

La (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3

éléments

Par :

M. Sghiar

msghiar21@gmail.com

Présenté à :

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE DIJON

Faculté des sciences Mirande

Département de mathématiques

9 Av Alain Savary

21078 DIJON CEDEX

Abstract : In this article, by algebraic and geometrical techniques, I give a proof to the famous conjecture of Ulam on the (-1)-reconstruction of the symmetric graphs with at least 3 elements conjectured in 1942, although was published only in 1960.

Résumé : Dans cet article, par des techniques algébriques et géométriques, je donne une preuve à la célèbre conjecture d'Ulam sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments conjecturé en 1942, quoique n'a été publié que en 1960 .

Keywords : Graph, Ulam, Ulam's conjecture, isomorphism, reconstruction.

Code : 05C60, 05C62, 15AXX, 15A03, 15A04, 53AXX

Introduction

En 1977, Stockmeyer [8] a infirmé la conjecture Ulam-Kelly [9] et [4] sur la (-1)-reconstruction des tournois. Toutefois la (-1)-reconstruction a été démontré dans d'autre cas : citons par exemple la (-1)-reconstruction des arbres démontré par PJ Kelly [4] et la (-1)-reconstruction des tournois non fortement connexes [3] démontré par F. Harary et E Palmer (voir aussi [6] et [7]). D'autres travaux remarquables et plus récents ont introduit l'algèbre dans la reconstruction des graphiques [5] (voir aussi [1]). Parmi les auteurs qui ont utilisé les outils algébriques, je cite M. Pouzet et N M. Thiéry [2].

Dans cette article, par des techniques algébriques et géométriques, je donne une preuve à la célèbre conjecture d'Ulam sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments conjecturé en 1942, quoique n'a été publié que en 1960 [9].

1 La preuve de la conjecture d'Ulam

Théorème 1.1 (Conjecture d'Ulam [9]) *Soient G et H deux graphes symétriques sur une même base E de cardinal n au moins égal à 3.*

Si G et H sont (-1)-hypomorphes (c'est à dire isomorphes sur toute partie à $n - 1$ éléments), alors G et H sont isomorphes .

Proposition 1.1 *Si G et H sont deux Graphes symétriques sur une base E de cardinal $n \geq 3$ et de matrices respectives M et N et (-1)-hypomorphes , alors il existe une matrice A telle que : $N = AMA^t$ et $M = A^tNA$ si M et*

N sont dans un voisinage $\mathcal{V}(I_n)$ de I_n pour la norme $\|X\| = \sup\{(x_{i,j}), i \neq j\}$ si $X = (x_{i,j})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Preuve :

Posons $M = (m_{i,j})$, $N = (n_{i,j})$, O_n la matrice nulle, I_n la matrice identité, la matrice M_i est obtenue à partir de M en changeant $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$ par 0 et en **multipliant** $m_{k,l}$ par $\frac{n-1}{n-2}$ si $k \neq l$ et $\{k, l\} \cap \{i\} = \emptyset$ sinon on multiplie $m_{k,k}$ par 1 si $k \neq i$.

L_i est la matrice obtenue à partir de I_n en changeant la colonne i par le vecteur nul.

Si σ est la matrice d'une permutation p_i sur $E \setminus \{e_i\}$ où $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, on définit $\tilde{\sigma}$ la matrice de la permutation p prolongeant p_i sur E . Et on pose $\sigma_i = \tilde{\sigma}_i$

On définit l'opérateur Δ_i par : $\Delta_i M = O_n$ Si M possède une colonne nulle C_j avec $j \neq i$, Sinon $\Delta_i M = M$

On définit l'opérateur Δ_i^t par : $M \Delta_i^t = O_n$ Si M possède une ligne nulle L_j avec $j \neq i$, Sinon $M \Delta_i^t = M$

Dans la suite M et N sont des matrices réelles .

$$M = \sum_i \frac{1}{(n-1)} M_i$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} N_i$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} L_i N_i L_i^t$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} \sigma_i L_i M_i L_i^t \sigma_i^t$$

De même on peut écrire :

$$M = \sum_i \frac{1}{(n-1)} \tau_i L_i N_i L_i^t \tau_i^t$$

On en déduit que :

$$N = \sum_{i,j} \frac{1}{(n-1)^2} \sigma_i L_i \tau_j L_j N_j L_j^t \tau_j^t L_i^t \sigma_i^t$$

Et par suite :

$$N = \sum_{\substack{i,j \\ i=j}} \frac{1}{(n-1)^2} \sigma_i L_i \tau_j L_j N_j L_j^t \tau_j^t L_i^t \sigma_i^t + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{1}{(n-1)^2} \sigma_i L_i \tau_j L_j N_j L_j^t \tau_j^t L_i^t \sigma_i^t$$

Or

$$\sum_{\substack{i,j \\ i=j}} \frac{1}{(n-1)^2} \sigma_i L_i \tau_j L_j N_j L_j^t \tau_j^t L_i^t \sigma_i^t = \frac{1}{n-1} N$$

Donc

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{1}{(n-1)^2} \sigma_i L_i \tau_j L_j N_j L_j^t \tau_j^t L_i^t \sigma_i^t = N - \frac{1}{n-1} N = \frac{n-2}{n-1} N$$

Ainsi :

$$\left(\frac{1}{n-1} \sum_i \sigma_i L_i \Delta_i\right) M \left(\frac{1}{n-1} \sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t\right) = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=j} \frac{1}{n-1} \sigma_i L_i \tau_j L_j N_j L_j^t \tau_j^t L_i^t \sigma_i^t = \frac{1}{(n-1)^2} N$$

Et on a :

$$\left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i\right) M \left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t\right) = N$$

De même on a :

$$\left(\sum_i \tau_i L_i \Delta_i\right) N \left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \tau_i^t\right) = M$$

Posons :

$$\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i = \tilde{A}$$

Et

$$\sum_i \tau_i L_i \Delta_i = \tilde{B}$$

Alors $N = \tilde{A} M \tilde{A}^t$ et $M = \tilde{B} N \tilde{B}^t$

Comme $\tau_i = \sigma_i^t$, alors $\tilde{B}^t = \tilde{A}$, $\tilde{B} = \tilde{A}^t$ et $(\tilde{A} \tilde{B})^t = \tilde{A} \tilde{B}$

Avec \tilde{A} et \tilde{B} sont deux opérateurs sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Or \tilde{A} et \tilde{B} sont linéaires au voisinage $\mathcal{V}(I_n)$ de I_n pour la norme $\|X\| = \sup\{(x_{i,j}), i \neq j\}$ si $X = (x_{i,j})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc ils sont solutions de l'équation différentielle :

$$\mathcal{D}_{I_n}\mathcal{U} = \mathcal{U}$$

Sa résolution montre qu' il existe A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\tilde{A}X = AX$ et $\tilde{B}X = BX, \forall X \in \mathcal{V}(I_n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Et finalement on a : $N = AMA^t$ et $M = A^tNA; \forall M, N \in \mathcal{V}(I_n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition 1.2 *Si $M = BNB^t, N = AMA^t$ avec $\det(N) \neq 0$ et $(AB)^t = AB$ alors $AB = I_n$.*

Preuve :

Si $M = BNB^t, N = AMA^t$, alors par récurrence on a : $N = (AB)^r N ((AB)^t)^r$
 $\forall r \in \mathbb{N}$

Posons $X=AB$.

On a alors : $N = X^r N X^r, \forall r \in \mathbb{N}$

Mais comme $\det(N) \neq 0$, alors $\det(X) \neq 0$. Et comme X est symétrique, alors $X = P^t D P$ avec D diagonale et P orthogonale.

Donc $N = P^t D^r P N P^t D^r P, \forall r \in \mathbb{N}$

En posant $N = (n_{i,j})$, Par l'égalité ci-dessus, on déduit que $n_{i,j} = \sum_{k=1}^{u_{i,j}} p_{i,j,k}(\lambda_k^r)$, $\forall r \in \mathbb{N}$, avec $p_{i,j,k} \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \neq 0 \forall i, 1 \leq i \leq u_{i,j}$ (les λ_i dépendent des valeurs propres de la matrice D).

On en déduit que $\forall i, \lambda_i = 1$ et $n_{i,j} = \sum_{k=1}^{u_{i,j}} p_{i,j,k}(\lambda_k^r)$, $\forall r \in \mathbb{R}$, et par suite :

$$N = X^r N X^r, \forall r \in \mathbb{R}$$

Soit ψ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \psi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ r &\mapsto N - X^r N X^r \end{aligned}$$

Comme $\psi(r) = 0 \forall r \in \mathbb{R}$, alors $\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2 \ln(X) X^r N X^r = -2N \ln(X) = O_n$

Donc $\ln(X) = O_n$, soit $X = I_n$ (où $\ln(X)$ est le **logarithme** de X).

Preuve du Théorème 1.1 :

On peut choisir G et H de la façon suivante : $M = (m_{i,j})$ telle que $m_{i,i} = 1$ et $m_{i,j} = m_{j,i} \in \{0, \epsilon\}$ où $\epsilon \in \mathbb{R}^*$ pour que $\det(M) \neq 0$.

$N = (n_{i,j})$ telle que $n_{i,i} = 1$ et $n_{i,j} = n_{j,i} \in \{0, \epsilon\}$ où $\epsilon \in \mathbb{R}^*$ pour que $\det(N) \neq 0$.

Ceci est possible par continuité de l'application déterminant et du fait que $\det(I_n) \neq 0$.

D'après la proposition 1.1 il existe une matrice A telle que : $N = A M A^t$ et $M = A^t N A$ si ϵ est petit (car M et N seront dans un voisinage $\mathcal{V}(I_n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de I_n), et de la proposition 1.2 on a $A A^t = I_n$, il en résulte que G et H sont isomorphes.

Remerciements

Je tiens à remercier toute personne ayant contribué pour la réussite du résultat de cet article.

Références

- [1] P. J. Cameron. Stories from the age of reconstruction. *Festschrift for C. St. J.A. Nash-Williams*, 113 :31–41, 1996.
- [2] M. Pouzet et N. M. Thiéry. Invariants algébriques de graphes et reconstruction. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 333, Série I :821–826, 2001.
- [3] F. Haray and E. Palmer. On the problem of the reconstruction of a tournament from subtournaments. *Mh. Math*, 71 :14–23, 1967.
- [4] P. J. Kelly. A congruence theorem for trees. *Pacific J. Math*, 7 :961–968, 1957.
- [5] V. B. Mnukhin. The k-orbit reconstruction and the orbit algebra. *Acta Appl. Math*, 29(1-2) :83–117, 1992.
- [6] M. Pouzet. Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. *Math. Zeitschrift*, 150 :117–134, 1976.
- [7] M. Pouzet. Relations non restructurable par leurs restrictions. *Journal of combinatorial Theory, Series B*, 26 :22–34, 1979.
- [8] P. K. Stockmeyer. The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments. *J. Graph Theory*, 1 :19–25, 1977.
- [9] S. M. Ulam. “ a collection of mathematical problems,”. *Interscience, New York*, 1960.

M. sghiar
msghiar21@gmail.com

Tel : 0033(0)953163155& 0033(0)669753590.