continua iar M e conexa vom deduce ca exista un $x \in M$ cu $E(x) = kn$ ceea ce inseamna ca S are solutia $(\alpha, x_2, \ldots x_n)$.

Cazul I necompact se reduce la cel compact. Intr-adevar, vom alege mai intai un $\alpha < \beta_1 < \beta$ astfel incat $\omega_n < \beta_1$ si fie $I_1 = [\alpha, \beta_1]$, $f_1 = f\big|I_1$. E clar ca $S_1(f_1, s, k, n)$ nu are invarianti de ordin 1(caci acestia ar fi valabili si pentru S) si astfel, conform cazului compact, vom gasi pentru S_1 o solutie $(\alpha, x_2 \ldots x_n)$ care este insa evident solutie si pentru S.

$\square$

2.3. A_S este compacta

THEOREM 8. *Pentru orice sistem $S(e,s,k,n)$ multimea A_S este compacta.*

Proof. Putem desigur presupune $A_S \ne \emptyset$. Fie $\alpha = \inf(I) \in \overline{\mathbb{R}}$, $\beta = \sup(I) \in \overline{\mathbb{R}}$. Vom arata mai intai ca exista un interval compact $J \subset I_S$ cu $A_S \subset J^n$.

Fie $x \in A_S$ oarecare. Conform teoremei 6, daca $\alpha \notin I_S$ atunci $\exists (a_1|b_1)_S$ si, conform teoremei 3, deducem ca $x_1 \ge a_1$. Similar, daca $\beta \notin I_S$ atunci $\exists (a_{n-1}|b_{n-1})_S$ iar $x_n \le b_{n-1}$. Astfel, daca definim $m = \begin{cases} \alpha & \text{daca } \alpha \in I_S \\ a_1 & \text{daca } \alpha \notin I_S \end{cases}$, $M = \begin{cases} \beta & \text{daca } \beta \in I_S \\ b_{n-1} & \text{daca } \beta \notin I_S \end{cases}$ si $J = [m, M]$ va rezulta ca $x \in J^n$ si deci $A_S \subset J^n$.

Mai departe, observam ca putem scrie $A_S = A_1 \cap A_2 \cap E_1 \ldots \cap E_{n-1}$ unde

$$E_p = \{x \in \mathbb{R}^n | x_{p+1} - x_p \le 0\} \quad \forall 1 \le p \le n-1$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 + \ldots x_n = ns\}$$

$$A_2 = \{x \in J^n | e(x_1) + e(x_2) + \ldots e(x_n) = nk\}$$

care sunt evident inchise si de aici rezulta ca A_S e compacta. $\square$

3. Dependenta functionala. Transformarile T_ε

3.1. Cazul n=3

LEMMA 5. *Fie $S(e,s,k,3)$ un S-sistem si $x = (x_1, x_2, x_3) \in A_S$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in A_S$ cu $x_1 \le y_1$. Atunci $x_1 \le y_1 \le y_2 \le x_2 \le x_3 \le y_3$*

Proof. Avem de aratat ca $y_2 \leq x_2$ si ca $x_3 \leq y_3$, celelalte inegalitati fiind evidente. Daca $x_3 > y_3$ atunci, folosind si faptul ca $x_1 \leq y_1$ deducem ca $x \prec y$ (majorizare stricta) si din Karamata va rezulta ca $e(x_1)+e(x_2)+e(x_3) < e(y_1)+e(y_2)+e(y_3)$ adica $3k < 3k$, contradictie. Deci $x_3 \leq y_3$. Daca $x_2 < y_2$ atunci folosind $x_1 \leq y_1$ deducem ca $x_1+x_2 < y_1+y_2$ deci $x_3 > y_3$ si mai departe ajungem la contradictie exact ca mai sus. Deci si $y_2 \leq x_2$.

□

Cum A_S este compacta va rezulta ca si multimile $P_k \stackrel{def}{=} \mathrm{Pr}_k(A_S)$ $(k=1,2,3)$ sunt compacte si fie $m_k = \min(P_k)$, $M_k = \max(P_k)$ $(k=1,2,3)$. Deducem ca $P_k \subseteq I_k \stackrel{def}{=} [m_k, M_k]$ $(k=1,2,3)$

LEMMA 6. *Fie $S(e,s,k,3)$ un S-sistem si $x=(x_1,x_2,x_3) \in A_S, y=(y_1,y_2,y_3) \in A_S$. Daca $x_1 = y_1$ (sau $x_2 = y_2$ ori $x_3 = y_3$) atunci $x = y$.*

Proof. Fie $x_1 = y_1$. Sa presupunem ca $x_3 \neq y_3$. Atunci, de exemplu $x_3 < y_3$ si de aici deducem imediat ca $x \prec y$ (strict) si aplicand Karamata functiei e ajungem la contradictia $3k < 3k$. Deci $x_3 = y_3$ si de aici $x_2 = 3s-(x_1+x_3) = 3s-(y_1+y_3) = y_2$.
□

Vom nota in cele ce urmeaza cu ω_L punctul (unic, conform lemei 6) pentru care $\omega_L^3 = m_3$, respectiv ω_R punctul unic pentru care $\omega_R^1 = M_1$.

LEMMA 7. *Fie $I_k = [m_k, M_k]$ si ω_L, ω_R ca mai sus. Atunci:*

(a) $\omega_L = (m_1, M_2, m_3)$ *iar* $\omega_R = (M_1, m_2, M_3)$

(b) $m_1 \leq M_1 \leq m_2 \leq M_2 \leq m_3 \leq M_3$

Proof. 1) Fie $\omega_L = (\omega_L^1, \omega_L^2, \omega_L^3)$ deci $\omega_L^3 = m_3$ si fie $x=(x_1,x_2,x_3) \in A_S$ oarecare. Atunci $x_1 \geq \omega_1$ caci in caz contrar, folosind faptul ca $x_3 \geq m_3 = \omega_3$ vom deduce ca $\omega_L \prec x$ (strict) si aplicand Karamata functiei e ajungem la contradictia $3k < 3k$. Cum $x \in A_S$ e arbitrar deducem ca $\omega_1 = m_1$. In acelasi timp $x_2 = 3s-(x_1+x_3) \leq 3s-(\omega_L^1+\omega_L^3) = \omega_L^2$ si cum x e arbitrar obtinem si faptul ca $\omega_L^2 = M_2$.
Astfel $\omega_L = (m_1, M_2, m_3)$ si analog $\omega_R = (M_1, m_2, M_3)$.

2) Conform primului punct $(m_1, M_2, m_3) \in A_S$, $(M_1, m_2, M_3) \in A_S$ si cum evident $m_1 \leq M_1$ va rezulta aplicand lema 5 ca $m_1 \leq M_1 \leq m_2 \leq M_2 \leq m_3 \leq M_3$. □

LEMMA 8. *Fie ω_L, ω_R ca mai sus. Atunci:*

(a) ω_L *este de forma* $\begin{cases} (a_1,b_1,b_1) & \text{daca } S \text{ are 1-invarianti} \\ (\alpha,a,b) & \text{daca } S \text{ nu are 1-invarianti} \end{cases}$

(b) ω_R *este de forma* $\begin{cases} (a_2,a_2,b_2) & \text{daca } S \text{ are 2-invarianti} \\ (a,b,\beta) & \text{daca } S \text{ nu are 2-invarianti} \end{cases}$

Proof. (a) Daca exista $(a_1|b_1)_S$ atunci, folosind proprietatile extremale ale invariantilor deducem ca $\forall x \in A_S \;\; x_3 \geq b_1$ si deci neaparat trebuie sa avem $(a_1|b_1)_S = (a_1, b_1, b_1) = \omega_L$.

Daca $\nexists (a_1|b_1)_S$ atunci, conform teoremei 7 deducem ca (S) are solutii de forma (α, a, b). Dar asta inseamna ca $m_1 = \alpha$ si cum (conform lemei 7) $\omega_L = (m_1, M_2, m_3) = (\alpha, M_2, m_3)$ vom deduce (folosind lema 6) ca $\omega_L = (\alpha, a, b)$.

Pentru(b) se procedeaza similar. □

LEMMA 9. *Un sistem $S(e,s,k,3)$ nevid este trivial daca si numai daca $\omega_L = \omega_R$*

Proof. Daca (S) e trivial este evident ca $\omega_L = \omega_R$.

Daca $\omega_L = \omega_R \;\Rightarrow\; (m_1, M_2, m_3) = (M_1, m_2, M_3)$ deci $m_k = M_k \;\; (k = 1,2,3)$ si e clar atunci ca $|A_S| = 1$ deci (S) e trivial. □

REMARK 5. Deci daca daca $S(e,s,k,3)$ e netrivial atunci $\omega_L \neq \omega_R$ si e clar atunci ca $m_k \neq M_k$, deci $\mathring{I}_k \neq \emptyset \;\; (k = 1,2,3)$. Mai deducem si ca pentru $\forall x \in A_S$ cu $x_1 \in \mathring{I}_1$ $\Rightarrow x_2 \in \mathring{I}_2$, $x_3 \in \mathring{I}_3$ (caci daca, de exemplu, $x_1 = m_1$ atunci $x = \omega_L$ etc.) si ca $\forall x \in A_S$ cu $x_1 \in \mathring{I}_1 \Rightarrow x_1 < x_2 < x_3$

LEMMA 10. *Fie $S(e,s,k,3)$ nevid si $I_k = [m_k, M_k]$ ca mai sus. Atunci:*

(a) Pentru orice $x_1 \in I_1 \;\; \exists!(x_2, x_3) \in I_2 \times I_3$ cu $(x_1, x_2, x_3) \in A_S$

(b) Pentru orice $x_3 \in I_3 \;\; \exists!(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$ cu $(x_1, x_2, x_3) \in A_S$

Proof. (a) Sa fixam un $x_1^0 \in I_1$. Daca $x_1^0 = m_1$ sau $x_1^0 = M_1$ problema e deja rezolvata (avem $\omega_L, \omega_R \in A_S$) deci putem presupune $x_1^0 \in (m_1, M_1)$. Fie $f_0 = f\big|[x_1^0, \beta]$
Cum $\omega_R = (M_1, m_2, M_3) \in A_S$ iar $x_1^0 < M_1 \leq m_2 \leq M_3 \leq \beta \;\Rightarrow s \in [x_1^0, \beta]$ deci putem vorbi de S-sistemul $S(f_0, s, k, 3)$ pentru care $\omega_R \in A_{S_0}$, deci $A_{S_0} \neq \emptyset$

Sa observam ca $A_{S_0} \subset A_S$ si ca daca S_0 admite invarianti de ordin p (a_p^0, b_p^0) atunci acestia sunt p-invarianti si pentru S.

Sa aratam acum ca S_0 nu are 1-invarianti
Caz 1. (S) nu are 1-invarianti. Conform observatiei anterioare, nici (S_0) nu are 1-invarianti
Caz 2. (S) are 1-invarianti (a_1, b_1), deci $m_1 = a_1$. Daca, prin absurd, (S_0) ar avea si el 1-invarianti (a_1^0, b_1^0) atunci, conform observatiei anterioare (a_1^0, b_1^0) ar fi 1-invarianti si pentru (S) si astfel $(a_1, b_1) = (a_1^0, b_1^0) \;\Rightarrow a_1^0 = a_1 = m_1$. Dar $m_1 < x_1^0 \leq a_1^0 \Rightarrow$ contradictie.

Astfel (S_0) este nevid si fara 1-invarianti. Conform teoremei 7 deducem ca (S_0) are o solutie de forma $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in A_{S_0} \subset A_S$ iar aceasta e unica (conform lemei 6)

(b) Demonstratia e similara, fixam un $x_3^0 \in I_3$. Daca $x_3^0 = m_3$ sau $x_1^0 = M_3$ problema e deja rezolvata (avem $\omega_L, \omega_R \in A_S$) deci putem presupune $x_3^0 \in (m_3, M_3)$. Fie $f_0 = f\big|[\alpha, x_3^0]$

Cum $\omega_L = (m_1, M_2, m_3) \in A_S$ iar $\alpha \le m_1 \le M_2 \le m_3 < x_3^0 \Rightarrow s \in [\alpha, x_3^0]$ deci putem vorbi de S-sistemul $S(f_0, s, k, 3)$ pentru care $\omega_L \in A_{S_0}$, deci $A_{S_0} \neq \emptyset$

Sa observam ca $A_{S_0} \subset A_S$ si ca daca S_0 admite invarianti de ordin p (a_p^0, b_p^0) atunci acestia sunt p-invarianti si pentru S.

Sa aratam acum ca S_0 nu are 2-invarianti
Caz 1. (S) nu are 2-invarianti. Conform observatiei anterioare, nici (S_0) nu are 2-invarianti
Caz 2. (S) are 2-invarianti (a_2, b_2), deci $M_3 = b_2$. Daca, prin absurd, (S_0) ar avea si el 2-invarianti (a_2^0, b_2^0) atunci, conform observatiei anterioare (a_2^0, b_2^0) ar fi 1-invarianti si pentru (S) si astfel $(a_2, b_2) = (a_2^0, b_2^0) \Rightarrow b_2^0 = b_2 = M_3$. Dar $M_3 > x_3^0 \ge b_2^0 \Rightarrow$ contradictie.

Astfel (S_0) este nevid si fara 2-invarianti. Conform teoremei 7 deducem ca (S_0) are o solutie de forma $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in A_{S_0} \subset A_S$ iar aceasta e unica (conform lemei 6) $\square$

THEOREM 9. (dependenta functionala) *Fie $S(e, s, k, 3)$ nevid si $I_k = [m_k, M_k]$ ca mai sus. Atunci $\exists ! u : I_1 \to I_2, v : I_1 \to I_3$ continue, bijective, strict monotone (u descrescator, v crescator) astfel incat $A_S = \{(t, u(t), v(t)) | t \in I_1\}$*

Proof. Conform lemei 10 $\forall x_1 \in I_1 \ \exists !(x_2, x_3) \in I_2 \times I_3$ cu $(x_1, x_2, x_3) \in A_S$ deci $\exists !$ functiile $u : I_1 \to I_2, v : I_1 \to I_3$ cu $A_S = \{(t, u(t), v(t)) | t \in I_1\}$. Mai ramane sa aratam ca ele sunt continue, bijective si strict monotone.

Dar tot din lema 10 $\Rightarrow \ \exists !$ functiile $\tilde{u} : I_1 \to I_2, \tilde{v} : I_1 \to I_3$ cu $A_S = \{(\tilde{v}(t), \tilde{u}(t), t) | t \in I_3\}$ si astfel, pentru orice (x_1^0, x_2^0, x_3^0) fixat vom avea $\begin{cases} x_1^0 = \tilde{v}(x_3^0) = \tilde{v}(v(x_1^0)) \\ x_3^0 = v(x_1^0) = v(\tilde{v}(x_3^0)) \end{cases}$ de unde deducem ca $v, \tilde{v}$ sunt inverse una alteia, deci bijective.
Sa aratam ca v este crescatoare pe I_1. In caz contrar $\exists x_1 < x_1' \in I_1$ cu $v(x_1) > v(x_1')$. De aici $\Rightarrow \ (x_1', u(x_1'), v(x_1')) \prec (x_1, u(x_1), v(x_1))$ (strict) si aplicand Karamata functiei e ajungem la contradictia $3k < 3k$. Deci v este crescatoare (strict, caci este bijectiva) deci si continua caci, in general, o functie $f : I \to J$ $(I, J$ intervale) bijectiva si monotona este continua.

In cazul functiei $u : I_1 \to I_2$ folosim relatia $u(x_1) = 3s - x_1 - v(x_1)$ si deducem imediat ca este continua si strict descrescatoare (deci si injectiva). Mai ramane doar de aratat ca u este surjectiva. Dar $\omega_R = (M_1, m_2, M_3) \in A_S \Rightarrow m_2 = u(M_1) \Rightarrow m_2 \in Im(u)$, apoi analog $M_2 \in Im(u)$ si cum u este continua deducem $Im(u) = [m_2, M_2]$ adica u este surjectiva. $\square$

THEOREM 10. *Fie $S(e, s, k, 3)$ netrivial si functiile $u : I_1 \to I_2, v : I_1 \to I_3$ ca mai sus. Daca, in plus, e este derivabila pe $\mathring{I}_S$ atunci $e \in C^1(\mathring{I}_S)$ iar $u, v \in C^1(\mathring{I}_1)$.*

Proof. Cum e este strict convexa $\Rightarrow \ e'$ este strict crescatoare pe $\mathring{I}_S$ si, folosind si faptul ca e' are proprietatea lui Darboux, va rezulta ca e' este continua, deci $e \in C^1(\mathring{I}_S)$.

Cum (S) e netrivial rezulta (conform Remark 5) ca $\mathring{I}_k \neq \emptyset$ $(k = 1,2,3)$. Fie mai departe $F : \mathring{I}_1 \times \mathring{I}_2 \times \mathring{I}_3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad F(x_1,x_2,x_3) = (F_1(x_1,x_2,x_3), F_2(x_1,x_2,x_3))$ unde

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3s \\ F_2(x_1,x_2,x_3) = e(x_1) + e(x_2) + e(x_3) - 3k \end{cases}$$

Sa fixam acum un $a_1 \in \mathring{I}_1$ si fie $a_2 = u(a_1) \in \mathring{I}_2$, $a_3 = v(a_1) \in \mathring{I}_3$. Observam ca $a_1 < a_2 < a_3$ (vezi Remark 5) si ca $F(a_1,a_2,a_3) = 0$. Consideram matricea iacobiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}(a) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix}$$

pentru care determinantul este $e'(a_2) - e'(a_3) \neq 0$ (caci e' strict monotona iar $a_2 < a_3$) si astfel putem aplica teorema functiilor implicite (pentru F de clasa C^1) $\Rightarrow \exists I_{a_1} \subset I_1$, $I_{a_2} \subset I_2$, $I_{a_3} \subset I_3$ intervale deschise centrate in a_1, a_2 respectiv a_3 si functia $g : I_{a_1} \to I_{a_2} \times I_{a_3}$, $g(x_1) = (g_1(x_1), g_2(x_2))$ astfel incat $\forall (x_1,x_2,x_3) \in I_{a_1} \times I_{a_2} \times I_{a_3}$ avem echivalenta

$$F(x_1,x_2,x_3) = 0 \Leftrightarrow (x_2,x_3) = (g_1(x_1), g_2(x_2))$$

adica $(x_1,x_2,x_3) \in A_S \Leftrightarrow (x_2,x_3) = (g_1(x_1), g_2(x_2))$. Dar, pe de alta parte, stim ca $A_S = \{(t,u(t),v(t)) | t \in I_1\}$ si deducem astfel ca $g_1 \equiv u\big|I_{a_1}$, $g_2 \equiv v\big|I_{a_2}$. Deci $u, v \in C^1(\mathring{I}_1)$. $\square$

3.2. Transformarile T_ε. Preliminarii

Fie $S(e,s,k,n)$ un S-sistem dat de $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = ns & (1) \\ e(x_1) + e(x_2) + \ldots + e(x_n) = nk & (2) \\ x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n & (3) \end{cases}$

Pentru fiecare $c = (c_1, \ldots c_n) \in A_S$ si $1 \leq i < j < k \leq n$ consideram sistemul $S'(e,s',k',3)$ definit prin

$$\begin{cases} x_1' + x_2' + x_3' = c_i + c_j + c_k = 3s' \\ e(x_1') + e(x_2') + e(x_3') = e(c_i) + e(c_j) + e(c_k) = 3k' \\ x_1' \leq x_2' \leq x_3' \end{cases}$$

si evident $A_{S'} \neq \emptyset$. Fie I_1', I_2', I_3' intervalele de variatie ale variabilelor x_1', x_2', x_3' si conform sectiunii precedente $\exists!$ functiile $u : I_1' \to I_2', v : I_1' \to I_3'$ continue, bijective, strict monotone (u descrescator, v crescator) astfel incat $A_{S'} = \{(t,u(t),v(t)) | t \in I_1'\}$

Pentru fiecare $t \in I_1' = [m_1', M_1']$ consideram tuplul $D(t)$ obtinut din c prin inlocuirea lui (c_i, c_j, c_k) cu $(t, u(t), v(t))$ definind astfel functie $D = D[c_i, c_j, c_k] : I_1' \to \mathbb{R}^n$. Evident D este o functie continua si observam ca fiecare $D(t)$ satisface conditiile (1) si (2) ale S-sistemului initial, dar nu neaparat si conditia de ordonare (3).

DEFINITION 5. Fie $1 \leq i < j < k \leq n$.

(a) Spunem ca $x \in I_S^n$ satisface conditia de ”coborare” $(A_{i,j,k}^-)$ daca

$$\begin{cases} x_i > \begin{cases} \alpha & \text{daca } i = 1 \\ x_{i-1} & \text{daca } i > 1 \end{cases} \\ x_j < x_{j+1} \\ x_k > x_{k-1} \end{cases}$$

(b) Spunem ca $x \in I_S^n$ satisface conditia de ”urcare” $(A_{i,j,k}^+)$ daca

$$\begin{cases} x_i < x_{i+1} \\ x_j > x_{j-1} \\ x_k < \begin{cases} \beta & \text{daca } k = n \\ x_{k+1} & \text{daca } k < n \end{cases} \end{cases}$$

LEMMA 11. *Fie $S(e,r,k,n)$ un S-sistem nevid, $c \in A_S$, $1 \leq i < j < k \leq n$ si $D = D[c_i, c_j, c_k] : I_1' = [m_1', M_1'] \to \mathbb{R}^n$ ca mai sus.*

(a) Daca c satisface conditia $(A_{i,j,k}^-)$ atunci $c_i > m_1'$ si exista un interval maximal $J^- = [c_i - \varepsilon_L^*, c_i] \subset I_1'$ (cu $\varepsilon_L^* > 0$) cu proprietatea ca $D(J^-) \subset A_S$ iar $D(t)$ satisface $(A_{i,j,k}^-)$ $\forall t \in (c_i - \varepsilon_L^*, c_i]$.

(b) Daca c satisface conditia $(A_{i,j,k}^+)$ atunci $c_i < M_1'$ si exista un interval maximal $J^+ = [c_i, c_i + \varepsilon_R^*] \subset I_1'$ (cu $\varepsilon_R^* > 0$) cu proprietatea ca $D(J^+) \subset A_S$ iar $D(t)$ satisface $(A_{i,j,k}^+)$ $\forall t \in [c_i, c_i + \varepsilon_R^*)$.

Proof. Vom demonstra punctul (a), pentru (b) se poate proceda analog

Stim, conform lemei 8, ca $\omega_L = \begin{cases} (a_1, b_1, b_1) & \text{daca S are 1-invarianti} \\ (\alpha, a, b) & \text{daca S nu are 1-invarianti} \end{cases}$ si de aici deducem ca $(c_i, c_j, c_k) \neq \omega_L$. Intr-adevar, in caz contrar am deduce fie ca $c_j = c_k$, fie ca $c_i = \alpha$, contradictie. Pe de alta parte, conform lemei 7, stim ca $\omega_L = (m_1, M_2, m_3)$ si cum $(c_i, c_j, c_k) \neq \omega_L$ va rezulta ca $c_i > m_1$.

Folosind apoi continuitatea lui D precum si faptul ca $D(c_i) = c$ satisface inegalitatile stricte $(A_{i,j,k}^-)$ vom deduce ca $\exists \varepsilon > 0$ astfel incat $\forall t \in (c_i - \varepsilon, c_i]$ $D(t)$ satisface in continuare inegalitatile stricte $(A_{i,j,k}^-)$

Este clar ca $D(t)$ satisface si conditia de ordonare (3) si astfel $D(t) \in A_S$ $\forall t \in (c_i - \varepsilon, c_i]$. Definim apoi

$$\varepsilon_L^* = \sup\{\varepsilon > 0 | D(t) \text{ satisface } (A_{i,j,k}^-) \quad \forall t \in (c_i - \varepsilon, c_i]\}$$

si fie $J^- = [c_i - \varepsilon_L^*, c_i]$. E clar ca $D(t) \in A_S$ $\forall t \in (c_i - \varepsilon_L^*, c_i]$ si vedem ca si $D(c_i - \varepsilon_L^*) \in A_S$ caci alegand un sir $(t_m)_{m \geq 1} \subset (c_i - \varepsilon_L^*, c_i]$ cu $t_m \to c_i - \varepsilon_L^*$ va rezulta din continuitatea lui D ca $D(t_m) \to D(c_i - \varepsilon_L^*)$, dar $D(t_m) \in A_S$ iar A_S e compacta etc. $\square$

REMARK 6. Fie $d^* = D(c_i - \varepsilon_L^*) \in A_S$. Deoarece $d_l^* = c_l \quad \forall l \neq i, j, k$ avem

$$\alpha \leq \ldots \leq c_{i-1} \leq d_i^* \leq \ldots \leq d_j^* \leq c_{j+1} \leq \ldots \leq c_{k-1} \leq \ldots \leq d_k^*$$

Pe de alta parte e clar ca d^* nu poate satisface conditiile stricte $A_{i,j,k}^-$ (in caz contrar, procedand ca mai sus am putea extinde intervalul J^- ceea ce ar contrazice maximalitatea lui J^-) si deducem astfel ca d^* trebuie sa satisfaca cel putin una din egalitatile

$$\begin{cases} d_i^* = \begin{cases} \alpha & \text{daca } i = 1 \\ c_{i-1} & \text{daca } i > 1 \end{cases} \\ d_j^* = d_k^* \quad \text{daca } j+1 = k \\ d_j^* = c_{j+1} \quad \text{daca } j+1 < k \\ d_k^* = c_{k-1} \quad \text{daca } j+1 < k \end{cases}$$

LEMMA 12. *Fie $c \in A_S$ ce satisface conditia $A_{i,j,k}^-$ si fie J^- dat de lema 11. Atunci $\forall t \in J^- \Rightarrow D(t)$ si c apartin unei aceleiasi componente conexe din A_S*

Proof. Fie $C_1 \subset A_S$ componenta conexa ce contine pe c. Apoi, cum D e continua deducem ca $C_2 = D(J^-)$ este o multime conexa cu $c \in C_2 \subset A_S$. Astfel $C_1 \cup C_2$ este conexa $\subset A_S$ si din maximalitatea lui C_1 deducem $C_2 \subset C_1$ etc. □

3.3. Transformarile T_ε

Fie $S(e,s,k,n)$ un S-sistem, $1 \leq i < j < k \leq n$ si $c \in A_S$.

Am vazut ca daca c satisface conditia $A_{i,j,k}^-$ atunci exista un interval maximal $J^- = [c_i - \varepsilon_L^*, c_i]$ ($\varepsilon_L^* > 0$) cu proprietatea ca $D(J^-) \subset A_S$.

Similar, daca c satisface conditia $A_{i,j,k}^+$ atunci exista un interval maximal $J^+ = [c_i, c_i + \varepsilon_R^*]$ ($\varepsilon_R^* > 0$) cu proprietatea ca $D(J^+) \subset A_S$.

DEFINITION 6. Fie c ce satisface conditia $A_{i,j,k}^-$ si $\varepsilon \in [0, \varepsilon_L^*]$. Spunem ca tuplul $c' \in A_S$ este o transformare $T_\varepsilon^-(i,j,k)[c]$ a lui c si scriem $c' = T_\varepsilon^-(i,j,k)[c]$ daca $c' = D(c_i + \varepsilon)$.

Transformarile $T_\varepsilon^+(i,j,k)[c]$ se definesc similar.

Observam ca atunci cand aplicam lui c o transformare $T_\varepsilon^+(i,j,k)[c]$ (de exemplu) atunci c_i si c_k "cresc" iar c_j "scade" (sensul precis fiind acela ca $c_i' > c_i$, $c_k' > c_k$ iar $c_j' < c_j$). Aceasta rezulta, desigur, din monotoniile functiilor u si v (u este strict descrescatoare, iar v strict crescatoare).

O transformare $T_\varepsilon^-|T_\varepsilon^+$ se numeste *stricta* daca $\varepsilon \in (0, \varepsilon_L^*)$, respectiv $\varepsilon \in (0, \varepsilon_R^*)$. Observam ca daca $c' = T_\varepsilon^-(i,j,k)[c]$ este o transformare stricta atunci c' satiface inca conditia $A_{i,j,k}^-$ (respectiv $A_{i,j,k}^+$ in cazul T_ε^+).

LEMMA 13. *(a) Daca $x \in A_S$ satisface conditia $A_{i,j,k}^+$ atunci exista un lant de transformari stricte de tip T_ε^+ care sa duca pe x intr-un $y \in A_S$ cu $y_1 > x_1$.*

(b) Daca $x \in A_S$ satisface conditia $A_{i,j,k}^-$ atunci exista un lant de transformari stricte de tip T_ε^- care sa duca pe x intr-un $y \in A_S$ cu $y_n < x_n$.

Proof. (a) Daca $i = 1$ atunci putem sa-i aplicam lui x o transformare stricta $y = T_\varepsilon^+(1, j,k)[x]$ si evident $y_1 > x_1$. Presupunem deci $i > 1$. Incepem prin a-i aplica lui x o transformare stricta $x' = T_\varepsilon^+(i, j,k)[x]$ pentru care evident $x'_i > x_i$ si astfel suntem siguri ca avem si $x'_i > x'_{i-1} = x_{i-1}$. Daca $i-1 = 1$ problema e rezolvata, daca nu aplicam lui x' o transformare stricta $x'' = T_\varepsilon^+(i-1, j,k)[x']$ pentru care $x''_{i-1} > x''_{i-2} = x_{i-2}$ si asa mai departe.

Pentru (b) se procedeaza similar. □

3.4. Polii ω_L, ω_R

Fie $S(e,s,k,n)$ un S-sistem. Cum A_S este compacta va rezulta ca si multimile $P_k \stackrel{def}{=} \mathrm{Pr}_k(A_S)$ $(k = 1,2\ldots n)$ sunt compacte si fie $m_k = \min(P_k)$, $M_k = \max(P_k)$ $(k = 1,2\ldots n)$, deci $P_k \subseteq I_k \stackrel{def}{=} [m_k, M_k]$ $(k = 1,2\ldots n)$

In particular, deducem ca exista puncte $\omega \in A_S$ pentru care $\omega_n = m_n$ (sau puncte $\omega \in A_S$ pentru care $\omega_1 = M_1$)

LEMMA 14. *Fie $\omega \in A_S$ pentru care $\omega_n = m_n$. Atunci ω are forma*

$$\omega = (\underbrace{\alpha,\ldots\alpha}_{r\geq 0}, a, b\ldots b)$$

unde $r \geq 0$ iar $a,b \in I_S$ cu $\alpha \leq a \leq b = m_n$

Proof. Putem scrie evident pe ω sub forma $\omega = (\underbrace{\alpha,\ldots\alpha}_{r\geq 0}, \omega_{r+1},\ldots\omega_n)$.

Daca $r \geq n-2$ problema e rezolvata, deci putem presupune $r \leq n-3$ cu $\alpha < \omega_{r+1}$. Daca exista $r+1 < i < n$ cu $\omega_i = \omega_{i+1}$ atunci, cum $\omega_{r+1} > \alpha$ vom deduce ca exista transformari $\omega' = T_\varepsilon^-(r+1, j,k)[\omega]$ $(\varepsilon > 0)$ cu $\omega'_n < \omega_n = m_n$ contradictie. Deci $\omega_{r+2} = \ldots = \omega_n$ etc.

□

LEMMA 15. *Daca $\omega, \omega' \in A_S$ au forma* $\begin{cases} \omega = (\underbrace{\alpha,\ldots\alpha}_{r\geq 0}, a, b\ldots b) \\ \omega' = (\underbrace{\alpha,\ldots\alpha}_{r'\geq 0}, a', b'\ldots b') \end{cases}$ *unde $\alpha \leq a \leq b$, $\alpha \leq a' \leq b'$ atunci $\omega = \omega'$.*

Proof. Fara a restrange generalitatea, putem presupune $b \geq b'$.

Observam ca in acest caz $\begin{cases} L_k(\omega) \leq L_k(\omega')\ \forall k = 1\ldots r \\ R_k(\omega) \geq R_k(\omega')\ \forall k = r+2\ldots n \end{cases}$ adica $\omega' \preccurlyeq \omega$ (conform Remark 2) si daca, prin absurd, am avea $\omega \neq \omega'$ atunci $\omega' \prec \omega$ (strict) si aplicand Karamata functiei strict convexe e am ajunge la contradictia $kn < kn$. □

THEOREM 11. *Fie $S(e,s,k,n)$ un S-sistem si $\alpha = \inf(I_S)$, $\beta = \sup(I_S)$. Atunci:*

(a) *Exista un unic punct* $\omega_L \in A_S$ *pentru care* $\omega_L^n = m_n$. *In plus, el are forma*

$$\omega_L = (\underbrace{\alpha,\dots\alpha}_{r\geq 0},a,b,\dots b)$$

si reciproc, $\forall \omega' \in A_S$ *de forma* $\omega' = (\underbrace{\alpha,\dots\alpha}_{r'\geq 0},a',b',\dots b') \Rightarrow \omega' = \omega_L$.

(b) *Exista un unic punct* $\omega_R \in A_S$ *pentru care* $\omega_R^1 = M_1$. *In plus, el are forma*

$$\omega_R = (a,\dots a,b,\underbrace{\beta,\dots\beta}_{r\geq 0})$$

si reciproc, $\forall \omega' \in A_S$ *de forma* $\omega' = (a',\dots a',b',\underbrace{\beta,\dots\beta,}_{r'\geq 0}) \Rightarrow \omega' = \omega_R$.

Proof. (a) Fie $\omega,\omega' \in A_S$ doua puncte pentru care $\omega_n = \omega_n' = m_n$. Atunci, conform lemei 14, ω si ω' au forma $\begin{cases} \omega = (\underbrace{\alpha,\dots\alpha}_{r\geq 0},a,b\dots b) \\ \omega' = (\underbrace{\alpha,\dots\alpha}_{r'\geq 0},a',b'\dots b') \end{cases}$ si aplicand apoi lema 15 deducem $\omega = \omega'$. Apoi reciproca rezulta evident din lema 15.

Pentru (b) se procedeaza in mod analog caci e usor de vazut ca lemele 14 si 15 au versiuni similare pentru cazul punctelor $\omega \in A_S$ pentru care $\omega_1 = M_1$. □

REMARK 7. Vom numi in general cele doua puncte unice ω_L, ω_R *polii sistemului* (S). Putem observa ca $[m_1,M_1] = [\omega_L^1,\omega_R^1]$ iar $[m_n,M_n] = [\omega_L^n,\omega_R^n]$.

Sa aratam de exemplu prima egalitate. E clar, prin definitie, ca $\omega_R^1 = M_1$. Pe de alta parte ω_L e de forma $(\underbrace{\alpha,\dots\alpha}_{r\geq 0},a,b,\dots b)$. Daca $r>0$ atunci evident $\omega_L^1 = \alpha = m_1$ iar daca $r=0$ atunci $\omega_L = (a_1|b_1)_S$ si in acest caz stim ca $a_1 = m_1$ (vezi teorema ...) si deci din nou $\omega_L^1 = m_1$.

REMARK 8. Daca $x \neq \omega_R$ atunci exista $1<i<j\leq n$ cu $x_{i-1}<x_i$ si $x_j<\beta$, deci x satisface conditia $(A^+_{i-1,i,j})$.

Intr-adevar, stim din teorema 11 ca x nu e de forma $(a,\dots a,b,\underbrace{\beta,\dots\beta}_{r\geq 0})$ (*)

E clar atunci ca $\exists j\geq 3$ cu $x_j<\beta$ si presupunand j maxim cu aceasta proprietate vedem apoi ca gasim si $1\leq i-1<i<j$ cu $x_{i-1}<x_i$, caci altfel x ar fi de forma (*).

Similar, daca $x\neq\omega_L$ deducem ca exista $1\leq i<j<n$ cu $x_i>\alpha$ si $x_j<x_{j+1}$, deci x satisface conditia $(A^-_{i,j,j+1})$.

THEOREM 12. *Fie* $S(e,s,k,n)$ *un S-sistem nevid. Sunt echivalente afirmatiile:*

(a) $|A_S| = 1$ *(adica S e trivial)*

(b) $\omega_L = \omega_R$

(c) $\exists x \in A_S$ *de forma* $x = (\theta, \theta, \ldots, \theta)$ *sau* $x = (\underbrace{\alpha, \ldots \alpha}_{r \geq 0}, \theta, \underbrace{\beta, \ldots \beta}_{t \geq 0})$

Proof. $(a) \Rightarrow (b)$ este evident

$(b) \Rightarrow (a)$ Daca $\omega_L = \omega_R$ atunci, din remarca 7, deducem ca $m_1 = M_1$ si astfel, pentru un $x \in A_S$ arbitrar deducem $x_1 = M_1$. Dar asta inseamna, conform teoremei 11, ca $x = \omega_L$. Deci $A_S = \{\omega_L\}$ etc.

$(c) \Rightarrow (b)$ Din teorema 11 stim ca pentru orice punct $\omega' \in A_S$ de forma $\omega' = (\underbrace{\alpha, \ldots \alpha}_{r' \geq 0}, a', b', \ldots b') \Rightarrow \omega' = \omega_L$. Dar x, in oricare din cele doua variante, este evident si de aceasta forma si deci $x = \omega_L$. Analog deducem si ca $x = \omega_R$ deci $\omega_L = \omega_R$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Fie $\omega_L = (\underbrace{\alpha, \ldots \alpha}_{r \geq 0}, a, b, \ldots b)$, $\omega_R = (a', \ldots a', b', \underbrace{\beta, \ldots \beta}_{r' \geq 0})$.

Caz 1. $r > 0$ Atunci din $\omega_L = \omega_R \Rightarrow a' = \alpha$ si deci $\omega_R = (\alpha, \ldots \alpha, b', \underbrace{\beta, \ldots \beta}_{r' \geq 0})$

Caz 2. $r' > 0$ Atunci din $\omega_L = \omega_R \Rightarrow b = \beta$ si deci $\omega_L = (\underbrace{\alpha, \ldots \alpha}_{r \geq 0}, a, \beta, \ldots \beta)$

Caz 3. $r = 0$, $r' = 0$ Atunci $\omega_L = \omega_R \Rightarrow (a, b \ldots b) = (a', \ldots a', b')$ si deci $a = a' = b = b' = \theta$ iar $\omega_L = (\theta, \theta, \ldots, \theta)$.

□

3.5. A_S este conexa

THEOREM 13. (conexiunea lui A_S pentru $n = 3$) *Daca* $S(e, s, k, 3)$ *este un S-sistem atunci* A_S *este o multime conexa.*

Proof. Presupunem prin absurd ca A_S nu e conexa, deci avem cel putin doua componente conexe si observam ca ele sunt compacte (caci A_S e compacta). Fie C_1 componenta conexa ce contine pe ω_L si $C_2 \neq C_1$ o alta componenta conexa. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in C_2$ cu proprietatea ca x_1 este maxim (exista un asemenea x caci C_2 e compacta).

Conform Remark 8 $\Rightarrow \exists 1 < i < j$ astfel incat x satisface conditia ”de urcare” $A^+_{i-1,i,j}$ si astfel, aplicand lema 13, vom gasi un sir de transformari stricte de tip T^+_ε care sa duca pe x intr-un y cu $y_1 > x_1$.

Pe de alta parte, conform lemei 12, pentru orice transformare $w' = T^+_\varepsilon(i, j, k)[w]$ punctul w' ramane in aceeasi componenta conexa cu w si astfel deducem ca si $y \in C_2$ (ca si x) si cum $y_1 > x_1$ am ajuns astfel la contradictie.

□

4. Extensii ale inegalitatilor clasice de majorizare

4.1. Relatiile $\preccurlyeq_p$ si $\trianglelefteq$

Fie $1 \leq p \leq n-1$ fixat si $x, y \in A_S$.

$$\begin{aligned} y &= (\overbrace{y_1,\ y_2,\ \dots\ y_{p-1}}^{L\text{ zone}},\ y_p,\ y_{p+1},\ \overbrace{y_{p+2},\ \dots\ y_{n-1}, y_n}^{R\text{ zone}}) \\ x &= (\underbrace{x_1,\ x_2,\ \dots\ x_{p-1}}_{L\text{ zone}},\ x_p,\ y_{p+1},\ \underbrace{y_{p+2},\ \dots\ x_{n-1}, x_n}_{R\text{ zone}}) \end{aligned}$$

Conform definitiei 3 vom spune ca $x \preccurlyeq_p y$ daca

$$x \preccurlyeq_p y \Leftrightarrow \begin{cases} L_k(x) \le L_k(y) & \forall 1 \le k \le p-1 \\ R_k(x) \le R_k(y) & \forall p+2 \le k \le n \end{cases} \tag{5}$$

unde $L_k(x) = x_1 + \ldots + x_k$ iar $R_k(x) = x_k + \ldots + x_n$.

Observam ca daca $p = 1$ atunci definitia revine la $R_k(x) \le R_k(y)\ \ \forall 3 \le k \le n$ (deci zona L este vida) iar daca $p = n-1$ atunci definitia revine la $L_k(x) \le L_k(y)\ \ \forall 1 \le k \le n-2$ (deci zona R este vida).

Vom considera si versiunea stricta a acestei relatii, adica vom spune ca $x \prec_p y$ daca $x \preccurlyeq_p y$ si macar una din inegalitatile (5) e stricta.

LEMMA 16. *Fie $x, y \in A_S$. Daca $x \preccurlyeq_p y$ atunci $x_1 \le y_1$ si $x_n \le y_n$.*

Proof. Daca $p \ge 2$ definitia (5) $\Rightarrow$ in particular $L_1(x) \le L_1(y)$ adica $x_1 \le y_1$. Daca $p = 1$ atunci (5) $\Rightarrow$ $R_k(x) \le R_k(y)\ \ \forall 3 \le k \le n$ iar daca, prin absurd, $x_1 > y_1$ ar insemna ca $x \prec y$ si aplicand Karamata functiei e am ajunge la contradictia $kn < kn$.

Deci $x_1 \le y_1$ si analog rezulta si $x_n \le y_n$. □

Daca $x \in \mathbb{R}^n$ notam cu $x \setminus (x_r)$ acel $(n-1)$ tuplu obtinut din x prin eliminarea componentei x_r.

LEMMA 17. *Fie $x, y \in A_S$ cu $x \preccurlyeq_p y$ si presupunem ca exista r cu $x_r = y_r$. Daca $x' = x \setminus (x_r)$ iar $y' = y \setminus (y_r)$ atunci exista $1 \le p' \le n'-1$ cu $x' \preccurlyeq_{p'} y'$ (unde $n' = n-1$)*

Proof. E clar ca daca $p \ge 2$ putem lua $p' = p-1$ iar pentru $p = 1$ luam $p' = 1$ deci in general putem alege $p' \in \{p-1, p\}$. □

LEMMA 18. *Fie $x, y \in A_S$ si $1 \le p, q \le n-1$. Daca $x \preccurlyeq_p y$ si $y \preccurlyeq_q x$ atunci $x = y$.*

Proof. Vom demonstra lema prin inductie dupa n. Folosind lema 16, vom observa mai intai ca $x \preccurlyeq_p y \Rightarrow x_1 \le y_1$ si $y \preccurlyeq_q x \Rightarrow y_1 \le x_1$, deci $x_1 = y_1$.

Pentru $n = 3$ va rezulta direct din lema 6 ca $x = y$.

Daca $n > 3$ atunci consideram punctele $x' = x \setminus (x_1)$ si $y' = y \setminus (y_1)$ deci, conform lemei 17, $\exists 1 \le p' \le n'-1$ cu $x' \preccurlyeq_{p'} y'$ (unde $n' = n-1$). Dar $x', y' \in A_{S'}$ unde $S'(e, s', k', n')$ e sistemul $\begin{cases} x'_1 + \ldots + x'_{n'} = ns - x_1 = n's' \\ e(x'_1) + \ldots + e(x'_{n'}) = nk - e(x_1) = n'k' \\ x'_1 \le x'_2 \le \ldots \le x'_{n'} \end{cases}$ si deci, conform ipotezei de inductie pentru n' $\Rightarrow x' = y' \Rightarrow x = y$. □

THEOREM 14. *$\preccurlyeq_p$ este o relatie de ordine pe A_S*

Proof. Reflexivitatea si tranzitivitatea sunt evidente, iar antisimetria rezulta din lema 18. ☐

COROLLARY 4. *Fie $x, y \in A_S$ cu $x \preccurlyeq_p y$. Atunci $x \prec_p y \Leftrightarrow x \neq y$*

Proof. Daca $x \prec_p y$ e clar ca $x \neq y$.

Daca $x \neq y$ atunci cel putin una din inegalitatile (5) este stricta. In caz contrar am avea simultan $x \preccurlyeq_p y$ si $y \preccurlyeq_p x$, deci $x = y$. ☐

LEMMA 19. *Fie $x, y \in A_S$ cu $x \prec_p y$. Atunci $\exists\, r \leq p < p+1 \leq t$ astfel incat $x_r < y_r$, $x_t < y_t$.*

Proof. Sa aratam de exemplu ca exista $r \leq p$ cu $x_r < y_r$. Daca, prin absurd, $x_i < y_i \ \forall 1 \leq i \leq p$ atunci e clar ca $L_i(x) < L_i(y) \ \forall 1 \leq i \leq p$ dar aceasta, impreuna cu faptul ca $R_i(x) \leq R_i(y)$ $(i = p+2 \dots n)$ inseamna ca $x \prec y$ (strict) si aplicand apoi Karamata functiei strict convexe e ajungem la contradictia $nk < nk$. ☐

THEOREM 15. *Fie ω_L, ω_R polii sistemului $S(e,s,k,n)$ si $x \in A_S$ oarecare. Atunci exista $1 \leq p, q \leq n-1$ astfel incat $\omega_L \preccurlyeq_p x \preccurlyeq_q \omega_R$.*

Proof. Sa aratam ca exista $1 \leq p \leq n-1$ astfel incat $\omega_L \preccurlyeq_p x$.

Stim ca ω_L e de forma $\omega_L = \begin{array}{cccccccc} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \dots & n \\ (\alpha, & \dots & \alpha, & a, & b, & b, & \dots & b) \end{array}$

pentru un anumit $r \geq 1$ iar din definitia lui $\omega_L \Rightarrow x_n \geq b$.

E clar ca $L_k(\omega_L) \leq L_k(x) \quad \forall 1 \leq k \leq r-1$ si daca relatiile $R_k(\omega_L) \leq R_k(x)$ sunt adevarate $\forall r+2 \leq k \leq n$ rezulta trivial ca $\omega_L \preccurlyeq_r x$. In caz contrar $\exists r+2 \leq k \leq n$ cu $R_k(\omega_L) > R_k(x)$ si fie k maxim cu aceasta proprietate. Cum $\omega_L^n = b \leq x_n \Rightarrow k < n$.

Avem deci $R_i(\omega_L) \leq R_i(x) \quad \forall k+1 \leq i \leq n$ iar $R_k(\omega_L) > R_k(x)$. Vom arata ca $\omega_L \preccurlyeq_{k-1} x$ si mai trebuie doar sa aratam ca $L_j(\omega_L) \leq L_j(x) \ \forall 1 \leq j \leq k-2$. Stim deja ca $L_j(\omega_L) \leq L_j(x) \ \forall 1 \leq j \leq r-1$, deci putem presupune $r \leq j \leq k-2$.

Daca, prin absurd, exista un astfel de j cu $L_j(\omega_L) > L_j(x)$ atunci

$$\alpha(r-1) + a + (j-r)b > x_1 + \dots + x_j \tag{6}$$

Dar $R_k(\omega_L) > R_k(x) \Rightarrow$

$$(n-k+1)b > x_k + \dots + x_n \tag{7}$$

iar din (6) si (7) deducem

$$\alpha(r-1) + a + [n-r-(k-j-1)b] > (x_1 + \dots + x_j) + (x_k + \dots + x_n)$$

$$\Rightarrow ns - (k-j-1)b > ns - (x_{j+1} + \dots + x_{k-1})$$

$$\Rightarrow (k-j-1)b < x_{j+1} + \dots + x_{k-1}$$

Astfel $b < x_{k-1}$ dar (7) ne da si $b > x_k \geq x_{k-1} \Rightarrow$ contradictie.

Analog se arata ca exista $1 \leq q \leq n-1$ astfel incat $x \preccurlyeq_q \omega_R$. ☐

DEFINITION 7. Daca $x,y \in A_S$ spunem ca $x \trianglelefteq y$ daca $\exists 1 \le p \le n-1$ cu $x \preccurlyeq_p y$

REMARK 9. Relatia $\trianglelefteq$ este evident reflexiva si antisimetrica (contorm lemei 18) dar, din pacate, nu este si tranzitiva deci, in general, $\trianglelefteq$ nu este o relatie de ordine.

Faptul ca nu e tranzitiva rezulta construind un contraexemplu. Consideram sistemul $S(e, \frac{2}{5}, \frac{44}{5}, 5)$ unde $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad e(x) = x^2$ si vom ajunge la un contraexemplu printr-o deformare convenabila a urmatoarelor puncte din A_S:

$$z = (-\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ 0,\ 3 - \frac{\sqrt{35}}{2},\ 3 + \frac{\sqrt{35}}{2})$$
$$y = (-3,\ -1,\ 0,\ 3 - 2\sqrt{2},\ 3 + 2\sqrt{2})$$
$$x = (-\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2},\ 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2})$$

Observam mai intai ca $\begin{cases} x_1 < y_1 < z_1, \quad x_5 < y_5 < z_5 \\ x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 = -4 \\ x_4 + x_5 = y_4 + y_5 = z_4 + z_5 = 6 \end{cases}$.

Mai departe, vedem ca e posibil sa aplicam lui x o transformare $x' = T_\varepsilon^-(1,2,3)[x]$ pentru care $x'_1 < x_1$ si deci $x'_1 + x'_2 > x_1 + x_2 = -4$

Similar, putem aplica lui z o transformare $z' = T_\varepsilon^+(3,4,5)[z]$ pentru care $z'_5 > z_5$ si deci $z'_4 + z'_5 < z_4 + z_5 = 6$.

In final, vedem ca $x' \preccurlyeq_3 y$, $y \preccurlyeq_2 z'$ dar totusi nu e posibil sa gasim un $1 \le p \le 4$ cu $x' \preccurlyeq_p z'$ caci $x'_1 + x'_2 > -4 = z'_1 + z'_2$ iar $x'_4 + x'_5 = 6 > z'_4 + z'_5$.

4.2. The perturbation lemmas

DEFINITION 8. Fie $1 \le p \le p-1$ fixat si $x,y \in A_S$ cu $x \preccurlyeq_p y$.

(a) Spunem ca in zona L exista sume egale daca $\exists 1 \le k \le p-1$ cu $L_k(x) = L_k(y)$.

(b) Spunem ca zona L are toate sumele distincte daca $L_k(x) \neq L_k(y)\ \forall 1 \le k \le p-1$.

(similar pentru zona R)

Daca in zona L exista sume egale, vom considera indicii extremali $a \le b$ cu proprietatea ca $\begin{cases} L_a(x) = L_a(y), \quad L_b(x) = L_b(y) \\ L_k(x) \neq L_k(y), \quad \forall k \in \{1 \ldots a-1\} \cup \{b+1 \ldots p-1\} \end{cases}$

Similar, daca in zona R exista sume egale, vom considera indicii extremali $c \le d$ cu proprietatea ca $\begin{cases} R_c(x) = R_c(y), \quad R_d(x) = R_d(y) \\ R_k(x) \neq R_k(y), \quad \forall k \in \{p+2 \ldots c-1\} \cup \{d+1 \ldots n\} \end{cases}$

LEMMA 20. *Fie $1 \le p \le n-1$ fixat si $x,y \in A_S$ cu $x \preccurlyeq_p y$.*

A) *1) Daca $x_1 < y_1$ atunci $\exists 2 \le i \le n-1$ cu $y_i < y_{i+1}$*

2) Daca $x_n < y_n$ atunci $\exists 1 \le i \le n-2$ cu $x_i < x_{i+1}$

B) *1) Daca $x_1 < y_1$ si $\exists$ sume egale in L atunci $\exists 1 \le i \le a-1$ cu $x_i \le x_{i+1}$*

2) Daca $x_n < y_n$ *si* $\exists$ *sume egale in* R *atunci* $\exists d \le i \le n-1$ *cu* $y_i \le y_{i+1}$

Proof. $A)$ Sa aratam de exemplu (1). Daca, prin absurd, $y_i = y_{i+1}$ $\forall 2 \le i \le n-1$ atunci $y_2 = y_3 = \ldots = y_n$ si deci $y = (a_1|b_1)_S \Rightarrow y_1 = a_1$. Dar, din proprietatile invariantilor $\Rightarrow x_1 \le a_1 \Rightarrow x_1 \le y_1$, fals.

$B)$ Sa aratam de exemplu (1). Daca, prin absurd, $x_i = x_{i+1}$ $\forall 1 \le i \le a-1$ atunci $x_1 = \ldots = x_a$ si deci $x_1 = \frac{L_a(x)}{a}$. Pe de alta parte $L_a(x) = L_a(y)$ si cum evident $y_1 \le \frac{L_a(y)}{a}$ vom deduce ca $y_1 \le \frac{L_a(y)}{a} = \frac{L_a(x)}{a} = x_1$, contradictie

$\square$

LEMMA 21. *Fie* $1 \le p \le n-1$ *fixat si* $x, y \in A_S$ *cu* $x \preccurlyeq_p y$ *iar* $x_1 < y_1$

A) Daca L are sumele distincte (sau L e vida) si de asemenea R are sumele distincte (sau R e vida) atunci exista transformari stricte $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ *cu* $z \succcurlyeq_p x$

B) Daca L are sumele distincte (sau L e vida) dar exista in R sume egale atunci exista transformari stricte $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ *cu* $d \le i \le n-1$ *iar* $z \succcurlyeq_p x$

C) Sa presupunem ca exista in L sume egale.

(a) Daca $L_{a+1}(x) \le L_{a+1}(y)$ *atunci exista transformari stricte* $z = T_\varepsilon^-(1,a,a+1)[y]$ *cu* $z \succcurlyeq_p x$

(b) Daca $L_{a+1}(x) > L_{a+1}(y)$ *atunci* $p \ge 2$ *si exista transformari stricte* $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ *cu* $z \succcurlyeq_{p-1} x$.

Proof. $A)$ Avem deci $\begin{cases} L_k(x) < L_k(y) & \forall 1 \le k \le p-1 \\ R_k(x) < R_k(y) & \forall p+2 \le k \le n \end{cases}$ iar din lema 20 $(A1)$ stim ca $\exists 2 \le i \le n-1$ cu $y_i < y_{i+1}$. Din cauza ca inegalitatile de mai sus sunt stricte, vom putea gasi un $\varepsilon > 0$ pentru care transformarea $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ sa mentina $\begin{cases} L_k(x) < L_k(z) & \forall 1 \le k \le p-1 \\ R_k(x) < R_k(z) & \forall p+2 \le k \le n \end{cases}$ si astfel vom avea $x \preccurlyeq_p z$.

$B)$ Conform lemei 20 $(B1)$ stim ca $\exists d \le i \le n-1$ cu $y_i < y_{i+1}$. Cum $i+1 > d \Rightarrow R_{i+1}(x) < R_{i+1}(y)$ $[*]$ iar prin ipoteza $L_k(x) < L_k(y)$ $\forall 1 \le k \le p-1$ $[**]$

Deoarece inegalitatile $[*]$ si $[**]$ sunt stricte e clar ca vom gasi un $\varepsilon > 0$ suficient de mic incat transformarea $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ sa mentina

$$\begin{cases} L_k(x) < L_k(z) & \forall 1 \le k \le p-1 \\ R_{i+1}(x) < R_{i+1}(z) \end{cases}$$

si astfel mai ramane doar sa aratam ca $R_k(x) < R_k(z)$ $\forall p+2 \le k \le n,\ k \ne i+1$

Observam ca pentru $k \ne i+1$ o suma $R_k(y)$ poata sa contina fie ambii termeni y_i si y_{i+1}, fie nici unul. In primul caz e clar ca prin transformarea $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ suma $y_i + y_{i+1}$ poate doar sa creasca la $z_i + z_{i+1}$ si deci sigur $R_k(x) < R_k(z)$. In al doilea caz suma $R_k(y)$ ramane evident neafectata de transformarea $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ si deci

$R_k(z) = R_k(y) \geq R_k(x)$.

$C1)$ Aratam mai intai ca $y_a < y_{a+1}$. Observam ca $a \geq 2$ caci $L_1(x) < L_1(y)$ si cum $L_{a-1}(x) < L_{a-1}(y)$ iar $L_a(x) = L_a(y)$ va rezulta ca $x_a > y_a$. Pe de alta parte $L_{a+1}(x) \leq L_{a+1}(y)$ si folosind din nou $L_a(x) = L_a(y) \Rightarrow x_{a+1} \leq y_{a+1}$. Astfel $y_a < x_a \leq x_{a+1} \leq y_{a+1} \Rightarrow y_a < y_{a+1}$ (si deci putem lua in calcul transformari $T_\varepsilon^-(1,a,a+1)[y]$).

Mai departe, stim ca $L_k(x) < L_k(y)$ $\forall 1 \leq k \leq a-1$ si pentru ca aceste inegalitati sunt stricte e clar ca gasim un $\varepsilon > 0$ suficient de mic incat transformarea $z = T_\varepsilon^-(1,a,a+1)[y]$ sa mentina $L_k(x) < L_k(z)$ $\forall 1 \leq k \leq a-1$.

Celelalte sume $L_k(y)$ pot fie sa contina termenii y_1, y_a (daca $k = a$), fie toti termenii y_1, y_a, y_{a+1}. In primul caz suma $y_1 + y_a$ poate doar sa creasca la $z_1 + z_a$ si deci sigur $L_k(x) < L_k(z)$ iar in al doilea caz suma $L_k(y)$ ramane evident constanta, deci $L_k(z) = L_k(y) \geq L_k(x)$.

In ce priveste sumele R_k cu $p+2 \leq k \leq n$ este evident ca ele sunt neafectate de transformarea $z = T_\varepsilon^-(1,a,a+1)[y]$ si deci $R_k(z) = R_k(y) \geq R_k(x)$ $\forall p+2 \leq k \leq n$.

$C2)$ In acest caz e clar ca $a = p-1$ si deci $L_p(x) > L_p(y)$ (caci $p = a+1$) si deducem astfel ca $ns - L_p(x) < ns - L_p(y) \Rightarrow R_{p+1}(x) < R_{p+1}(y)$, deci

$$\begin{cases} L_k(x) < L_k(y) & \forall 1 \leq k \leq p-2 \\ R_k(x) \leq R_k(y) & \forall p+1 \leq k \leq n \end{cases} \quad \text{adica } x \prec_{p-1} y$$

Cum sumele $L_k (1 \leq k \leq p-2)$ sunt toate distincte vom putea aplica lema 21 $A1)$ sau $B1)$ pentru a gasi o transformare stricta $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ cu $z \succcurlyeq_{p-1} x$.

□

THEOREM 16. *Fie $x, y \in A_S$ cu $x \trianglelefteq y$ iar $x_1 < y_1$. Atunci exista o transformare stricta $z = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y]$ cu $x \trianglelefteq z$.*

Proof. Rezulta evident din lema 21. □

4.3. Karamata pentru S-sisteme

THEOREM 17. *Fie $S(e,s,k,3)$ un sistem 2-convex (sau 2-concav) nevid cu e derivabila pe $\mathring{I}_S$ si $f : I_S \to \mathbb{R}$ strict 3-convexa relativ la e. Atunci*

$$\forall x, y \in A_S,\ \ x_1 < y_1 \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) < f(y_1) + f(y_2) + f(y_3)$$

Proof. Cum f este strict relativ 3-convexa la e $\Rightarrow$ $\exists g : J \to \mathbb{R}$ strict convexa cu $e'(\mathring{I}_S) \subset J$ astfel incat $f' = g \circ e'$.

Caz 1. (S) e sistem 2-convex. Vom demonstra acest caz folosind o schema de demonstratie similara celei din [1] sau [2], adaptata situatiei mai generale de aici.

Din teoremele 9 si 10 stim ca $\exists! u : I_1 \to I_2, v : I_1 \to I_3$ continue pe I_S, derivabile pe $\mathring{I}_S$, bijective, strict monotone (u descrescator, v crescator) si astfel incat $A_S = \{(t, u(t), v(t)) | t \in I_1\}$. Putem, desigur, presupune (S) netrivial, caz in care (vezi

Remark 5) $\mathring{I}_k \neq \emptyset$ $(k=1,2,3)$ si $\forall x \in A_S$ cu $x_1 \in \mathring{I}_1 \ \Rightarrow \ x_2 = u(x_1) \in \mathring{I}_2$, $x_3 = v(x_1) \in \mathring{I}_3$ iar $x_1 < x_2 < x_3$. Pentru un astfel de $x_1 \in \mathring{I}_1$ vom putea scrie:

$$\begin{cases} x_1 + u(x_1) + v(x_1) = 3s \\ e(x_1) + e(u(x_1)) + e(v(x_1)) = 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x_1) + v'(x_1) = 0 \\ e'(x_1) + e'(u(x_1))u'(x_1) + e'(v(x_1))v'(x_1) = 0 \end{cases}$$

si deducem imediat ca

$$u'(x_1) = \frac{e'(x_1) - e'(x_3)}{e'(x_3) - e'(x_2)}, \quad v'(x_1) = \frac{e'(x_1) - e'(x_2)}{e'(x_2) - e'(x_3)} \tag{8}$$

Fie $S : \mathring{I}_1 \to \mathbb{R} \Rightarrow \ S(x_1) = e(x_1) + e(u(x_1)) + e(v(x_1))$. Prin derivare obtinem

$$\forall x_1 \in \mathring{I}_1, \ \ S'(x_1) = f'(x_1) + f'(u(x_1))u'(x_1) + f'(v(x_1))v'(x_1)$$

$$S'(x_1) = f'(x_1) + f'(x_2)\frac{e'(x_1) - e'(x_3)}{e'(x_3) - e'(x_2)}) + f'(x_3)\frac{e'(x_1) - e'(x_2)}{e'(x_2) - e'(x_3)} \tag{9}$$

Astfel $f'(x_k) = g(e'(x_k))$ $(k=1,2,3)$ si mai observam ca $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow e'(x_1) < e'(x_2) < e'(x_3)$ caci e' e strict crescatoare. Notand $e'(x_k) = y_k$ $(k=1,2,3)$ vom putea pune (9) sub forma

$$\frac{S'(x_1)}{(y_1 - y_3)(y_1 - y_2)} = \frac{g(y_1)}{(y_1 - y_3)(y_1 - y_2)} + \frac{g(y_2)}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} + \frac{g(y_3)}{(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}$$

Folosind stricta convexitate a lui g deducem ca membrul drept al relatiei anterioare este strict pozitiv si cum $(y_1 - y_3)(y_1 - y_2) > 0$ va rezulta ca $S'(x_1) > 0 \ \forall x_1 \in \mathring{I}_1$ deci S este strict crescatoare pe $\mathring{I}_1$ si cum S e continua pe $I_S \ \Rightarrow \ S$ e strict crescatoare pe I_S si deci $\forall x, y \in A_S, \ \ x_1 < y_1 \Rightarrow S(x_1) < S(x_2) \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) < f(y_1) + f(y_2) + f(y_3)$.

Caz 2. (S) e sistem 2-concav, deci acum e este functie strict concava pe I_S. Consideram sistemul dual $S'(\omega, s, k', 3)$ unde $k' = -k$ iar $\omega : I_S \to \mathbb{R}, \ \ \omega = -e$ este strict convexa si evident $A_S = A_{S'}$.

Stim deci ca $\exists g : J \to \mathbb{R}$ strict convexa cu $e'(\mathring{I}_S) \subset J$ astfel incat $f' = g \circ e'$. Consideram $g_1 : -J \to \mathbb{R}, \ \ g_1(y) = g(-y)$ si e clar ca si g_1 este strict convexa iar $f'(x) = g(e'(x)) = g_1(-e'(x)) = g_1(\omega'(x))$, deci $f' = g_1 \circ \omega'$.

Putem astfel aplica cazul 1 sistemului (S') si deci $\forall x, y \in A_S = A_{S'}, \ \ x_1 < y_1 \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) < f(y_1) + f(y_2) + f(y_3)$. □

THEOREM 18. *Fie $S(e, s, k, n)$ un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu e derivabila pe $\mathring{I}_S$ si $f : I_S \to \mathbb{R}$ strict 3-convexa relativ la e. Atunci*

$$\forall x, y \in A_S, \ \ x \trianglelefteq y \Rightarrow E_f(x) \leq E_f(y) \tag{10}$$

unde $E_f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$. Egalitatea area loc doar daca $x = y$.

Proof. Vom demonstra mai intai prin inductie dupa n inegalitatea (10) apoi vom analiza cazul de egalitate.

Daca $n=3$ atunci $x \preccurlyeq_p y \Rightarrow x_1 \le y_1$ (conform 16) iar inegalitatea (10) va rezulta aplicand direct teorema 17.

Sa presupunem acum $n>3$

Caz 1) $x_1 = y_1 \overset{def}{=} a$. Fie $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $y' = (y_2, \ldots, y_n)$. E clar (conform lemei 17) ca $x' \trianglelefteq y'$ si ca $x', y' \in A_{S'}$ unde $S'(e, s', k', n-1)$ e definit prin

$$\begin{cases} x'_1 + \ldots + x'_{n-1} = ns - a = (n-1)s' \\ e(x'_1) + \ldots + e(x'_{n-1}) = nk - e(a) = (n-1)k' \\ x'_1 \le x'_2 \le \ldots \le x'_{n-1} \end{cases}$$

Prin inductie $E_f(x') \le E_f(y') \ \Rightarrow\ E_f(x) = f(x_1) + E_f(x') \le f(y_1) + E_f(y') = E_f(y)$.

Caz 2). $x_1 \neq y_1$, adica (conform lemei 16) $x_1 < y_1$

Fie $M_y = \{z \in A_S | x \trianglelefteq z \text{ iar } E_f(z) \le E_f(y)\}$, $\lambda = \inf\{z_1 | z \in M_y\}$ si $(z^m)_{m\ge1} \subset M_y$ cu $z_1^m \to \lambda$. Cum A_S e compacta deducem $(z^m)_{m\ge1}$ are subsiruri convergente si, ca sa nu complicam notatiile, vom presupune ca $(z^m)_{m\ge1}$ e convergent la un $\tilde{z} \in A_S$. Observam ca $\tilde{z}_1 = \lambda \ge x_1$ (caci fiecare $z^m \trianglerighteq x$ si deci, conform 16, $z_1^m \ge x_1$).

Vom arata ca $\tilde{z} \in M_y$. Stim ca $E_f(z^m) \le E_f(y)\ \forall m \ge 1$ si folosind continuitatea lui f deducem ca $E_f(\tilde{z}) \le E_f(y)$. Ramane sa aratam ca $x \trianglelefteq \tilde{z}$. Dar $x \trianglelefteq z^m \Rightarrow \exists 1 \le p_m \le n-1$ cu $x \preccurlyeq_{p_m} z^m$ si e clar ca vom gasi o valoare p care se repeta de o infinitate de ori, deci gasim un subsir $(m_l)_{l\ge1}$ astfel incat $x \preccurlyeq_p z^{m_l}$ pentru orice $l \ge 1$. Dar

$$x \preccurlyeq_p z^{m_l} \Leftrightarrow \begin{cases} L_k(x) \le L_k(z^{m_l}) & \forall 1 \le k \le p-1 \\ R_k(x) \le R_k(z^{m_l}) & \forall p+2 \le k \le n \end{cases}$$

si trecand la limita dupa l vom deduce ca $x \preccurlyeq_p \tilde{z}$, deci $x \trianglelefteq \tilde{z}$. In concluzie, $\tilde{z} \in M_y$.

Vom arata mai departe ca $\tilde{z}_1 = x_1$. Daca, prin absurd, $\tilde{z}_1 > x_1$ atunci, folosind faptul ca $x \trianglelefteq \tilde{z}$ vom putea aplica teorema 16 si vom gasi astfel o transformare stricta $w = T_\varepsilon^-(1, i, i+1)[\tilde{z}]$ cu $x \trianglelefteq w$. Observam insa ca $E_f(w) < E_f(\tilde{z})$ caci aceasta revine la $f(w_1) + f(w_i) + f(w_{i+1}) < f(\tilde{z}_1) + f(\tilde{z}_i) + f(\tilde{z}_{i+1})$, adevarat conform teoremei 17 caci $w_1 < \tilde{z}_1$. Astfel $E_f(w) < E_f(\tilde{z}) \le E_f(z) \ \Rightarrow\ w \in M_y$. Dar $w_1 < \tilde{z}_1 = \lambda$ ceea ce contrazice minimalitatea lui λ.

Deci $\tilde{z}_1 = x_1$. Dar $x \trianglelefteq \tilde{z}$ si procedand exact ca in cazul 1 deducem ca $E_f(x) \le E_f(\tilde{z})$ si cum $E_f(\tilde{z}) \le E_f(y)$ am demonstrat astfel inegalitatea (10).

Sa analizam acum cazul de egalitate. Vom arata ca daca $x \prec_p y$ (strict) atunci $E_f(x) < E_f(y)$. Fie r un prim indice $1 \le r \le p$ cu proprietatea $x_r < y_r$ (v. lema 19), deci $x_i = y_i\ \ \forall 1 \le i \le r-1$. Fie $x' = (x_r, \ldots x_n)$, $y' = (y_r, \ldots y_n)$ si e clar ca $x', y' \in A_{S'}$ unde $S'(e, s', k', n')$ e definit prin

$$\begin{cases} x'_1 + \ldots + x'_{n'} = ns - x_1 - \ldots - x_{r-1} = n's' \\ e(x'_1) + \ldots + e(x'_{n'}) = nk - e(x_1) - \ldots - e(x_{r-1}) = n'k' \qquad \text{iar } n' = n - r + 1 \\ x'_1 \le x'_2 \le \ldots \le x'_{n'} \end{cases}$$

Folosind lema 17 $\Rightarrow$ $x' \trianglelefteq y'$. Observam ca $E_f(y) - E_f(x) = E_f(y') - E_f(x')$, deci e suficient sa aratam ca $E_f(y') - E_f(x') > 0$. Deoarece $x'_1 = x_r < y_r = y'_1$ vom gasi, conform teoremei 16 aplicata lui (S') o transformare stricta $z' = T_\varepsilon^-(1,i,i+1)[y']$ cu $x' \trianglelefteq z'$. Dar

$$E_f(y') - E_f(z') = f(y'_1) + f(y'_i) + f(y'_{i+1}) - (f(z'_1) + f(z'_i) + f(z'_{i+1})) > 0$$

conform teoremei 17, caci $z'_1 < y'_1$. Deci $E_f(y') > E_f(z')$ dar $E_f(z') \geq E_f(x')$ conform inegalitatii (10) demonstrata anterior si astfel $E_f(y') - E_f(x') > 0$. $\square$

THEOREM 19. (extension of the V. Cartoaje equal variable theorem) *Fie $S(e,s,k,n)$ un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu e derivabila pe $\mathring{I}_S$, $f : I_S \to \mathbb{R}$ strict 3-convexa relativ la e. Atunci $\forall x \in A_S$ are loc inegalitatea*

$$E_f(\omega_L) \leq E_f(x) \leq E_f(\omega_R)$$

unde $E_f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ iar ω_L si ω_R sunt polii sistemului S. Egalitatea are loc doar daca $x = \omega_L$ sau $x = \omega_R$

Proof. Rezulta direct din teoremele 15 si 18. $\square$

REMARK 10. Teoremele originale ale lui V. Cartoaje corespund in linii mari cazurilor particulare

(a) $e : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ e(x) = x^r,\ \ r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (vezi [1])

(b) $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ e(x) = x^n,\ \ n$ numar natural par (vezi [2])

REMARK 11. Fie $S(e,s,k,n)$ este un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu e derivabila pe $\mathring{I}_S$. Putem extinde teoremele anterioare considerand in loc de E_f clase mai generale de functii. Mai precis, vom spune ca $E : I_S^3 \to \mathbb{R}$ satisface conditia Schur-Ostrowski (SO) in raport cu $S(e,s,k,n)$ daca E este continua pe I_S, derivabila pe $\mathring{I}_S^n$ si verifica conditia:

$$\left[\frac{\partial_i E(x) - \partial_j E(x)}{e'(x_i) - e'(x_j)} - \frac{\partial_k E(x) - \partial_j E(x)}{e'(x_k) - e'(x_j)}\right](e'(x_i) - e'(x_k)) > 0 \ \forall x \in \mathring{I}_S^n, x_i \neq x_j \neq x_k \quad (11)$$

Daca $S(e,s,k,n)$ este un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu e derivabila pe $\mathring{I}_S$ si $f : I_S \to \mathbb{R}$ strict 3-convexa relativ la e putem arata ca E_f satisface intr-adevar (SO) in raport cu (S). Stim ca $f' = g \circ e'$ (g strict convexa) si observam ca $\partial_l E_f(x) = f'(x_l) = g(e'(x_l))$, $l = 1,2,3$ si deci, notand $y_l = e'(x_l)$ conditia (11) devine

$$\left[\frac{g(y_i) - g(y_j)}{y_i - y_j} - \frac{g(y_k) - g(y_j)}{y_k - y_j}\right](y_i - y_k) > 0$$

adevarat caci g fiind strict convexa $\Rightarrow$ primul factor are semnul lui $(y_i - y_k)$.

Daca $S(e,s,k,3)$ este un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu e derivabila pe $\mathring{I}_S$ iar $E : I_S^3 \to \mathbb{R}$ satisface (SO) in raport cu (S) putem obtine o versiune similara pentru teorema 17. Demonstratia este in linii mari aceeasi. Definim analog $S : \mathring{I}_1 \to \mathbb{R}$ data de $S(x_1) = E(x_1, u(x_1), v(x_1)) \Rightarrow S'(x_1) = \partial_1 E(x) + \partial_2 E(x) u'(x_1) + \partial_3 E(x) v'(x_1)$ si folosind expresiile (8) pentru u', v' putem scrie mai departe:

$$S(x_1)\frac{e'(x_1)-e'(x_3)}{e'(x_1)-e'(x_2)} = \left[\frac{\partial_1 E(x) - \partial_2 E(x)}{e'(x_1)-e'(x_2)} - \frac{\partial_3 E(x) - \partial_2 E(x)}{e'(x_3)-e'(x_2)}\right](e'(x_1)-e'(x_3))$$

si deci, folosind conditia (11) $\Rightarrow S'(x_1) > 0$ etc.

Demonstratia teoremei 18 poate fi si ea adaptata obtinand astfel urmatoarea versiune mai generala

THEOREM A. *$S(e,s,k,n)$ este un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu e derivabila pe $\mathring{I}_S$ iar $E : I_S^3 \to \mathbb{R}$ satisface (SO) in raport cu (S) atunci:*

$$\forall x, y \in A_S, \quad x \trianglelefteq y \Rightarrow E(x) \le E(y)$$

cu egalitate doar daca $x = y$

Similar, vom obtine urmatoarea versiune pentru teorema 19

THEOREM B. *Fie $S(e,s,k,n)$ este un sistem 2-convex (sau 2-concav) cu e derivabila pe $\mathring{I}_S$ si $E : I_S^3 \to \mathbb{R}$ ce satisface (SO) in raport cu (S). Atunci $\forall x \in A_S$ are loc inegalitatea*

$$E(\omega_L) \le E(x) \le E(\omega_R)$$

unde ω_L si ω_R sunt polii sistemului S. Egalitatea are loc doar daca $x = \omega_L$ sau $x = \omega_R$.

REMARK 12. Ideea unui criteriu Schur de tipul (11) exista deja in [5] unde sunt studiate sisteme de tipul (S) in ipoteza particulara $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $e(x) = x^2$ dar cu o definitie diferita a majorizarii pe (S), mai precis $a \succ_3 b \Leftrightarrow \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{(3)} \ge 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(a_i) \ge \sum_{i=1}^n f(b_i)$.

References

[1] V. Cirtoaje, The equal variable method, J. Ineq. Pure Appl. Math. 8 (2007) 15(21).

[2] V. Cirtoaje, On the equal variables method applied to real variables, Creative Mathematics and Informatics, 24, 2(2015)

[3] P.S. Bullen, A criterion for n-convexity, Pacific J. Math., 36:81-98, 1971

[4] Rassias, Themistocles, and Hari M. Srivastava, eds. Analytic and geometric inequalities and applications. Vol. 478. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] Z, Brady, Inequalities and higher order convexity, arXiv:1108.5249, 2011

George Precupescu
e-mail: `gelprec@gmail.com`