Рисунки вместо формул?

В. Скоробогатов

mailto: vps137@yandex.ru

Несмотря на то, что, как известно, физика является экспериментальной наукой, математика безусловно играет важную роль в физике и служит в ней одним из основных инструментов. Так получается, потому что непосредственные наблюдения и эксперименты с применением изощнённой техники дают лишь факты, неполное знание об окружающем Мире, о процессах, которые происходят в Мире. Это всего лишь внешнее проявление какого-то процесса. Для того, чтобы выявить закономерности в таком процессе кроме простого сопоставления экспериментальных данных оказывается необходимыс делать предположения о причине процесса, о физике явления. Это происходит из-за того, что причина многих явлений скрыта от нашего непосредственного взора, например, она имеет внутриатомную природу или находится на недосягаемом расстоянии во Вселенной. Поэтому неизбежным является выдвижение гипотез, предположений, которые, как часто бывает, не являются логическими следствиями нашего опыта и даже могут показаться неразумными. Как говорил Н.Бор, “идея не заслуживает внимания, если она недостаточно сумасшедшая”. Конечно, это высказывание относилось к началу развития квантовой механики, когда сомнению подвергались основы физики, например, справедливость закона сохранения энергии. Но подобное воззрение, возможно, ещё более актуально в настоящее время, когда физика требует полного пересмотра – до тех пор пока не появится единая теория всего.

Математика в этом случае приходит на помощь, поскольку её инструментарий, её расчёт на математической модели позволяет проводить как бы мысленный эксперимент, заключающийся в том, что вычисления на основе гипотезы анализируются на совпадение с опытными данными реального эксперимента. В этом смысле математика представляет собой идеальное средство, потому что ошибок от её корректного использования быть не должно. Мудрые математики все, или почти все, важные теоремы, что используют физики, строго доказали. Поэтому какой бы вздорной на первый взгляд не казалась гипотеза, если следствия из неё подтверждаются на опыте, то есть основание принять гипотезу, считать предположение, лежащее в её основе, верным, провереннным. Этим самым знание о сути явления становится более полным, тайн в устройстве Мира становится меньше, открывая, однако, новые и новые загадки.

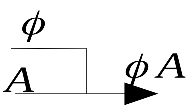
Более того, в этой ситуации математика оказалась способной навязывать свои идеи, т.е. идеи, лежащие внутри математики, физике. Это случилось естественным путём, потому что революционные идеи, возникая вначале в математике, перекидывались на физику. В первую очередь это касалось геометрии. Пример этого: возникновение неэвклидовой геометрии – Лобачевского и Римана – было несомненно революцией, которая предопределила революцию в физике, произведённую теорией относительности.

Однако использование математических выражений в физике не всегда способствует пониманию физического процесса, явления, которые формулы раскрывают. Недаром, например, при расчётах в квантовой теории поля используются диаграммы Фейнмана. Во всяком случае добиться понимания не легко и надо получить хорошее математическое образование, чтобы овладеть умением разглядывать смысл в алгебраических выражениях. Это образование дают университеты и там такой дисциплине как векторный анализ на физических факультетах уделяется немалое внимание. Иначе без соответствующей подготовки человек видит в формулах лишь какие-то каракули, по содержанию не уступающие катайским иерогрифам. Тем не менее, у студента, который осваивает векторный анализ, возможен разрыв между знанием математических приёмов и возможностью их применения в физике.

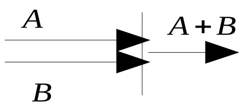
Поэтому для облегчения жизни студенту, изучающего векторный анализ, предлагаются ниже приведённые графические образы скаляров, векторов и операций с ними. Возможно, их использование способно кому-то поможет пояснить физический смысл сложных порой выражений, которые используются в разных теориях. Автор не претендует на окончательный результат. Кто-то, возможно, будет способен развить идею дальше, предложить лучший вариант. Поясню идею обозначений, их логику, хотя их наглядность и полезность, на наш взгляд, очевидны.

Обозначения

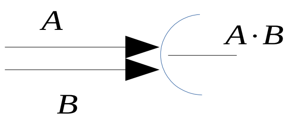
Конечно, мы все привыкли ассоциировать вектор со стрелкой. Это уже всем кажется естественным, и разработка системы графических представлений физических величин начиналась именно с вектора. Скаляр обозначает только некое численное значение. Поэтому он лишон стрелки в отличие от вектора. Это простой горизонтальный отрезок.
Кортеж, который используется в математике, и упорядоченное множество также можно отображать стрелкой. Умножение скаляра на вектор предлагается изображать так:



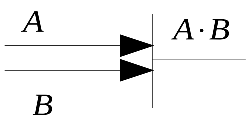
Вертикальная линия с упирающими в неё линиями и стрелками – это сумма.



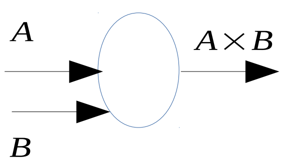
Скалярное умножение векторов схоже с дивергенцией, поэтому для его представления предлагается такое обозначение:



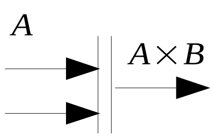
Допустимым является и более простое обозначение, как при сложении векторов, если результатом служит скаляр:



Векторное произведение связано с вращением. Например, момент импульса. Поэтому для него выбрано такое представление:



Можно также использовать более простое обозначение. Например, когда сложение векторов упирается в двойную линию, то это вектороное произведение:

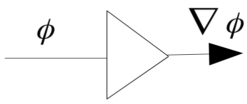


Смысл в том, что окружность или эллипс предполагается вытянутой в вертикально расположенный овал, у которого верхние и нижние части удалены.

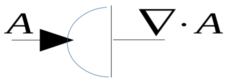
Набла

Дифференциальный оператор набла ∇ осуществляет

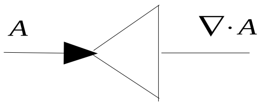
- преобразование скаляра в вектор. Это градиент



- преобразование вектора в скаляр, дивергенция

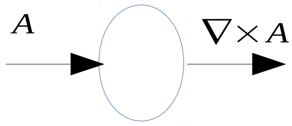


Возможна также и такая форма

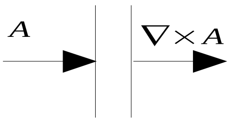


Эти формы символизируют расходимость, которой иначе называют дивергенцию в противоположность градиенту, который как бы наоборот собирает из скалярных величин вектор.

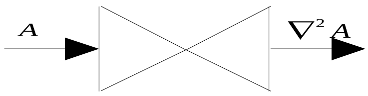
- преобразование вектора в вектор, ротор



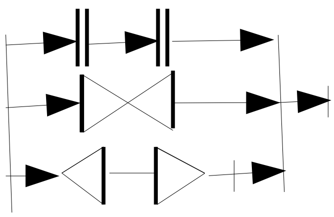
Упрощенное обозначение:



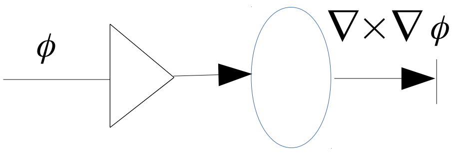
Двойное применение наблы даёт оператор Лапласа, лапласиан. Его можно представить как действие дивергенции на градиент, $\nabla^2 \rightarrow \nabla\cdot\nabla$. Он может применяться к скаляру и к вектору. Поэтому лапласиан вектора может быть представлен таким образом:

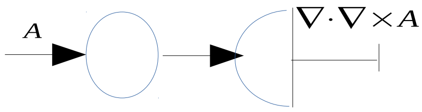


Известное тождество $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ предстанет в таком виде:



Перечёркнутый вектор означает обратную величину. Равенства нулю ротора градиента и дивергенции ротора станут выглядеть таким образом:

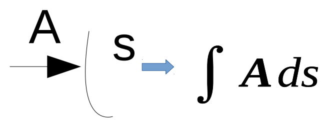




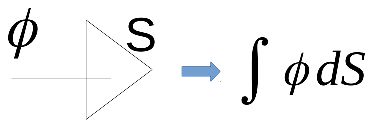
Здесь предложен способ обозначения нуля. Если за символом суммы, вертикальной линией, ничего нет, то сумма равна нулю.

Интергирование

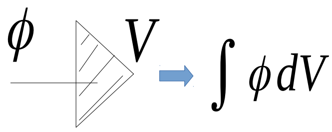
Скаляры, вектора и вообще тензоры могут участвлвать в интегрировании. Для этого необходимо, конечно, обозначить область интегрирования. Если это кривая, то естественным кажется такое представление для криволинейного интеграла:



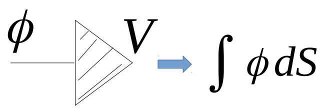
Если область интергирование – площадь, то поверхностный интергал может выглядеть так:



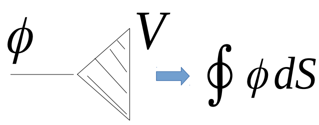
Объёмный интеграл отличается лишь штриховкой:



Если интегрирование производится по части поверхности, охватывающей некий объём, то обозначение может быть таким:



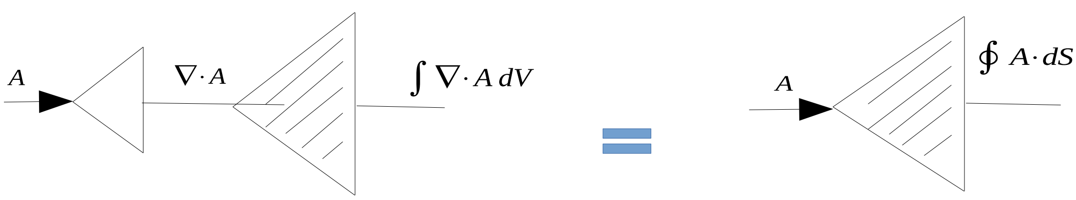
То же самое и для интеграла по всей поверхности, но чуть-чуть иначе:



Отличие также должно быть ясным из контекста.

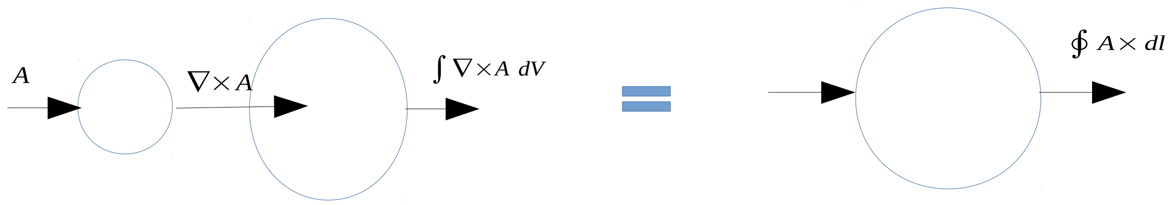
Теоремы

Теорема Гаусса-Остроградского о том, что интеграл дивергенции вектора по объёму равен потоку этого вектора через всю поверхность, представиться так - эти два рисунка дают одинаковый результат:



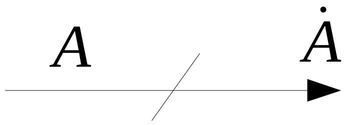
Смысл рисунка в том, что маленький треугольник, градиент, как бы растворяется в большом.

Точно также как в теореме Стокса, утверждающей, что интеграл ротора вектора по поверхности даёт циркуляцию вектора по границе поверхности.

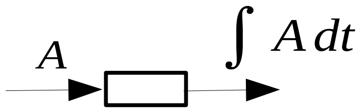


Маленький кружок без следа внедряется в большой окружности.

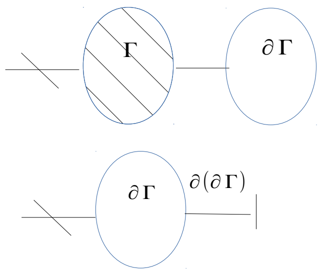
Производная по времени может изменть направление вектора. Поэтому предлагается такой простой символ:



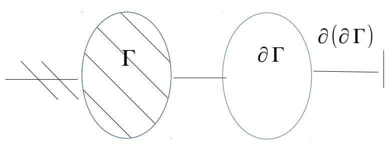
Производная по координате изображается также, наклон может быть в другую сторону. Различие должно быть ясным из контекста. Если скаляр или вектор упирается в прямоугольник, то это интеграл по времени



Основную теорему теории поля о том, что граница границы равна нулю можно выразить такими рисунками.



Его можно сделать короче:

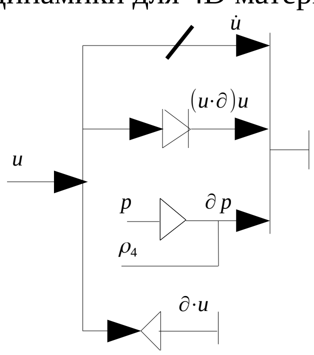


Примеры использования

В таких обозначениях система уравнени электродинамики для 4D материи [1]

$$\partial\cdot u=0$$

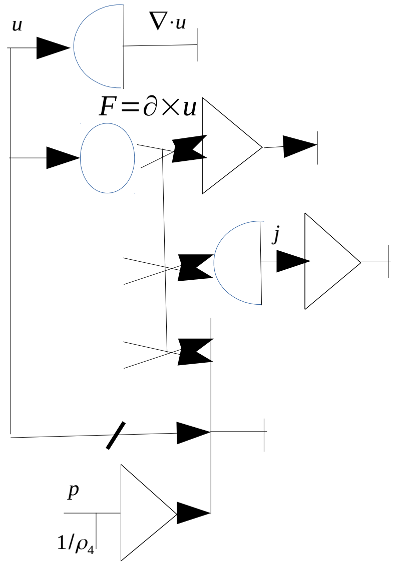
$$\dot{u}+(u\cdot\partial)u+\frac{1}{\rho_4}\partial p=0$$



Символ ∂ обозначает производную с участием четырёх измерений, а не по трёх как в набле.

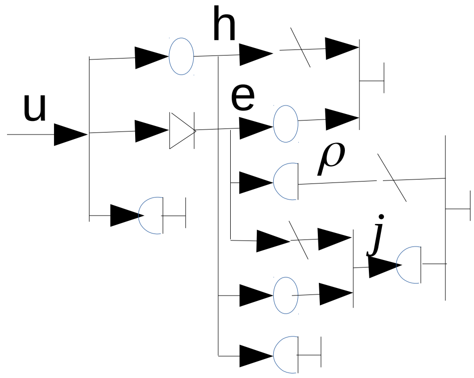
$$\partial \cdot u = 0 \qquad dF = 0$$
$$\dot{u} + F\,u + \partial\, w = 0 \qquad \partial \cdot F = 4\pi j$$

изобразиться следующим образом. Скрещеними стелками обозначен антисимметричный тензор внутреннего электромагнитного поля F , опредляемый выражением $F_{ij} = \partial_i u_j - \partial_j u_i$. Он состоит из шести компонент, которые можно представить как два трёхмерных вектора $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{h}$.

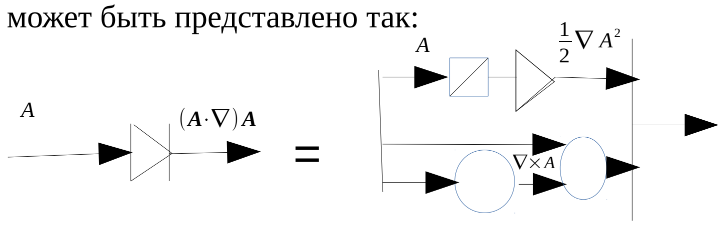


То же самое, но с использованием трёхмерных векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{h}$ и условия $\nabla \cdot \boldsymbol{u} - \partial_4 u_4 = 0$:

$$\boldsymbol{h} = \nabla \times \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{e} = \partial_4 \boldsymbol{u} - \nabla u_4$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$\nabla \times \boldsymbol{e} + \partial_4 \boldsymbol{h} = 0$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = 0$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{e} = 4\pi\rho$$
$$\nabla \times \boldsymbol{h} - \partial_4 \boldsymbol{e} = 4\pi \boldsymbol{j}$$

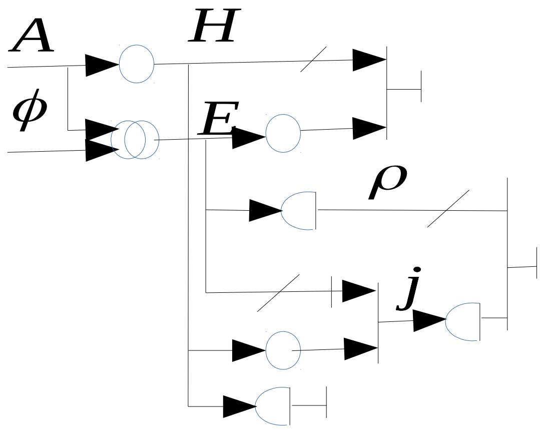


Здесь введено обозначение для составного оператора $(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$, который равен $\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{A}$, что может быть представлено так:



Квадратик естественно обозначает взятие второй степени. Диагональ в нём — половину.

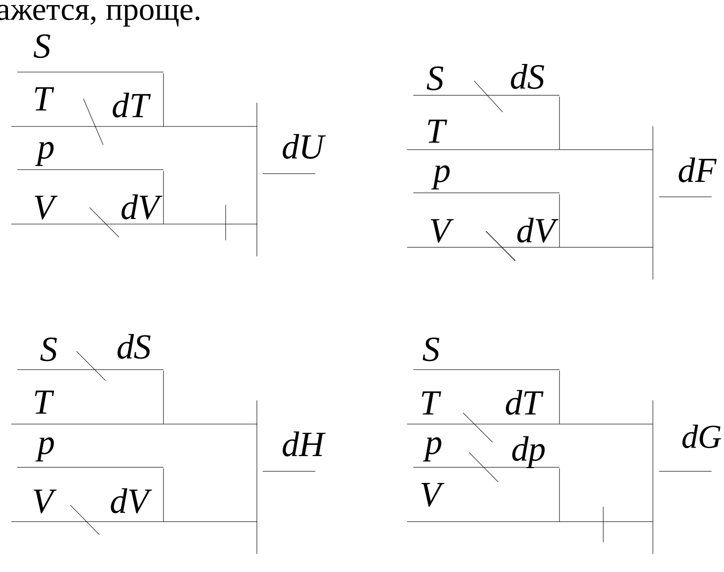
Эту схему можно сравнить со схемой, где изображены традиционные уравнения Максвелла:



В термодинамике [2] используются различные комбинации основных термодинамических величин, давления p, объёма V, температуры T и энтропии S для представления U, H, F и G - внутренней энергии, энтальпии, свободной энергии и потенциала Гиббса.

$$dU = S\,dT - pdV$$
$$dH = T\,dS + pdV$$
$$dF = T\,dS + pdV$$
$$dG = S\,dT - Vdp$$

Конечно, эти выражения, хоть они и похожи друг на друга, легко запоминаются, если есть понимание их смысла. Однако, с помощью обозначений, которые предлагаются здесь, запомнить эти выражения, как кажется, проще.



Заключение

Предложенный вид изобразительного искусства является разделом инфографики [3]. Он имеет ряд преимуществ перед традиционным представлением формул и символов. Но, конечно, предложенные картинки никогда не смогут заменить традиционные математические выражения. Они для этого и не предназначены. Их цель вспомогательная. Зрительный образ легче запоминается и с его помощью, как кажется, легче представить смысл, который находится за пределами любых формул и словесных объяснений. Картинки, правда, тоже абстракции. Их тоже необходимо интерпертировать, транслировать применительно к реальной ситуации в природе. Однако такой процесс происходит гораздо быстрее. Например, сравните формульное представление и график сложной математической функции.

Недостатком является то, что схемы надо рисовать. Однако, например, в настоящее время схожие принципиальные схемы в радиотехнике можно рисовать с помощью удобных редакторов. Поэтому возможно создание специализированного редактора или настройка имеющихся и для нашей цели. В будущем можно надеяться и на разработку анимированных рисунков.

Примеры использования предложенной техники в электродинамике и термодинамике показывают, что она способна дать общее представление о взаимосвязи различных величин, потенциалов, полей и токов, гораздо простым способом – просто окинув взглядом схему. Без излишних пояснений на многих станицах в стандартных учебниках становятся понятными исходные величины, их преобразования и конечный результат. Во многих случаях картинка, рисунок может быть более информативным, чем любое другое представление. Поэтому можно надеяться, что идея использования подобной техники может найти своё применение.

Благодарности

Выражаю благодарность С.А. Рудакову и В.П. Охезину за дельные замечания.

--

[1] В. Скоробогатов. Электродинамика в модели 4D материи. vixra.org/1312.0189
[2] В. Скоробогатов. Термодинамика в модели 4D материи. Сайт автора.
[3] Инфографика. Википедия.