Les nombres ultimes et le ratio 3/2
The ultimate numbers and the 3/2 ratio

Jean-Yves BOULAY

Abstract. According to a new mathematical definition, whole numbers are divided into two sets, one of which is the merger of the sequence of prime numbers and numbers zero and one. Three other definitions, deduced from this first, subdivide the set of whole numbers into four classes of numbers with own and unique arithmetic properties. The geometric distribution of these different types of whole numbers, in various closed matrices, is organized into exact value ratios to 3/2 or 1/1

AMS subject classification: 11A41-11R29-11R21-11B39-11C20
Keywords: prime numbers, whole numbers, Sophie Germain numbers, Symmetry.

Résumé

Selon une nouvelle définition mathématique, les nombres entiers naturels se divisent en deux ensembles dont l'un est la fusion de la suite des nombres premiers et des nombres zéro et un. Trois autres définitions, déduites de cette première, subdivisent l'ensemble des nombres entiers naturels en quatre classes de nombres aux propriétés arithmétiques propres et uniques. La distribution géométrique de ces différents types d'entiers naturels, dans de diverses matrices fermées, s'organise en ratios exacts de valeur 3/2 ou 1/1.

1. Introduction

Cette étude investit l'ensemble des nombres* entiers naturels et propose une définition mathématique permettant d'intégrer le nombre zéro (0) et le nombre un (1) à la suite des nombres dits premiers. Cet ensemble est nommé l'ensemble des nombres ultimes. L'étude de nombreuses matrices de nombres comme, par exemple, le tableau des additions croisées des dix chiffres nombres (de 0 à 9) met en évidence une organisation arithmétique et géographique non aléatoire de ces nombres ultimes. Il apparaît en outre que cette distinction des nombres ultimes et non ultimes (comme aussi d'autres distinctions proposées de différentes classes de nombres entiers naturels) est intimement liée au système décimal, notamment et principalement par une opposition quasi systématique des entités en un ratio de 3/2. Ce ratio ne peut en effet se manifester qu'en présence de multiples de cinq (10/2) entités. Aussi, c'est à l'intérieur de matrices de dix fois dix nombres que sont faîtes la majorité des démonstrations validant une opposition d'entités en divers ratios de valeur 3/2 ou/et de valeur 1/1.

* Dans les énoncés, lorsque ceci n'est pas spécifié, le terme "nombre" sous-entend toujours "nombre entier naturel". Aussi est-il convenu que le nombre zéro (0) est bien intégré à l'ensemble des nombres entiers naturels.

2. Les nombres ultimes

2.1 Définition d'un nombre ultime

Considérant l'ensemble des nombres entiers naturels, ceux-ci s'organisent en deux ensembles : les nombres ultimes et les nombres non ultimes.

Définition des nombres ultimes :

Un nombre ultime n'admet aucun diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur.

Définition des nombres non ultimes :

Un nombre non ultime admet au moins un diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur.

Remarque : un diviseur non trivial d'un nombre entier naturel n est un entier naturel diviseur de n mais distinct de n et de 1 (qui sont ses diviseurs triviaux).

2.2. Les dix premiers nombres ultimes et dix premiers nombres non ultimes

Considérant la double définition précédente, la suite des nombres ultimes s'initialise par ces dix nombres :

0 1 2 3 5 7 11 13 17 19

Considérant la double définition précédente, la suite des nombres non ultimes s'initialise par ces dix nombres :

4 6 8 9 10 12 14 15 16 18

2.3 Développement

2.3.1 Autres définitions

Soit *n* un nombre entier naturel (appartenant à ℕ*), celui-ci est ultime si aucun diviseur (nombre entier naturel) inférieur à sa valeur et autre que 1 ne le divise.

Soit *n* un nombre entier naturel (appartenant à ℕ*), celui-ci est non ultime si au moins un diviseur (nombre entier naturel) inférieur à sa valeur et autre que 1 le divise.

2.3.2 Développement

Ci-dessous sont listés, pour illustration de définition, quelques-uns des premiers nombres ultimes ou non ultimes définis plus haut, notamment les nombres particuliers zéro (0) et un (1).

- 0 est ultime : bien qu'il admette une quantité infinie de diviseurs lui étant supérieurs, puisqu'il est **le premier nombre entier naturel**, le nombre 0 n'admet aucun diviseur **lui étant inférieur**.
- 1 est ultime : puisque la division par 0 n'a pas de résultat défini, le nombre 1 n'admet aucun diviseur (nombre entier naturel) lui étant inférieur.
- 2 est ultime : puisque la division par 0 n'a pas de résultat défini, le nombre 2 n'admet aucun diviseur* lui étant inférieur.
- 4 est non ultime : le nombre 4 admet le nombre 2 (nombre lui étant inférieur) pour diviseur*.
- 6 est non ultime : le nombre 6 admet les nombres 2 et 3 (nombres lui étant inférieurs) pour diviseurs*.
- 7 est ultime : puisque la division par 0 n'a pas de résultat défini, le nombre 7 n'admet aucun diviseur* lui étant inférieur. Les diviseurs non triviaux 2, 3, 4, 5 et 6, ne peuvent le diviser en nombres entiers naturels.
- 12 est non ultime : le nombre 12 admet les nombres 2, 3, 4 et 6 (nombres lui étant inférieurs) pour diviseurs*.

Ainsi, par ces précédentes définitions, l'ensemble des nombres entiers naturels s'organise en ces deux entités :

- l'ensemble des nombres ultimes, qui est la fusion de la suite des nombres premiers et des nombres 0 et 1.

- l'ensemble de nombres non ultimes s'identifiant à la suite des nombres non premiers, déduite des nombres 0 et 1.

*diviseur non trivial.

2.4 Appellations conventionnelles

Comme "premiers" désigne des nombres premiers, il est convenu que la désignation "ultimes" désigne des nombres ultimes. Il est également convenu que la désignation "non ultimes" désigne des nombres non ultimes. D'autres désignations conventionnelles seront appliquées au différentes classes ou types de nombres entiers naturels présentés ultérieurement.

2.5 Les nombres ultimes et le système décimal

Il s'avère que le dixième nombre ultime est le nombre 19, nombre situé à la vingtième place dans la suite des entiers naturels. Cette particularité lie indéniablement les nombres ultimes et le système décimal. Ainsi les vingt premiers nombres (deux fois dix nombres) s'organisent en différents ratios 1/1 et 3/2 selon leurs différents attributs.

De par la nature du système décimal, comme l'illustre la figure 1, les dix chiffres nombres (chiffres confondus comme nombres) s'opposent au dix premiers non chiffres nombres par un ratio de 1/1. Aussi, se trouve t-il exactement le même nombre d'ultimes et de non ultimes parmi ces vingt nombres, soit dix entités de chaque catégorie. Dans un double ratio de valeur 3/2, six ultimes contre quatre se trouvent parmi les dix chiffres nombres et six non ultimes contre quatre se trouvent parmi les dix premiers non chiffres nombres.

10 chiffres nombres :	**← ratio 1/1 →**	10 non chiffres nombres :
6 ultimes	**← ratio 3/2 →**	**4 ultimes**
0 1 2 3 5 7		**11 13 17 19**
4 6 8 9		10 12 14 15 16 18
4 non ultimes	**← ratio 2/3 →**	6 non ultimes
ratio 3/2		**ratio 2/3**

Fig.1 Différenciation des 20 nombres fondamentaux selon leur digitalité ou non digitalité : les 10 chiffres nombres (chiffres confondus comme nombres) et les 10 premiers nombres non digitaux.

Comme exposé figure 2, il est aussi possible de décrire ce phénomène arithmétique par croisement des critères. Ainsi, les dix premiers ultimes s'opposent au dix non ultimes par un ratio de valeur 1/1. Aussi, se trouve t-il exactement le même nombre de chiffres nombres et de non chiffres nombres parmi ces vingt nombres. Dans un double ratio de 3/2, six chiffres nombres contre quatre se trouvent parmi les dix ultimes et six non chiffres nombres contre quatre se trouvent parmi les dix premiers non ultimes.

10 premiers nombres ultimes :	← **ratio 1/1** →	10 premiers nombres non ultimes :
6 chiffres nombres	← **ratio 3/2** →	**4 chiffres nombres**
0 1 2 3 5 7		**4 6 8 9**
11 13 17 19		10 12 14 15 16 18
4 non chiffres nombres	← **ratio 2/3** →	6 non chiffres nombres
ratio 3/2		**ratio 2/3**

Fig.2 Différenciation des 20 nombres fondamentaux selon leur ultimité ou non ultimité : 10 ultimes contre 10 non ultimes.

2.6 Les vingt nombres fondamentaux

La suite des nombres entiers naturels s'initialise donc par vingt nombres aux caractéristiques symétriquement et asymétriquement complémentaires de ratios 1/1 et 3/2 réversibles. Cette intrication transcendante des vingt premiers nombres selon leur nature ultime ou non ultime (nombres ultimes ou nombres non ultimes) et selon leur nature digitale ou non digitale (chiffres nombres ou non chiffres nombres) permet, par convention, de les qualifier de *nombres fondamentaux* parmi l'ensemble des entiers naturels. La figure 3 décrit la totale intrication de ces vingt nombres fondamentaux.

	digitalité	digitalité	
ultimité	**0 1 2 3 5 7**	4 6 8 9	non ultimité
ultimité	***11 13 17 19***	*10 12 14 15 16 18*	non ultimité
	non digitalité	*non digitalité*	

Fig.3 Intrication des 20 nombres fondamentaux selon leur ultimité ou non ultimité et leur digitalité ou non digitalité.

Ainsi, l'ensemble des vingt premiers nombres entiers naturels est simultanément constitué d'un ensemble de vingt entités dont dix nombres ultimes et dix nombres non ultimes et d'un (même) ensemble de vingt entités dont dix chiffres nombres (10 digitaux) et dix non chiffres nombres (non digitaux). Aussi, chacun de ces quatre sous ensembles intriqués de dix entités aux propriétés propres s'opposant deux à deux en ratio de valeur 1/1 est composé de deux sous ensembles s'opposant en ratio de valeur 3/2 selon les propriétés mixtes de ses composants. Cet ensemble des vingt premiers nombres est défini comme l'ensemble des nombres fondamentaux parmi les entiers naturels.

Aussi, il est donc convenu que la désignation "fondamentaux" désigne ces vingt nombres fondamentaux précédemment définis.

2.7 Les trente nombres initiaux

Aussi, selon la considération progressive de trois ensembles de 10, de 20 puis de 30 entités (les trente premiers nombres entiers naturels), le ratio entre les nombres ultimes et non ultimes progresse de 3/2 (10 nombres) à 1/1 (20 nombres) puis bascule à 2/3 (30 nombres). Ainsi (figure 4), selon que l'on considère les dix premiers, les vingt premiers puis les trente premiers entiers naturels, 6 ultimes s'opposent à 4 non ultimes, puis 10 ultimes s'opposent à 10 non ultimes puis enfin 12 ultimes s'opposent à 18 non ultimes. Au delà de ce triple ensemble, aucune organisation semblable de groupes (consécutifs) de dix entités ne s'opère. Ces trente nombres sont donc ici qualifiés d'*initiaux* parmi l'ensemble des entiers naturels.

30 nombres initiaux		
20 nombres fondamentaux		
10 chiffres nombres		
0 1 2 3 4 **5** 6 **7** 8 9	10 **11** 12 **13** 14 15 16 **17** 18 **19**	20 21 22 **23** 24 25 26 27 28 **29**
6 ultimes / 4 non ultimes : **ratio 3/2**		
10 ultimes / 10 non ultimes : **ratio 1/1**		
12 ultimes / 18 non ultimes : **ratio 2/3**		

Fig.4 Basculement du ratio 3/2 vers le ratio 2/3 selon le classement des trente premiers nombres entiers naturels et leur degré d'ultimité.

3. Matrice d'additions des dix chiffres nombres

Le tableau figure 5 représente la matrice des cent différentes sommes possibles des additions (croisées) des dix chiffres nombres (de 0 à 9) du système décimal (soit les dix premiers nombres entiers naturels). A l'intérieur de ce tableau s'opèrent de multiples phénomènes arithmétiques singuliers selon la nature ultime ou non ultime des valeurs de ces cent sommes et de leur distribution *géographique* dont principalement divers ratios de valeur 3/2 souvent transcendants.

3.1 Soixante contre quarante nombres : ratio 3/2

Parmi ces cent valeurs, se trouvent 40 nombres ultimes ($5x \rightarrow x = 8$) et consécutivement 60 non ultimes ($5y \rightarrow y = 12$). Ces deux ensembles s'opposent donc en un ratio exact de valeur 2/3.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	**0**	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
1	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
2	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**
3	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12
4	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**
5	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14
6	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15
7	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16
8	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**
9	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18

40 ultimes	**6**	**5 + 5**	**4 + 4 + 4**	**3 + 3 + 3 + 3**
	1(n)	**2(n-1)**	**3(n-2)**	**4(n-3)**
60 non ultimes	4	5 + 5	6 + 6 + 6	7 + 7 + 7 + 7
	(2n/3)	2((2n/3) + 1)	3((2n/3)+2)	4((2n/3) + 3)

Fig.5 Tableau d'additions croisées des dix chiffres nombres.

Aussi, les quantités des valeurs égales à un nombre ultime décroissent régulièrement de 6 entités (*n*) à 3 de la première colonne à la dixième. Cette décroissance se singularise par un double phénomène arithmétique : la première colonne, qui représente les additions des dix chiffres nombres avec le premier de ceux-ci (0), totalisent donc un nombre de valeur unique de 6 ultimes (*n*) ; les deux colonnes suivantes totalisent deux mêmes nombres d'ultimes et ce nombre (5) est juste inférieur d'une unité à celui de la première colonne d'addition ; les trois colonnes suivantes totalisent trois mêmes nombres (4) inférieurs d'une unité aux deux colonnes précédentes puis enfin, les quatre colonnes finales poursuivent et clôturent ce régulier arrangement arithmétique avec quatre mêmes valeurs de nombres non ultimes (3) aussi inférieurs d'une unité aux trois colonnes précédentes. Le même arrangement arithmétique s'observe pour le décompte des valeurs égales à un nombre non ultime mais dans un sens croissant des valeurs des nombres non ultimes décomptés et avec un nombre source (4) égal à $2n/3$. De par la nature de ce tableau croisé, le même phénomène s'opère naturellement de ligne en ligne.

Dans cette matrice, les colonnes d'additions se regroupent donc par une, deux, trois puis quatre entités arithmétiques. Aussi, depuis la valeur *n* (6 ultimes en première colonne d'additions), la somme totale d'ultimes est obtenue par cette formule :

$$n + 2(n - 1) + 3(n - 2) + 4(n - 3)$$

La somme totale de non ultimes est obtenue par cette autre formule :

$$(2n/3) + 2((2n/3) + 1) + 3((2n/3) + 2) + 4((2n/3) + 3)$$

Ce phénomène est directement en relation avec le système décimal s'organisant depuis dix entités : la valeur 10 est en effet égale à la somme de quatre progressives valeurs : 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

3.2 Vingt-quatre contre seize ultimes : ratio 3/2

Parmi les 50 sommes égales à l'addition des 10 chiffres nombres (de 0 à 9) avec les 5 premiers chiffres nombres (de 0 à 4), se trouvent 24 nombres ultimes et parmi les 50 sommes égales à l'addition des 10 chiffres nombres (de 0 à 9) avec les 5 derniers chiffre nombres (de 5 à 9), se trouvent 16 nombres ultimes. Ces deux groupes s'opposent donc (figure 6) dans un ratio de 3/2.

Parmi les
50 premières valeurs :

24 nombres ultimes

0	**1**	**2**	**3**	4		**5**	6	**7**	8	9
1	**2**	**3**	4	**5**		6	**7**	8	9	10
2	**3**	4	**5**	6		**7**	8	9	10	**11**
3	4	**5**	6	**7**		8	9	10	**11**	12
4	**5**	6	**7**	8		9	10	**11**	12	**13**
5	6	**7**	8	9		10	**11**	12	**13**	14
6	**7**	8	9	10		**11**	12	**13**	14	15
7	8	9	10	**11**		12	**13**	14	15	16
8	9	10	**11**	12		**13**	14	15	16	**17**
9	10	**11**	12	**13**		14	15	16	**17**	18

Parmi les
50 dernières valeurs :

16 nombres ultimes

Fig.6 Semi tableaux d'additions croisées des 10 chiffres nombres générant un ratio de valeur 3/2 de la distribution des nombres ultimes.

Parmi les 40 sommes égales à un nombre ultime, 24 correspondent (figure 7) à un chiffre nombre du système décimal (de 0 à 9) et 16 à un nombre supérieur à 9 (le dernier chiffre nombre du système décimal).

Parmi les
chiffres nombres :

24 nombres ultimes

0	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	
1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9		10
2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9		10	**11**
3	4	**5**	6	**7**	8	9		10	**11**	12
4	**5**	6	**7**	8	9		10	**11**	12	**13**
5	6	**7**	8	9		10	**11**	12	**13**	14
6	**7**	8	9		10	**11**	12	**13**	14	15
7	8	9		10	**11**	12	**13**	14	15	16
8	9		10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**
9		10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18

Parmi les
non chiffres nombres :

16 nombres ultimes

Fig.7 Tableau d'addition croisées des 10 chiffres nombres générant un ratio de valeur 3/2 de la distribution des nombres ultimes selon la nature digitale des valeurs (chiffres nombres ou non chiffres nombres).

3.3 Configurations à doubles ratios 3/2 transcendants

En scindant symétriquement la matrice d'addition des dix chiffres nombres en deux sous matrices de 60 entités *externes* contre 40 entités *internes*, telles que présentées partie gauche de la figure 8, il apparaît que les nombres non ultimes et les nombres ultimes s'opposent toujours en différents ensembles de ratios de valeur 3/2 selon leurs natures identiques ou opposées. Ceci se vérifie donc tant à l'intérieur des deux sous matrices que transversalement à ces deux sous matrices.

Sous matrice externe
de 4 fois 15 nombres
(60 sommes)

0	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
1	**2**	**3**	4				8	9	10
2	**3**	4					9	10	**11**
3	4							**11**	12
4									**13**
5									14
6	**7**							14	15
7	8	9					14	15	16
8	9	10	**11**			14	15	16	**17**
9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18

36 nombres non ultimes
24 nombres ultimes
ratio 3/2

← ratio 3/2 →

Sous matrice interne
de 4 fois 10 nombres
(40 sommes)

				5	6				
			5	6	**7**	8			
		5	6	**7**	8	9	10		
	5	6	**7**	8	9	10	**11**	12	
	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	
		8	9	10	**11**	12	**13**		
			10	**11**	12	**13**			
				12	**13**				

24 nombres non ultimes
16 nombres ultimes
ratio 3/2

← ratio 3/2 →
← ratio 3/2 →

Sous matrice interne
de 4 fois 15 nombres
(60 sommes)

				4	**5**				
			4	**5**	6	**7**			
		4	**5**	6	**7**	8	9		
	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	
4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**
5	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14
	7	8	9	10	**11**	12	**13**	14	
		9	10	**11**	12	**13**	14		
			11	12	**13**	14			
				13	14				

36 nombres non ultimes
24 nombres ultimes
ratio 3/2

← ratio 3/2 →

Sous matrice externe
de 4 fois 10 nombres
(40 sommes)

0	**1**	**2**	**3**			6	**7**	8	9
1	**2**	**3**					8	9	10
2	**3**							10	**11**
3									12
6									15
7	8							15	16
8	9	10					15	16	**17**
9	10	**11**	12			15	16	**17**	18

24 nombres non ultimes
16 nombres ultimes
ratio 3/2

← ratio 3/2 →
← ratio 3/2 →

Fig.8 Sous matrices externes et internes de 60 contre 40 nombres générant des ensembles de nombres s'opposant en ratios transcendants de valeur 3/2 selon l'ultimité ou non ultimité de leur composants.

Aussi, les mêmes phénomènes s'observent en considérant deux sous matrices de 60 entités *internes* contre 40 entités *externes* telles que présentées en partie droite de la figure 8. Enfin, se produisent encore les même phénomènes en considérant deux sous matrices de 60 entités *géographiquement situées nord-ouest* et de 40 entités *géographiquement situées sud-est* telles que présentées figure 9.

Sous matrice *nord-ouest* de 4 fois 15 nombres (60 sommes)	**← ratio 3/2 →**	**Sous matrice *sud-est* de 4 fois 10 nombres** (40 sommes)

0	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
1	**2**	**3**	4		6	**7**	8	9	
2	**3**	4			**7**	8	9		
3	4				8	9			
4					9				
5	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14
6	**7**	8	9		**11**	12	**13**	14	
7	8	9			12	**13**	14		
8	9				**13**	14			
9					14				

← ratio 3/2 →

			5				10
		5	6			10	**11**
	5	6	**7**		10	**11**	12
5	6	**7**	8	10	**11**	12	**13**
			10				15
		10	**11**			15	16
	10	**11**	12		15	16	**17**
10	**11**	12	**13**	15	16	**17**	18

36 nombres non ultimes	**← ratio 3/2 →**	24 nombres non ultimes
24 nombres ultimes	**← ratio 3/2 →**	**16 nombres ultimes**
ratio 3/2		**ratio 3/2**

Fig.9 Sous matrices *nord-ouest* et *sud-est* de 60 contre 40 nombres générant des ensembles de nombres s'opposant en ratios transcendants de valeur 3/2 selon l'ultimité ou non ultimité de leur composants.

4. Matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux

La matrice de 100 nombres (figure 10) des additions des dix chiffres nombres et des dix suivants, soit celle des vingt nombres fondamentaux, génère 70 non ultimes ($5x \rightarrow x = 14$) et 30 ultimes ($5y \rightarrow y = 6$). Ces deux catégories de nombres ne se distribuent pas au hasard dans cette matrice mais en arrangements arithmétique singuliers. Ainsi, les deux premières colonnes d'additions totalisent chacune 6 non ultimes et 4 ultimes ; les deux dernières totalisent chacune 8 non ultimes et 2 ultimes. Les six colonnes centrales totalisent toutes les mêmes valeurs de 7 et 3 nombres respectivement non ultimes et ultimes. L'ensemble de ces six colonnes centrales opposent donc, en ratios 3/2, leur quantité de nombres non ultimes et ultimes à l'ensemble des quatre colonnes périphériques avec respectivement 42 contre 28 non ultimes et 18 contre 12 ultimes.

6 colonnes (60 sommes)	**← ratio 3/2 →**	**4 colonnes (40 sommes)**
42 non ultimes	**← ratio 3/2 →**	28 non ultimes
18 ultimes	**← ratio 3/2 →**	**12 ultimes**

	+	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
	0	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**
	1	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
	2	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20	21
	3	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20	21	22
	4	14	15	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**
	5	15	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24
	6	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24	25
	7	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24	25	26
	8	18	**19**	20	21	22	**23**	24	25	26	27
	9	**19**	20	21	22	**23**	24	25	26	27	28
70 non ultimes		6	6	7	7	7	7	7	7	8	8
30 ultimes		**4**	**4**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**2**	**2**

42 non ultimes
18 ultimes

28 non ultimes
12 ultimes

Fig.10 Matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux.

4.1 Sous matrices de soixante et quarante nombres

Dans la matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux (de cent sommes) deux sous matrices opposent, partie gauche de la figure 11, leurs quantités de non ultimes réciproques et leurs quantités d'ultimes réciproques en ratios de valeur 3/2. Ces sous matrices de 60 contre 40 nombres sont elles mêmes chacune composées de deux sous zones aux nombres d'entités s'opposant en ratios de 3/2 : sous matrice de 36 + 24 entités et sous matrice de 24 + 16 entités. Cet arrangement arithmétique est une variante *géométrique* de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont ici les valeurs 6 et 4, valeurs s'opposant en le ratio 3/2. Cette identité remarquable sera plus largement investiguée chapitre 7.1 où des phénomènes très singuliers sont présentés.

Sous matrice de 36 + 24 nombres (60 sommes) $\rightarrow a^2 + ab$ ← **ratio 3/2** → **Sous matrice de 24 + 16 nombres** (40 sommes) $\rightarrow b^2 + ba$

Sous matrice de 24 + 36 nombres (60 sommes) $\rightarrow ab + a^2$ ← **ratio 3/2** → **Sous matrice de 16 + 24 nombres** (40 sommes) $\rightarrow ba + b^2$

		12	**13**	14	15	16	**17**		
		13	14	15	16	**17**	18		
		14	15	16	**17**	18	**19**		
		15	16	**17**	18	**19**	20		
14	15	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**
15	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24
16	**17**							24	25
17	18							25	26
18	**19**							26	27
19	20							27	28

10	**11**							18	**19**
11	12							**19**	20
12	**13**							20	21
13	14							21	22
		18	**19**	20	21	22	**23**		
		19	20	21	22	**23**	24		
		20	21	22	**23**	24	25		
		21	22	**23**	24	25	26		

10	**11**							18	**19**
11	12							**19**	20
12	**13**							20	21
13	14							21	22
14	15	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**
15	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24
		18	**19**	20	21	22	**23**		
		19	20	21	22	**23**	24		
		20	21	22	**23**	24	25		
		21	22	**23**	24	25	26		

		12	**13**	14	15	16	**17**		
		13	14	15	16	**17**	18		
		14	15	16	**17**	18	**19**		
		15	16	**17**	18	**19**	20		
16	**17**							24	25
17	18							25	26
18	**19**							26	27
19	20							27	28

42 non ultimes ← **ratio 3/2** → 28 non ultimes
18 ultimes ← **ratio 3/2** → **12 ultimes**
ratio 7/3 — **ratio 7/3**

42 non ultimes ← **ratio 3/2** → 28 non ultimes
18 ultimes ← **ratio 3/2** → **12 ultimes**
ratio 7/3 — **ratio 7/3**

Fig.11 Sous matrices d'addition des vingt nombres fondamentaux de 60 contre 40 nombres. Variante *géométrique* de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Cette configuration oppose les 3/5èmes supérieurs des six colonnes centrales de la matrice et les 3/5èmes inférieurs des quatre colonnes périphériques aux 2/5èmes réciproques des colonnes considérées. Aussi, en partie droite de la figure 11, la configuration miroir verticale à cet arrangement génère les mêmes oppositions en ratios 3/2 des nombres non ultimes réciproques et des nombres ultimes réciproques de ces autres sous matrices de 60 et 40 entités.

Aussi, en mixant, figure 12, les sous matrices de 40 et 60 entités présentées figure 11 et après les avoir chacune scindées verticalement en deux parties égales de 30 et 20 entités, obtient-on de nouvelles matrices de 50 entités chacune. Dans ces configurations miroir horizontales, les non ultimes et les ultimes se répartissent en exact ratios de valeur 1/1 avec toujours 35 non ultimes contre 35 et toujours 15 ultimes contre 15. Aussi, par ce réarrangement géométrique, en plus d'être de configurations miroir horizontales, les configurations gauche deviennent miroir verticales des configurations droites et réciproquement.

Configurations mixtes miroir :

sous matrice de 4 demi zones mixtes (50 nombres) ← **ratio 1/1** → **sous matrice de 4 demi zones mixtes** (50 nombres)

		12	**13**	14				18	**19**
		13	14	15				**19**	20
		14	15	16				20	21
		15	16	**17**				21	22
14	15	16	**17**	18					
15	16	**17**	18	**19**					
16	**17**				21	22	**23**		
17	18				22	**23**	24		
18	**19**				**23**	24	25		
19	20				24	25	26		

10	**11**				15	16	**17**		
11	12				16	**17**	18		
12	**13**				**17**	18	**19**		
13	14				18	**19**	20		
					19	20	21	22	**23**
					20	21	22	**23**	24
		18	**19**	20				24	25
		19	20	21				25	26
		20	21	22				26	27
		21	22	**23**				27	28

Configurations mixtes miroir :

sous matrice de 4 demi zones mixtes (50 nombres) ← **ratio 1/1** → **sous matrice de 4 demi zones mixtes** (50 nombres)

10	**11**				15	16	**17**		
11	12				16	**17**	18		
12	**13**				**17**	18	**19**		
13	14				18	**19**	20		
14	15	16	**17**	18					
15	16	**17**	18	**19**					
		18	**19**	20				24	25
		19	20	21				25	26
		20	21	22				26	27
		21	22	**23**				27	28

		12	**13**	14				18	**19**
		13	14	15				**19**	20
		14	15	16				20	21
		15	16	**17**				21	22
					19	20	21	22	**23**
					20	21	22	**23**	24
16	**17**				21	22	**23**		
17	18				22	**23**	24		
18	**19**				**23**	24	25		
19	20				24	25	26		

35 non ultimes ← **ratio 1/1** → 35 non ultimes
15 ultimes ← **ratio 1/1** → **15 ultimes**
ratio 7/3 — **ratio 7/3**

35 non ultimes ← **ratio 1/1** → 35 non ultimes
15 ultimes ← **ratio 1/1** → **15 ultimes**
ratio 7/3 — **ratio 7/3**

Fig.12 Sous matrices mixtes miroir d'additions des vingt nombres fondamentaux de 50 contre 50 nombres.

4.2 Matrices concentriques et excentriques

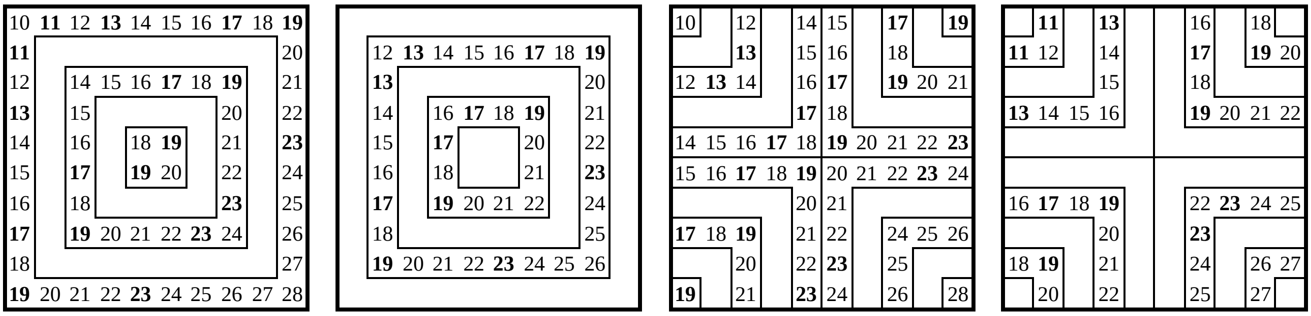
Dans cette matrice des cent additions des vingt fondamentaux, des arrangements plus sophistiqués opposent encore les nombres ultimes et les nombres non ultimes en exacts ratios 3/2. Ainsi, comme décrit partie gauche de la figure 13, cinq zones concentriques s'opposent, trois contre deux, dans la répartition de leur nombres ultimes et de leur nombres non ultimes en ratios 3/2. Le même phénomène se reproduit en considérant les cinq zones excentriques présentées en partie droite de la figure 13. L'excentricité de ces cinq zones est en asymétrie totale en rapport aux cinq zones concentriques initiales. Cependant, comme il en est fait la démonstration figure 15, les mêmes quantités d'ultimes (et de non ultimes) se répartissent dans les zones concentriques ou excentriques de même taille. Ces cinq anneaux concentriques (ou excentriques) sont de tailles dont les valeurs respectives augmentent régulièrement selon cet arithmétique où $x = 1$:

$$4x \rightarrow 4(x{+}2) \rightarrow 4(x{+}4) \rightarrow 4(x{+}6) \rightarrow 4(x{+}8)$$

Cet arithmétique permet, en relation avec le système décimal et par l'intercalement des anneaux incorporés, la constitution de sous matrices s'opposant, en taille, et en catégorie de nombres, en ratios de valeurs 3/2.

Configurations concentriques : | **Configurations excentriques :**

sous matrice de 3 zones concentriques (60 nombres) **← ratio 3/2 →** **sous matrice de 2 zones concentriques** (40 nombres) | **sous matrice de 3 zones excentriques** (60 nombres) **← ratio 3/2 →** **sous matrice de 2 zones excentriques** (40 nombres)



42 non ultimes **← ratio 3/2 →** 28 non ultimes | 42 non ultimes **← ratio 3/2 →** 28 non ultimes

18 ultimes **← ratio 3/2 →** **12 ultimes** | **18 ultimes** **← ratio 3/2 →** **12 ultimes**

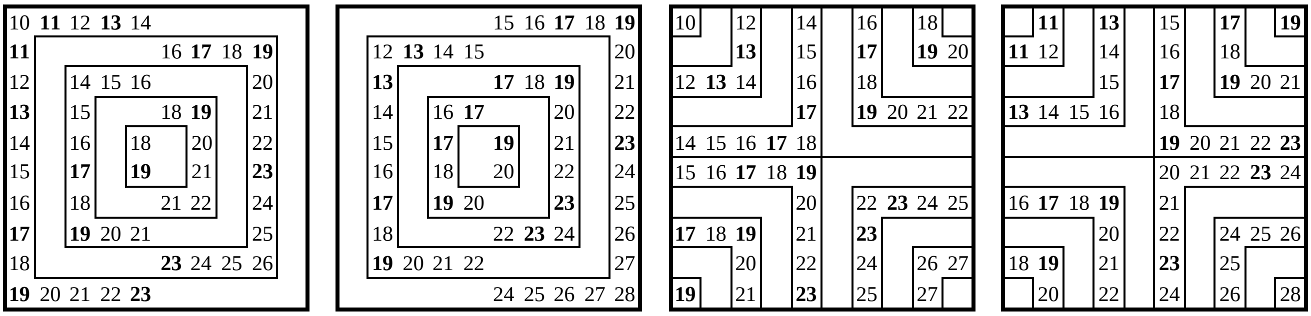
ratio 7/3 **ratio 7/3** | **ratio 7/3** **ratio 7/3**

Fig.13 Depuis la matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux, configurations concentriques et excentriques de sous matrices de 60 et 40 entités opposant leurs non ultimes et leurs ultimes en ratios 3/2.

Aussi, en mixant, figure 14, les sous matrices de 40 et 60 entités présentées figure 13 et après les avoir chacune scindées verticalement en deux parties égales de 30 et 20 entités, obtient-on de nouvelles matrices de 50 entités chacune. Dans ces configurations mixtes, les non ultimes et les ultimes se répartissent en exact ratios de valeur 1/1 avec toujours 35 non ultimes contre 35 et toujours 15 ultimes contre 15. Ces réassemblages sont exactement de même type que ceux proposés figure 12.

Configurations concentriques mixtes : | **Configurations excentriques mixtes :**

5 demi zones mixtes concentriques (50 nombres) **← ratio 1/1 →** **5 demi zones mixtes concentriques** (50 nombres) | **5 demi zones mixtes excentriques** (50 nombres) **← ratio 1/1 →** **5 demi zones mixtes excentriques** (50 nombres)



35 non ultimes **← ratio 1/1 →** 35 non ultimes | 35 non ultimes **← ratio 1/1 →** 35 non ultimes

15 ultimes **← ratio 1/1 →** **15 ultimes** | **15 ultimes** **← ratio 1/1 →** **15 ultimes**

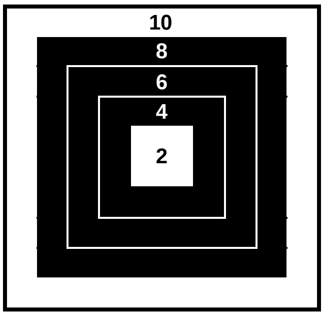
ratio 7/3 **ratio 7/3** | **ratio 7/3** **ratio 7/3**

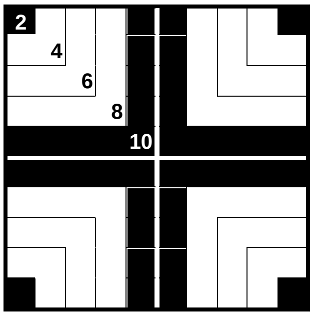
Fig.14 Depuis la matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux, configurations concentriques et excentriques mixtes de sous matrices de chacune 50 entités opposant leurs non ultimes et leurs ultimes en ratios 3/2.

4.2.1 Progressions arithmétiques

D'autres agencements, comme l'exemple figure 15, de trois contre deux zones concentriques ou trois contre deux zones excentriques génèrent les mêmes phénomènes arithmétiques de ratio 3/2 entre les quantités d'ultimes respectifs de ces ensembles de zones. Ce phénomène est directement en relation avec la régulière progression de la valeur des quantités d'ultimes de 2 à 10 selon la dimension des zones concentriques ou excentriques considérées.

Configurations concentriques	Configurations excentriques





60 nombres 42 non ultimes **18 ultimes**	← **ratio 3/2** → ← **ratio 3/2** → ← **ratio 3/2** →	40 nombres 28 non ultimes **12 ultimes**	60 nombres 42 non ultimes **18 ultimes**	← **ratio 3/2** → ← **ratio 3/2** → ← **ratio 3/2** →	40 nombres 28 non ultimes **12 ultimes**

Fig.15 Régulière répartition arithmétique des nombres ultimes dans les anneaux concentriques et excentriques de la matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux. Exemple d'arrangement de ratio 3/2 (voir aussi fig.13).

Dans chacune des cinq zones concentriques de la matrice d'addition des vingt nombres fondamentaux, la quantité de nombres ultimes (x) est liée à la quantité totale de nombres (z) de cette zone par cette formule :

$$x^2 - (x - 2)^2 = z$$

Dans ces mêmes zones, la quantité de nombres non ultimes (y) est liée à la quantité de nombres ultimes (x) par cette formule :

$$x^2 - (x - 2)^2 - x = y$$

Ce phénomène reste identique pour les cinq zones symétriquement excentriques.

quantité de nombres par zone* (z)		**quantité de nombres ultimes (x)**	quantité de nombres non ultimes (y)
$x^2 - (x - 2)^2$	$= z$	$\boldsymbol{x}$	$x^2 - (x - 2)^2 - x = y$
$2^2 - (2 - 2)^2$	= 4	**2**	2
$4^2 - (4 - 2)^2$	= 12	**4**	8
$6^2 - (6 - 2)^2$	= 20	**6**	14
$8^2 - (8 - 2)^2$	= 28	**8**	20
$10^2 - (10 - 2)^2$	= 36	**10**	26

Fig.16 Relation arithmétique entre la valeur de la quantité d'ultimes (et de non ultimes) et la dimension de la zone concentrique* ou excentrique* considérée dans la matrice d'addition des vingt fondamentaux.

5. Matrice des cent premiers nombres

L'étude de la matrice des cent premiers nombres entiers naturels configurée en dix lignes de dix nombres classés de 0 à 99 révèle plusieurs phénomènes singuliers selon les différentes classifications considérées des entités qui la composent. Ces phénomènes seront introduits dans différents chapitres dont, pour débuter, ce chapitre distinguant les couples de nombres à ultimes de ceux sans ultimes.

5. 1 Nombres ultimes et couples de nombres

Dans la matrice des cent premiers nombres, 25 couples de nombres adjacents incluant au moins un ultime s'opposent, dans un ratio exact de 1/1, à 25 autres couples n'en incluant aucun. Depuis le couple de nombres 0-1 vers le couple de nombres 98-99, ces 50 couples sont toujours formés de deux nombres consécutifs comme illustré figure 17. Bien que 27 nombres ultimes soient présents dans la suite des 100 premiers nombres, seul 25 couples intégrant au moins un ultime émergent dans cette matrice. Ceci est dû au fait que les quatre premiers nombres ultimes sont aussi les quatre premiers nombres entiers naturels et donc qu'ils soient consécutifs, le premier nombre non ultime (4) étant en cinquième position dans la suite des nombres. Aussi, seuls ces quatre ultimes sont consécutifs.

5. 1.1 Deux fois vingt-cinq couples de nombres

Comme illustré figure 17, il s'avère que les 25 couples avec ultimes et les 25 couples sans ultimes s'opposent en ratios 3/2 transcendants selon qu'ils soient issus de la partie supérieure ou de la partie inférieure de la matrice des cent premiers nombres. Ainsi, parmi les 25 premiers couples, dans un ratio de 3/2, 15 sont constitués d'ultimes et 10 de non ultimes et parmi les 25 derniers couples, dans un ratio inverse de 2/3, 10 sont constitués d'ultimes et 15 de non ultimes.

15 couples avec ultimes ← **ratio 3/2** → 10 couples sans ultimes

↑ **ratio 3/2** ↓ ↑ **ratio 2/3** ↓

10 couples avec ultimes ← **ratio 2/3** → 15 couples sans ultimes

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	8	9
10	**11**	**12**	**13**	14	15	**16**	**17**	**18**	**19**
20	21	**22**	**23**	24	25	26	27	**28**	**29**
30	**31**	32	33	34	35	**36**	**37**	38	39
40	**41**	**42**	**43**	44	45	**46**	**47**	48	49
50	51	**52**	**53**	54	55	56	57	**58**	**59**
60	**61**	62	63	64	65	**66**	**67**	68	69
70	**71**	**72**	**73**	74	75	76	77	**78**	**79**
80	81	**82**	**83**	84	85	86	87	**88**	**89**
90	91	92	93	94	95	**96**	**97**	98	99

25 couples avec ultimes
25 couples sans ultimes

Fig.17 Distribution des 25 couples avec ultimes et des 25 couples sans ultime dans la matrice des cent premiers nombres.

5. 1.2 Intrication des couples de nombres

Aussi, pour chacune des deux parties supérieures et inférieures de cette matrice, leur scission en deux ensembles de 3 et 2 lignes alternées telle qu'illustré figure 18 génère une multitude de phénomènes arithmétiques intriqués se traduisant toujours en ratios de valeur 3/2 ou de ratios opposés de valeur 2/3 simultanément selon la zone considérée et la nature du couple considéré (avec ou sans ultimes).

9 couples avec ultimes
6 couples sans ultimes
ratio 3/2

← **ratio 3/2** →
← **ratio 3/2** →

6 couples avec ultimes
4 couples sans ultimes
ratio 3/2

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	8	9
20	21	**22**	**23**	24	25	26	27	**28**	**29**
40	**41**	**42**	**43**	44	45	**46**	**47**	48	49

← **ratio 3/2** →

10	**11**	**12**	**13**	14	15	**16**	**17**	**18**	**19**
30	**31**	32	33	34	35	**36**	**37**	38	39

↑ **ratio* 3/2** ↓ ↑ ratio** 2/3 ↓ ↑ **ratio* 3/2** ↓ ↑ ratio** 2/3 ↓

50	51	**52**	**53**	54	55	56	57	**58**	**59**
70	**71**	**72**	**73**	74	75	76	77	**78**	**79**
90	91	92	93	94	95	**96**	**97**	98	99

← **ratio 3/2** →

60	**61**	62	63	64	65	**66**	**67**	68	69
80	81	**82**	**83**	84	85	86	87	**88**	**89**

6 couples avec ultimes
9 couples sans ultimes
ratio 2/3

← **ratio 3/2** →
← **ratio 3/2** →

4 couples avec ultimes
6 couples sans ultimes
ratio 2/3

Fig.18 Forte intrication de la distribution des 25 couples avec ultimes et des 25 couples sans ultime dans la matrice des cent premiers nombres. Ratios entre couples respectivement **avec ultimes*** et sans ultimes**.

5. 2 Sous matrices de trente contre vingt couples de nombres

Depuis la matrice des 50 premiers couples de nombres entiers naturels, dans les sous matrices constituées de cinq zones verticalement alternés de 3/5ème de colonne (30 couples de nombres) tel que celles présentées figure 19 et dans les sous matrices complémentaires de cinq zones de 2/5ème de colonne (20 couples), les quantités de couples à ultimes et celles des couples sans ultime restent d'égales valeurs et s'opposent en ratios 3/2 aux valeurs respectives des sous matrices complémentaires.

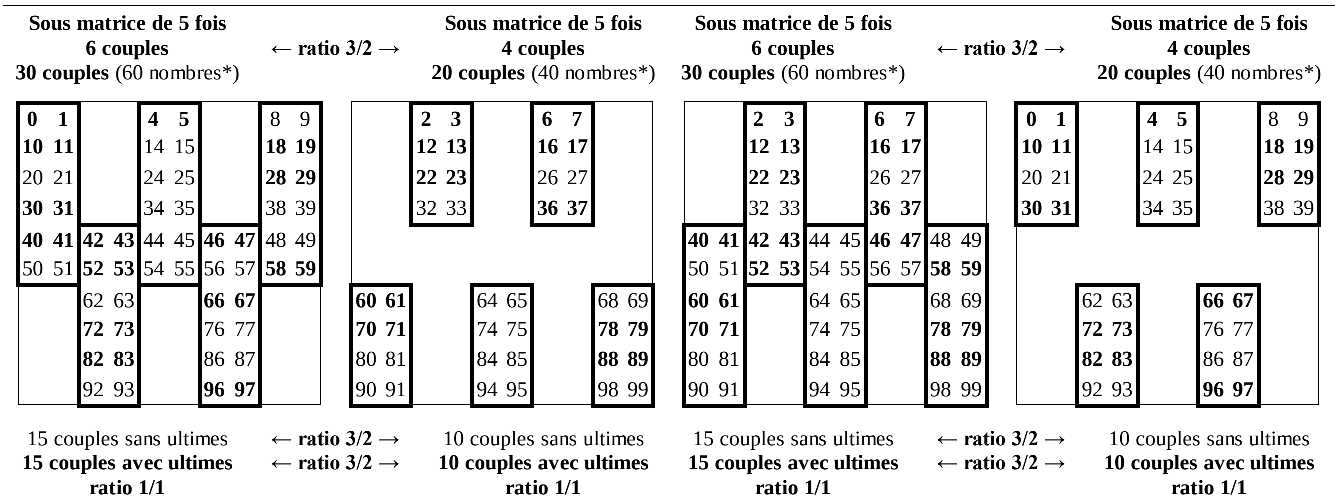


Fig.19 Egale distribution des **25 couples avec ultimes** et des 25 couples sans ultime dans des sous matrices de 30 contre 20 couples.

Aussi, toujours depuis cette même matrice de 50 couples de nombres, dans des sous matrices symétriques constituées de 10 zones de 3 couples de nombres contre 10 zones de 2 couples, telles qu'illustrées figure 20, les quantités de couples de nombres à ultimes et celles de couples sans ultime restent d'égales valeurs et s'opposent en ratios 3/2 aux valeurs respectives des sous matrices complémentaires.

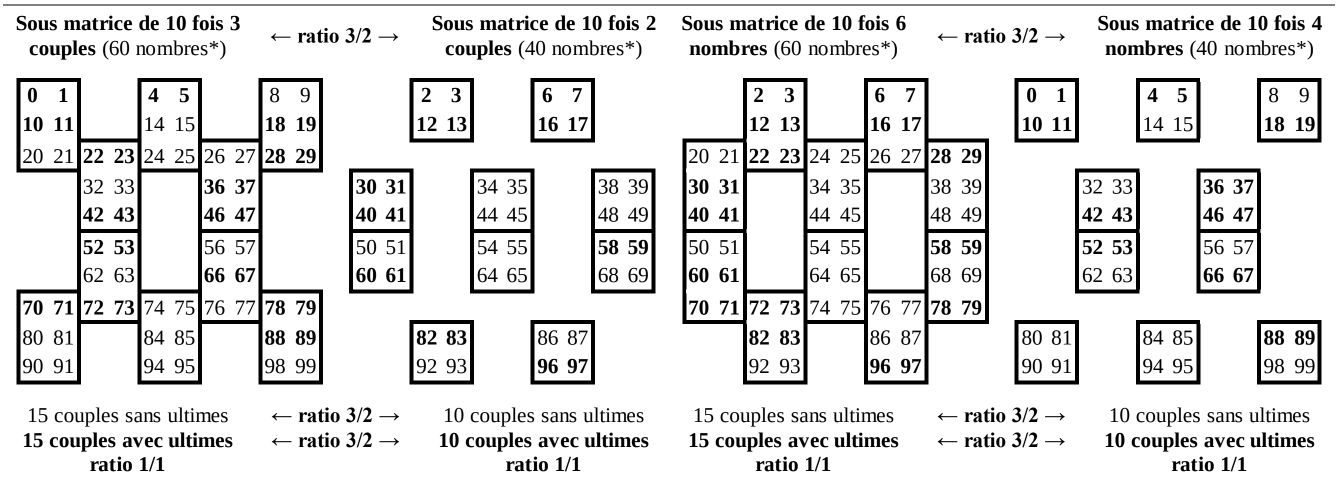


Fig.20 Egale distribution des **25 couples avec ultimes** et des 25 couples sans ultime dans des sous matrices symétriques de 30 contre 20 couples.

L'existence de ces phénomènes arithmétiques singuliers présentés dans ce chapitre renforcent grandement l'argument principal de cette étude des nombres entiers naturels de fusionner les nombres spéciaux zéro (0) et un (1) et la suite des nombres premiers en la suite des nombres ultimes. Ces phénomènes disparaissent en effet totalement sans cette fusion.

*Remarque : Les configurations des deux types de sous matrices présentées dans les figures 19 et 20 s'inscrivent encore en variantes géométriques de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec a et b de valeur respective 6 et 4 (pour des quantités d'entités de 36 + 24 et 24 + 16).

6. Les dix ultimes primordiaux

L'identification des dix premiers ultimes permet, en référence au système décimal, de les classifier de primordiaux. Cette notion de primordialité est développé chapitre 9.

6.1 Matrice d'additions des dix ultimes primordiaux

Les additions croisées des dix premiers ultimes génèrent, figure 21, une matrice de cent valeurs dont trente nombres ultimes ($5x \rightarrow x = 6$). Aussi ces additions génèrent-elles trente chiffres nombres.

30
chiffres nombres
dont :

18 ultimes
↑ ratio 3/2 ↓
12 non ultimes

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**5**	**7**					
0	**0**	**1**	**2**	**3**	**5**	**7**		**11**	**13**	**17**	**19**
1	**1**	**2**	**3**	4	6	8		**11**	**13**	**17**	**19**
2	**2**	**3**	4	**5**	**7**	9		12	14	18	20
3	**3**	4	**5**	6	8			**13**	15	**19**	21
5	**5**	6	**7**	8			10	14	16	20	22
7	**7**	8	9			10	12	16	18	22	24
					10	12	14	18	20	24	26
	11	**11**	12	**13**	14	16	18	22	24	28	30
	13	**13**	14	15	16	18	20	24	26	30	32
	17	**17**	18	**19**	20	22	24	28	30	34	36
	19	**19**	20	21	22	24	26	30	32	36	38

30 ultimes
dont :

18 ultimes
chiffres nombres
↑ ratio 3/2 ↓
12 ultimes
non
chiffres nombres

Fig.21 Matrice d'addition des dix ultimes primordiaux.

Dans cette matrice, il s'avère que ces deux notions d'ultimité et de digitalité s'inscrivent en ratios 3/2 enchevêtrés. Ainsi, parmi les 30 chiffres nombres générés, se trouvent 18 ultimes contre 12 non ultimes et parmi les 30 ultimes, 18 se trouvent être chiffres nombres et 12 non chiffres nombres. Aussi, il s'avère que l'ensemble de ces 30 nombres ultimes générés par ces additions des dix premiers ultimes primordiaux sont tous des nombres fondamentaux, notion introduite chapitre 2.5.

6.2 Sous matrices de soixante et quarante entités

Illustré partie gauche de la figure 22, depuis la matrice d'additions des dix premiers ultimes, dans deux sous matrices de 60 contre 40 entités, les ultimes comme les non ultimes, se répartissent en ratios 3/2 avec, dans l'une et l'autre sous matrice, 42 non ultimes contre 28 et 18 ultimes contre 12.

Ces sous matrices sont constituées de zones de quatre fois 9, de (deux fois) quatre fois 6 puis quatre fois 4 entités. Ces valeurs (9→6→6→4) s'opposent en ratios 3/2 transcendants comme il sera plus largement introduit au prochain chapitre 7. Un autre agencement tel que celui présenté en partie droite de la figure 22 génère les mêmes phénomènes. Ce dernier agencement très particulier des zones considérées de matrices de cent entités est plus largement explicité au prochain chapitre 7 et illustré figure 26.

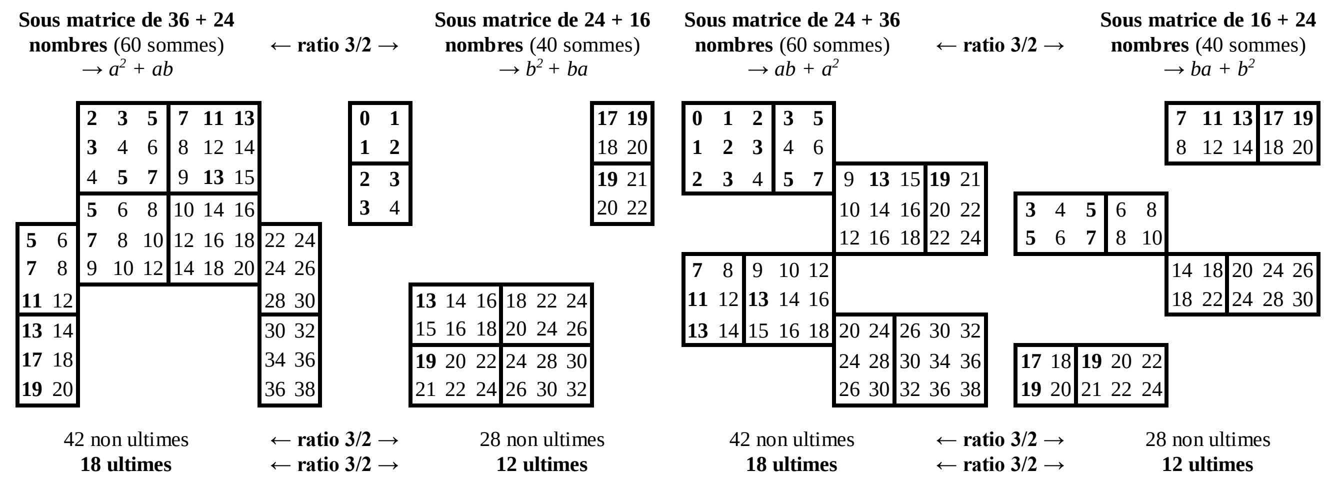


Fig.22 Sous matrices d'addition des dix ultimes primordiaux de 60 contre 40 nombres. Variante géométrique de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

6.3 Triangle de Pascal des dix ultimes primordiaux

Dans un triangle de Pascal généré depuis les dix premiers nombres ultimes (de 0 à 19), il apparaît que sur l'ensemble des 55 valeurs le constituant ($5x \rightarrow x = 11$), se trouvent 33 ultimes contre 22 non ultimes. Ceci donc dans un exact ratio de valeur 3/2. Aussi, il s'avère dans ce triangle de Pascal illustré figure 23 que la distinction des colonnes impaires et paires génère encore un ratio de 3/2 dans ces deux sous ensemble de 30 et 25 entités avec respectivement 18 ultimes contre 12 non ultimes et 15 ultimes contre 10 non ultimes.

15 ultimes		← ratio 3/2 →				10 non ultimes			
0									
1	**0**								
2	**1**	**0**							
3	**3**	**1**	**0**						
5	6	4	**1**	**0**					
7	**11**	10	**5**	**1**	**0**				
11	18	21	15	6	**1**	**0**			
13	**29**	39	36	21	**7**	**1**	**0**		
17	42	68	75	57	28	8	**1**	**0**	
19	**59**	110	143	132	85	36	9	**1**	**0**
18 ultimes		**← ratio 3/2 →**				12 non ultimes			

33 ultimes **← ratio 3/2 →** 22 non ultimes

Fig.23 Triangle de Pascal des dix ultimes primordiaux générant des ensembles et des sous ensembles opposant **les ultimes** et les non ultimes en ratios 3/2.

7. Suites de Fibonacci et nombres ultimes

Il vient d'être démontré dans les précédents chapitres, que les nombre ultimes (dont aussi les nombres zéro et un) se répartissent non aléatoirement dans des matrices plus ou moins complexes d'additions de types de nombres (chiffres nombres, fondamentaux, ultimes primordiaux, etc.) Ici, de bien plus sophistiqués arrangements de nombres vont encore faire la démonstration d'une remarquable organisation de ces nombres entiers naturels selon leur nature ultime ou non ultime.

7.1 Matrice des dix suites de Fibonacci

La création de dix suites de Fibonacci de dix nombres et dont les deux nombres initiaux sont, en première position, les dix premiers ultimes et en seconde position les nombres ultimes suivants respectifs à ces dix premiers génère une matrice de cent nombres aux propriétés remarquables en rapport à la différenciation de distribution des nombres ultimes ou non ultimes ainsi créés dans cette matrice.

Il apparaît, figure 24, dans cette matrice de cent entités, qu'exactement 50 nombres ultimes ($5x \rightarrow x = 10$) s'opposent à 50 autres non ultimes. Aussi, l'ensemble des six suites centrales (soixante nombres) totalise-il aussi un ratio exact de 1/1 entre la quantité d'ultimes et de non ultimes et cet ensemble s'oppose, dans un parfait ratio de 3/2, à celui des quatre suites périphériques totalisant également les mêmes quantités d'ultimes et de non ultimes.

0	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	8	**13**	21	34
1	**2**	**3**	**5**	8	**13**	21	34	55	**89**
2	**3**	**5**	8	**13**	21	34	55	**89**	144
3	**5**	8	**13**	21	34	55	**89**	144	**233**
5	**7**	12	**19**	**31**	50	81	**131**	212	343
7	**11**	18	**29**	**47**	76	123	**199**	322	**521**
11	**13**	24	**37**	**61**	98	159	**257**	416	**673**
13	**17**	30	**47**	77	124	201	325	526	851
17	**19**	36	55	91	146	237	**383**	620	1003
19	**23**	42	65	**107**	172	279	451	730	**1181**

50 ultimes
↑ ratio 1/1 ↓
50 non ultimes

30 ultimes
↑ ratio 1/1 ↓
30 non ultimes

← ratio 3/2 →

← ratio 3/2 →

20 ultimes
↑ ratio 1/1 ↓
20 non ultimes

Fig. 24 Matrice des 10 premiers nombres des 10 suites de Fibonacci générées depuis les 10 premiers nombres ultimes.

7.1.1 Quatre zones symétriques et identité remarquable

Une matrice de cent entités peut se subdiviser en quatre sous matrices (*zones*) de 25 entités. La valeur 25 est la première pouvant se subdiviser en quatre autres (9 + 6 + 6 + 4) générant un triple ratio de valeur 3/2. Comme illustré figure 25, la valeur 9 (3 × 3) s'oppose en ratio 3/2 à la valeur 6 (3 × 2) puis la valeur 6 (2 × 3) s'oppose à la valeur 4 (2 × 2). Ces quatre valeurs s'opposent elles-mêmes deux à deux en le ratio 15/10, extension du ratio 3/2. Cette démonstration arithmétique est une variante *géométrique* de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont ici les valeurs 3 et 2, valeurs s'opposant en le ratio 3/2.

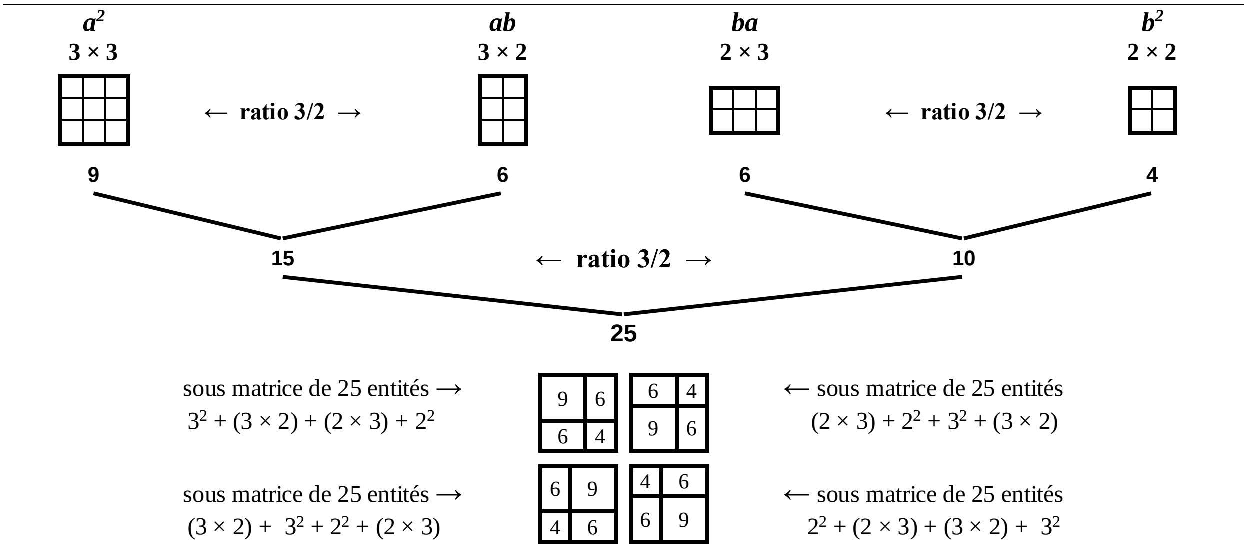


Fig. 25 Formation de quatre sous matrices de 25 entités s'inscrivant dans l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Dans cette matrice de cent entités, il est alors possible d'agencer symétriquement et asymétriquement ces quatre sous matrices en 16 zones de quatre fois (9 + 6 + 6 + 4) cases (valeurs) comme décrit en partie basse de la figure 25.

Aussi, depuis ces 16 zones (figure 25), dans cette matrice de cent entités, peut-on redéfinir quatre autres zones, schématiquement illustrées figure 26, dont une première de quatre fois neuf (36) entités, une seconde de quatre fois six (24) entités, une troisième d'à nouveau quatre fois six (24) entités puis une quatrième et dernière zone de quatre fois quatre (16) entités.

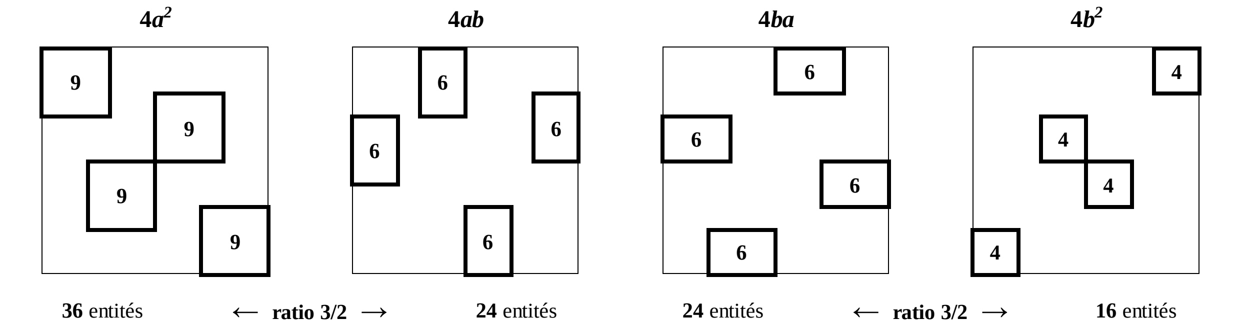


Fig. 26 Recombinaison de quatre sous matrices de 36→24→24→16 entités déduite de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Dans la matrice des dix suites de Fibonacci introduite figure 24, il est remarquable de constater que les 50 nombres ultimes et les 50 non ultimes sont toujours répartis en quantités égales dans chacune de ces quatre dernières zones définies. Ces quatre zones sont toutes, et interactivement, dans un arrangement géométrique simultanément symétrique et asymétrique tel qu'introduit figure 25 et développé figure 27.

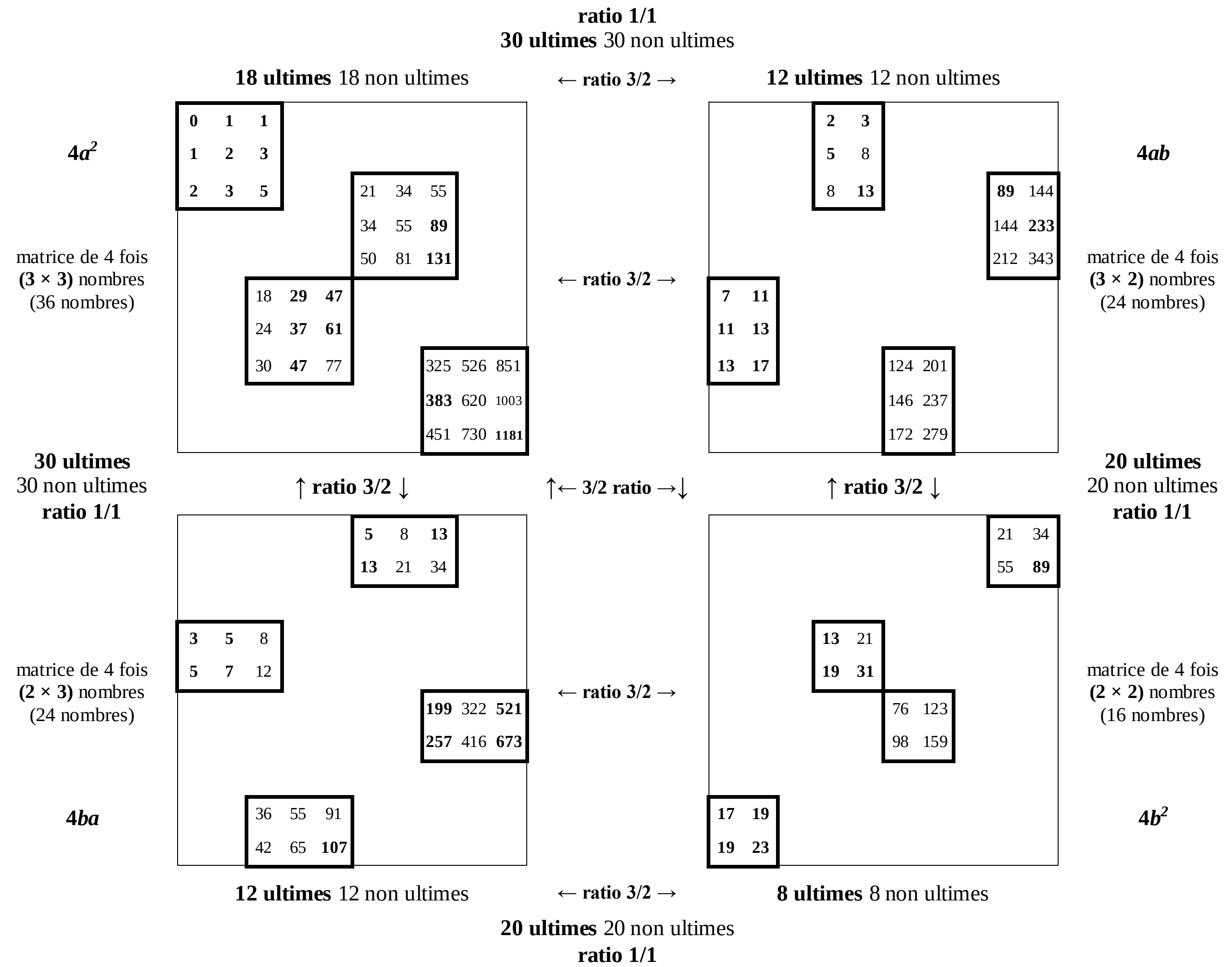


Fig. 27 Quatre sous matrices des dix suites de Fibonacci avec égale distribution des nombres ultimes et non ultimes et ratios 3/2 transcendants**.** Sous matrices s'organisant depuis l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont pour valeur 3 et 2 (voir figures 24, 25 et 26).

Aussi, de part leur particularités arithmétiques et géométriques, ces quatre zones s'agencent deux à deux, dans différentes configurations telles que celles présentées figure 28 pour générer des ensembles de nombres s'opposant toujours en le ratio 1/1 selon leur ultimité ou non ultimité et en ratio 3/2 selon leur distribution géographique.

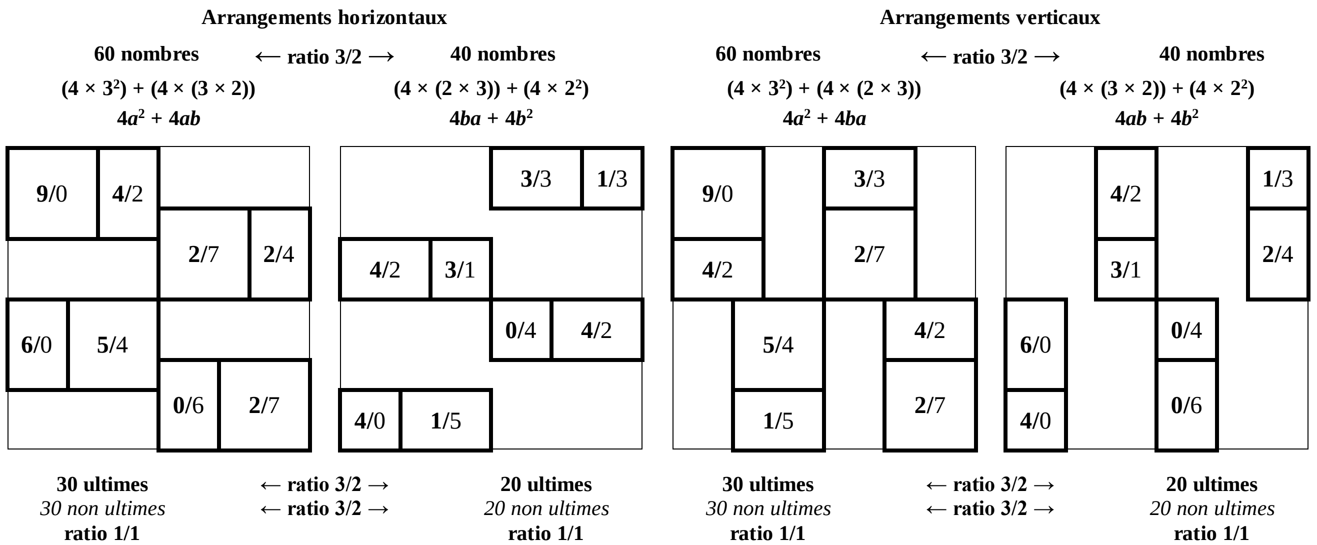


Fig. 28 Depuis la matrice des dix suites de Fibonacci, exemple d'agencements générant des ratios 1/1 et 3/2 entre les groupes de nombres ultimes et non ultimes (Selon les valeurs figure 27).

7.1.2 Autre agencement de quatre zones

Depuis la matrice des dix suites de Fibonacci, un réagencement légèrement différent des quatre sous matrices de 25 entités génère de semblable phénomènes arithmétiques. Dans ce nouvel agencement présenté figure 29, les deux sous matrices supérieures et les deux inférieures sont jumelles, donc identiques. Ces deux doubles sous matrices s'inscrivent toujours dans l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2.

sous matrice de 25 entités → $(2 \times 3) + 2^2 + 3^2 + (3 \times 2)$	6 4 9 6	6 4 9 6	← sous matrice de 25 entités $(2 \times 3) + 2^2 + 3^2 + (3 \times 2)$
sous matrice de 25 entités → $2^2 + (2 \times 3) + (3 \times 2) + 3^2$	6 9 4 6	6 9 4 6	← sous matrice de 25 entités $2^2 + (2 \times 3) + (3 \times 2) + 3^2$

Fig. 29 Autre agencement de deux doubles sous matrices de 25 entités s'inscrivant dans l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2.

Depuis ces nouvelles sous matrices de 25 entités, le regroupement, figure 29, des zones d'égales configurations (zones de 9→6→6→4 entités) génère des ensembles où les nombres ultimes et les nombres non ultimes se retrouvent répartis encore en égales quantités. Ainsi ces ensembles s'opposent aussi en ratios 3/2 selon l'ultimité et la non ultimité de leurs composants.

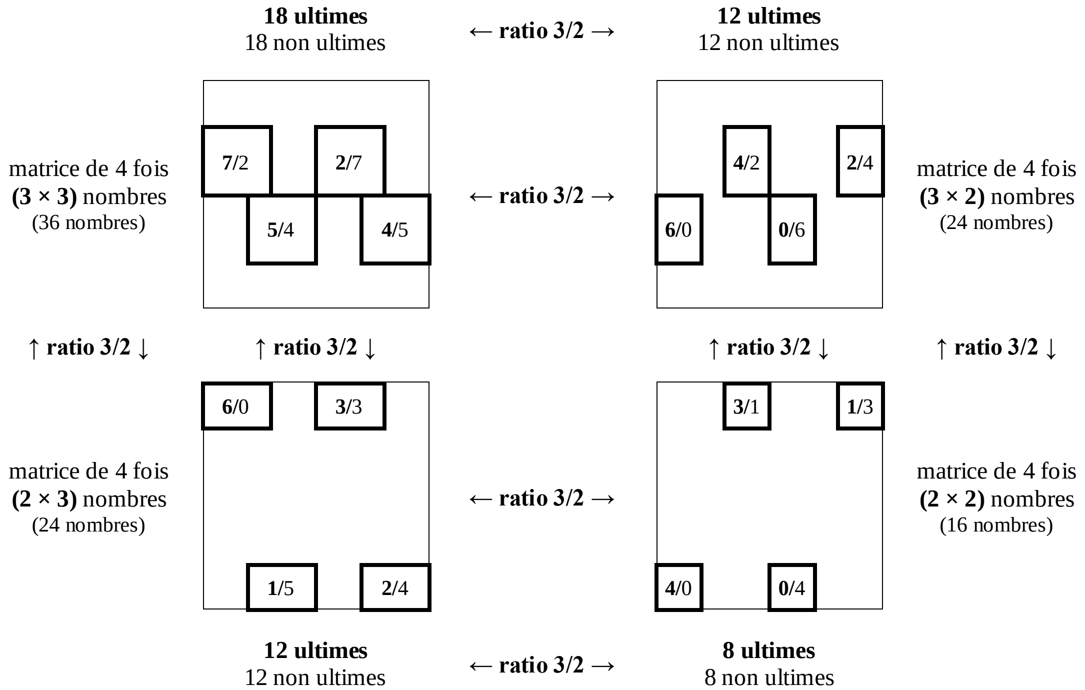


Fig. 30 Quatre sous matrices des dix suites de Fibonacci avec égale distribution des nombres ultimes et non ultimes et ratios 3/2 transcendants. Voir fig. 24 et 29.

L'opposition, présentée en introduction de chapitre figure 24, des valeurs respectives des ultimes et non ultimes des six lignes centrales et de quatre lignes périphériques de la matrice des dix suites de Fibonacci est la conséquence directe de ces autres configurations décrites figure 30 (par opposition des configurations centrales et périphériques).

7.1.3 Redéploiement de la matrice de Fibonacci

Un redéploiement de la matrice des dix suites de Fibonacci (introduite figure 24) en quatre rangées de vingt cinq entités génère encore un phénomène singulier de même nature et toujours lié à l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2. Ici chaque ligne de 25 entités est scindée en sept zones symétriques où cette identité remarquable est ainsi redéployée :

$$\rightarrow \quad (ab)^2 = b^2/2 + ba/2 + ab/2 + a^2 + ab/2 + ba/2 + b^2/2$$

Ainsi, les quantités d'entités respectives de ces sept zones sont les suivantes :

$$\rightarrow \quad (3\times2)^2 = 2 + 3 + 3 + 9 + 3 + 3 + 2$$

Cet arrangement particulier et donc le redéploiement de cette identité remarquable sera aussi opéré dans les figures 43 et 49 avec d'autres valeurs considérées.

		Matrice de 4 fois (3^2 + (3 × 2)) = 60 nombres (→ 4 fois (a^2 + ab))																						
					30 ultimes						**← ratio 1/1 →**						30 non ultimes							
0	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	8	**13**	21	34	**1**	**2**	**3**	**5**	8	**13**	21	34	55	**89**	**2**	**3**	**5**	8	**13**
21	34	55	**89**	144	**3**	**5**	8	**13**	21	34	55	**89**	144	**233**	**5**	**7**	12	**19**	**31**	50	81	**131**	212	343
7	**11**	18	**29**	**47**	76	123	**199**	322	**521**	**11**	**13**	24	**37**	**61**	98	159	**257**	416	**673**	**13**	**17**	30	**47**	77
124	201	325	526	851	**17**	**19**	36	55	91	146	237	**383**	620	1003	**19**	**23**	42	65	**107**	172	279	451	730	**1181**
					20 ultimes						**← ratio 1/1 →**						20 non ultimes							
		Matrice de 4 fois (2^2 + (2 × 3)) = 40 nombres (→ 4 fois (b^2 + ba))																						

Fig. 31 Redéploiement de la matrice de Fibonacci s'inscrivant dans l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2. Egale distribution des **ultimes** et des non ultimes dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités.

En regroupant symétriquement et depuis leur centre ces quatre rangées de nombres, tel que, depuis ce centre vers la bordure de cette nouvelle matrice, l'on isole quatre fois 9 + 6 valeurs puis quatre fois 6 + 4 entités comme illustré figure 30, se forment deux sous matrices de 60 contre 40 nombres. Dans ces deux sous matrices de ratio 3/2, les 50 ultimes et les 50 non ultimes se répartissent aussi en égales quantités et ainsi, chacune de ces deux catégories de nombres s'opposent en ratios 3/2 dans l'une et l'autre sous matrice.

7.2 Matrice de cinq suites de Fibonacci

La création de cinq suite de Fibonacci de dix nombres et dont les deux nombres initiaux sont les deux premiers chiffres nombres puis, successivement dans chaque suite, les deux suivants, génère une matrice de 50 entités dont très exactement 25 sont des nombres ultimes et 25 des non ultimes. Aussi, comme l'illustre la figure 32, ces deux catégories de nombres s'opposent en divers ratios 3/2 transcendants selon leur distribution géographique dans cette matrice.

	Matrice de 25 + 25 = 50 nombres										
	25 ultimes				**← ratio 1/1 →**			25 non ultimes			
	0	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	8	**13**	21	34	
	2	**3**	**5**	8	**13**	21	34	55	**89**	144	
25 nombres	4	**5**	9	14	**23**	**37**	60	**97**	**157**	254	25 nombres
	6	**7**	**13**	20	33	**53**	86	**139**	225	364	
	8	9	**17**	26	**43**	69	112	**181**	**293**	474	
	15 ultimes 10 non ultimes **ratio 3/2**				**← ratio 3/2 →** **← ratio 2/3 →**			**10 ultimes** 15 non ultimes **ratio 2/3**			

Fig. 32 Répartition des ultimes et des non ultimes dans la matrice de 5 suites de Fibonacci.

Ainsi, dans les cinq premières colonnes de cette matrice, dans un ratio de 3/2, 15 ultimes s'opposent à 10 non ultimes et dans un ratio inverse, 10 ultimes s'opposent à 15 non ultimes dans les cinq dernières colonnes. Ces valeurs réciproques s'opposent elles-mêmes en ratios 3/2 et 2/3 croisés selon les zones géographiques considérées de cette matrice de cinq suite de Fibonacci initialisée depuis les dix chiffres nombres.

Aussi, dans des sous matrices de trente contre vingt entités telles que présentées figure 33, les ultimes et non ultimes se répartissent en égale quantité (ratio 1/1) et s'opposent aux composants de la matrice complémentaire en exacts ratios de 3/2.

Matrice de 2 fois 15 nombres (30 nombres)										**← ratio 3/2 →**	**Matrice de 2 fois 10 nombres** (20 nombres)							
0	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	8	**13**	21	34									
2	**3**	**5**	8			34	55	**89**	144					**13**	21			
4	**5**	9					**97**	**157**	254	**← ratio 3/2 →**			14	**23**	**37**	60		
6	**7**							225	364			**13**	20	33	**53**	86	**139**	
8									474		9	**17**	26	**43**	69	112	**181**	**293**
15 ultimes 15 non ultimes **ratio 1/1**										**← ratio 3/2 →** **← ratio 3/2 →**	**10 ultimes** 10 non ultimes **ratio 1/1**							

Fig. 33 Répartition des ultimes et des non ultimes dans la matrice de 5 suites de Fibonacci.

Le même phénomène s'observe dans différentes configurations telles celles présentées figure 33 opposant des matrices de trente contre vingt entités.

Matrices de 2 fois 15 nombres (30 nombres)											**← ratio 3/2 →**	**Matrices de 2 fois 10 nombres** (20 nombres)							
0					**5**							**1**	**1**	**2**	**3**	8	**13**	21	34
2	**3**				21	34							**5**	8	**13**		55	**89**	144
4	**5**	9			**37**	60	**97**				**← ratio 3/2 →**			14	**23**			**157**	254
6	**7**	**13**	20		**53**	86	**139**	225							33				364
8	9	**17**	26	**43**	69	112	**181**	**293**	474										

↑ ratio 1/1 ↓   **↑ ratio 1/1 ↓**

0	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	8	**13**	21	34								
	3	**5**	8	**13**		34	55	**89**	144	**2**				21			
		9	14	**23**			**97**	**157**	254	4	**5**			**37**	60		
			20	33				225	364	6	**7**	**13**		**53**	86	**139**	
				43					474	8	9	**17**	26	69	112	**181**	**293**

15 ultimes	← **ratio 3/2** →	**10 ultimes**
15 non ultimes	← **ratio 3/2** →	10 non ultimes
ratio 1/1		**ratio 1/1**

Fig. 34 Répartition des nombres ultimes et non ultimes dans la matrice de 5 suites de Fibonacci.

Enfin, en isolant alternativement les six premiers nombres ou les six derniers de ces cinq suites de Fibonacci, tel qu'illustré figure 35, il s'avère que les nombres ultimes et non ultimes se répartissent encore en égales quantité et ces groupes de 15 entités s'opposent donc en exacts ratios de 3/2 aux ensembles de 10 ultimes et de 10 non ultimes des quatre dernières ou quatre premières entités alternativement isolées dans ces cinq suites.

Matrice de 5 fois 6 nombres (30 nombres)										**← ratio 3/2 →**	**Matrice de 5 fois 4 nombres** (20 nombres)							
0	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**										8	**13**	21	34
				13	21	34	55	**89**	144		**2**	**3**	**5**	8				
4	**5**	9	14	**23**	**37**					**← ratio 3/2 →**					60	**97**	**157**	254
				33	**53**	86	**139**	225	364		6	**7**	**13**	20				
8	9	**17**	26	**43**	69										112	**181**	**293**	474

15 ultimes	← **ratio 3/2** →	**10 ultimes**
15 non ultimes	← **ratio 3/2** →	10 non ultimes
ratio 1/1		**ratio 1/1**

Fig. 35 Répartition des ultimes et non ultimes dans la matrice de 5 suites de Fibonacci.

7.3 Suite de Fibonacci et triangle de Pascal

Un triangle de Pascal initialisé avec les dix premiers résultats de la suite de Fibonacci, génère 55 valeurs dont, dans un exact ratio de 3/2, 33 non ultimes s'opposant à 22 ultimes. Aussi, il s'avère, dans ce triangle de Pascal illustré figure 36, que la distinction des lignes impaires et paires génère encore un ratio de 3/2 dans ces deux sous ensembles de 30 et 25 entités avec respectivement 18 non ultimes contre 12 ultimes et 15 non ultimes contre 10 ultimes. Cette configuration est très similaire à celle introduite figure 23 chapitre 6.3 concernant un triangle de Pascal initialisé avec les dix ultimes primordiaux.

15 non ultimes
10 ultimes
ratio 3/2

1									
2	**1**								
3	**3**	**1**							
5	6	4	**1**						
8	**11**	10	**5**	**1**					
13	**19**	21	15	6	**1**				
21	32	40	36	21	**7**	**1**			
34	**53**	72	76	57	28	8	**1**		
55	87	125	148	133	85	36	9	**1**	
89	142	212	273	**281**	218	121	45	10	**1**

18 non ultimes
12 ultimes
ratio 3/2

33 non ultimes ← **ratio 3/2** → **22 ultimes**

Fig. 36 Répartition des ultimes et non ultimes dans un triangle de Pascal des 10 premiers résultats de la suite de Fibonacci.

8 Les quatre classes de nombres entiers naturels

La ségrégation des nombres entiers naturels en deux ensembles d'entités qualifiés d'ultimes et de non ultimes n'est qu'une première étape dans l'investigation de ce type de nombres. Ici est faite une plus ample exploration de cet ensemble de nombres dévoilant sont organisation en quatre sous ensembles d'entités aux propriétés propres mais interactives et aussi le double concept de *diviseur ultime* et d'*algèbre ultime*.

8.1 Quatre différents types de nombres

Depuis la définition des nombres ultimes introduite plus haut, il est possible de différencier l'ensemble des nombres entiers naturels en quatre classes finales, déduites de trois classes sources et progressivement définies selon ces critères :

Les nombres entiers naturels se subdivisent en ces deux catégories :

- **les ultimes :** Un nombre ultime n'admet aucun diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur.
- **les non ultimes** : Un nombre non ultime admet au moins un diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur.

Les nombres non ultimes se subdivisent en ces deux catégories :

- **les élevés** : Un nombre élevé est un nombre non ultime, puissance d'un nombre ultime.
- **les composés** : Un nombre composé est un nombre non ultime et non élevé admettant au moins deux différents diviseurs.

Les nombres composés se subdivisent en ces deux catégories :

- **les composés purs** : un nombre composé pur est un nombre non ultime et non élevé n'admettant aucun nombre élevé pour diviseur.
- **les composés mixtes** : un nombre composé mixte est un nombre non ultime et non élevé admettant au moins un nombre élevé pour diviseur.

Le tableau figure 37 synthétise ces différentes définitions. Il est plus amplement développé figure 38 où les interactions des quatre classes d'entiers naturels sont mises en évidences.

<table>
<tr><th colspan="4">les entiers naturels :</th></tr>
<tr><td>les ultimes :</td><td colspan="3">les non ultimes :
un nombre non ultime admet au moins un diviseur non trivial
(nombre entier naturel) lui étant inférieur</td></tr>
<tr><td rowspan="2">un nombre ultime
n'admet aucun diviseur
non trivial
(nombre entier naturel)
lui étant inférieur</td><td rowspan="2">les élevés :
un nombre élevé est un nombre
non ultime, puissance
d'un nombre ultime</td><td colspan="2">les composés :
un nombre composé est un nombre non ultime et non élevé
admettant au moins deux différents diviseurs</td></tr>
<tr><td>les composés purs :
un nombre composé pur est un
nombre non ultime et non
élevé n'admettant aucun
nombre élevé pour diviseur</td><td>les composés mixtes :
un nombre composé mixte est
un nombre non ultime et non
élevé admettant au moins un
nombre élevé pour diviseur</td></tr>
<tr><td>niveau 1</td><td>niveau 2</td><td>niveau 3</td><td>niveau 4</td></tr>
<tr><td colspan="4">degré de complexité des quatre classes finales de nombres</td></tr>
</table>

Fig.37 Classification des nombres entiers naturels depuis la définition des nombres ultimes.

8.2 Diviseur ultime

La distinction des nombres entiers naturels en différentes classes déduites depuis la définition des nombres ultimes permet de proposer le double concept de *diviseur ultime* et d'*algèbre ultime*.

8.2.1 Diviseur ultime : définition

Un diviseur ultime d'un nombre entier naturel est un nombre ultime ***inférieur à cet entier naturel*** *et diviseur non trivial de ce nombre entier naturel.*

Par exemple le nombre 12 possède six diviseurs, les nombres 1, 2, 3, 4, 6 et 12 mais seulement deux diviseurs ultimes : 2 et 3. Aussi, les nombres zéro (0) et un (1), bien que nombres définis comme ultimes, ne sont jamais des diviseurs ultimes. Pour rappel, la division par zéro (0) n'est pas définie et donc ce nombre n'est pas diviseur ultime. Le nombre un (1) est diviseur trivial, il ne divise pas un nombre en partie plus petite.

8.2.2 Concept d'algèbre ultime

L'algèbre ultime ne s'applique qu'à l'ensemble des entiers naturels et s'organise, d'une part, autour de la définition de diviseur ultime (précédemment introduite), d'autre part autour de la définition de nombre ultime (précédemment introduite). Cette algèbre stipule que tout nombre entier naturel est soit un nombre ultime n'ayant aucun diviseur ultime, soit un nombre non ultime (pouvant être soit un élevé, soit un composé pur, soit un composé mixte) se décomposant en plusieurs diviseurs ultimes. Dans cette algèbre, aucun nombre entier naturel x ne peux s'écrire sous la forme $x = x \times 1$ mais seulement sous la forme $x = x$ (ultime) ou sous la forme $x = y \times y \times \ldots$ (élevé) ou $x = y \times z \times \ldots$ (composé) ou encore $x = (y \times y \times \ldots) \times z \times \ldots$ (mixte). Aussi dans cette algèbre, il n'est pas permis d'écrire par exemple $0 = 0 \times y \times z \times \ldots$ mais seulement $0 = 0$.

8.2.2.1 Spécificités des nombres zéro et un

De par ces postulats proposant un concept d'algèbre ultime, il est convenu et rappelé que bien que définis comme nombres ultimes, les nombres zéro (0) et un (1) ne sont ni diviseurs ultimes, ni composés de diviseurs ultimes.

8.2.3 Diviseurs ultimes et classes de nombres

Le tableau figure 38 synthétise les quatre définitions interactives des quatre classes d'entiers naturels en y intégrant le double concept de diviseur ultime et d'algèbre ultime. Il est aussi suggéré ici de nommer u un nombre ultime, e un élevé, c un composé pur et m un nombre composé mixte.

Un nombre ultime (***u***) n'admet aucun diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur. Peut s'écrire sous la forme :				Un nombre élevé (***e***) est un nombre non ultime, puissance d'un nombre ultime. Peut s'écrire sous la forme :
$\boldsymbol{u = u}$	$\boldsymbol{u}$	$\longrightarrow$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e = u \times u}$
→ sans diviseurs ultimes				→ uniquement à diviseurs ultimes identiques
	$\downarrow$		$\downarrow$	
Un nombre composé pur (***c***) est un nombre non ultime et non élevé n'admettant aucun nombre élevé pour diviseur. Peut s'écrire sous la forme :				Un nombre composé mixte (***m***) est un nombre non ultime et non élevé admettant au moins un nombre élevé pour diviseur. Peut s'écrire sous la forme :
$\boldsymbol{c = u \times u'}$	$\boldsymbol{c}$	$\longrightarrow$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{m = u \times u \times u'}$ $\boldsymbol{= e \times u' = c \times u}$
→ uniquement à diviseurs ultimes différents				→ simultanément à diviseurs ultimes identiques et à diviseurs ultimes différents

Fig.38 Classification et interactions des quatre classes de nombres entiers naturels.

8.3 Les quatre classes d'entiers naturels

Ainsi, vient d'être proposé ici la classification de l'ensemble de nombres entiers naturels en quatre classes de nombres :

- les nombres ultimes dénommés ***ultimes*** (***u***),
- les nombres élevés dénommés ***élevés*** (***e***),
- les nombres composés purs dénommés ***composés*** (***c***),
- les nombres composés mixtes dénommés ***mixtes*** (***m***).

Ainsi, est-il convenu que l'appellation "ultimes" désigne les nombres ultimes (comme "premiers" désigne les nombres premiers). De même, est-il convenu que l'appellation "élevés" désigne les nombres élevés, l'appellation "composés" désigne les nombres composés purs et l'appellation "mixtes" désigne les nombres composés mixtes.

Ci-dessous, figure 39, une illustration pratique des concepts de nombres ultimes, de diviseurs ultimes et d'algèbre ultime est développée avec pour exemple les nombres ultimes 2 et 3 (*u* et *u'*), diviseurs ultimes des non ultimes 4, 6 et 12 (*e*, *c* et *m*).

u = u	***u***	→	***e***	***e = u × u***
u = 2	**2**		**4**	***e = 2 × 2***
	↓		↓	
c = u × u'	***c***	→	***m***	***m = u × u × u' = e × u' = c × u***
c = 2 × 3	**6**		**12**	***m = 2 × 2 × 3 = 4 × 3 = 6 × 2***

Fig. 39 Illustration des concepts de nombres ultimes, de diviseurs ultimes et d'algèbre ultime (voir aussi fig. 38).

9. Les quarante nombres primordiaux

9.1 Classes de nombres et ratio 3/2

La progressive différenciation des classes sources et des classes finales des nombres entiers naturels s'organise (figure 40) en un puissant arrangement arithmétique générant de transcendants ratios de valeur 3/2. Ainsi, l'ensemble source des entiers naturels comprend, parmi ses dix premiers nombres, 6 nombres ultimes contre 4 nombres non ultimes. L'ensemble source suivant, celui des non ultimes, comprend, parmi ses dix premiers nombres, 4 nombres élevés contre 6 nombres composés. Enfin, l'ensemble source des composés comprend, parmi ses dix premiers nombres, 6 composés purs contre 4 composés mixtes.

Les 10 premiers entiers naturels : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

6 ultimes : 0 1 2 3 5 7 — **← ratio 3/2 →** — 4 non ultimes : 4 6 8 9

Les 10 premiers non ultimes : 4 6 8 9 10 12 14 15 16 18

4 élevés : 4 8 9 16 — **← ratio 2/3 →** — 6 composés : 6 10 12 14 15 18

Les 10 premiers composés : 6 10 12 14 15 18 20 21 22 24

6 purs : — **← ratio 3/2 →** — 4 mixtes :

0 1 2 3 5 7	**← ratio 3/2 →**	**4 8 9 16**	**← ratio 2/3 →**	**6 10 14 15 21 22**	**← ratio 3/2 →**	**12 18 20 24**
11 13 17 19	**← ratio 2/3 →**	25 27 32 49 64 81	**← ratio 3/2 →**	26 30 33 34	**← ratio 2/3 →**	28 36 40 44 45 48
ratio 3/2		**ratio 2/3**		**ratio 3/2**		**ratio 2/3**
Les 10 premiers ultimes		Les 10 premiers élevés		Les 10 premiers composés purs		Les 10 premiers composés mixtes

10 composés mixtes

20 composés (purs et mixtes)

30 non ultimes

Les 40 nombres primordiaux

Fig. 40 Depuis les dix premiers nombres des trois classes sources d'entiers naturels, génération des dix premiers nombres de chacune des quatre classes finales de nombres : les quarante primordiaux. Voir aussi fig. 37 et fig. 38.

Une très forte intrication lie tous ces ensembles de nombres qui s'opposent de multiples manières en ratios de valeur 3/2 (ou réversiblement de ratios 2/3). Par exemple, les 6 premiers ultimes (0-1-2-3-5-7) s'opposent simultanément aux 4 non ultimes (4-6-8-9) parmi le 10 premiers entiers naturels, aux 4 élevés des 10 premiers non ultimes (4-8-9-16) et aux 4 ultimes situés au-delà des 10 premiers nombres entiers naturels (11-13-17-19).

Cette intriquée classification des nombres entiers naturels permet de définir (figure 40) un ensemble de quarante nombres primordiaux. Ces quarante nombres primordiaux sont l'ensemble des dix premiers nombres de chacune des quatre classes finales des nombres entiers naturels. Il est convenu que l'appellation " primordiaux " désigne ces quarante nombres primordiaux.

9.2 Matrice des cent premiers nombres et nombres primordiaux

Dans la matrice des 100 premiers nombres entiers naturels et dans un ratio de 3/2, 60 nombres non primordiaux s'opposent donc aux 40 primordiaux précédemment définis figure 40. La différenciation de position des 40 primordiaux génère de singuliers phénomènes de ratio 3/2 selon les différentes zones considérées de 60 contre 40 entités ou de 50 contre 50 entités.

Ainsi, dans cette matrice, il s'avère, figure 41, que la distinction de deux sous matrices de deux fois 3 colonnes contre deux fois 2 colonnes génère des ensembles de nombres primordiaux et de nombres non primordiaux qui s'opposent en ratios 3/2 transcendants de 36 contre 24 entités et de 24 contre 16 entités.

sous matrice de
2 fois 3 colonnes
(60 nombres)

← **ratio 3/2** →

sous matrice de
2 fois 2 colonnes
(40 nombres)

36 non primordiaux ← **ratio 3/2** → 24 non primordiaux
24 primordiaux ← **ratio 3/2** → **16 primordiaux**
ratio 3/2 **ratio 3/2**

36 nombres non primordiaux
24 nombres primordiaux
ratio 3/2

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	29
30	31	**32**	**33**	**34**	35	**36**	37	38	39
40	41	42	43	**44**	**45**	46	47	**48**	**49**
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	**64**	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	**81**	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

24 nombres non primordiaux
16 nombres primordiaux
ratio 3/2

Fig. 41 Distinction et répartition des **40 nombres primordiaux** et 60 non primordiaux dans la matrice des cent premiers nombres.

Dans les sous matrices d'égales grandeurs et alternativement constituées des quarts supérieurs et inférieurs de la matrice complète des cent premiers nombres telles qu'illustrées figure 42, les 60 nombres non primordiaux se répartissent en valeurs de quantités égales et ces ensembles de deux fois 30 non primordiaux s'opposent en ratios de valeur 3/2 au 40 primordiaux aussi distribués en deux ensembles égaux de 20 entités.

Matrice de 2 fois 25 nombres (50 nombres) ← **ratio 1/1** → **Matrice de 2 fois 25 nombres** (50 nombres)

0	**1**	**2**	**3**	**4**					
10	**11**	**12**	**13**	**14**					
20	**21**	**22**	23	**24**					
30	31	**32**	**33**	**34**					
40	41	42	43	**44**					
					55	56	57	58	59
					65	66	67	68	69
					75	76	77	78	79
					85	86	87	88	89
					95	96	97	98	99

← **ratio 1/1** →

					5	**6**	**7**	**8**	**9**
					15	**16**	**17**	**18**	**19**
					25	**26**	**27**	**28**	29
					35	**36**	37	38	39
					45	46	47	**48**	**49**
50	51	52	53	54					
60	61	62	63	**64**					
70	71	72	73	74					
80	**81**	82	83	84					
90	91	92	93	94					

30 non primordiaux ← **ratio 1/1** → 30 non primordiaux
20 primordiaux ← **ratio 1/1** → **20 primordiaux**
ratio 3/2 **ratio 3/2**

Fig. 42 Egale répartition des 60 non primordiaux et **40 primordiaux** dans deux sous matrices des cent premiers nombres.

Un redéploiement de la matrice des cent premiers nombres introduite figure 40 en quatre rangées de 25 entités génère encore un phénomène remarquable dans la distinction des 40 primordiaux et des 60 non primordiaux. Cette matrice, de même type que celle présentée chapitre 7 figure 31, est aussi liée à l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2.

En regroupant symétriquement et depuis leur centre ces quatre rangées de nombres, tel que, depuis ce centre vers la bordure de cette nouvelle matrice, l'on isole quatre fois 9 + 6 valeurs puis quatre fois 6 + 4 entités comme illustré figure 43, se forment deux sous matrices de 60 contre 40 nombres. Dans ces deux sous matrices de ratio 3/2, les non primordiaux et les primordiaux se répartissent aussi en ensembles de nombres qui s'opposent en ratios 3/2 transcendants de 36 contre 24 entités et de 24 contre 16 entités.

Matrice de 4 fois ($3^2 + (3 \times 2)$) = 60 nombres (→ 4 fois ($a^2 + ab$))
36 non primordiaux ← **ratio 3/2** → **24 primordiaux**

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	29	**30**	31	**32**	**33**	**34**	35	**36**	37	38	39	**40**	41	42	43	**44**	**45**	46	47	**48**	**49**
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	**64**	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
75	76	77	78	79	80	**81**	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

24 non primordiaux ← **ratio 3/2** → **16 primordiaux**
Matrice de 4 fois ($2^2 + (2 \times 3)$) = 40 nombres (→ 4 fois ($b^2 + ba$))

Fig. 43 Redéploiement de la matrice des 100 premiers nombres s'inscrivant dans l'identité remarquable *(a + b…* . Distribution des 60 non primordiaux et des **40 primordiaux** en ensembles s'opposant en ratios 3/2 transcendants dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités.

9.3 Sous matrices linéaires de soixante et quarante nombres

Dans la sous matrice de 60 entités constituée alternativement des six premiers nombres puis des six derniers nombres de chacune des dix lignes de la matrice des cent premiers nombres introduite figure 40, les nombres non primordiaux et primordiaux s'opposent, partie gauche de la figure 44, en deux ensembles de ratio de valeur 3/2 et ces ensembles s'opposent eux-mêmes aux deux ensembles réciproques de la sous matrice complémentaire de 40 entités en ratios transcendants de valeur 3/2.

Aussi, se produisent exactement les mêmes phénomènes dans et entre les deux sous matrices, de 60 contre 40 entités où l'alternance des nombres considérés s'applique de deux à deux lignes telle qu'illustrée en partie droite de la figure 44.

Sous matrice de 10 fois 6 nombres (60 nombres) **← ratio 3/2 →** **Sous matrice de 10 fois 4 nombres** (40 nombres)

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**				
				14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	23	**24**	**25**				
				34	35	**36**	37	38	39
40	41	42	43	**44**	**45**				
				54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	**64**	65				
				74	75	76	77	78	79
80	**81**	82	83	84	85				
				94	95	96	97	98	99

						6	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**						
						26	**27**	**28**	29
30	31	**32**	**33**						
						46	47	**48**	**49**
50	51	52	53						
						66	67	68	69
70	71	72	73						
						86	87	88	89
90	91	92	93						

36 non primordiaux **← ratio 3/2 →** 24 non primordiaux
24 primordiaux **← ratio 3/2 →** **16 primordiaux**
ratio 3/2 **ratio 3/2**

Sous matrice de 5 fois 12 nombres (60 nombres) **← ratio 3/2 →** **Sous matrice de 5 fois 8 nombres** (40 nombres)

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**				
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**				
				24	**25**	**26**	**27**	**28**	29
				34	35	**36**	37	38	39
40	41	42	43	**44**	**45**				
50	51	52	53	54	55				
				64	65	66	67	68	69
				74	75	76	77	78	79
80	**81**	82	83	84	85				
90	91	92	93	94	95				

						6	**7**	**8**	**9**
						16	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	23						
30	31	**32**	**33**						
						46	47	**48**	**49**
						56	57	58	59
60	61	62	63						
70	71	72	73						
						86	87	88	89
						96	97	98	99

36 non primordiaux **← ratio 3/2 →** 24 non primordiaux
24 primordiaux **← ratio 3/2 →** **16 primordiaux**
ratio 3/2 **ratio 3/2**

Fig. 44 Distribution des 60 non primordiaux et des **40 primordiaux** en ensembles s'opposant en ratios 3/2 transcendants. Selon différentes sous matrices alternativement linéaires.

9.4 Matrices concentriques et excentriques

Dans cette matrice des cent premiers nombres, des arrangements plus sophistiqués et identiques aux configurations introduites chapitre 4 figure 13 opposent ici des ensembles de nombres non primordiaux et primordiaux en exacts ratios 3/2. Ainsi, comme décrit partie gauche de la figure 45, cinq zones concentriques s'opposent, trois contre deux, dans la répartition de leur nombres non primordiaux et primordiaux en ratios 3/2. Le même phénomène se reproduit en considérant les cinq zones excentriques présentées en partie droite de cette figure 45.

Configurations concentriques

Matrice de 3 zones concentriques (60 nombres) **← ratio 3/2 →** **Matrice de 2 zones concentriques** (40 nombres)

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10									**19**
20		**22**	23	**24**	**25**	**26**	**27**		29
30		**32**					37		39
40		42		**44**	**45**		47		**49**
50		52		54	55		57		59
60		62					67		69
70		72	73	74	75	76	77		79
80									89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	
	21							**28**	
	31		**33**	**34**	35	**36**		38	
	41		43			46		**48**	
	51		53			56		58	
	61		63	**64**	65	66		68	
	71							78	
	81	82	83	84	85	86	87	88	

36 non primordiaux **← ratio 3/2 →** 24 non primordiaux
24 primordiaux **← ratio 3/2 →** **16 primordiaux**
ratio 3/2 **ratio 3/2**

Configurations excentriques

Matrice de 3 zones excentriques (60 nombres) **← ratio 3/2 →** **Matrice de 2 zones excentriques** (40 nombres)

0		**2**		**4**	**5**		**7**		**9**
		12		14	15		**17**		
20	**21**	**22**		**24**	**25**		**27**	**28**	29
				34	35				
40	41	42	43	**44**	**45**	46	47	**48**	**49**
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
				64	65				
70	71	72		74	75		77	78	79
		82		84	85		87		
90		92		94	95		97		99

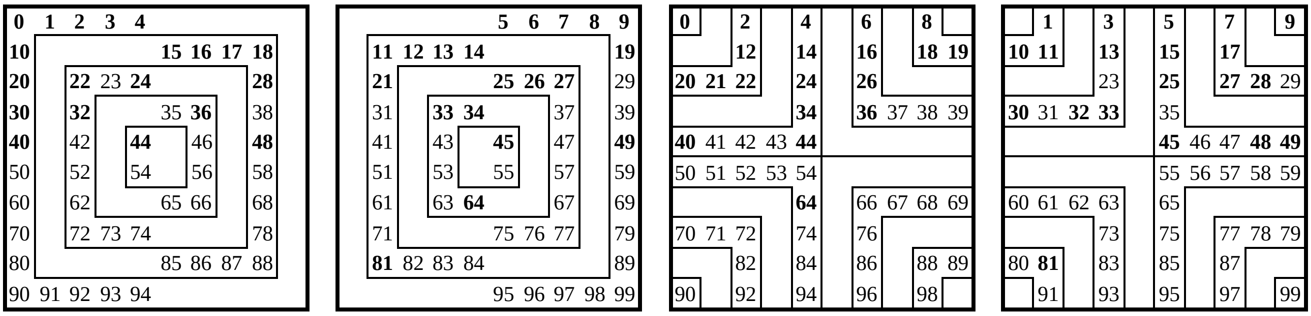
	1		**3**			**6**		**8**	
10	**11**		**13**			**16**		**18**	**19**
			23			**26**			
30	31	**32**	**33**			**36**	37	38	39
60	61	62	63			66	67	68	69
			73			76			
80	**81**		83			86		88	89
	91		93			96		98	

36 non primordiaux **← ratio 3/2 →** 24 non primordiaux
24 primordiaux **← ratio 3/2 →** **16 primordiaux**
ratio 3/2 **ratio 3/2**

Fig. 45 Depuis la matrice des cent premiers nombres, configurations concentriques et excentriques de sous matrices de 60 et 40 entités opposant leurs non primordiaux et leurs primordiaux en ratios 3/2.

Aussi, dans des configurations identiques à celles introduites chapitre 4 figure 14, en mixant, ces sous matrices de 40 et 60 entités (présentées figure 45) et après les avoir chacune scindées verticalement en deux parties égales de 30 et 20 entités, obtient-on, figure 46, de nouvelles matrices de 50 entités chacune. Dans ces configurations mixtes, les non primordiaux et les primordiaux se répartissent en exact ratios de valeur 1/1 avec toujours 30 non primordiaux contre 30 et toujours 20 non primordiaux contre 20.

Configurations concentriques mixtes			Configurations excentriques mixtes		
Matrice de 5 demi zones mixtes concentriques (50 nombres)	**← ratio 1/1 →**	**Matrice de 5 demi zones mixtes concentriques** (50 nombres)	**Matrice de 5 demi zones mixtes excentriques** (50 nombres)	**← ratio 1/1 →**	**Matrice de 5 demi zones mixtes excentriques** (50 nombres)



30 non primordiaux	**← ratio 1/1 →**	30 non primordiaux	30 non primordiaux	**← ratio 1/1 →**	30 non primordiaux
20 primordiaux	**← ratio 1/1 →**	**20 primordiaux**	**20 primordiaux**	**← ratio 1/1 →**	**20 primordiaux**
ratio 3/2		**ratio 3/2**	**ratio 3/2**		**ratio 3/2**

Fig. 46 Depuis la matrice des cent premiers nombres, configurations concentriques et excentriques mixtes de sous matrices de chacune 50 entités opposant leurs non primordiaux et leurs primordiaux en ratios 1/1.

Il est important de souligner ici la totale similarité de ces phénomènes arithmétiques avec ceux opérant dans les sous matrices introduites chapitre 4.2 où les données sources (tableau d'additions croisées des vingt fondamentaux) sont pourtant totalement différentes.

10. Diviseurs ultimes et matrice des cent premiers nombres.

Dans la matrice des cent premiers nombres entiers naturels, 27 sont des nombres ultimes et 73 des non ultimes. Les tableaux de la figure 47 démontre que ces 73 non ultimes sont des compositions de 15 différents diviseurs ultimes (nombres ultimes de 2 à 47) et situent leur première apparition au sein de cette matrice. Par exemple, le *diviseur ultime 5* apparaît la première fois comme diviseur ultime du *non ultime 10*. En partie droite de la figure 47 est fait le décompte de la totalité des diviseurs ultimes composant individuellement ces 73 non ultimes.

Pour rappel (voir chapitre 8.2), les nombres ultimes ne sont pas composés de diviseurs ultimes et les nombres *zéro* (0) et *un* (1) ne sont ni diviseurs ultimes, ni composés de diviseurs ultimes.

Matrice des cent premiers nombres :
27 ultimes - **73 non ultimes**

0 -	1 -	2 -	3 -	**4** 2^2	5 -	**6** 2×3	7 -	**8** 2^3	**9** 3^2
10 2×5	11 -	**12** 2^2×3	13 -	**14** 2×7	**15** 3×5	**16** 2^4	17 -	**18** 2×3^2	19 -
20 2^2×5	**21** 3×7	**22** 2×11	23 -	**24** 2^3×3	**25** 5^2	**26** 2×13	**27** 3^3	**28** 2^2×7	29 -
30 2×3×5	31 -	**32** 2^5	**33** 3×11	**34** 2×17	**35** 5×7	**36** 2^2×3^2	37 -	**38** 2×19	**39** 3×13
40 2^3×5	41 -	**42** 2×3×7	43 -	**44** 2^2×11	**45** 3^2×5	**46** 2×23	47 -	**48** 2^4×3	**49** 7^2
50 2×5^2	**51** 3×17	**52** 2^2×13	53 -	**54** 2×3^3	**55** 5×11	**56** 2^3×7	**57** 3×19	**58** 2×29	59 -
60 2^2×3×5	61 -	**62** 2×31	**63** 3^2×7	**64** 2^6	**65** 5×13	**66** 2×3×11	67 -	**68** 2^2×17	**69** 3×23
70 2×5×7	71 -	**72** 2^3×3^2	73 -	**74** 2×37	**75** 3×5^2	**76** 2^2×19	**77** 7×11	**78** 2×3×13	79 -
80 2^4×5	**81** 3^4	**82** 2×41	83 -	**84** 2^2×3×7	**85** 5×17	**86** 2×43	**87** 3×29	**88** 2^3×11	89 -
90 2×3^2×5	**91** 7×13	**92** 2^2×23	**93** 3×31	**94** 2×47	**95** 5×19	**96** 2^5×3	97 -	**98** 2×7^2	**99** 3^2×11

210 diviseurs ultimes :

0	0	0	0	2	0	2	0	3	2
2	0	3	0	2	2	4	0	3	0
3	2	2	0	4	2	2	3	3	0
3	0	5	2	2	2	4	0	2	2
4	0	3	0	3	3	2	0	5	2
3	2	3	0	4	2	4	2	2	0
4	0	2	3	6	2	3	0	3	2
3	0	5	0	2	3	3	2	3	0
5	4	2	0	4	2	2	2	4	0
4	2	3	2	2	2	6	0	3	3

Fig. 47 Distribution des 15 diviseurs ultimes (de 2 à 47) dans la matrice des cent premiers nombres et distinction de leur première apparition. Décompte individuel de la quantité totale de diviseurs ultimes constituant les 73 non ultimes.

10.1 Quinze diviseurs ultimes et matrice des cent premiers nombres

Ces quinze diviseurs ultimes se regroupent, figure 48, en trois ensembles dont la taille croît régulièrement selon qu'ils composent plus ou moins de catégories de nombres (classes). Parmi ces quinze diviseurs ultimes, 4 se trouvent être diviseurs des trois classes de nombres non ultimes (les élevés, les composés et les mixtes). Puis 5 ne sont diviseurs que de deux classes (les composés et les mixtes) et enfin 6 diviseurs ultimes ne le sont que d'une classe de nombre, celle des composés. Aussi, dans un ratio de 3/2, 9 diviseurs ultimes (de 2 à 23) composant plus d'une classe de nombres s'opposent à 6 diviseurs (de 29 à 47) n'en composant qu'une seule.

Les 15 diviseurs ultimes des 100 premiers nombres :

2 3 5 7	11 13 17 19 23	29 31 37 41 43 47
4 diviseurs d'élevés, de composés, de mixtes	**5 diviseurs** de composés, de mixtes	**6 diviseurs** de composés
9 diviseurs de 3 classes ou de 2 classes	**← ratio 3/2 →**	**6 diviseurs de 1 classe**

Fig. 48 Distinction des 15 diviseurs ultimes (de 2 à 47) selon les types de classes d'entiers naturels qu'ils composent.

Comme le démontre le tableau droit de la figure 47, l'ensemble des cent premiers nombres (déduit des 27 ultimes n'en étant pas composés) totalisent 210 diviseurs ultimes. Cette valeur permet l'apparition de ratios 3/2 et effectivement, dans plusieurs configurations symétriques opposant, dans un ratio de 3/2, des matrices de 60 et 40 nombres, ces diviseurs ultimes s'opposent aussi en un ratio de 3/2 avec respectivement pour chaque double matrice, 126 diviseurs ultimes contre 84 (3 fois 42 contre 2 fois 42).

10.2 Diviseurs ultimes et matrice linéaire

Figure 49, dans une réorganisation de la matrice des cent premiers nombres en quatre lignes de 25 entités (→ $25 = 3^2 + (3 \times 2) + (2 \times 3) + 2^2$, voir chapitre 7.1.1), les 210 diviseurs ultimes s'opposent en un ratio de 3/2 dans deux matrices symétriquement opposées de 60 contre 40 entités avec, respectivement dans chaque matrice, 126 contre 84 diviseurs ultimes.

Matrice de 4 fois ($3^2 + (3 \times 2)$) = 36 + 24 = 60 nombres (→ 4 fois ($a^2 + ab$))

126 diviseurs ultimes

0	1	2	3	**4**	5	**6**	7	**8**	**9**	**10**	11	**12**	13	**14**	**15**	**16**	17	**18**	19	**20**	**21**	**22**	23	**24**
0	0	0	0	**2**	0	**2**	0	**3**	**2**	**2**	0	**3**	0	**2**	**2**	**4**	0	**3**	0	**3**	**2**	**2**	0	**4**
25	**26**	**27**	**28**	29	**30**	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	37	**38**	**39**	**40**	41	**42**	43	**44**	**45**	**46**	47	**48**	**49**
2	**2**	**3**	**3**	0	**3**	0	**5**	**2**	**2**	**2**	**4**	0	**2**	**2**	**4**	0	**3**	0	**3**	**3**	**2**	0	**5**	**2**
50	**51**	**52**	53	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	59	**60**	61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	67	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	73	**74**
3	**2**	**3**	0	**4**	**2**	**4**	**2**	**2**	0	**4**	0	**2**	**3**	**6**	**2**	**3**	0	**3**	**2**	**3**	0	**5**	0	**2**
75	**76**	**77**	**78**	79	**80**	**81**	**82**	83	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	89	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	97	**98**	**99**
3	**3**	**2**	**3**	0	**5**	**4**	**2**	0	**4**	**2**	**2**	**2**	**4**	0	**4**	**2**	**3**	**2**	**2**	**2**	**6**	0	**3**	**3**

84 diviseurs ultimes

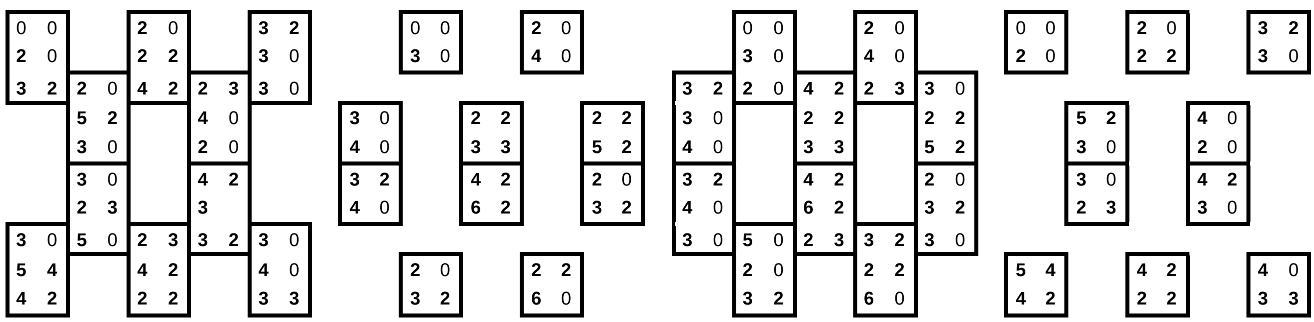
Matrice de 4 fois ($2^2 + (2 \times 3)$) = 24 + 16 = 40 nombres (→ 4 fois ($b^2 + ba$))

Fig. 49 Décompte des diviseurs ultimes dans un redéploiement de la matrice des 100 premiers nombres s'inscrivant dans l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2. Distribution des 210 diviseurs en ratio 3/2 dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités.

10.3 Sous matrices symétriques

A l'intérieur de sous matrices symétriques constituées de 10 micro zones de 6 contre 4 entités, telles celles figure 50, les quantités de diviseurs ultimes constituant les cent premiers nombres s'opposent en ratios de valeurs 3/2 avec respectivement 126 diviseurs ultimes en sous matrices de 60 entités contre 84 diviseurs ultimes en sous matrices de 40 entités.

Sous matrice de 10 fois 6 nombres (60 nombres)	**← ratio 3/2 →**	**Sous matrice de 10 fois 4 nombres** (40 nombres)	**Sous matrice de 10 fois 6 nombres** (60 nombres)	**← ratio 3/2 →**	**Sous matrice de 10 fois 4 nombres** (40 nombres)



126 diviseur ultimes	**← ratio 3/2 →**	**84 diviseur ultimes**	**126 diviseur ultimes**	**← ratio 3/2 →**	**84 diviseur ultimes**

Fig. 50 Quantités respectives des diviseurs ultimes constituant les cent premiers nombres. Voir matrice figure 47.

10.4 Première apparition des quinze diviseurs ultimes

Dans ces deux mêmes doubles sous matrices géométriquement symétriques, il s’avère, figure 51, que la première apparition des quinze diviseurs ultimes (voir figure 47) s’organise aussi en un parfait ratio de valeur 3/2 avec neuf premières apparitions en sous matrices de 60 nombres contre six premières apparitions en sous matrices de 40 nombres.

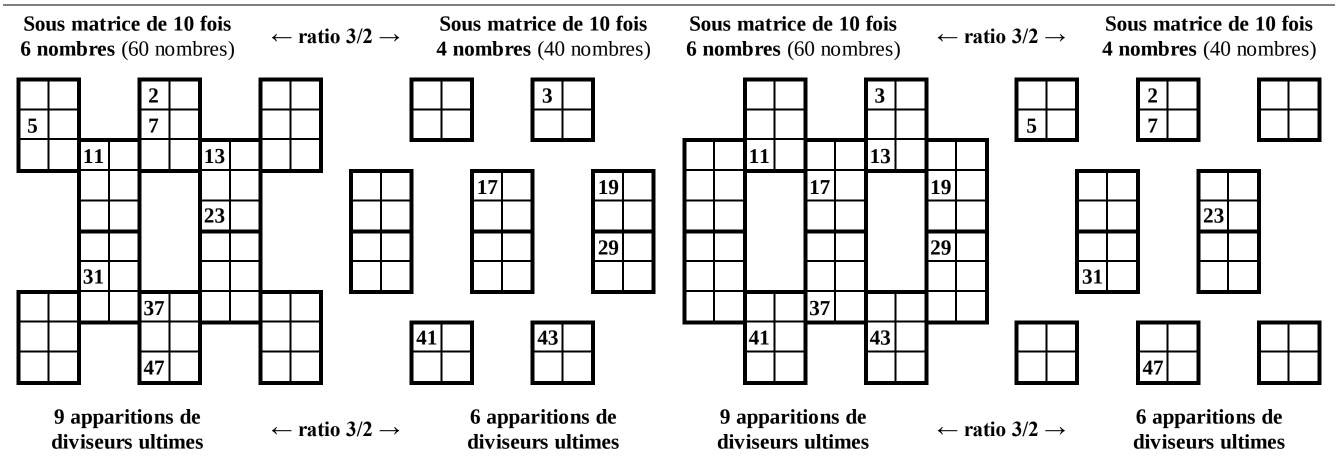


Fig. 51 Distribution de la première apparition des 15 diviseurs ultimes dans la matrice des 100 premiers nombres.

11. Interactions des quatre classes de nombres

La distinction des quatre classes de nombres introduites chapitre 8 génèrent des phénomènes arithmétiques singuliers dans différentes interactions d’entités comme l’opposition des nombres de classes dîtes *extrêmes* et *médianes* ou l’étude des différentes associations possibles de couples de nombres selon leur appartenance à telle ou telle classe. Enfin le croisement de ces différents critères directement envers les vingt nombres fondamentaux (notion introduite chapitre 2.5), puis indirectement depuis une matrice dont ils sont source, fait encore apparaître les mêmes types de phénomènes arithmétiques que ceux présentés à nombreuses reprises en amont de cet étude. Ces dernières investigations légitiment indéniablement toutes les nouvelles classifications mathématiques proposées des nombres entiers naturels.

11.1 Association des classes opposées

Selon leur degré de complexité, les quatre classes de nombres peuvent être regroupés en deux ensembles de classes extrêmes ou médianes. Ainsi, les nombres ultimes, de complexité de niveau 1 et les nombres mixtes, de complexité de niveau 4 forment un ensemble d’entités de classes extrêmes et les nombres élevés et composés, de complexité de niveau 2 et 3 forment un second ensemble de classes médianes. Il est convenu que l’appellation "extrêmes" désigne les nombres de classes extrêmes et l’appellation "médians" désigne les nombres de classes médianes.

27 ultimes (complexité de niveau 1) ***u*** → *e* 10 élevés (complexité de niveau 2)

27 ultimes + 28 mixtes = 55 nombres de classes extrêmes ↓

0	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
10	**11**	**12**	**13**	14	15	16	**17**	**18**	**19**
20	21	22	**23**	**24**	25	26	27	**28**	**29**
30	**31**	32	33	34	35	**36**	**37**	38	39
40	**41**	42	**43**	**44**	**45**	46	**47**	**48**	49
50	51	**52**	**53**	**54**	55	**56**	57	58	**59**
60	**61**	62	**63**	64	65	66	**67**	**68**	69
70	**71**	**72**	**73**	74	**75**	**76**	77	78	**79**
80	81	82	**83**	**84**	85	86	87	**88**	**89**
90	91	**92**	93	94	95	**96**	**97**	**98**	**99**

↓ 10 élevés + 35 composés = 45 nombres de classes médianes

35 composés (complexité de niveau 3) *c* → ***m*** **28 mixtes** (complexité de niveau 4)

Fig. 52 Décompte des quatre classes de nombres dans la matrice des 100 premiers nombres selon leur degré de complexité (voir fig. 37 et 47).

Figure 52, dans la matrice des cent premiers nombres, ces deux ensembles sont constitués de 55 nombres de classes extrêmes et de 45 nombres de classes médianes. Dans des sous matrices de plus en plus diluées de 60 contre 40 entités, ces deux familles de nombres se distribuent toujours en ratios de valeurs 3/2.

11.1.1 Dilution de sous matrices

Ainsi, en partie gauche de la figure 53, dans deux blocs compacts de 60 contre 40 entités constitués respectivement des 60 premiers nombres et des 40 suivants, les nombres extrêmes et les nombres médians se répartissent en ratios de valeurs 3/2 avec, respectivement pour chaque ensemble de nombres, 33 extrêmes contre 22 et 27 médians contre 18. Le fractionnement de la matrice des cent premiers nombres en 10 blocs de 5 fois 12 et 5 fois 8 entités tel qu'illustré en partie droite de la figure 53 génère les mêmes phénomènes arithmétiques.

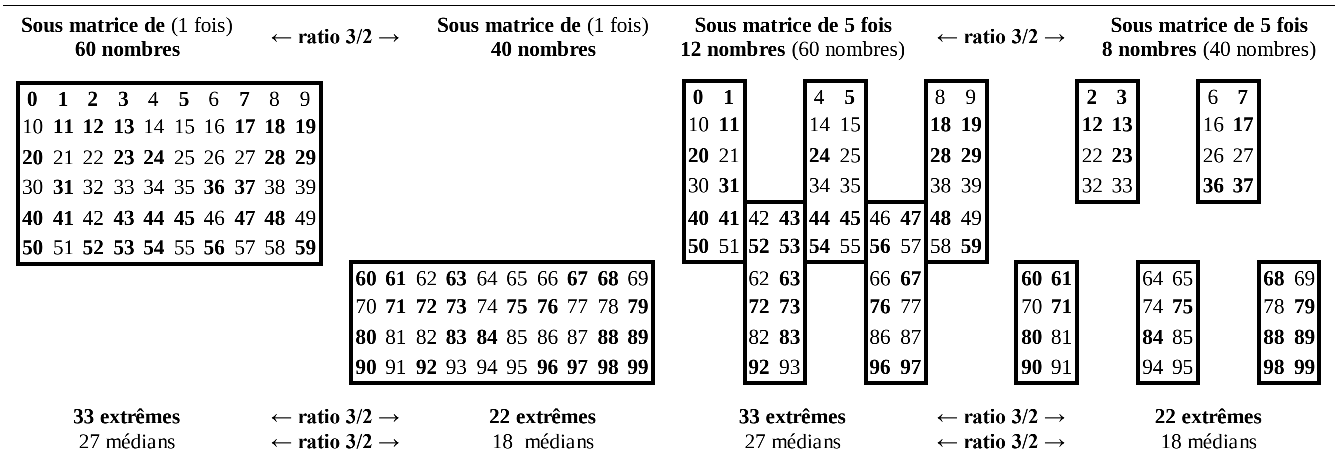


Fig. 53 Distribution des nombres de classes **extrêmes** et médianes dans deux doubles sous matrices peu diluées et plus diluées des 100 premiers nombres.

Aussi, les deux ensembles de nombres extrêmes et médians se répartissent encore en ratios de valeur 3/2 dans un fractionnement plus dilué de cette matrice en 20 blocs de 10 fois 6 et 10 fois 4 entités comme décrit en partie gauche de la figure 53. Enfin, partie droite de la figure 53, dans un fractionnement final de cette matrice en 40 blocs de 20 fois 3 entités contre 20 fois 2 entités, les mêmes partitions des deux familles de nombres en ratios 3/2 s'observent encore avec toujours 33 contre 22 extrêmes et 27 contre 18 médians.

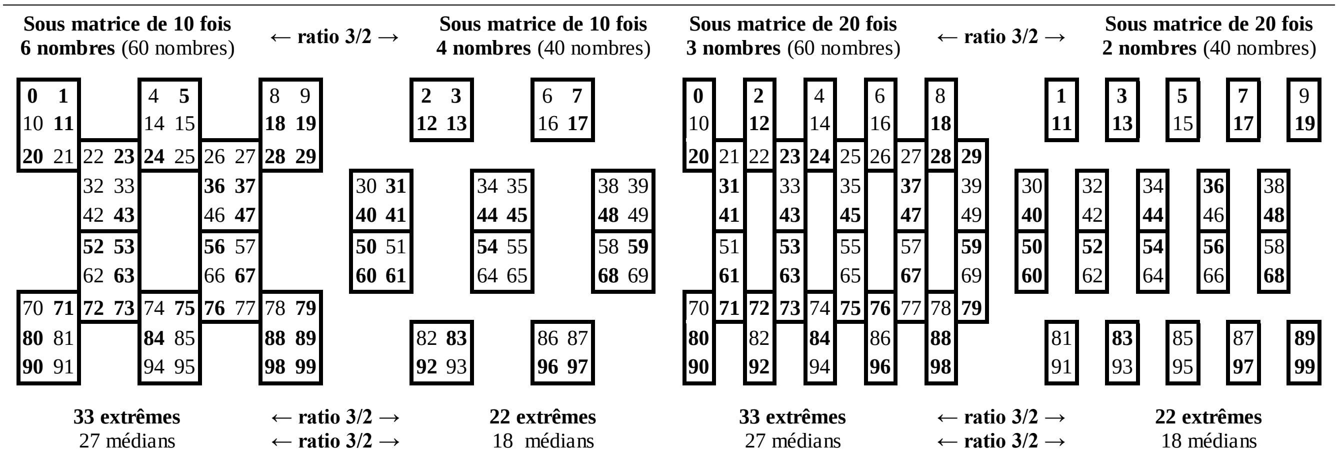


Fig. 54 Distribution des nombres de classes **extrêmes** et médianes dans deux doubles sous matrices diluées et très diluées des 100 premiers nombres.

11.1.2 Matrice de vingt-cinq entités

Comme il a été présenté au chapitre 7.1.1, il est nécessaire d'avoir un minimum de 25 entités pour que puissent s'opposer deux doubles ensembles de 9 contre 6 puis de 6 contre 4 nombres (et globalement de 15 contre 10 entités) en ratios transcendant de valeur 3/2. Aussi ces arrangements arithmétiques s'organisent depuis l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2. Il se trouve justement que la matrice des 25 premiers nombres (matrice configurée depuis cette identité remarquable) génère ces phénomènes par l'opposition des nombres de classes extrêmes à ceux de classes médianes dont elle est constituée.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (3+2)^2 = 3^2 + 2(3\times2) + 2^2 \rightarrow 9 + 6 + 6 + 4 = 25$ **entités**

9 a^2	**0**	1	**2**	**3**	4	**6** ab
	5	6	**7**	8	9	
	10	**11**	**12**	**13**	14	
6 ba	15	16	**17**	**18**	**19**	**4** b^2
	20	21	22	**23**	**24**	

15 extrêmes ← **ratio 3/2** → 10 médians

Fig. 55 Opposition en ratio 3/2 des 15 premiers extrêmes et des 10 premiers médians dans une matrice de 25 entités déduite de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2.

Il apparaît donc, figure 55, que parmi les 25 premiers nombres se trouvent 15 entités de classes extrêmes qui s'opposent en un ratio de valeur 3/2 à 10 entités de classes médianes. Aussi, ces deux types de classes de nombres s'opposent, figure 56, en différents ratios transcendants de valeur 3/2 dans et entre les sous matrices dont la configuration est déduite de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont pour valeur respective 3 et 2.

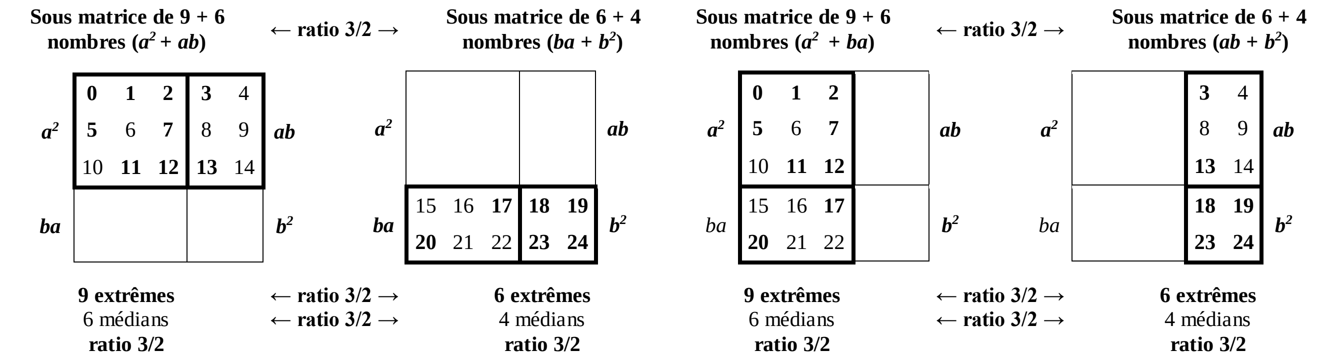


Fig. 56 Distribution des nombres de classes extrêmes et médianes dans deux doubles sous matrices des 25 premiers nombres. Configurations déduites de l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2.

Aussi, dans cette matrice des 25 premiers nombres, d'autres configurations de mêmes arrangements arithmétiques, mais qui sont redéployées géographiquement de variées autres façons, génèrent encore les mêmes phénomènes opposant les nombres de classes extrêmes et ceux de classes médianes en ratios transcendants de valeur 3/2. Les figures 57 et 58 illustrent ces singuliers phénomènes.

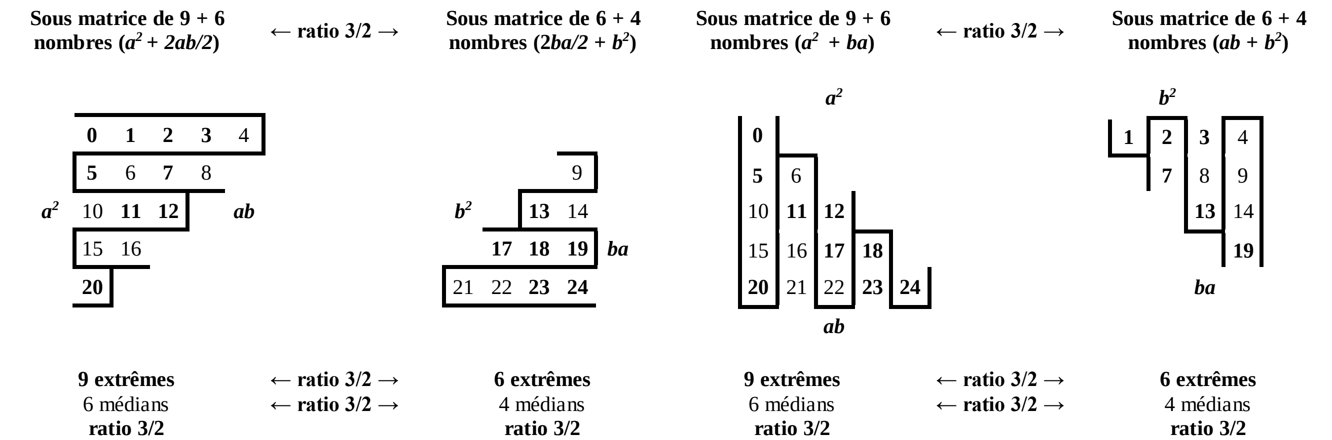
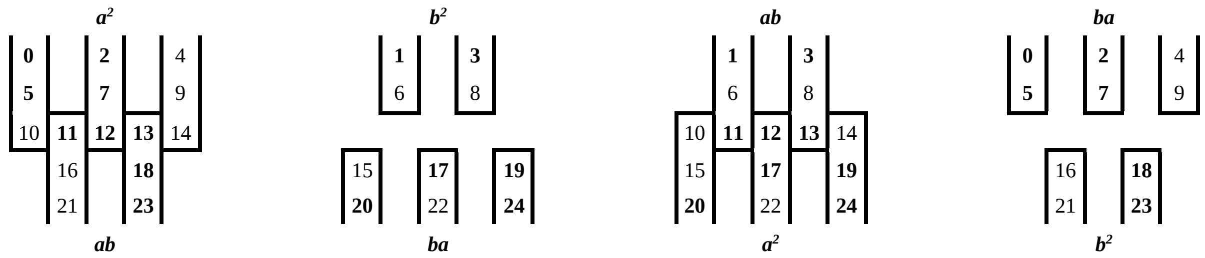


Fig. 57 Distribution des nombres de classes extrêmes et médianes dans deux doubles sous matrices des 25 premiers nombres. Configurations déduites de l'identité $(a + b$… .

Ces phénomènes s'inscrivent toujours et encore en différentes variables géométriques de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2.

Sous matrice de 9 + 6 nombres ($a^2 + ab$)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 4 + 6 nombres ($b^2 + ba$)	Sous matrice de 6 + 9 nombres ($ba + a^2$)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 6 + 4 nombres ($ab + b^2$)



9 extrêmes 6 médians **ratio 3/2**	**← ratio 3/2 →** **← ratio 3/2 →**	**6 extrêmes** 4 médians **ratio 3/2**	**9 extrêmes** 6 médians **ratio 3/2**	**← ratio 3/2 →** **← ratio 3/2 →**	**6 extrêmes** 4 médians **ratio 3/2**

Fig. 58 Distribution des nombres de classes extrêmes et médianes dans deux doubles sous matrices des 25 premiers nombres. Configurations déduites de l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2.

11.2 Classes de nombres et couples de nombres

Selon leur classification en quatre classes tel que défini chapitre 8 (*u* = ultime, *e* = élevé, *c* = composé et *m* = mixte, voir figure 38 chapitre 8), les nombres entiers naturels peuvent être associés deux à deux en dix différentes configurations.

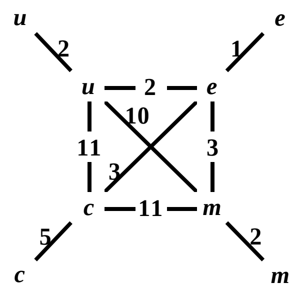
11.2.1 Les dix associations de classes de nombres

Dans la matrice des cent premiers nombres entiers naturels classés linéairement en dix lignes de dix entités consécutives, il est possible de former 50 couples de nombres consécutifs. Ces couples peuvent s'agencer de dix différentes façons selon la classe respective des deux entités les constituant. Il s'avère figure 59 que, dans cette matrice, toutes les dix associations possibles sont représentées dont une seule mais bien présente association de deux nombres de classe élevé : le couple 8-9 (2^3 et 3^2).

Pour amusement (mais peut-être pas) il est plaisant de remarquer que ces deux nombres sont les deux derniers des chiffres nombres. Aussi, leur valeur racine respective sont dans un ratio de 2/3 et il sont respectivement élevés de 3 et 2 puissances : encore un ratio de 3/2. Aussi, (la démonstration ne sera pas faîtes ici) il semblerait que ce soit le seul couple de nombres consécutifs de classe élevé parmi l'ensemble des nombres entiers naturels.

30 couples ***e-e*** ***e-m*** ***m-u*** ***u-c*** ***c-c***

0-1	2-3	4-5	**6-7**	**8-9**
10-11	**12-13**	**14-15**	16-17	**18-19**
20-21	**22-23**	**24-25**	26-27	**28-29**
30-31	32-33	**34-35**	**36-37**	**38-39**
40-41	**42-43**	44-45	**46-47**	**48-49**
50-51	**52-53**	54-55	56-57	**58-59**
60-61	62-63	64-65	**66-67**	68-69
70-71	**72-73**	74-75	76-77	**78-79**
80-81	**82-83**	84-85	**86-87**	**88-89**
90-91	92-93	**94-95**	**96-97**	98-99



20 couples *u-u* *u-e* *e-c* *c-m* *m-m*

Fig. 59 Décompte des associations de classes de nombres des couples de nombres adjacents de la matrice des 100 premiers nombres (Voir aussi fig.60).

11.2.2 Symétriques associations de classes de nombres

En regroupant cinq associations particulières de couples de nombres et cinq autres, il s'avère alors que, dans un ratio de 3/2, 30 couples sont constitués de ces cinq premières associations considérées et 20 couples sont constitués des cinq autres associations possibles. Comme le démontre la figure 57, ces deux groupes de cinq associations ne sont pas quelconques mais s'organisent en deux hyper configurations sub symétriques pouvant être nommées *configuration N* et *configuration Z*. Ceci, en référence à l'image dégagée de ces hyper configurations de deux fois cinq associations de nombres dans la schématisation de ces configurations.

30 couples (60 nombres)						**20 couples** (40 nombres)				
1	***3***	***10***	***11***	***5***	← **ratio 3/2** →	***2***	***2***	***3***	***11***	***2***
e-e	***e-m***	***m-u***	***u-c***	***c-c***		***u-u***	***u-e***	***e-c***	***c-m***	***m-m***

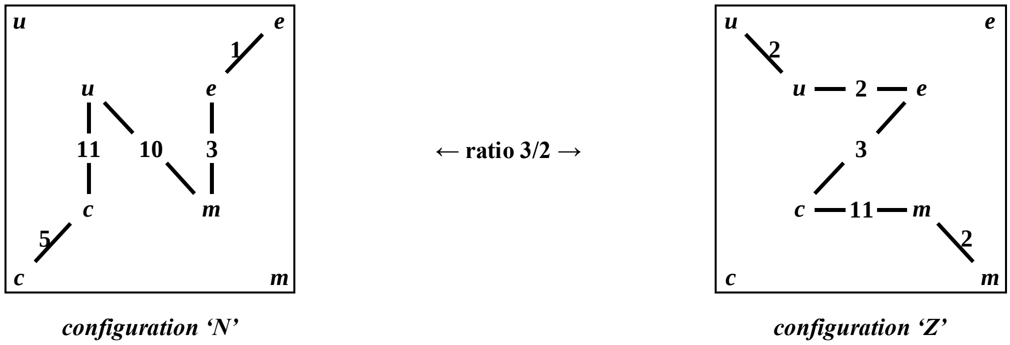


Fig. 60 Classification des 50 couples de nombres selon deux configurations symétriques d’associations de couples. Dans un ratio de valeur 3/2 : 30 couples de configuration N contre 20 couples de configurations Z (voir figure 59).

La configuration de type N présente deux *protubérances* constituées des associations de deux élevés (*e-e*) et de deux composés (*c-c*) soit des types de nombres de classes médianes. La configuration de type Z a ses deux similaires et symétriques *protubérances* constituées des associations de deux ultimes (*u-u*) et de deux mixtes (*m-m*) soit des types de nombres de classes extrêmes. Aussi, parmi les 30 couples de configuration *N*, 6 couples sont formés de deux nombres de mêmes classes (5 couples *c-c* et 1 couple *e-e*) et parmi les 20 couples de configuration *Z*, 4 couples sont formés de deux nombres de mêmes classes (2 couples *u-u* et 2 couples *m-m*). Là encore ces ensembles de couples s’opposent en ratio de valeur 3/2.

11.2.3 Associations de classes de nombres et ratios 3/2 transcendants

Dans deux doubles sous matrices verticales puis horizontales opposant des ensembles de 3 fois 10 couples et des ensembles de 2 fois 10 couples tel que présenté figure 61, les couples de nombres de *configuration N* et ceux de *configuration Z* s’opposent en ratios transcendants de valeurs 3/2. Dans ces configurations 18 couples *N* s’opposent simultanément à 12 couples *Z* et à 12 autres couples *N* et 8 couples *Z* s’opposent simultanément à 12 couples *N* et 12 autres couples *Z*.

Sous matrice de 3 fois 10 couples (60 nombres) ← **ratio 3/2** → **Sous matrice de 2 fois 10 couples** (40 nombres)

0-1	4-5	**8-9**	2-3	**6-7**
10-11	**14-15**	**18-19**	**12-13**	16-17
20-21	**24-25**	**28-29**	**22-23**	26-27
30-31	**34-35**	**38-39**	32-33	**36-37**
40-41	44-45	**48-49**	**42-43**	**46-47**
50-51	54-55	**58-59**	**52-53**	56-57
60-61	64-65	68-69	62-63	**66-67**
70-71	74-75	**78-79**	**72-73**	76-77
80-81	84-85	**88-89**	**82-83**	**86-87**
90-91	**94-95**	98-99	92-93	**96-97**

18 couples *N* / 12 couples *Z* / **ratio 3/2** ← **ratio 3/2** → ← **ratio 3/2** → **12 couples *N*** / 8 couples *Z* / **ratio 3/2**

Sous matrice de 3 fois 10 couples (60 nombres)

0-1	2-3	4-5	**6-7**	**8-9**
10-11	**12-13**	**14-15**	16-17	**18-19**
40-41	**42-43**	44-45	**46-47**	**48-49**
50-51	**52-53**	54-55	56-57	**58-59**
80-81	**82-83**	84-85	**86-87**	**88-89**
90-91	92-93	**94-95**	**96-97**	98-99

← **ratio 3/2** →

Sous matrice de 2 fois 10 couples (40 nombres)

20-21	**22-23**	**24-25**	26-27	**28-29**
30-31	32-33	**34-35**	**36-37**	**38-39**
60-61	62-63	64-65	**66-67**	68-69
70-71	**72-73**	74-75	76-77	**78-79**

18 couples *N* / 12 couples *Z* / **ratio 3/2** ← **ratio 3/2** → ← **ratio 3/2** → **12 couples *N*** / 8 couples *Z* / **ratio 3/2**

Fig. 61 Distribution des couples **de *configuration N*** (***e-e e-m m-u u-c c-c***) et de *configuration Z* (*u-u u-e e-c c-m m-m*) dans des sous matrices verticales et horizontales de 30 contre 20 couples de nombres adjacents.

Dans cette matrice des cent premiers nombres, les mêmes phénomènes arithmétiques apparaissent, figure 62, tant dans l’opposition des 30 couples verticalement périphériques aux 20 couples verticalement centraux que de même dans l’opposition des 20 couples périphériques aux 30 couples centraux.

Sous matrice de 10 fois **3 couples** (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois **2 couples** (40 nombres)	Sous matrice de 10 fois **3 couples** (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois **2 couples** (40 nombres)

0-1	2-3	4-5	**6-7**	**8-9**
10-11	**12-13**	**14-15**	16-17	**18-19**
20-21	**22-23**	**24-25**	26-27	**28-29**
70-71	**72-73**	74-75	76-77	**78-79**
80-81	**82-83**	84-85	**86-87**	**88-89**
90-91	92-93	**94-95**	**96-97**	98-99

30-31	32-33	**34-35**	**36-37**	**38-39**
40-41	**42-43**	44-45	**46-47**	**48-49**
50-51	**52-53**	54-55	56-57	**58-59**
60-61	62-63	64-65	**66-67**	68-69

20-21	**22-23**	**24-25**	26-27	**28-29**
30-31	32-33	**34-35**	**36-37**	**38-39**
40-41	**42-43**	44-45	**46-47**	**48-49**
50-51	**52-53**	54-55	56-57	**58-59**
60-61	62-63	64-65	**66-67**	68-69
70-71	**72-73**	74-75	76-77	**78-79**

0-1	2-3	4-5	**6-7**	**8-9**
10-11	**12-13**	**14-15**	16-17	**18-19**
80-81	**82-83**	84-85	**86-87**	**88-89**
90-91	92-93	**94-95**	**96-97**	98-99

18 couples *N* 12 couples *Z* **ratio 3/2**	**← ratio 3/2 →** **← ratio 3/2 →**	**12 couples *N*** 8 couples *Z* **ratio 3/2**	**18 couples *N*** 12 couples *Z* **ratio 3/2**	**← ratio 3/2 →** **← ratio 3/2 →**	**12 couples *N*** 8 couples *Z* **ratio 3/2**

Fig. 62 Distribution des couples **de *configuration N*** (***e-e e-m m-u u-c c-c***) et de *configuration Z* (*u-u u-e e-c c-m m-m*) dans des sous matrices verticales de 30 contre 20 couples de nombres adjacents.

Aussi, ces mêmes phénomènes arithmétiques se produisent encore dans de sous matrices plus *diluées* tel que celles illustrées figure 63 et de configurations identiques à celles déjà introduites plus haut dans cette étude des nombres entiers naturels.

Sous matrice de 10 fois **3 couples** (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois **2 couples** (40 nombres)	Sous matrice de 10 fois **3 couples** (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois **2 couples** (40 nombres)

0-1		4-5		**8-9**
10-11		**14-15**		**18-19**
20-21	**22-23**	**24-25**	26-27	**28-29**
	32-33		**36-37**	
	42-43		**46-47**	
	52-53		56-57	
	62-63		**66-67**	
70-71	**72-73**	74-75	76-77	**78-79**
80-81		84-85		**88-89**
90-91		**94-95**		98-99

	2-3		**6-7**	
	12-13		16-17	
30-31		**34-35**		**38-39**
40-41		44-45		**48-49**
50-51		54-55		**58-59**
60-61		64-65		68-69
	82-83		**86-87**	
	92-93		**96-97**	

	2-3		**6-7**	
	12-13		16-17	
20-21	**22-23**	**24-25**	26-27	**28-29**
30-31		**34-35**		**38-39**
40-41		44-45		**48-49**
50-51		54-55		**58-59**
60-61		64-65		68-69
70-71	**72-73**	74-75	76-77	**78-79**
	82-83		**86-87**	
	92-93		**96-97**	

0-1		4-5		**8-9**
10-11		**14-15**		**18-19**
	32-33		**36-37**	
	42-43		**46-47**	
	52-53		56-57	
	62-63		**66-67**	
80-81		84-85		**88-89**
90-91		**94-95**		98-99

18 couples *N* 12 couples *Z* **ratio 3/2**	**← ratio 3/2 →** **← ratio 3/2 →**	**12 couples *N*** 8 couples *Z* **ratio 3/2**	**18 couples *N*** 12 couples *Z* **ratio 3/2**	**← ratio 3/2 →** **← ratio 3/2 →**	**12 couples *N*** 8 couples *Z* **ratio 3/2**

Fig. 63 Distribution des couples **de *configuration N*** (***e-e e-m m-u u-c c-c***) et de *configuration Z* (*u-u u-e e-c c-m m-m*) dans des sous matrices symétriques de 30 contre 20 couples de nombres adjacents.

11.3 Interactions des vingt fondamentaux

Pour clôturer cette série d'investigations sur les nombres entiers naturels et leurs interactions dépendantes de leur diverses natures, l'attention est ici faîtes sur les vingt premiers de ceux-ci nommés (voir chapitre 2) *les vingt fondamentaux*. Selon l'interaction de couples de fondamentaux pouvant être adjacents, sub-adjacents ou distants, ceux-ci s'opposent toujours en ratios de valeur 3/2 avec 6 couples contre 4 couples de différentes configurations considérées.

11.3.1 Interactions des nombres ultimes et non ultimes

Considérant le double critère d'ultimité ou de non ultimité, l'opposition, figure 64, des couples composés de deux ultimes ou de deux non ultimes aux couples mixtes (un ultime + un non ultime) génère, tant dans les configurations de couples adjacents que sub-adjacents ou distants, toujours et dans un ratio de valeur 3/2 des ensembles de 6 contre 4 couples.

Les vingt fondamentaux :

10 couples adjacents	**0 1**	**2 3**	4 **5**	6 **7**	8 9	6 couples mixtes	← **ratio 3/2**
	10 **11**	12 **13**	14 15	16 **17**	18 **19**	4 couples purs	

10 couples sub-adjacents	**0** 10	**1** **11**	**2** 12	**3** **13**	4 14	**5** 15	6 16	**7** **17**	8 18	9 **19**	6 couples purs 4 couples mixtes	← **ratio 3/2**
10 couples distants	**0** **19**	**1** 18	**2** **17**	3 16	4 15	**5** 14	6 **13**	**7** 12	8 **11**	9 10	6 couples mixtes 4 couples purs	← **ratio 3/2**

Fig. 64 Distinction des couples purs (composés de 2 **ultimes** ou de 2 non ultimes) et des couples mixtes (composés d'un seul **ultime** et d'un seul non ultime).

11.3.2 Interactions des nombres extrêmes et médians

Considérant le double critère de nombre extrêmes ou médians, figure 65, l'opposition, des couples composés de deux extrêmes ou de deux médians aux couples mixtes (un extrême + un médian) génère, tant dans les configurations de couples adjacents que sub-adjacents ou distants, toujours dans un ratio de valeur 3/2 des ensembles de 6 contre 4 couples.

Les vingt fondamentaux :

10 couples adjacents	**0** **1**	**2** **3**	4 **5**	6 **7**	8 9						6 couples purs	← **ratio 3/2**
	10 **11**	**12** **13**	14 15	16 **17**	**18** **19**						4 couples mixtes	
10 couples sub-adjacents	**0** / 10	**1** / **11**	**2** / **12**	**3** / **13**	4 / 14	**5** / 15	6 / 16	**7** / **17**	8 / **18**	9 / **19**	6 couples purs / 4 couples mixtes	← **ratio 3/2**
10 couples distants	**0** / **19**	**1** / **18**	**2** / **17**	**3** / 16	4 / 15	**5** / 14	6 / **13**	**7** / **12**	8 / **11**	9 / 10	6 couples purs / 4 couples mixtes	← **ratio 3/2**

Fig. 65 Distinction des couples purs (composés de **2 extrêmes** ou de 2 médians) et des couples mixtes (composés d'un seul extrême et d'un seul médian).

11.3.3 Interactions des couples de nombres de configurations *N* et *Z*

Considérant le double critère de couples de nombres de configuration *N* ou de configuration *Z*, l'opposition, figure 66, des couples de configuration *N* aux couples de configuration *Z* génère, tant dans les configurations de couples adjacents que sub-adjacents ou distants, toujours dans un ratio de valeur 3/2 des ensembles de 6 contre 4 couples.

Les vingt fondamentaux :

10 couples adjacents	0 1	2 3	4 5	**6 7**	**8 9**						**6 couples *N***	← **ratio 3/2**
	10 11	**12 13**	**14 15**	16 17	**18 19**						4 couples *Z*	
10 couples sub-adjacents	**0** / **10**	1 / 11	**2** / **12**	3 / 13	4 / 14	**5** / **15**	6 / 16	7 / 17	**8** / **18**	9 / 19	6 couples *Z* / **4 couples *N***	← **ratio 3/2**
10 couples distants	0 / 19	**1** / **18**	2 / 17	3 / 16	4 / 15	**5** / **14**	**6** / **13**	**7** / **12**	8 / 11	9 / 10	6 couples *Z* / **4 couples *N***	← **ratio 3/2**

Fig. 66 Distinction des couples de **configuration *N*** (***e-e e-m m-u u-c c-c***) et de configuration *Z* (*u-u u-e e-c c-m m-m*). (Voir figure 60)

11.4 Matrice des vingt fondamentaux et classes de nombres

Une nouvelle fois, est faite ici la démonstration indéniable de toute la haute importance de l'organisation des interactions des vingt nombres fondamentaux dont la notion a été introduite chapitre 2.

La matrice d'addition des dix premiers ultimes avec les dix premiers nombres non ultimes génère cent valeurs pouvant être distinguées selon les quatre classes de nombres définies chapitre 8. Comme le démontre la figure 64, dans cette matrice d'addition des vingt fondamentaux, les classes de nombres s'opposent deux à deux en ratios de valeur 3/2 ou de valeur 1/1 selon les configurations considérées.

+	***4***	***6***	***8***	***9***	***10***	***12***	***14***	***15***	***16***	***18***
0	4	6	8	9	10	12	14	15	16	18
1	5	7	9	10	11	13	15	16	17	19
2	6	8	10	11	12	14	16	17	18	20
3	7	9	11	12	13	15	17	18	19	21
5	9	11	13	14	15	17	19	20	21	23
7	11	13	15	16	17	19	21	22	23	25
11	15	17	19	20	21	23	25	26	27	29
13	17	19	21	22	23	25	27	28	29	31
17	21	23	25	26	27	29	31	32	33	35
19	23	25	27	28	29	31	33	34	35	37

les 10 premiers non ultimes

les 10 premiers ultimes

60 nombres de niveau de classe 1 et 2 **← ratio 3/2 →** 40 nombres de niveau de classe 3 et 4

39 ultimes	**21 élevés**	**29 composés**	**11 mixtes**

50 nombres de niveau de classe 2 et 3

↑ ratio 1/1 ↓

50 nombres de niveau de classe 1 et 4

Fig. 67 Distribution des 4 classes de nombres générés depuis la matrice des additions des 20 fondamentaux ségrégés en 10 ultimes contre 10 non ultimes. (Voir aussi fig. 37 et 47).

Ainsi, l'opposition des classes extrêmes aux classes médianes s'organise en un ratio de 1/1 et l'opposition des deux premières classes de 1er et 2ème niveau de complexité aux deux dernières classes de 3ème et 4ème niveau de complexité s'organise en un ratio de valeur 3/2.

11.4.1 Sous matrices de soixante contre 40 entités

Ces deux types d'oppositions génèrent des ensembles d'entités s'opposant en ratios transcendants de valeur 3/2 ou/et de valeurs 1/1 dans les deux doubles configurations de quatre sous matrices de 60 contre 40 nombres telles qu'illustrées figure 68. Ces sous matrices s'inscrivent dans l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2.

60 ultimes et élevés contre 40 composés et mixtes (**ratio 3/2**)

classes de **niveau 1 et 2** contre classes de niveau 3 et 4

Sous matrice de 36 + 24 nombres (60 nombres) **← ratio 3/2 →** **Sous matrice de 24 + 16 nombres** (60 nombres)

→ 4(a^2 + ab) **→ 4(ba + b^2)**

		8	**9**	10	12	14	15		
		9	10	**11**	**13**	15	**16**		
		10	**11**	12	14	**16**	**17**		
		11	12	**13**	15	**17**	18		
9	**11**	**13**	14	15	**17**	**19**	20	21	**23**
11	**13**	15	**16**	**17**	**19**	21	22	**23**	**25**
15	**17**							**27**	**29**
17	**19**							**29**	**31**
21	**23**							33	35
23	**25**							35	**37**

4	6							**16**	18
5	**7**							**17**	**19**
6	**8**							18	20
7	**9**							**19**	21
		19	20	21	**23**	**25**	26		
		21	22	**23**	**25**	**27**	28		
		25	26	**27**	**29**	**31**	**32**		
		27	28	**29**	**31**	33	34		

36 ultimes et élevés **← ratio 3/2 →** **24 ultimes et élevés**
24 composés et mixtes **← ratio 3/2 →** 16 composés et mixtes
ratio 3/2 **ratio 3/2**

50 ultimes et mixtes contre 50 élevés et composés (**ratio 1/1**)

classes de **niveau 1 et 4** contre classes de niveau 2 et 3

Sous matrice de 36 + 24 nombres (60 nombres) **← ratio 3/2 →** **Sous matrice de 24 + 16 nombres** (60 nombres)

→ 4(a^2 + ab) **→ 4(ba + b^2)**

4	6							16	**18**
5	**7**							**17**	**19**
6	8							**18**	**20**
7	9							**19**	21
9	**11**	**13**	14	15	**17**	**19**	**20**	21	**23**
11	**13**	15	16	**17**	**19**	21	22	**23**	25
		19	**20**	21	**23**	25	26		
		21	22	**23**	25	27	**28**		
		25	26	27	**29**	**31**	32		
		27	**28**	**29**	**31**	33	34		

		8	9	10	**12**	14	15		
		9	10	**11**	**13**	15	16		
		10	**11**	**12**	14	16	**17**		
		11	**12**	**13**	15	**17**	**18**		
15	**17**							27	**29**
17	**19**							**29**	**31**
21	**23**							33	35
23	25							35	**37**

30 ultimes et mixtes **← ratio 3/2 →** **20 ultimes et mixtes**
30 élevés et composés **← ratio 3/2 →** 20 élevés et composés
ratio 1/1 **ratio 1/1**

Fig. 68 Distribution des 4 classes de nombres générés depuis la matrice des additions des 20 fondamentaux (voir fig. 67). Sous matrices s'inscrivant dans l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

11.4.2 Redéploiement de la matrice des vingt fondamentaux

Dans un redéploiement de cette matrice des additions des vingt fondamentaux (introduite figure 67) tel qu'illustré figure 69, il apparaît que l'opposition des nombres des deux premières classes de 1er et 2ème niveau de complexité aux nombres des deux dernières classes de 3ème et 4ème niveau de complexité s'organise aussi en ratios transcendants de valeur 3/2. Cette matrice est de même configuration que celle introduite figure 31 au chapitre 7.1.

Matrice de 4 fois (3^2 + (3 × 2)) = 60 nombres (→ 4 fois (a^2 + *ab*))

36 ultimes et élevés ← **ratio 3/2** → 24 composés et mixtes

4	6	**8**	**9**	10	12	14	15	**16**	18	**5**	**7**	**9**	10	**11**	**13**	15	**16**	**17**	**19**	6	**8**	10	**11**	12
14	**16**	**17**	18	20	**7**	**9**	**11**	12	**13**	15	**17**	18	**19**	21	**9**	**11**	**13**	14	15	**17**	**19**	20	21	**23**
11	**13**	15	**16**	**17**	**19**	21	22	**23**	**25**	15	**17**	**19**	20	21	**23**	**25**	26	**27**	**29**	**17**	**19**	21	22	**23**
25	**27**	28	**29**	**31**	21	**23**	**25**	26	**27**	**29**	**31**	**32**	33	35	**23**	**25**	**27**	28	**29**	**31**	33	34	35	**37**

24 ultimes et élevés ← **ratio 3/2** → 16 composés et mixtes

Matrice de 4 fois (2^2 + (2 × 3)) = 40 nombres (→ 4 fois (b^2 + *ba*))

Fig. 69 Redéploiement de la matrice (voir fig. 67) d'addition des vingt fondamentaux s'inscrivant dans l'identité remarquable *(a+b…* . Distribution des classes de nombres en ensembles s'opposant en ratios 3/2 transcendants dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités.

Dans un autre redéploiement de cette matrice des additions des vingt fondamentaux (introduite figure 67) tel qu'illustré figure 70, il apparaît que l'opposition des nombres de classes extrêmes aux nombres de classes médianes s'organise en ratios de valeur 1/1 à l'intérieur des deux sous matrices de 60 et 40 entités et en ratios de valeur 3/2 transversalement à ces deux sous matrices.

Matrice de 4 fois (3^2 + (3 × 2)) = 60 nombres (→ 4 fois (a^2 + *ab*))

30 ultimes et mixtes ← **ratio 1/1** → 30 élevés et composés

4	6	8	9	10	**12**	14	15	16	**18**	**5**	**7**	9	10	**11**	**13**	15	16	**17**	**19**	6	8	10	**11**	**12**
14	16	**17**	**18**	**20**	**7**	9	**11**	**12**	**13**	15	**17**	**18**	**19**	21	9	**11**	**13**	14	15	**17**	**19**	**20**	21	**23**
11	**13**	15	16	**17**	**19**	21	22	**23**	25	15	**17**	**19**	**20**	21	**23**	25	26	27	**29**	**17**	**19**	21	22	**23**
25	27	**28**	**29**	**31**	21	**23**	25	26	27	**29**	**31**	32	33	35	**23**	25	27	**28**	**29**	**31**	33	34	35	**37**

20 ultimes et mixtes ← **ratio 1/1** → 20 élevés et composés

Matrice de 4 fois (2^2 + (2 × 3)) = 40 nombres (→ 4 fois (b^2 + *ba*))

Fig. 70 Redéploiement de la matrice (voir fig. 67) d'addition des vingt fondamentaux s'inscrivant dans l'identité remarquable *(a+b…* . Egale distribution des **ultimes et mixtes** et des élevés et composés dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités et opposition en ratios de valeur 3/2 transversalement à ces deux sous matrices.

12 Les nombres ultimes de Sophie Germain

Ici est appliqué aux nombres ultimes (*u*) le concept de nombres premiers sûrs et de nombres de Sophie Germain. Pour rappel, si *p* et 2*p* + 1 sont tous deux premiers, alors *p* est un nombre premier de Sophie Germain et 2*p* + 1 est un nombre premier sûr.

12.1 Concept de nombre ultime sûr

Ainsi nous pouvons convenir que si *u* et 2*u* + 1 sont ultimes, alors *u* est **un nombre ultime de Sophie Germain** et 2*u* + 1 **un nombre ultime sûr**.

De cette convention, il découle que les deux nombres particuliers *zéro* (0) et *un* (1), reconnus comme ultimes depuis la définition de ce type de nombre (définition introduite chapitre 2.1), sont tout deux nombres ultimes de Sophie Germain :

0 et [(2 × 0) + 1] sont tous deux ultimes → 0 est ultime de Sophie Germain
1 et [(2 × 1) + 1] sont tous deux ultimes → 1 est ultime de Sophie Germain

12.2 Concept de nombre non ultime sûr

Aussi nous pouvons étendre ce concept *de sûreté* aux nombres non ultimes (~~*u*~~) et convenir que si ~~*u*~~ et 2~~*u*~~ + 1 sont non ultimes, alors ~~*u*~~ est un nombre non ultime de Sophie Germain et 2~~*u*~~ + 1 **un nombre non ultime sûr**.

12.3 Concept de nombre fertile

Ainsi, selon ces nouvelles conventions et le degré d'ultimité des nombres entiers naturels ceux-ci ne peuvent appartenir qu'à un seul de quatre différents types de nombres dont deux types de *nombres de Sophie Germain* (pouvant être ultimes ou non ultimes) et deux types de *non nombres de Sophie Germain* (pouvant être ultimes ou non ultimes). Nous proposons ici de qualifier ces nombres de Sophie Germain de *fertiles* et ces non nombres de Sophie Germain de *stériles*. Un nombre entier naturel est donc :

- soit un ultime (*u*) fertile : 2*u* + 1 = *u'* → *u* est ultime fertile, *u'* est ultime sûr*,
- soit un ultime (*u*) stérile : 2*u* + 1 = ~~*u*~~ → *u* est ultime stérile, ~~*u*~~ est non ultime non sûr*,
- soit un non ultime (~~*u*~~) fertile : 2~~*u*~~ + 1 = ~~*u*~~*'* → ~~*u*~~ est non ultime fertile, ~~*u*~~*'* est non ultime sûr*,
- soit un non ultime (~~*u*~~) stérile : 2~~*u*~~ + 1 = *u* → ~~*u*~~ est non ultime stérile, *u* est ultime non sûr*.

Aussi est-il convenu que l'appellation "fertiles" désigne les nombres fertiles (qui peuvent être des ultimes ou des non ultimes) et l'appellation "stériles" désigne les nombres stériles (qui peuvent être des ultimes ou des non ultimes).

*En conclusion de cet article, un terme plus approprié sera proposé pour qualifier la sûreté ou non sûreté de ces nombres.

12.4 Intrication de sûreté

Il s'avère que parmi les vingt nombres fondamentaux (notion introduite chapitre 2.5), qui sont simultanément les 20 premiers nombres mais aussi les 10 premiers ultimes et les dix premiers non ultimes, se trouvent 50% de nombres fertiles dont, dans un ratio de valeur 3/2, 6 ultimes fertiles contre 4 non ultimes fertiles. Comme illustré en partie haute de la figure 71, de nombreux ratios transcendants de valeur 3/2 (ou 2/3) opèrent ainsi selon les différentes natures des entités constituant cet ensemble des vingt nombres fondamentaux.

Aussi (partie basse de la figure 71), le groupe de vingt autres nombres constitué des 10 ultimes et des 10 non ultimes directement suivants des entités du précédent groupe des vingt fondamentaux s'organise en ratios exactement inverses selon les mêmes natures considérées : ultimes fertiles ou stériles, non ultimes fertiles ou stériles. Ceci est d'autant plus remarquable puisque, différemment du premiers groupe des vingt fondamentaux constitué des 20 premiers nombres (de 0 à 19), ce dernier groupe n'est pas constitué des vingt nombres suivants (de 20 à 40) mais juste des 10 ultimes et des 10 non ultimes suivants.

les 10 + 10 premiers ultimes (u) :

10 fertiles → $2u + 1$ → 6 + 4 ultimes sûrs

10 stériles → $2u + 1$ → 4 + 6 non ultimes non sûrs

les 10 + 10 premiers non ultimes ($\cancel{u}$) :

10 fertiles → $2\cancel{u} + 1$ → 4 + 6 non ultimes sûrs

10 stériles → $2\cancel{u} + 1$ → 6 + 4 ultimes non sûrs

0	→	**1**
1	→	**3**
2	→	**5**
3	→	**7**
5	→	**11**
7	→	15
11	→	**23**
13	→	27
17	→	35
19	→	39

10 nombres fertiles

6 ultimes fertiles **← ratio 3/2 →** **4 non ultimes fertiles**

↑ ratio 3/2 ↓ **↑ ratio 2/3 ↓**

4 ultimes stériles ← ratio 2/3 → 6 non ultimes stériles

10 nombres stériles

4	→	**9**
6	→	13
8	→	17
9	→	19
10	→	**21**
12	→	**25**
14	→	29
15	→	31
16	→	**33**
18	→	37

↑ 3/2 ratio ↓ **↑ 2/3 ratio ↓**

↓ 2/3 ratio ↑ ↑ 3/2 ratio ↓

23	→	**47**
29	→	**59**
31	→	63
37	→	75
41	→	**83**
43	→	87
47	→	95
53	→	**107**
59	→	119
61	→	123

10 nombres fertiles

4 ultimes fertiles **← ratio 2/3 →** **6 non ultimes fertiles**

↑ ratio 2/3 ↓ **↑ ratio 3/2 ↓**

6 ultimes stériles ← ratio 3/2 → 4 non ultimes stériles

10 nombres stériles

20	→	41
21	→	43
22	→	**45**
24	→	**49**
25	→	**51**
26	→	53
27	→	**55**
28	→	**57**
30	→	61
32	→	**65**

Fig. 71 Intrication de sûreté (de Sophie Germain) des deux fois 10 premiers ultimes et deux fois 10 premiers non ultimes. (Voir aussi Fig. 72)

Ainsi, selon le concept de sûreté de Sophie Germain appliqué ici tant aux nombres ultimes qu'aux nombres non ultimes, nous pouvons observer une très forte intrication entre les quatre doubles groupes de nombres entiers naturels constitués des deux fois 10 premiers ultimes et des deux fois 10 premiers non ultimes et, transversalement, des deux fois 10 premiers ultimes fertiles ou stériles et des deux fois 10 premiers non ultimes fertiles ou stériles.

La figure 72, complémentaire de la précédente, illustre sous un autre angle cette intrication de sûreté des 20 premiers ultimes et 20 premiers non ultimes.

du 1er au 10ème ultime
du 1er au 10ème non ultime

du 11ème au 20ème ultime
du 11ème au 20ème non ultime

6 ultimes — **10 nombres fertiles**

0	**1**	**2**	**3**	**5**	**11**
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	**3**	**5**	**7**	**11**	**23**

4 non ultimes

4	**10**	**12**	**16**
↓	↓	↓	↓
9	**21**	**25**	**33**

4 ultimes — **10 nombres fertiles**

23	**29**	**41**	**53**
↓	↓	↓	↓
47	**59**	**83**	**107**

6 non ultimes

22	**24**	**25**	**27**	**28**	**32**
↓	↓	↓	↓	↓	↓
45	**49**	**51**	**55**	**57**	**65**

4 ultimes — 10 nombres stériles

7	13	17	19
↓	↓	↓	↓
15	27	35	39

6 non ultimes

6	8	9	14	15	18
↓	↓	↓	↓	↓	↓
13	17	19	29	31	37

6 ultimes — 10 nombres stériles

31	37	43	47	59	61
↓	↓	↓	↓	↓	↓
63	75	87	95	119	123

4 non ultimes

20	21	26	30
↓	↓	↓	↓
41	43	53	61

Fig. 72 Intrication de sûreté (de Sophie Germain) des deux fois 10 premiers ultimes et deux fois 10 premiers non ultimes. (Voir aussi Fig. 71)

12.5 Fertilité des cent premiers nombres

Dans cet article investissant les nombres entiers naturels, de nombreuses démonstrations arithmétiques ont été faîtes à l'intérieur de la matrice des cent premiers nombres. La dernière démonstration qui suit, à la fois clos celui-ci, mais aussi peut être comme l'introduction d'un autre article encore à publier. Il se trouve en effet que la distribution des nombres fertiles et non fertiles (pouvant pour rappel être aussi bien des ultimes que des non ultimes, comme spécifié chapitre 12.3) n'est nullement aléatoire dans cette matrice des cent premiers nombres. De nombreux arrangements de même nature que beaucoup de ceux déjà introduits dans différents chapitres de cette étude génèrent des oppositions d'entités en différents ratios de valeur 3/2 ou 1/1 selon que ces nombres soient qualifiés de fertiles ou de stériles.

En conclusion de cet article, illustré figure 73, un exemple de ces arrangements remarquables démontrant et confirmant le caractère non aléatoire des concepts de fertilité et de stérilité, et donc aussi des concepts d'ultimité et de non ultimité, des nombres entiers naturels tel que précédemment définis chapitre 12.3.

Matrice des 100 premiers nombres :

50 fertiles **← ratio 1/1 →** 50 stériles

25 fertiles **← ratio 1/1 →** 25 stériles | 25 stériles **← ratio 1/1 →** **25 fertiles**

0	**1**	**2**	**3**	**4**					
					15	**16**	17	18	19
20	21	**22**	**23**	**24**					
					35	36	37	**38**	39

de 0 à 39 :
(40 nombres)
20 fertiles
20 stériles
ratio 1/1

					5	6	7	8	9
10	**11**	**12**	13	14					
					25	26	**27**	**28**	**29**
30	31	**32**	33	**34**					

10 fertiles **← ratio 1/1 →** 10 stériles | ← ratio 1/1 → **← ratio 1/1 →** | 10 stériles **← ratio 1/1 →** **10 fertiles**

↑ ratio 2/3 ↓ | ↑ ratio 2/3 ↓ | **↑ ratio 2/3 ↓** ↑ ratio 2/3 ↓ | ↑ ratio 2/3 ↓ | **↑ ratio 2/3 ↓**

← ratio 1/1 →

15 fertiles **← ratio 1/1 →** 15 stériles | ← ratio 1/1 → | 15 stériles **← ratio 1/1 →** **15 fertiles**

40	**41**	**42**	43	44					
					55	56	**57**	**58**	59
60	61	**62**	63	**64**					
					75	**76**	**77**	78	79
80	81	**82**	**83**	**84**					
					95	96	97	98	99

de 40 à 99 :
(60 nombres)
30 fertiles
30 stériles
ratio 1/1

					45	**46**	47	48	**49**
50	51	**52**	**53**	54					
					65	66	67	68	69
70	71	**72**	73	74					
					85	86	**87**	**88**	**89**
90	**91**	**92**	**93**	**94**					

Fig. 73 Distribution des **50 nombres fertiles** et des **50 nombres stériles** dans des sous matrices issues de la matrice des 100 premiers nombres.

Ainsi, parmi les cent premiers entiers naturels, exactement 50 sont des nombres fertiles et 50 autres des nombres stériles. Aussi, l'isolation, en un ratio de valeur 2/3 des 40 premiers nombres et des 60 suivants fait apparaître la même scission en groupes à même quantité d'entités. Enfin, Il apparaît de très sophistiquées intrications de ces sous ensembles de nombres dans des entrelacements de paquets de toujours 5 entités consécutives. Ces intrications génèrent de nombreuses oppositions des groupes considérés en divers ratios de toujours 3/2 ou 1/1 valeur.

Toute cette remarquable mécanique arithmétique (comme l'ensemble des autres démonstrations de cette étude des entiers naturels) ne se manifeste uniquement que s'il est bien convenu que les nombres zéro (0) et un (1) sont fusionnés à l'ensemble des nombres premiers par la création d'un nouvel ensemble dénommé l'ensemble des nombres ultimes tel que défini en introduction d'article. Sans cette considération, la totalité des démonstrations de cette étude des entiers naturels serait détruite.

13 Discussions et Conclusions

Dans un souci de clarification des phénomènes introduits, le très grand nombre de nouveaux concepts proposés dans cet article investissant les nombres entiers naturels oblige la fusion des discussions et conclusions. Aussi, toujours par ce besoin d'en clarifier instantanément la portée, certaines discussions sont déjà présentes dans plusieurs démonstrations.

13.1 Définition des ultimes

Jusqu'à présent, la définition des nombres dits *premiers* ne permettait pas d'inclure les nombres zéro (0) et un (1) à cet ensemble de premiers. Ainsi, l'ensemble des nombres entiers naturels était éparpillé en quatre entités : les nombres premiers, les non premiers, mais aussi les ambigus nombres *zéro* et *un* aux caractéristiques arithmétiques exotiques. La double définition de nombres ultimes et de non ultimes proposé ici permet de bien scinder l'ensemble des nombres entiers naturels en deux groupes de nombres aux caractéristiques bien définies et absolues : un nombre est soit ultime soit non ultime. En plus de sa non trivialité, le fait de préciser la nature numériquement inférieur d'un diviseur à tout nombre envisagé permet effectivement qu'il n'y ait pas de différence de statut entre les nombres ultimes zéro (0) et un (1) et n'importe quel autre nombre qualifié d'ultime.

13.2 Concept de diviseur ultime et d'algèbre ultime

L'attention portée sur les diviseurs ultimes démontre que ceux-ci s'organisent non aléatoirement, notamment au sein de la matrice des cent premiers nombres où l'on en dénombre $5x$ (15) différents mais aussi $5x'$ (210) au total qui composent les non ultimes dans cette matrice de $5x$ par $5x$ (10 par 10) entités. L'arrangement de leur première apparition est elle-même non aléatoire au sein de cette matrice et s'organise aussi en ratios de valeur 3/2 dans les mêmes configurations que la totalité des diviseurs ultimes des cent premiers nombres.

Aussi et ainsi, la notion de diviseur ultime est indissociable de celle de nombre ultime. Bien qu'inférieurs à n'importe quels autres nombres, zéro (0) et un (1) n'en divisent aucuns : la division par zéro n'est pas définie et un (1) ne divise pas un nombre : il ne le divise pas en diviseurs plus petits. Dans l'algèbre ultime, zéro (0) et un (1) n'en multiplient aucun non plus. Par exemple, les composés absolus 7×0 ou 7×1 n'existent pas en algèbre ultime : 7×0 se réduit à 0 (nombre ultime) et 7×1 se réduit à 7 (autre nombre ultime).

13.3 Les quatre classes de nombres

Le concept et la définition de nombre ultime (mais aussi ceux de diviseur ultime) permettent le classement de l'ensemble de nombres entiers naturels en quatre classes d'entités aux propriétés à la fois interactives, uniques et de degré progressif (depuis la classe des ultimes) de complexité. Aussi, tout nombre entier naturel ne peut appartenir qu'à l'une de ces quatre classes et simultanément appartient obligatoirement à l'une de ces quatre classes : nombres ultimes, élevés, composés ou mixtes.

Cette quantité de classes, de valeur quatre, permet de former dix différentes combinaisons de deux nombres. Ce qui relie ce nombre de classes au système décimal car de plus, 5 contre 5 combinaisons (qualifiées de configurations N et de Z) génèrent deux ensembles de 30 contre 20 couples dans la matrice des 100 (soit 10 fois 10) premiers nombres.

13.4 Le ratio 3/2 et le système décimal

Ratio 3/2, ce terme apparaît des centaines de fois dans cet article ! Il est toujours impliqué entre et dans des ensembles d'entités de $5x$ grandeurs (soit $3x + 2x$) dont, dans la majorité des situations, des matrices diverses de dix par dix entités. Ces phénomènes arithmétiques démontrent l'égalité d'importance des différents types d'entités étudiées comme les ultimes ou non ultimes, les primordiaux ou non primordiaux, les chiffres nombres ou non chiffres nombres parmi les fondamentaux, les nombres de classes extrêmes et ceux de classes médianes, les fertiles, les stériles, etc. . Ainsi est révélé dans cet article de multiples dualités distinguant les nombres entiers naturels en toujours des paires de sous ensembles s'opposant en variés ratios d'exacte valeur 3/2 ou, plus accessoirement, d'exacte valeur 1/1.

Aussi, beaucoup des phénomènes présentés, en plus d'impliquer ce ratio arithmétique de 3/2, gravitent autour de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où a et b ont les valeurs 3 et 2. Ceci génère de nombreuses intrications dans les arrangements arithmétiques opérant entre les différentes entités considérées et renforce donc leur crédibilités par l'amplification dimensionnelle de ces phénomènes arithmétiques.

Les dix premiers ceci, les dix premiers cela, en effet c'est bien à la source de différentes suites d'entités que ce manifestent ces nombreux arrangements de $3x$ contre $2x$ grandeurs et non plus loin en aval de ces suites. Tout ceci démontre des liens intimes entre les différentes natures, introduites dans cette étude, des nombres entiers naturels et le système décimal.

13.5 Diversités des champs d'investigation

Les phénomènes révélés dans cette étude des nombres entiers naturels investissent soit séparément soit de manière transcendante différentes notions mathématiques. Ces démonstrations, décrivant des oppositions d'entités en toujours des ratios de valeur 3/2 ou 1/1, impliquent par exemple simultanément des suites de Fibonacci et des triangles de Pascal. Aussi beaucoup de phénomènes opèrent à l'intérieur de variées matrices aux configurations exotiques mais géographiquement symétriques. Aussi, le fait de pouvoir, avec aisance, poursuivre ces investigations dans le domaine de notion de nombre de Sophie Germain, où les concepts d'ultimité et de non ultimité peuvent être enrichis, conforte la véracité de ces derniers concepts sujets principaux de cet article.

13.6 Concept de nombre de Sophie Germain

Concernant le concept de nombre de Sophie Germain, en référence à la génétique, il a été introduit ceux de nombres fertiles et de nombres stériles générant des nombres sûrs ou incertains. Aussi nous proposons, dans cette logique génétique, de remplacer les termes de nombre sûr et d'incertain par *nombre pur* et *nombre hybride* pouvant s'appliquer tant aux ultimes qu'aux non ultimes tel qu'explicité chapitre 12. Ainsi peut-on dire qu'un nombre fertile *engendre* (par la fonction de Sophie Germain : $2x+1$) un nombre pur et qu'un nombre stérile engendre un nombre hybride. Par cette même logique, et bien que tout nombre puisse être fertile ou stérile, certains, par l'irréversibilité de la fonction (nombres pairs) ne peuvent être ni purs ni hybrides mais *orphelins*.

13.7 Les fondamentaux

La mise en valeur des vingt premiers nombres qualifiés de fondamentaux trouve toute sa légitimité par l'intrication quasi quantique des composants de ce groupe particulier de nombres. Formé des dix premiers ultimes et des dix premiers non ultimes mais aussi des dix chiffres nombres et des dix premiers non chiffres nombres, cet ensemble est un espace mathématique où et d'où s'observe un grand nombre des phénomènes introduits dans cet article depuis la simple matrice d'addition de ses composants jusqu'aux intrications liées au concept de nombres de Sophie Germain.

13.8 Pour conclure

Depuis les variées illustrations arithmétiques introduites en cet article, nous proposons légitimement un double nouveau concept mathématique classant les nombres entiers naturels en deux ensembles d'entités aux propriétés distinctes bien définies :

- les ultimes, n'admettant aucun diviseur leur étant inférieur,
- les non ultimes admettant au moins un diviseur leur étant inférieur.

Aussi, depuis cette double définition, nous proposons de sous-classifier les nombres entiers naturels en ultimes, élevés, composés et mixtes.

Enfin nous proposons d'enrichir les notions de nombres de Sophie Germain (premiers, sûrs) de ce double nouveau concept d'ultimité et de non ultimité.

French version of: Jean-Yves Boulay. The ultimate numbers and the 3/2 ratio. 2020. ⟨ hal-02508414v2⟩
Jean-Yves BOULAY independent researcher (without affiliation) e-mail: jean-yvesboulay@orange.fr
6 rue de l'arche 72110 COURCEMONT - FRANCE