Die Annahme der Stetigkeit der Raumzeit in der Quantengravitation

René Friedrich, Straßburg[1]

Die allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenmechanik wurden beide experimentell bestätigt. Bei dem Versuch, sie miteinander in Einklang zu bringen, werden immer komplexere Theorien der Quantengravitation entwickelt, aber ohne Erfolg.

Die aktuellen Theorien der Quantengravitation basieren auf der Annahme einer stetigen Lorentzschen Raumzeitmannigfaltigkeit. Dieser Annahme wird nur wenig Aufmerksamkeit geschenkt, aber keine Theorie ist vollständig, wenn nicht die ihr zugrundeliegenden Annahmen vorab einer Prüfung unterzogen wurden.

Auf der Grundlage der Grundsätze der allgemeinen Relativitätstheorie wird hier gezeigt, dass die Annahme aus zwei Gründen entkräftet werden kann:

- Unter mathematischen Aspekten ist die Metrik von Lorentzschen Mannigfaltigkeiten nicht korrekt definiert, und

- Unter physikalischen Aspekten beziehen sich die Grundsätze der Relativität auf Weltlinien, nicht aber auf das Vakuum zwischen den Weltlinien.

1. Einleitung

Die Modelle der Lorentzschen Raumzeit werden für die Darstellung der Grundlagen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie verwendet. Minkowski präsentierte im Jahr 1908 eine geometrische Darstellung der speziellen Relativitätstheorie, und einige Jahre später entwickelten Einstein und Grossmann ein geometrisches Modell zur Beschreibung der Grundsätze der allgemeinen Relativitätstheorie. In beiden Fällen gründete man sich auf die Annahme, dass die Lorentzsche Raumzeit eine stetige Mannigfaltigkeit ist, und beide Modelle funktionierten sehr gut, so dass sie als integraler Bestandteil der speziellen bzw. der allgemeinen Relativitätstheorie betrachtet wurden. Das einzige Problem tauchte auf, wenn versucht wurde, die Lorentzsche Raumzeit zu quantifizieren, aber niemand vermutete, dass dieses Problem auf die Unrichtigkeit der Annahme einer stetigen Raumzeit-Mannigfaltigkeit zurückzuführen sein könnte.

Entgegen dem, was man vermuten könnte, stützt jedoch nichts diese Annahme, egal auf welcher Grundlage:

Unter mathematischen Aspekten erfordern Lorentzsche Raumzeitmannigfaltigkeiten eine doppelte (geteilte) Metrik, eine für zeitartige und eine für raumartige Intervalle, ohne dass es eine physikalische Rechtfertigung für eine solche geteilte Metrik gibt;

Unter physikalischen Aspekten definiert die Gravitationstheorie der allgemeinen Relativitätstheorie Weltlinien, aber nicht das Vakuum zwischen den Weltlinien.

---

[1] rene_friedrich@orange.fr

2. Die Stetigkeit der Raumzeit ist nur eine Annahme

Diese Annahme wurde von Minkowski 1908 in seiner Rede "Raum und Zeit" formuliert:

> *"Um nirgends eine gähnende Leere zu lassen, wollen wir uns vorstellen, dass aller Orten und zu jeder Zeit etwas Wahrnehmbares vorhanden ist."* **[1]**

Minkowski wollte eine stetige Raumzeit-Mannigfaltigkeit definieren, und das Zitat zeigt, dass er sich der Tatsache bewusst war, dass das Vakuum zwischen Weltlinien von der speziellen Relativität nicht definiert wird (siehe unten **Abschnitt 4**), andernfalls wäre dieser Satz nicht erforderlich gewesen. Diese Annahme einer stetigen Raumzeit-Mannigfaltigkeit schien so offensichtlich und natürlich, dass seither diesbezüglich keine wesentlichen Zweifel angemeldet wurden[2].

Diese Annahme zwang ihn jedoch im weiteren Verlauf seines Vortrags in Abschnitt III dazu, die Metrik der Raumzeit in zwei Teile aufzuspalten, um imaginäre raumartige Raumzeitintervalle zu vermeiden (siehe unten **Unterabschnitt 3.1**), indem er einfach das Vorzeichen des Quadrats des raumartigen Raumzeitintervalls änderte (die Gleichung

$$"-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = k^2"$$

"zu allen konstanten positiven Werten von k^2.")**[1]**

3. Das mathematische Problem: Raumartige Raumzeitintervalle sind nicht korrekt definiert

3.1. Raumartige Raumzeitintervalle sind imaginär

Von den beiden möglichen Vorzeichenkonventionen für das Raumzeitintervall (+ - - - und - + + +), ist die erste Signatur (+ - - -) laut Penrose "physikalisch direkter" **[3]** , weil sie der Eigenzeit dτ entspricht, die das Raumzeitintervall für zeitartige Weltlinien von Teilchen ist. Wenn wir dieser Interpretation folgen, erhalten wir das Raumzeitintervall

$$ds = d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}}$$

[2] Es ist jedoch zu erwähnen, dass selbst Einstein 1916 in einem Brief an Dällenbach Zweifel in Bezug auf die Stetigkeit der Raumzeit zum Ausdruck brachte: *"Aber auch den Nachteil, welchen das Kontinuum bringt, haben Sie richtig eingesehen. Wenn die molekulare Auffassung der Materie die richtige (zweckmäßige) ist, d. h. wenn ein Teil Welt durch eine endliche Zahl bewegter Punkte darzustellen ist, so enthält das Kontinuum der heutigen Theorie zu viel Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten. Auch ich glaube, dass dieses zu viel daran schuld ist, dass unsere heutigen Mittel der Beschreibung an der Quantentheorie scheitern. Die Frage scheint mir, wie man über ein Diskontinuum Aussagen formulieren kann, ohne ein Kontinuum (Raum-Zeit) zu Hilfe zu nehmen; letzteres wäre als eine im Wesen des Problems nicht gerechtfertigte zusätzliche Konstruktion, der nichts "Reales" entspricht, aus der Theorie zu verbannen. Dazu fehlt uns aber leider noch die mathematische Form. Wie viel habe ich mich in diesem Sinne schon geplagt!"* **[2]**

Es ist offensichtlich, dass diese Metrik keine reelle Mannigfaltigkeit aufspannen kann: Reelle Werte liefert sie nur für zeitartige Raumzeitintervalle. Raumartige Raumzeitintervalle werden dagegen imaginär, sie sind nicht definiert.

Ein Wechsel der Vorzeichenkonvention kann hier nicht helfen: Wenn raumartige Raumzeitintervalle als real betrachtet werden, hat dies zur Folge, dass zeitartige Intervalle imaginär werden.

Wie in **Abschnitt 2** gezeigt, wurde das Problem bereits von Minkowski gesehen, aber er überging das Problem, indem er einfach für die imaginären Intervalle eine reale Metrik definierte. Das Ergebnis war eine Art von Patchwork-Metrik aus zwei einander ergänzenden Metriken, wobei jede Metrik dort Anwendung findet, wo die andere Metrik zu imaginären Ergebnissen führt.

Mathematisch ist es möglich, die Metrik einer bestimmten Zone umzudefinieren, um eine stetige Mannigfaltigkeit zu erhalten, in der gleichen Weise, wie man definieren kann, dass 2 x 2 = 5 oder dass $(-1)^{0,5}$ = +1 ist. Das Problem ist jedoch, dass diese Umdefinition keiner physikalischen Realität entspricht.

Ungeachtet der fehlenden physikalischen Begründung wird die doppelte Metrik von Lorentzschen Mannigfaltigkeiten allgemein anerkannt. Ein Beispiel sind Misner/ Thorne/ Wheeler (S. 305), die die Metrik mit Hilfe der Gleichung

$$\Delta s^2 = -\Delta\tau^2 = g_{\mu\nu} x^\alpha \Delta x_\mu \Delta x_\nu \quad \textbf{[4]},$$

definierten, die voraussetzt, dass es sich beim Raumzeitintervall und bei der Eigenzeit um zwei entgegengesetzte Metriken handelt, weil entsprechend

$$\Delta\tau^2 = -\Delta s^2 = -g_{\mu\nu} x^\alpha \Delta x_\mu \Delta x_\nu$$

eine zweite unabhängige Metrik sein muss. Erneut entspricht eine solche getrennte Behandlung von zeitartigen und raumartigen Raumzeitintervallen keiner physikalischen Realität.

3.2. Keine "ästhetische" Topologie

Die Topologie trägt nicht zur Stützung der Annahme der stetigen Raumzeit bei. Im Gegenteil, es wurde festgestellt, dass es für Lorentzsche Raumzeiten keine "ästhetische Topologie gibt **[5][6]**. Eine mögliche Topologie ist die 1+3 Standardtopologie, die Raum und Zeit separat behandelt, was eher ein Argument für die Annahme einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit des Raums ist als für eine vierdimensionale Raumzeit-Mannigfaltigkeit **[7-9].**

3.3. Von der Euklidischen Mannigfaltigkeit zur Lorentzschen Raumzeit

Die Raumzeit hat eine Lorentzsche Metrik. Allerdings muss man dabei im Kopf behalten, dass Raumzeitkoordinaten eine Euklidische Geometrie haben, und dass es ohne die Euklidische Geometrie keine Lichtkegel geben könnte: Weil das Lorentzsche Raumzeitintervall von lichtartigen Phänomenen auf Null reduziert ist, würde der Lichtkegel auf einen einzelnen Punkt reduziert sein.

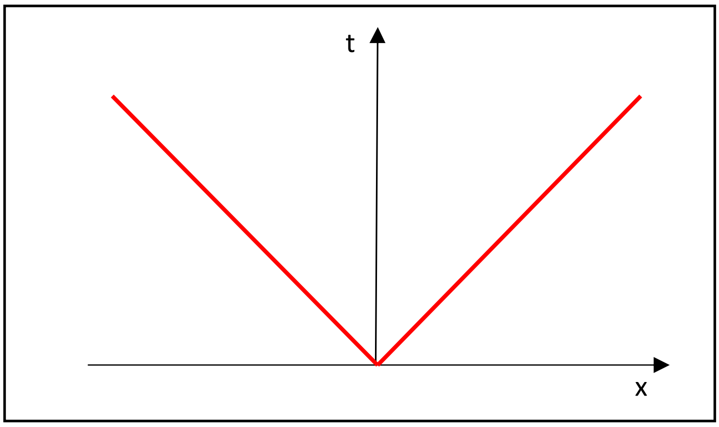

Abb. 1: Darstellungen der Raumzeit mit Lichtkegeln sind immer Euklidisch, weil die Lichtkegel, wenn sie Lorentzsche Metrik hätten, auf Null reduziert wären,

Die Darstellungen der Raumzeit wie in **Abb. 1** haben Ähnlichkeit mit den Darstellungen von Raum und Zeit nach Newton: Es sind immer stetige Euklidische Mannigfaltigkeiten, und wenn sie flach und zweidimensional sind, können sie sogar die Form eines Blatts Papier haben. Mit einem Zollstock können wir Raumintervalle und Zeiträume messen, die Messungen entlang von einer Achse (Zeit- oder Raumachse) entsprechen der Beobachtung. Dagegen liefert die Euklidische Metrik jedoch für gemischte Raum- und Zeitintervalle sinnlose Ergebnisse, sodass man das Lorentzsche Raumzeitintervall errechnen muss. In Euklidischen Mannigfaltigkeiten ist die Lorentzsche Metrik nicht messbar, sie kann nur errechnet werden. Durch diese versteckte Metrik wird aus der Newtonschen die Lorentzsche Raumzeit. Wenn wir jedoch auf eine Raumzeit-Mannigfaltigkeit eine Lorentzsche Metrik anwenden, geht die Stetigkeit verloren, weil raumartige Raumzeitintervalle imaginär und nicht definiert sind (siehe oben **Unterabschnitt 3.1**).

4. Das physikalische Problem: Das Vakuum zwischen Weltlinien ist nicht definiert

4.1. Die beiden Postulate der speziellen Relativitätstheorie

Die beiden Postulate der speziellen Relativitätstheorie lauten:

1. *Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen die gleichen.*
2. *Die Messung der Lichtgeschwindigkeit ergibt in allen Inertialsystemen den gleichen Wert c.*

Beide Postulate betreffen Inertialsysteme (und auch lichtartige Phänomene) mit ihren jeweiligen Weltlinien, aber nicht das Vakuum zwischen Weltlinien. Vakuum wird vielmehr von der Quantenphysik beschrieben, sowie eventuell auch von der Kosmologie in der Form von dunkler Energie, aber Vakuum wird weder von der speziellen Relativitätstheorie definiert noch von der allgemeinen Relativitätstheorie zur Gravitation. Beispiel: Die Schwarzschildmetrik führt die Krümmung von Weltlinien durch Gravitation ein, aber das Vakuum zwischen den Weltlinien wird nicht beschrieben.

Das bedeutet, dass die allgemeine Relativitätstheorie selbst der Annahme einer stetigen Raumzeit-Mannigfaltigkeit entgegensteht, weil diese auch Vakuumpunkte beinhalten müsste.

4.2. Vakuumpunkte haben keine zeitliche Entwicklung.

Was passiert mit Vakuumpunkten in der speziellen Relativitätstheorie?
Für diese Frage betrachten wir ein Minkowski-Diagramm mit zwei Gleichzeitigkeitslinien.

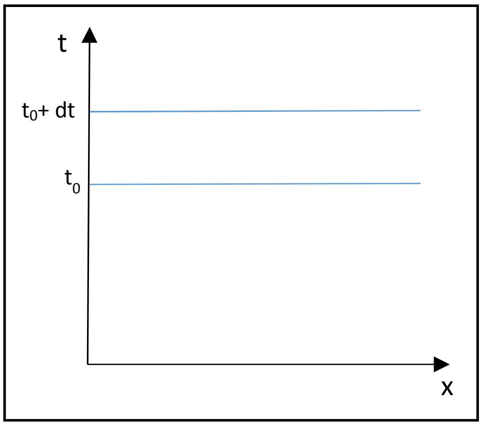

Abb. 2: Zwei Gleichzeitigkeitslinien scheinen völlig stetig zu sein

Die beiden Gleichzeitigkeitslinien scheinen völlig stetig zu sein

Nun zeichnen wir zwei Weltlinien von Teilchen ein. Die Weltlinie von jedem Teilchen wird durch dessen Position und dessen Geschwindigkeit bestimmt.

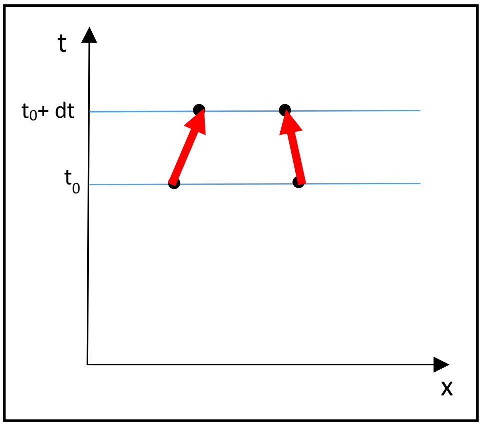

Abb. 3: Zwei Weltlinien von Teilchen

Wie sieht es aber mit einem Vakuumpunkt zwischen den beiden Teilchen aus? Ein Vakuumpunkt hat keine definierte Geschwindigkeit. Entgegen den Raumzeiten mit Euklidischer Metrik wie zum Beispiel der Newtonschen Mannigfaltigkeit von Raum und Zeit geht der Vakuumpunkt nicht einfach nach oben durch die Zeit, weil dies einen bevorzugten Beobachter implizieren würde. Das Ergebnis: Kein Punkt auf der oberen Linie $t_0 + dt$ entspricht dem Vakuumpunkt auf der unteren Line t_0. Vakuumpunkte haben keine zeitliche Entwicklung.

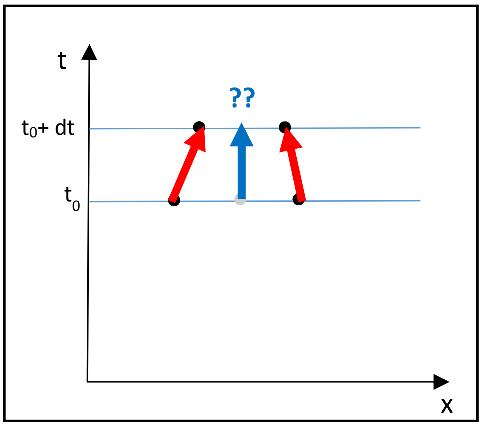

Abb. 4: Kein Punkt auf der oberen Linie entspricht dem Vakuumpunkt auf der unteren Line.

Das bedeutet: Jeder Vakuumpunkt ist einfach nur ein unabhängiger Punkt mit Zeit- und Raumkoordinaten, ohne irgendeine zusätzliche Information. Oder umgekehrt: Die einzige Existenzberechtigung eines Vakuumpunkts zwischen Weltlinien wird durch das Koordinatensystem vermittelt, das zur Beschreibung der Weltlinien gezeichnet wurde. Der Vakuumpunkt stellt nur den Leerraum zwischen Weltlinien dar, ohne irgendeine physikalische Relevanz.

Für lichtartige Phänomene, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreiten (z.B. elektromagnetische und gravitative Felder), ist das Problem ein anderes: Man könnte annehmen, dass lichtartige Phänomene stetig und überall sind, selbst im Vakuum zwischen Teilchen. Das Problem besteht hier darin, dass durch ein und den selben Punkt viele lichtartige Phänomene gehen, sodass es keinen eindeutig definierten Punkt auf der oberen Linie gibt, der dem Punkt auf der unteren Linie entspricht.

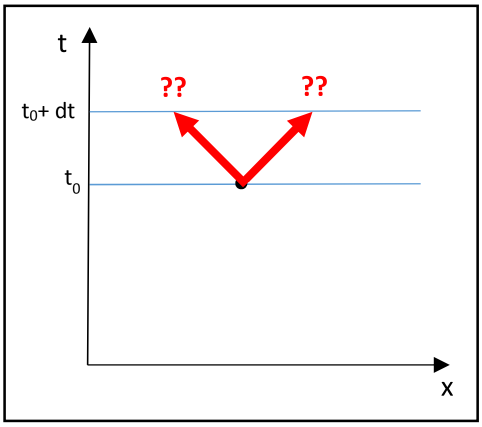

Abb. 5: Keine eindeutige Lösung für lichtartige Phänomene

5. Die Causal-Set-Theorie

Die Causal-Set-Theorie kommt der hier vorgeschlagenen Lösung sehr nahe, aber anstatt die Lösung innerhalb der allgemeinen Relativitätstheorie zu suchen, sucht die Causal-Set-Theorie unnötigerweise nach einem fundamentaleren Konzept jenseits von der allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Causal-Set-Theorie geht von der Annahme einer stetigen Lorentzschen Mannigfaltigkeit aus und sieht vor, dass die Raumzeit auf fundamentaler Ebene unstetig ist. Ihr Ziel ist die Ableitung einer stetigen Lorentzschen Mannigfaltigkeit aus einer kausalen Ordnung, die naturgemäß raumartige Raumzeitintervalle verbietet. Die Causal-Set-Theorie schlägt eine Lösung mit nicht stetiger Raumzeit vor, die aus getrennten Raumzeitpunten (Ereignissen) besteht, und ein wesentliches Anliegen ist die Lorentz-Invarianz (anstatt aller siehe **[10-11]**).

Die Causal-Set-Theorie versucht, jenseits der Lorentzschen Raumzeit ein Gerüst kausaler Ordnung aufzubauen. Leider wird dabei die Tatsache nicht berücksichtigt, dass ein solches Lorentz-invariantes Gerüst bereits in der allgemeinen Relativitätstheorie existiert, nämlich in der Form von Weltlinien: Zeitartige Weltlinien von Teilchen und lichtartige Weltlinien von Feldern übertragen einwandfrei 100% der Kausalbeziehungen der Ereignisse des Universums, und wir haben die Möglichkeit, alle diese Weltlinien nach ihrer jeweiligen Eigenzeit zu parametrieren, damit sie Lorentz-invariant sind. Eine Besonderheit solcher solipsistischen, nach ihrer jeweiligen Eigenzeit parametrierten Weltlinien ist es, dass sie nicht zusammen in gemeinsamen Raumzeitkoordinaten darstellbar sind, aber auf dieser fundamentalen Ebene der Darstellung der Weltlinien vor Zeitdilatation sind keine Raumzeitkoordinaten gefordert. Erst in einem zweiten Schritt misst ein Beobachter diese Weltlinien anhand seines eigenen Koordinatensystems, nachdem er ihren jeweiligen Eigenzeitparameter durch seinen eigenen Koordinatenzeitparameter ersetzt hat. Dies ist, was wir "Beobachtung" nennen.

6. Ergebnis

Wir haben die Annahme der Stetigkeit der Raumzeit unter verschiedenen Aspekten untersucht, und das Ergebnis war stets negativ, egal welchen Ansatz wir verwandten. Die treibende Kraft für die Annahme könnte die Lorentz-Symmetrie gewesen sein, aber es ist bekannt, dass Raum und Zeit verschiedene Dinge sind, und dass ihre Ähnlichkeit streng auf die Lorentz-Symmetrie beschränkt ist. Heute konzentriert sich das Interesse auf Quantengravitation, und es wurden bereits Zweifel hinsichtlich des aktuellen Modells einer Raumzeitmannigfaltigkeit angemeldet. Die Entkräftung der Annahme der Stetigkeit der Raumzeit könnte Fortschritte auf diesem Gebiet ermöglichen.

7. Referenzen

[1] Hermann Minkowski: Raum und Zeit (1908), in: Space and Time, Minkowski's Papers on Relativity, Minkowski Institute Press 2012, p. 111

[2] Albert Einstein, letter to Walter Dällenbach, Nov. 1916, cited and translated by J. Stachel: Einstein and the quantum: Fifty years of struggle. In Robert G. Colodny (ed.): From Quarks to Quasars, Philosophical Problems of Modern Physics (1986), p. 379

[3] Roger Penrose: The Road to Reality, 2004, § 18.1

[4] Charles Misner, Kip Thorne, John Archibald Wheeler: Gravitation, 1973

[5] R. Göbel: Zeeman topologies on space-times of general relativity theory, Comm. Math. Phys. 1976, p. 289

[6] Renee Hoekzema: On the Topology of Lorentzian manifolds, 2011

[7] E.C. Zeeman: Causality Implies the Lorentz Group, 1963, Journal of Mathematical Physics 1964, p. 490

[8] Steven Hawking: Singularities and the geometry of spacetime, The European Physical Journal H 2014

[9] Steven Hawking, A.R. King and P.J. McCarthy: A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential and conformal structures, Journal of Mathematical Physics, 1976 p. 174
[10] Rafael D. Sorkin: Causal Sets: Discrete Gravity, arxiv, 01/09/2003
[11] Astrid Eichhorn: Steps towards Lorentzian quantum gravity with causal sets, arxiv, 01/02/2019