La (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments

Par :
M. Sghiar
msghiar21@gmail.com
Présenté à :
UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE DIJON
Faculté des sciences Mirande
Département de mathématiques
9 Av Alain Savary
21078 DIJON CEDEX

Abstract : In this article, by algebraic and geometrical techniques, I give a proof to the famous conjecture of Ulam [10] on the (-1)-reconstruction of the symmetric graphs with at least 3 elements conjectured in 1942, although was published only in 1960.

Résumé : Dans cet article, par des techniques algébriques et géométriques, je donne une preuve à la célèbre conjecture d'Ulam [10] sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments conjecturé en 1942, quoique n'a été publié que en 1960 .

Keywords : Graph, Ulam, Ulam's conjecture, isomorphism, reconstruction.

Code : 05C60, 05C62, 15AXX, 15A03, 15A04, 53AXX

Introduction

En 1977, Stockmeyer [9] a infirmé la conjecture Ulam-Kelly [10] et [4] sur la (-1)-reconstruction des tournois. Toutefois la (-1)-reconstruction a été démontré dans d'autre cas : citons par exemple la (-1)-reconstruction des arbres démontré par PJ Kelly [4] et la (-1)-reconstruction des tournois non fortement connexes [3] démontré par F.Harary et E Palmer (voir aussi [6] et [7]). D'autres travaux remarquables et plus récents ont introduit l'algèbre dans la reconstruction des graphiques [5] (voir aussi [1]). Parmi les auteurs qui ont utilisé les outils algébriques, je cite M. Pouzet et N M. Thiéry [2].

Dans cette article, par des techniques algébriques et géométriques, je donne une preuve à la célèbre conjecture d'Ulam sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments conjecturé en 1942, quoique n'a été publié que en 1960 [10].

1 La preuve de la conjecture d'Ulam

Théorème 1.1 (Conjecture d'Ulam [10]) *Soient G et H deux graphes symétriques sur une même base E de cardinal n au moins égal à 3.*

Si G et H sont (-1)-hypomorphes (c'est à dire isomorphes sur toute partie à $n-1$ éléments), alors G et H sont isomorphes .

Proposition 1.1 *Si G et H sont deux Graphes symétriques sur une base E de cardinal $n \geq 3$ et de matrices respectives M et N et (-1)-hypomorphes , alors il existe une matrice A telle que : $N = AMA^t$ et $M = A^tNA$ si M et*

N sont dans un voinage $\mathcal{V}(I_n)$ de I_n pour la norme $\|X\| = sup\{|x_{i,j}|, i \neq j\}$ si $X = (x_{i,j})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Preuve :

Posons $M = (m_{i,j})$, $N = (n_{i,j})$, O_n la matrice nulle, I_n la matrice identité, la matrice M_i est obtenue à partir de M en changeant $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$ par 0 et en **multipliant** $m_{k,l}$ par $\frac{n-1}{n-2}$ si $k \neq l$ et $\{k,l\} \cap \{i\} = \emptyset$ sinon on multiplie $m_{k,k}$ par 1 si $k \neq i$.

L_i est la matrice obtenue à partir de I_n en changeant la colonne i par le vecteur nul.

Si σ est la matrice d'une permutation p_i sur $E \backslash \{e_i\}$ où $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, on définit $\widetilde{\sigma}$ la matrice de la permutation p prolongeant p_i sur E. Et on pose $\sigma_i = \widetilde{\sigma}$

On définit l'opérateur Δ_i par : $\Delta_i M = O_n$ Si M possède une colonne nulle C_j avec $j \neq i$, Sinon $\Delta_i M = M$

On définit l'opérateur Δ_i^t par : $M\Delta_i^t = O_n$ Si M possède une ligne nulle L_j avec $j \neq i$, Sinon $M\Delta_i^t = M$

Dans la suite M et N sont les matrices réelles des graphes G et H .

$$M = \sum_i \frac{1}{(n-1)} M_i$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} N_i$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} L_i N_i L_i^t$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} \sigma_i L_i M_i L_i^t \sigma_i^t$$

Donc

$$\left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i \right) M \left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t \right) = \sum_{\substack{i,j \\ i=j}} \frac{1}{n-1} \sigma_i L_i M_i L_j^t \sigma_j^t = N$$

Et on a :

$$\left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i \right) M \left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t \right) = N$$

De même on a :

$$\left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t \right) N \left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i \right) = M$$

Posons :

$$\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i = \widetilde{A}$$

Et

$$\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t = \widetilde{B}$$

Alors $N = \widetilde{A} M \widetilde{A}^t$, $M = \widetilde{B} N \widetilde{B}^t$, $\widetilde{B}^t = \widetilde{A}$, $\widetilde{B} = \widetilde{A}^t$ et $(\widetilde{A}\widetilde{B})^t = \widetilde{A}\widetilde{B}$

Avec $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont deux opérateurs sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Or $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont linéaires au voisinage $\mathcal{V}(I_n)$ de I_n pour la norme $\|X\| = sup\{|x_{i,j}|, i \neq j\}$ si $X = (x_{i,j})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc ils sont solutions de l'équation différentielle :

$$\mathcal{D}_{I_n}\mathcal{U} = \mathcal{U}$$

Sa résolution montre qu' il existe A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\widetilde{A}X = AX$ et $\widetilde{B}X = BX$, $\forall X \in \mathcal{V}(I_n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Et finalement on a : $N = AMA^t$ et $M = A^tNA$; $\forall M,\ N \in \mathcal{V}(I_n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition 1.2 *Si $M = BNB^t$, $N = AMA^t$ avec $det(N) \neq 0$ et $(AB)^t = AB$ alors $AB = I_n$.*

Preuve :

Si $M = BNB^t$, $N = AMA^t$, alors par récurrence on a : $N = (AB)^r N((AB)^t)^r$ $\forall r \in \mathbb{N}$

Posons X=AB.

On a alors : $N = X^r N X^r$, $\forall r \in \mathbb{N}$

Mais comme $det(N) \neq 0$, alors $det(X) \neq 0$. Et comme X est symétrique, alors $X = P^tDP$ avec D diagonale et P orthogonale.

Donc $N = P^tD^rPNP^tD^rP$, $\forall r \in \mathbb{N}$

En posant $N = (n_{i,j})$, de l'égalité ci-dessus, on déduit que :

$n_{i,j} = \sum_{k_1,k_2} p_{i,j,k_1,k_2}(\lambda_{k_1}^r \lambda_{k_2}^r)$, $\forall r \in \mathbb{N}$, avec $p_{i,j,k_1,k_2} \in \mathbb{R}^*$ (les λ_{k_i} sont des valeurs propres de la matrice D).

On en déduit que $\forall k, \lambda_{k_i} = 1$ et $n_{i,j} = \sum_{k_1,k_2} p_{i,j,k_1,k_2}(\lambda_{k_1}^r \lambda_{k_2}^r)$, $\forall r \in \mathbb{R}$, et par suite : $N = X^r N X^r$, $\forall r \in \mathbb{R}$ avec $XN = NX$ et $ln(X)N = Nln(X)$

Soit ψ l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & r & \mapsto & N - X^r N X^r \end{array}$$

Comme $\psi(r) = 0 \; \forall r \in \mathbb{R}$ et $ln(X)N = Nln(X)$ alors $\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2ln(X)X^r N X^r = -2Nln(X) = O_n$

Donc $ln(X) = O_n$, soit $X = I_n$ (où ln(X) est le **logarithme** de X).

Preuve du Théorème 1.1 :

On peut choisir G et H de la façon suivante : $M = (m_{i,j})$ telle que $m_{i,i} = 1$ et $m_{i,j} = m_{j,i} \in \{0, \epsilon\}$ où $\epsilon \in \mathbb{R}^*$ pour que $det(M) \neq 0$.

$N = (n_{i,j})$ telle que $n_{i,i} = 1$ et $n_{i,j} = n_{j,i} \in \{0, \epsilon\}$ où $\epsilon \in \mathbb{R}^*$ pour que $det(N) \neq 0$.

Ceci est possible par continuité de l'application déterminant et du fait que $det(I_n) \neq 0$.

D'après la proposition 1.1 il existe une matrice A telle que : $N = AMA^t$ et $M = A^t N A$ si ϵ est petit (car M et N seront dans un voisinage $\mathcal{V}(I_n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de I_n) , et de la proposition 1.2 on a $AA^t = I_n$, il en résulte que G et H sont isomorphes.

Conclusion

Pour parvenir à la preuve de cette célèbre conjecture d'Ulam sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques **finis** à au moins 3 éléments, conjecturée en 1942, quoique n'a été publiée que en 1960, il m'a fallu utiliser de l'algèbre et de la géométrie différentielle. Pour le cas des graphes **infinis**, je renvoie le lecteur à ma prépublication [8]

Remerciements

Je tiens à remercier toute personne ayant contribué pour la réussite du résultat de cet article.

Références

[1] P. J. Cameron. Stories from the age of reconstruction. *Festschrift for C. St. J.A. Nash-Williams*, 113 :31–41, 1996.

[2] M. Pouzet et N. M. Thiéry. Invariants algébriques de graphes et reconstruction. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 333, Série I :821–826, 2001.

[3] F. Haray and E. Palmer. On the problem of the reconstruction of a tournament from subtournaments. *Mh. Math*, 71 :14–23, 1967.

[4] P. J. Kelly. A congruence theorem for trees. *Pacific J. Math*, 7 :961–968, 1957.

[5] V. B. Mnukhin. The k-orbit reconstruction and the orbit algebra. *Acta Appl. Math*, 29(1-2) :83–117, 1992.

[6] M. Pouzet. Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. *Math. Zeitschrirt*, 150 :117–134, 1976.

[7] M. Pouzet. Relations non reconstructible par leurs restrictions. *Journal of combinatorial Theory, Series B*, 26 :22–34, 1979.

[8] M. Sghiar. Mesure et action des i-permutation sur les multigraphes multicolores finis et infinis. pages 1–41, 2015. déposé au arXiv et au HAL : Réf : hal-01080405), https://arxiv.org/abs/1506.08963.

[9] P. K. Stockmeyer. The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments. *J. Graph Theory*, 1 :19–25, 1977.

[10] S. M. Ulam. " a collection of mathematical problems,". *Interscience, New York*, 1960.

M. sghiar

msghiar21@gmail.com

Tel : 0033(0)953163155& 0033(0)669753590.