

# Foundation of the Material Singularity

Rafael Cañete Mesa\*

**ABSTRACT:** The expectation value of the total energy of a wave packet, associated with the speed (moments) space by means of the Lorentz transformation, allows us to obtain by means of quantum wave formulation an energetic expression equivalent, and at the same time less restricted (more versatile and informative), to the one obtained by means of a corpuscular treatment. On the one hand, the energetic formants of the matter appear, on the other the expression in undulatory terms of it, of that which we call mass, and finally an additional phase factor as the last vestige of the undulatory nature after the formation process, that is to say, as an accrediting element of that nature, and mechanism of restitution of it, responsible for the wave-corpuscle duality, of the related creation-annihilation processes, and of the relations among the different generations of elementary particles, as it was shown in <https://vixra.org/abs/2003.0001>.

Keywords: standard models, wave packed

\* rafaalcanyete@protonmail.com

## 1. INTRODUCTION

The description of particles in the quantum mechanics environment is good for particles in a certain state of confinement, but not for free particles. In this case, by means of the wave functions, either of travelling waves or of waves groups, only a partial or not free correspondence has been achieved, and always by means of the use of wave quantum mechanics, since the matrix mechanics, despite the mathematical equivalence between one and the other, is not applicable to these continuous states of energy. It is precisely this non-applicability of the matrix quantum to the problem and its predominance, however, for many other issues as a consequence of its versatility, which has caused in a certain sense that research routes aimed at overcoming the problem are not sought, i.e. aimed at providing a true theoretical support to the wave-corpuscle duality, in accordance with the experimental evidence and the relevance of the question. To some extent, it has been decided to explore to satiety that which allows itself to be treated by matrix formalism, and what is not has been left aside, in spite of the fact that it is a particular area (unapproachable by other methods) capable of providing information analogous to reality, since the wave function is a physical entity and not a mathematical representation like that constructed with functions in matrix mechanics. Consequently, we know that particles are created by means of a creation operator, but we do not know what that creation act consists of because we know nothing about the created object.

It is for all these reasons that, going back a century, we are going to return to the path from the beginning, and give it another focus, another push, from the conviction that this reality, that of duality, is a superior (more primordial) reality by far to other realities or work schemes of physics that after many years of work know how to say many phenomenological things, but very few of the matter itself or its organization.

From the beginning. A free particle can be represented by a

one-dimensional or elemental wave, which we call the plane wave  $\psi = Ae^{i(kx-wt)}$ , which describes the possibility of the particle to be located in space in the interval  $[-\infty, +\infty]$ , as occurs, for example, with its real part  $\psi = A\cos(kx - wt)$ , called also travelling wave, which we can easily represent (see Figure 1),

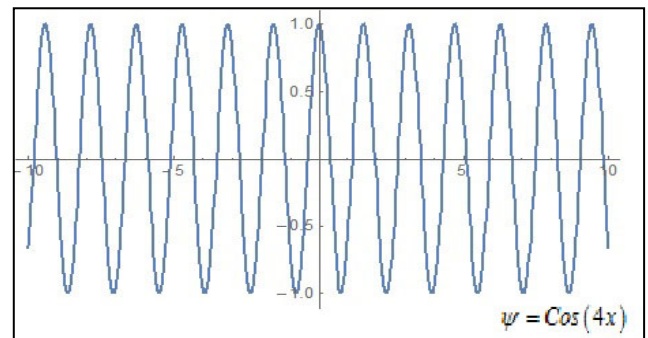


Figure 1: travelling wave

but which at the same time evidences the impossibility by means of it of determining in which position of space the particle is, as a consequence of the impossibility of normalizing the wave function in the mentioned  $[-\infty, +\infty]$  interval, that is, of integrating in the interval and finding a defined value for  $A$ , of which results an insufficient description. We could say, in accordance with the principle of indeterminacy, that if the quantity of motion ( $p$ ) is fixed exactly, the position ( $x$ ) of the particle is completely undefined.

This is somehow solved by the wave packets of different typology or distribution (Gaussians, Lorentzians) that can be obtained by constructing light pulses (wave train of finite length) or by superimposing many waves of approximate wave vector, that is, of different values  $p$ , and consequently of an undetermined value  $p$ , which restricts the indeterminacy of  $x$  to an interval  $\Delta x$ , accounting for a defined location and a certain sense of occupation (the wave of matter of de Broglie).

These distributions are functional arrangements that make the original wave extinguish beyond a few boundaries on either side of a central point, so that it is a discrete spatial arrangement that can even evolve over time. Explicitly, by applying the function  $\theta = \exp(-x^2 / 20)$  (see Figure 2) ,

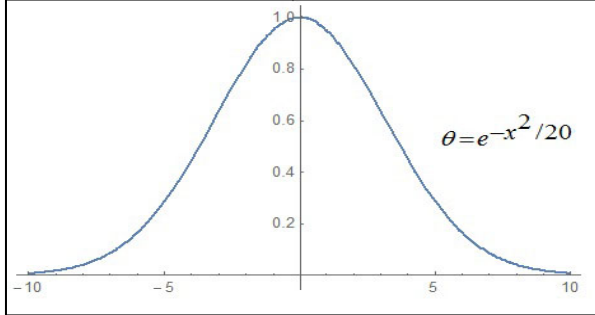


Figure 2: amplitude modulation

to the previous function  $\psi$  , we get (see Figure 3):

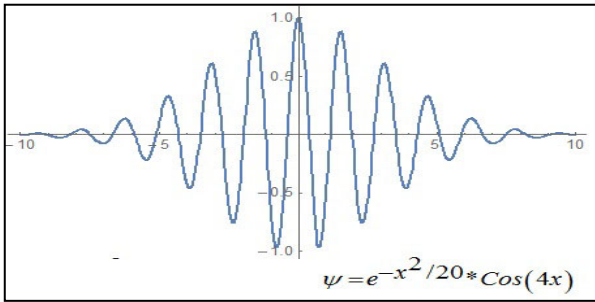


Figure 3: wave packet

This is what we also know by wave modulation or modulated wave used for the transmission of information associated precisely with a certain energy distribution. It is this way of distributing energy in the group that is intended to be used to identify the particle, as an evident form of energy-information, in it.

The attempts, however, to associate this wave model with the real constitution of the elementary particle have failed, given that, contrary to what happened with the particles they try to represent, they are extinguished in time, which is unavoidable in the current paradigm.

## 2. SYMMETRIZED WAVE PACK (SWP)

In the first place, we are not going to try to overcome in our analysis the inescapable in the current paradigm, but to characterize corpuscular behaviour by using some kind of distribution. From there on, the results will be those that force us to interpret things in a certain way, among which there may be some paradigmatic. For this, and in particular way, we are going to use the superimposition of a set of plane waves of variable frequency and constant amplitude, such as:

$$\Psi_k(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(w_k t - kx)} dk, \quad (2.1)$$

which for the cosine of the complex exponential, restricted to the interval  $k = k_0 \pm \Delta k / 2$ , gives rise to a modulated monochromatic wave of frequency  $w_0$  ,

$$\Psi_k(x,t) = B \frac{\sin[\Delta k / 2(\nu t - x)]}{\nu t - x} e^{i(w_0 t - k_0 x)}, \quad (2.2)$$

that is, to a plane wave and a modulating or envelope factor accompanied by a normalisation constant  $B$  , which includes the factor 2 that should accompany the factor  $\nu t - x$  . The function (2.1) has in reality the form:

$$\Psi_k(x,t) = e^{i(w_0 t - k_0 x)} \int_{k_0 - \Delta k / 2}^{k_0 + \Delta k / 2} e^{i[(k - k_0) / 2(\nu t - x)]} dk, \quad (2.3)$$

whose complete and mathematically most manageable solution is:

$$\Psi_k(x,t) = B(i) \frac{e^{-i[\Delta k / 2(\nu t - x)]}}{\nu t - x} e^{i(w_0 t - k_0 x)}, \quad (2.4)$$

to which we can later demand its real character and we have added the factor  $(i)$  precisely so that in this case the real part is analogous to that presented in (2.2).

On this basis, we can build two functions that keep a certain symmetry. The first can be one similar to (2.4) but reversing the propagation of the travelling wave, that is:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x,t) &= B(i) \frac{e^{-i[\Delta k / 2(\nu t - x)]}}{\nu t - x} e^{-i(w_0 t - k_0 x)} \\ &= B(i) \frac{e^{-i(M/2)}}{\nu t - x} e^{-i(N)} = B(i) \frac{e^{-i(M/2)}}{\nu t - x} \phi^{-1}(x,t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

a transformation which is analogous to having originally considered a function conjugated to the original (2.1) with the integration limits transposed:

$$\Psi_1(x,t) = \tilde{\Psi}_k^*(x,t) = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-i(w_k t - kx)} dk. \quad (2.6)$$

The second, with respect to the original one (2.4), would be a wave function that preserves the propagation of the travelling wave but inverts the envelope:

$$\begin{aligned} \Psi_2(x,t) &= B(-i) \frac{e^{i[\Delta k / 2(\nu t - x)]}}{\nu t - x} e^{i(w_0 t - k_0 x)} \\ &= B(-i) \frac{e^{i(M/2)}}{\nu t - x} e^{i(N)} = B(-i) \frac{e^{i(M/2)}}{\nu t - x} \phi(x,t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

action that is equivalent to exchanging the limits of integration in the original function, that is:

$$\Psi_2(x,t) = \tilde{\Psi}_k(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(w_k t - kx)} dk, \quad (2.8)$$

The result will be two wave functions, (2.5) and (2.7), on which we will be able to carry out a combination, which will be nothing more than a process of symmetrization, that is to say, an adaptation similar to that carried out on certain quantum observables to ensure their classical validity. In this case we will have two plane waves propagating in opposite directions that intersect and interfere into the mutual space of the envelopes, in a constructive way for the real component and destructive in what refers to the imaginary one, reaching its only real character naturally and not, as in (2.4), by means of physical criteria or impositions. A situation that we can associate to a real composition of the waves, that is, to the way of structuring themselves physically (that is our thesis, in fact) and not only to a well disposed operational model, which is also to participate in the operational advantages of the forming functions, already mentioned. Therefore:

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \frac{(\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t))}{\sqrt{2}} = B \frac{(i)e^{-i(M/2)}e^{-i(N)} + (-i)e^{i(M/2)}e^{i(N)}}{\sqrt{2}(\nu t - x)} \\ &= (i)B \frac{e^{-i(M/2)}e^{-i(N)} - e^{i(M/2)}e^{i(N)}}{\sqrt{2}(\nu t - x)} = (i)B \frac{e^{-i(M/2)}\phi^{-1}(x,t) - e^{i(M/2)}\phi(x,t)}{\sqrt{2}(\nu t - x)} \\ &= (i)B \frac{[\mathcal{G}_1\phi^{-1}(x,t) - \mathcal{G}_2\phi(x,t)]}{\sqrt{2}} = (i)B \frac{[\mathcal{G}_1\phi_1 - \mathcal{G}_2\phi_2]}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

where the value  $\sqrt{2}$  is a new normalization factor that leaves the initial  $B$  factor intact and allows us to calculate it over the initial function. For which we only have to take Eq.(2.3) with  $t = 0$ , expressed more generically as:

$$\Psi_1(x,t) = B \frac{e^{i(x/b)} e^{i(k_0 x)}}{x}, \quad (2.10)$$

for  $b = 2 / \Delta k$ , and proceed to normalize<sup>1</sup>.

$$\begin{aligned} B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,0) \Psi(x,0) dx &= B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx \\ &= B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2(x/b)}}{x^2} \phi^*(x,t) \phi(x,t) dx = B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2(x/b)}}{x^2} dx \\ &\rightarrow B^2 \oint \frac{e^{i2(z/b)}}{z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f + \oint f = \int_{-\infty}^{+\infty} f = B^2 (-\pi i) \frac{2i}{b} = B^2 \frac{2\pi}{b} = 1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

from which it results,  $B = (b / 2\pi)^{1/2} = (1 / \Delta k \pi)^{1/2}$ .

<sup>1</sup> By calculating the residual, we solve the integral value for the 2nd order pole in  $z=0$  that passes through the contour, since we are calculating  $x$  in the real line, and whose contribution is consequently half  $(-\pi i)$  in the same (main value of Cauchy), and zero in the rest of the contour.

### 3. ENERGY FORM OF THE SWP

As the aim of our discussion is to obtain the corpuscular energy from the wave function, we can state that the target is to differentiate from the value of the total energy those values that are clearly undulatory, and incontrovertible, given the default undulatory character of our starting physical system, and to distinguish them from the remaining values, that is to enunciate, to separate the value of the energy in at least two energetic terms, the strictly undulatory and the one that is not. For this, let us again take the function of the symmetric wave packet (SWP) given in (2.9) and calculate with it the expectation value of the energy, which will be given by:

$$\bar{E} = \int \xi P dx = \int \Psi^*(x,t) i\hbar \partial_t \Psi(x,t) dx, \quad (3.1)$$

and which must coincide with the energy of the system described by a free particle such as the electron, including that derived from its purely undulatory character.

The expected value is an application of the operator energy  $\xi$  over a probability density  $P$ , which must be a positive real value. In fact, the normalization process (2.11) is intended by the conjugation of the function to achieve a positive real value coinciding with this density value. This is:

$$B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,0) \Psi(x,0) dx = B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P dx = 1 \quad (3.2)$$

This directs us to reconsider the normalization process and observe that it is done through conjugation to achieve an integrable square function, which brings forth a positive real value. That square integrable function is, as seen in (2.11), the one that results from annulling the imaginary part of the original function through the relation  $\phi^*(x,t)\phi(x,t) = 1$ , being usually that resulting function a real function since the imaginary factor has been weeded out by this method.

But neither does the resulting function necessarily have to be real, as in fact is the case in (2.11), nor does it necessarily have to be achieved by the conjugation of the complete original function as it also happens in our case. That is, the conjugation is a method (the most usual) but not an end, the latter being to reach a positive real value for the probability density and the consequent normalization constant. For this very reason, and because of the possibility of solving the value of the complex integral as it is (because it has a solution), we have only needed to conjugate the plane wave and not the envelope. Such a resolution is a consequence of the extrapolation of the complex behaviour to the real one, or, in other words, of the possibility of carrying it out because the contribution of the imaginary part is null, as shown in  $\oint f$ .

That is, taking  $\Psi = \mathcal{G} \times \phi$ , generically, we have not made  $\Psi^* = \mathcal{G}^* \times \phi^*$  to obtain the real value, since this would have led us to  $\Psi^* \times \Psi = 1$ , but  $\Psi^* = \mathcal{G} \times \phi^*$ , being the idiosyncrasy of the integral itself that is responsible for accounting for the

value (main Cauchy's) where it has, that is, on the real line.

This real character that is derived from the properties of the integral in a natural way, and that we originally adopted in (2.5) and (2.7) by means of physical criteria, we will reach it in what follows revalidating  $\Psi^* = \mathcal{G} \times \phi^*$  and leaving (without imposing criteria) that the operative itself is the one in charge of rescuing the real value of the function where it corresponds without adulterating it, that is, without suppressing the imaginary part (forcing it to be real) nor conjugating it to obtain a real value in a forced way. All this can be summarized by saying that the probability density has the same form for any use of it.

With this in mind and taking into consideration what is already established for  $M \equiv [\Delta k(\nu t - x)]$ ,  $N \equiv (w_0 t - k_0 x)$ ,  $\phi(x, t) \equiv e^{i(N)} = \phi_2 = \phi_1^{-1}$  and  $\Psi_i = \mathcal{G}_i \phi$ , we can calculate Eq. (3.1). An equation which, according to the result obtained in Eq. (2.9), we can separate into its two components:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int \Psi^*(x, t) i\hbar \partial_t \Psi(x, t) dx = (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) \\ &= (i)^2 B^2 \frac{\left[ \int \zeta_1(x, t) dx - \int \zeta_2(x, t) dx \right]}{(\sqrt{2})^2} \\ &= B^2 \frac{\int (\zeta_2(x, t) - \zeta_1(x, t)) dx}{2} = B^2 \int \zeta(x, t) dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

where it meets:

$$\begin{aligned} \zeta_2(x, t) &= \Psi_2^*(x, t) i\hbar \partial_t \Psi_2(x, t) = \mathcal{G}_2 \phi_2^* i\hbar \partial_t (\mathcal{G}_2 \phi_2) \\ &= \mathcal{G}_2 \phi_2^{-1}(x, t) i\hbar [\mathcal{G}_2 \partial_t \phi(x, t) + \phi(x, t) \partial_t \mathcal{G}_2] \\ &= \frac{e^{i(M/2)} e^{-i(N)}}{(\nu t - x)} i\hbar \left[ \frac{e^{i(M/2)} e^{i(N)}}{(\nu t - x)} \left( i w_0 + \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) - \nu \frac{e^{i(M/2)} e^{i(N)}}{(\nu t - x)^2} \right] \\ &= i\hbar e^{i(M/2)} \left[ \frac{e^{i(M/2)}}{(\nu t - x)^2} \left( i w_0 + \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) + \frac{e^{i(M/2)}}{(\nu t - x)^3} (-\nu) \right] \\ &= \hbar \left[ \frac{e^{i(\nu t - x)\Delta k}}{(\nu t - x)^2} \left( -w_0 - \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) + \frac{e^{i(\nu t - x)\Delta k}}{(\nu t - x)^3} (-i\nu) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

and

$$\begin{aligned} -\zeta_1(x, t) &= -\Psi_1^*(x, t) i\hbar \partial_t \Psi_1(x, t) = -\mathcal{G}_1 \phi_1^* i\hbar \partial_t (\mathcal{G}_1 \phi_1) \\ &= \mathcal{G}_1 \phi(x, t) i\hbar [\mathcal{G}_1 \partial_t \phi^{-1}(x, t) + \phi^{-1}(x, t) \partial_t \mathcal{G}_1] \\ &= -\frac{e^{-i(M/2)} e^{i(N)}}{(\nu t - x)} i\hbar \left[ \frac{e^{-i(M/2)} e^{-i(N)}}{(\nu t - x)} \left( -i w_0 - \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) - \nu \frac{e^{-i(M/2)} e^{-i(N)}}{(\nu t - x)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i\hbar e^{-i(M/2)} \left[ \frac{e^{-i(M/2)}}{(\nu t - x)^2} \left( i w_0 + \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) - \frac{e^{-i(M/2)}}{(\nu t - x)^3} (-\nu) \right] \\ &= \hbar \left[ \frac{e^{-i(\nu t - x)\Delta k}}{(\nu t - x)^2} \left( -w_0 - \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) - \frac{e^{-i(\nu t - x)\Delta k}}{(\nu t - x)^3} (-i\nu) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

From which results:

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \frac{\zeta_2(x, t) - \zeta_1(x, t)}{2} \\ &= \left[ \frac{\hbar \nu \sin(\Delta k(\nu t - x))}{(\nu t - x)^3} - \frac{\hbar \nu \Delta k \cos(\Delta k(\nu t - x))}{2(\nu t - x)^2} \right] \\ &+ \left[ -\frac{\hbar w_0 \cos(\Delta k(\nu t - x))}{(\nu t - x)^2} \right] = \zeta^m(x, t) + \zeta^\sigma(x, t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

where we have taken into account the following relations:

$$2i \sin M = e^{iM} - e^{-iM} \quad y \quad 2 \cos M = e^{iM} + e^{-iM}, \quad (3.7)$$

and where, by regrouping terms, the clearly undulatory part of the corpuscular one is clearly differentiated, as we have already mentioned, characterized by the parameters  $w_0$  and  $\nu$  respectively. Indeed, in the second term of the integrand,  $\zeta^\sigma(x, t)$ , the light characteristics of the integrand are revealed, and therefore of the function as a whole, a matter that, given its nature, is normal. It will be, therefore, the term  $\zeta^m(x, t)$  of the integrand that will be able to show, from its integral value, the double wave-corpuscle nature, despite having a light origin.

#### 4. ENERGY TREATMENT OF THE SWP

We have divided the proposed issue into several parts or actions. On the one hand (which are actually two) to obtain a function with a particular distribution or configuration from which a plausible energetic form is derived, and on the other, which we are now addressing, to relate that energetic form to that of a particle. It is the moment, therefore, to face the task of obtaining a result, a corpuscular energetic expression from the previous one of undulatory origin. Put more precisely, it is time to obtain a recognizable corpuscular energy value, which is the only way to ensure that the wave function does indeed describe a particle. In another order of things, it is time to face the truth of the problem, which is what really prevents having that corpuscular energy value recognizable from the energetic expression of a wave packet, that is, that of facing our conceptions and that of highlighting which things are wrong or simply equivocal in their treatment and promote a

adulterated scheme of reality.

The wave function is expressed on the variables  $x$  and  $t$ , which is very good for the wave part in which we want to know its evolution in time and space on which its energy value depends. This does not happen for a free particle, which has an energy value, regardless of its position (unless there is a potential) or of time if it is at rest, and it is always at rest for its frame of reference.

In addition to this, the calculation of energy as a function of the variable involves an error derived from the double consideration of the variable  $x$ , on the one hand distance and on the other size. In the same way that certain experiments with particles designed to behave like radiation do so inescapably, the determination on a double and ambiguous spatial consideration forces us to a certain form of treatment. In this case, if my variables are so precise that they exceed the order of magnitude of the particles and have an evolution that does not correspond to that of the particles, but is internal, I will not perceive particles nor will my equations talk about particles.

Hardly, therefore, we will be able to obtain a result, if we are not able to distinguish the internal variable  $x$  associated with the particle from the generic spatial coordinate  $x$  dependent on its position. However, although the question seems a priori unaddressable, we can nevertheless restrict to some extent this double consideration or ambiguity if we take into account that the wave function of the wave packet is practically cancelled out, that is, the probability that outside this interval a particle is represented (or, that the particle is outside this interval) and that outside this interval there are significant values of energy that contribute to the mean value of the particle is almost zero. Consequently, we can restrict this double consideration if, comparing the variable that represents the displacement of the group with the size of the group itself, we calculate the measured value to the interval of the group. This is:

$$\bar{E} = B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x,t) dx \cong B^2 \int_{x_0 - \Delta x/2}^{x_0 + \Delta x/2} [\zeta^m(x,t) + \zeta^{\bar{m}}(x,t)] dx, \quad (4.1)$$

In this case, for  $x_0 = 0$  and  $t = 0$  we are not calculating the energy of the wave packet in the integration interval for a displacement of the same (although this exists, that is, although it could be ) but the displacement of the variable that represents the function of the wave packet along all its extension. Consequently,  $[+\Delta x/2, -\Delta x/2]$  is not a distance, but a size (or a distance coincident with a size), in such a way that we can preclude the variable  $x$  as a coordinate, which is superfluous within the limits (to take the other consideration), and give it its true functionality or utility.

However, we see that despite the approach we have not managed to overcome the duality of  $x$  given that despite not exist outside the limits of integration (size) is still needed to assess the interior, also happening to the energy value differentiate positions internal that in no way can be

differentiated into a particle, except for processes of formation of the same. In addition to this we see that, even assuming that in this way we were able to achieve a real energy value of the particle, at best it would only serve to evaluate the energy value in a state of rest (we have restricted the variable  $x$  to size) but not for other states such as kinetics, which we know as a function of speed. This forces us to go further in our way of reasoning the problem.

It is clear that in the case presented the expected value is the energy value of the particle at rest ( $t = 0$ ), and that size  $\Delta x$  is coincident with the size of the particle in that situation. The question is whether, based on this, we might be able to find out the expected value in a general no-rest situation, that is, for another frame of reference. The answer is yes, and that it is so regardless of all the delimitations made above, if we consider the magnitude of that size  $\Delta x$  as the relativistic eigenlength of it, because, once the eigenlength  $a = \Delta x$  is defined it is defined for all inertial systems by the Lorentz transform, in the consideration that any value  $\nu t - x$  will be a fixed value for some velocity  $\nu$ , and for any instant (being so, in particular, for  $t = 0$ ), that is, with

$$\nu t - x = a(1 - \nu^2 / c^2)^{1/2} = a\gamma^{-1}, \quad (4.2)$$

we naturally move from a position space to a moment space, transforming one nonspecific variable into another,  $\nu$ , of clear significance and better treatment.

Summarizing the approach made, it will be difficult to calculate the energy of a group of waves (that reside in their envelope) as a whole, if we do not consider it at a geometric level as a whole, that is, as a single entity capable of representing or supporting the different states.

In this case, and returning to the starting point of the original equation (3.1), known the integrating as a function of speed and the new limits of integration relative to the original  $\pm\infty$ , we only have to define the new integral for the expectation value of energy, and calculate.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int_0^c \Psi^*(\nu) i\hbar \partial_t \Psi(\nu) d\nu = \int_0^c A^2 \zeta(\nu) d\nu = \\ &= A^2 \int_0^c [\zeta^m(\nu) + \zeta^{\bar{m}}(\nu)] d\nu, \end{aligned} \quad (4.3)$$

where the normalisation constant has been modified as a result of the change to the new variable and the integration interval assigned to it, comparable to the real half line, for which:

$$A^2 = 2B^2 = \frac{b}{\pi} = \frac{2}{\Delta k \pi}, \quad (4.4)$$

and where, considering (4.2), the integrands expressed in (3.6) take the form:

$$\zeta^\sigma(v) = -\frac{\hbar w \cos(\Delta k(vt-x))}{(vt-x)^2} = -\frac{\hbar w \cos(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{a^2 \gamma^{-2}} \quad (4.5)$$

and

$$\begin{aligned} \zeta^m(v) &= \frac{\hbar v \sin(\Delta k(vt-x))}{(vt-x)^3} - \frac{\hbar v \Delta k \cos(\Delta k(vt-x))}{2(vt-x)^2} \\ &= \frac{\hbar v \sin(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{a^3 \gamma^{-3}} - \frac{\hbar v \Delta k \cos(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{2a^2 \gamma^{-2}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

We can observe that in (4.3) we have made the change of variable according to (4.2) for the integrand but not for the differential of the integral, in which we have made directly the substitution  $dx \leftrightarrow dv$  instead of the one that in a first estimation would seem more adequate, that is,  $dx = tdv + vdt = tdv$ , and that would give for (4.3) a different expression ( $\bar{E} = \int \Psi^*(v) i\hbar \partial_t \Psi(v) tdv$ ) although erroneous.

The reason is that we are obliged to obtain the energy value in a certain way, given that by definition  $\zeta \Psi(x) = i\hbar \partial_t \Psi(x)$ , then having the possibility of changing to the variable that interests us and is dimensionally homogeneous, while the space for which we calculate the expectation value  $\bar{E}$  is arbitrary, provided that the limit states for (3.2) are well defined. That is to say, the space of study is now not  $x = x(v)$  but  $v$  with its corresponding limits, which we could have set without the need for all this transit. To realise this we only have to remember that:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int_1^2 \Psi^*(x) i\hbar \partial_t \Psi(x) dx = \int_1^2 \frac{\Psi^*(x) i\hbar \partial_t \Psi(x) dx}{\Psi^*(x) \Psi(x) dx} \\ &= \int_1^2 \frac{\Psi^*(x) i\hbar \partial_t \Psi(x) tdv}{\Psi^*(x) \Psi(x) tdv} = \int_a^b \frac{\Psi^*(v) i\hbar \partial_t \Psi(v) dv}{\Psi^*(v) \Psi(v) dv}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

that is to say, the expectation or most probable value of a variable can be disregarded if they are also eliminated in the denominator, that is, in the probability function (hidden by default). This can be done if in all cases it is normalized and complies with:

$$P = \int_1^2 \Psi^*(v) \Psi(v) tdv = \int_a^b \Psi^*(v) \Psi(v) dv = 1 \quad (4.8)$$

In any case, and in a physical sense, we do not want to calculate  $\bar{E}$  in the probabilistic space of the positions, but of the velocities, and this is not achieved by making a change of variable over the first, but by defining it correctly.

Solving the terms of the integral, as we do in the APPENDIX, we are left with a sum of integrals as follows:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= A^2 \int \zeta^m(v) dv + \zeta^\sigma(v) dv \\ &= A^2 \int (\zeta_k(v) + \zeta_f(v) + \zeta_\sigma(v)) dv \\ &= A^2 \left( \frac{\hbar}{a^3} \right) \sin[\Delta k(a\gamma^{-1})] \int_{v_o}^{v_f} \frac{v}{\gamma^{-3}} dv \\ &\quad - A^2 \left( \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \right) c^2 \int \frac{\cos[\Delta k(a\gamma^{-1})]}{\gamma^{-1}} d(\gamma^{-1}) \\ &\quad + A^2 \left( \frac{\hbar w}{a^2} \right) c \int \frac{\cos[\Delta k(a\gamma^{-1})]}{(1-\gamma^{-2})^{1/2} \gamma^{-1}} d(\gamma^{-1}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

in which the mass term of the integrand has been separated into two from another species, one kinetic and the other corpuscular or formation.

Expression that, taking into account the normalization factor (4.4), clarifying the notation of the variable by using  $v \equiv \gamma^{-1}$  in the last two terms, and distinguishing the arguments of the trigonometric functions in them through variable (despite being mathematically equal in the above expression),

$$\Phi \equiv [\Delta k(a\gamma^{-1})] = [\Delta k(av)] \equiv \Phi_v, \quad (4.10)$$

to note that such arguments are affected by the integral through that variable, we can write as

$$\begin{aligned} \bar{E} &= A^2 \int \zeta^m(v) dv + \zeta^\sigma(v) dv \\ &= A^2 \int (\zeta_k(v) + \zeta_f(v) + \zeta_\sigma(v)) dv = \bar{E}_k + \bar{E}_f + \bar{E}_\sigma \\ &= \left( \frac{\hbar b}{\pi a^3} \right) \sin[\Phi] \int_{v_o}^{v_f} \frac{v}{\gamma^{-3}} dv \quad (a) \\ &\quad - \left( \frac{\hbar \Delta k b}{2\pi a^2} \right) c^2 \int \frac{\cos[\Phi_v]}{v} dv \quad (b) \\ &\quad + \left( \frac{\hbar w b}{\pi a^2} \right) c \int \frac{\cos[\Phi_v]}{(1-v^2)^{1/2} v} dv, \quad (c) \end{aligned} \quad (4.11)$$

that we can assimilate or define the pro-corpuscular energy through it. We are not going to enter here into the analysis of all the terms, which will be the object of another work, but we are going to put in evidence for what matters to us in this one that they are already beginning to take on, in effect, a corpuscular appearance, a question that we will appreciate more notably in the first of them if, dispensing for now with the factor  $\text{sen}[\Phi]_v$ , we develop it between the limit  $v_o = 0$  and any final  $v$ :

$$\begin{aligned} E_k &= \left( \frac{\hbar b}{\pi a^3} \right) \int_0^v \frac{v}{\gamma^{-3}} dv = \left( \frac{\hbar b}{\pi a^3} \right) \int_0^v \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} dv \\ &= \left( \frac{\hbar b}{\pi a^3} \right) c^2 \left( \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right) = m_R c^2 \left( \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right) \\ &= m_R c^2 (\gamma - 1) = m_R \gamma c^2 - m_R c^2 = E_T - E_R = E_c, \end{aligned} \quad (4.12)$$

since it corresponds to the expression describing the relativistic kinetic energy of a particle of mass  $m_R$ , which in this case is:

$$m_R = A^2 \frac{\hbar}{a^3} = \frac{\hbar b}{\pi a^3} = \frac{2\hbar}{(\Delta k)\pi a^3}, \quad (4.13)$$

that is, a mass expressed in wave terms or, more accurately, expressed by its wave constituents. Result (4.12) that implicitly establishes that the other two terms of Eq. (4.11) correspond to the energetic part of the process that is not kinetic, and that is necessarily of corpuscular formation or energetic transit between the initial and final objects, that is, the encapsulated material, which will require an appropriate and differentiated definition of the limits of integration, but which for the moment we can associate with  $E_R$  in (4.12). With this we have achieved, at the expense of being properly characterized, what we initially intended, that is, a recognizable corpuscular energy expression from the wave expression. Question that nevertheless will reach other foundations by means of the knowledge or the correct interpretation of the processes and the natural and different space in which they take place, that takes us to the concept of phase, of which  $\text{sen}[\Phi]_v$  is its precursory expression. Expression from which will be derived, in agreement with certain conditions (or a unique condition that we will postulate for clarity and formality), all phenomenology of the matter, this is, its creation and transformation, according to already shown <https://vixra.org/abs/2003.0001>, in correspondence with the phase changes associated with said processes.

## 5. SUMMARY AND DISCUSSION

Here, we have not calculated the energy of a particle, but the energy of formation of a particle from a wave packet, and its energy itself. The formation of the corpuscle or encapsulated material does not annihilate the wave outside the limits of the particle, but leaves the "surplus" oscillating part  $\text{sen}[\Phi]_v$ , which ordinarily does not manifest itself (all of our dynamics are understood without it), as a sign or a vestige of its undulatory nature even in the kinetic term, in the mass itself that supports it. In this context, the term (4.11a) represents an extension or generalization of the relativistic dynamic expression (4.12), through the presence of an undulatory term that is there, but is not shown because its action in phenomenology is non-existent except for those training processes that culminate precisely with their cancellation or deactivation.

Eq. (4.12) is therefore a particular restriction or situation of (4.11a). The difference between the formation situation in (4.11a) and that expressed in (4.12) is that in the latter  $\text{sen}[\Phi]_v$  is irrelevant since the process has been completed and only the final products remain. That is to say, (4.11a) originally accompanies the process of formation or progress of the other two terms, and does so by means of the evolution of  $\text{sen}[\Phi]_v$  in the integral since all its factors have the same nature while the process lasts, and until it ends. Once it is complete, it continues to evolve in the same way expressed in (4.11a), but with two elements of a different species, that is, with the factor  $\text{sen}[\Phi]_v$  of a different species than the materialized envelope of the wave packet (corpuscle) and, therefore, without kinetic consequences, remaining circumscribed de facto to the expression (4.12).

## APPENDIX

We are going to calculate the integral over  $v$  of the integrand:

$$\begin{aligned} \zeta(v) &= \frac{\hbar v \sin(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{a^3 \gamma^{-3}} - \frac{\hbar v \Delta k \cos(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{2a^2 \gamma^{-2}} - \frac{\hbar w \cos(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{a^2 \gamma^{-2}} \\ &= \frac{\hbar v \sin\left[\Delta k\left(a(1-v^2/c^2)^{1/2}\right)\right]}{a^3 (1-v^2/c^2)^{3/2}} - \frac{\hbar v \Delta k \cos\left[\Delta k\left(a(1-v^2/c^2)^{1/2}\right)\right]}{2a^2 (1-v^2/c^2)} - \frac{\hbar w \cos\left[\Delta k\left(a(1-v^2/c^2)^{1/2}\right)\right]}{a^2 (1-v^2/c^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.1})^\dagger$$

**FIRST TERM-** The term (A.1a) is left as:

<sup>†</sup> We will notice the different terms of the expressions with the number of the same followed by a letter, in this case, (A.1a), (A.1b), (A.1c)

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\hbar v \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{a^3 \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv = \frac{\hbar}{a^3} \int \frac{v \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv \\
& = \frac{\hbar}{a^3} \left\{ \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right] \int \frac{v}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv - \int \left[ \int \frac{v}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv \right] \partial_v \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right] dv \right\} \\
& = \frac{\hbar}{a^3} \left[ \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right] \int_{v_0}^{v_f} \frac{v}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv + \frac{\hbar \Delta k}{a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv \right]
\end{aligned} \tag{A.2}$$

The term (A.2a) is will be the TERM-1 of the general solution, which we can put in a more elegant way as:

$$\frac{\hbar}{a^3} \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right] \int_{v_0}^{v_f} \frac{v}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv = \frac{\hbar}{a^3} \sin \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right] \int_{v_0}^{v_f} \frac{v}{\gamma^{-3}} dv \tag{A.3}$$

**SECOND TERM-** The term (A.2b) has the same form as the term (A.1b) so we add it for analysis.

$$\frac{\hbar \Delta k}{a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv - \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv = \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv \tag{A.4}$$

(A.4) we can put it as:

$$\frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv = \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{\gamma^{-2}} dv \stackrel{(1)}{=} - \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} c^2 \int \frac{\cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{\gamma^{-1}} d(\gamma^{-1}) \tag{A.5}$$

$$\text{with } \left[ \frac{d(\gamma^{-1})}{dv} = \frac{d(1 - v^2 / c^2)^{1/2}}{dv} = \frac{v / c^2}{(1 - v^2 / c^2)^{1/2}} = \frac{v}{c^2 \gamma^{-1}} \Rightarrow -c^2 \gamma^{-1} d(\gamma^{-1}) = v dv \right]^{(1)}$$

which will be the TERM-2 of the general solution.

**THIRD TERM-** The Term (A.1c), is left as:

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar w}{a^2} \int \frac{\cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv &= \frac{\hbar w}{a^2} \int \frac{\cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{\gamma^{-2}} dv \stackrel{(1)}{=} - \frac{\hbar w}{a^2} \int \frac{c^2 \gamma^{-1} \cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{v(\gamma^{-2})} d(\gamma^{-1}) \\
&= \stackrel{(2)}{-} \frac{\hbar w}{a^2} \int \frac{c \cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{\left( 1 - \gamma^{-2} \right)^{1/2} (\gamma^{-1})} d(\gamma^{-1})
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\text{with the same transformations (1) and } \left[ \gamma^{-1} = \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \Rightarrow v = c \left( 1 - \gamma^{-2} \right)^{1/2} \right]^{(2)}$$

which will be the TERM-3 of the general solution.



# Fundamento de la singularidad material

Rafael Cañete Mesa\*

**RESUMEN:** El valor de expectación de la energía total de un paquete de ondas, asociado al espacio de velocidades (momentos) mediante la transformación de Lorentz, nos permite obtener mediante formulación cuántica ondulatoria una expresión energética equivalente, y a la vez menos restringida (más versátil e informativa), a la obtenida mediante un tratamiento corpuscular. De una parte aparecen los formantes energéticos de la materia, de otra la expresión en términos ondulatorios de la misma, de eso que llamamos masa, y finalmente un factor de fase adicional como último vestigio de la naturaleza ondulatoria tras el proceso de formación, es decir, como elemento acreditativo de esa naturaleza, y mecanismo de restitución de la misma, responsable de la dualidad onda-corpúsculo, de los procesos de creación-aniquilación afines, y de las relaciones entre las diferentes generaciones de partículas elementales, tal como se mostró en <https://vixra.org/abs/2003.0001>.

\* rafaalcanyete@protonmail.com

Palabras clave: modelo estándar, paquetes de ondas

## 1. INTRODUCCIÓN

La descripción que de las partículas se ha realizado en el entorno de la mecánica cuántica es buena cuando se trata de partículas en un cierto estado de confinamiento, no así para las partículas libres. Para este caso, mediante las funciones de onda, ya sea de ondas viajeras o de grupo de ondas, sólo se ha logrado una correspondencia parcial o no exenta de carencias, y siempre mediante el empleo de la mecánica cuántica ondulatoria, puesto que la matricial, a pesar de la equivalencia matemática entre una y otra, no es aplicable a estos estados continuos de energía. Es precisamente esta no aplicabilidad de la cuántica matricial al problema y su predominio, sin embargo, para otras muchas cuestiones como consecuencia de su versatilidad, lo que ha ocasionado en cierto sentido que no se busquen vías de investigación encaminadas a superar la problemática, es decir, encaminadas a proporcionar un verdadero soporte teórico a la dualidad onda-corpúsculo, conforme a la evidencia experimental y la relevancia de la cuestión. En alguna medida, se ha optado por explorar hasta la saciedad aquello que se deja tratar por el formalismo matricial, y se ha dejado de lado lo que no, a pesar de tratarse de un área particular (inabordable por otros métodos) susceptible de proporcionar una información análoga a la realidad, por cuanto que la función de onda es una entidad física y no una representación matemática como la construida con funciones en la mecánica matricial. En consecuencia, sabemos que las partículas se crean por medio de un operador de creación, pero no sabemos en qué consiste ese acto creación por no saber nada sobre el objeto creado.

Es por todo ello que, volviendo un siglo atrás, vamos a retomar el camino desde el principio, y a darle otro enfoque, otro empujón, desde la convicción de que esta realidad, la de la dualidad, es una realidad superior (más primordial) con mucho a otras realidades o esquemas de trabajo de la física que después de muchos años de trabajo saben decir muchas cosas fenomenológicas, pero muy pocas de la materia en sí misma o de su organización.

Desde el principio. Una partícula libre puede venir

representada por una onda elemental o monodimensional que llamamos onda plana  $\psi = Ae^{i(kx-wt)}$  que describe la posibilidad de la partícula de situarse en el espacio en el intervalo  $[-\infty, +\infty]$ , tal como ocurre por ejemplo con su parte real  $\psi = ACos(kx - wt)$ , denominada también onda viajera, que podemos representar fácilmente (ver Figura 1),

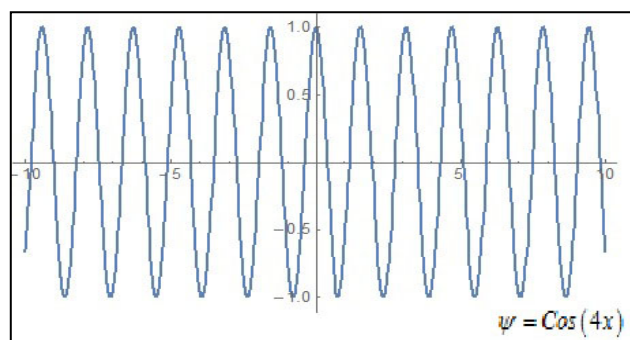


Figura 1: Onda viajera

pero que a la vez evidencia la imposibilidad mediante la misma de determinar en qué posición del espacio se encuentra la partícula, como consecuencia de la imposibilidad de normalizar la función de onda en el mencionado intervalo  $[-\infty, +\infty]$ , es decir, de integrar en el intervalo y encontrar un valor definido para  $A$ , de lo que resulta una descripción insuficiente. Podríamos decir, de acuerdo con el principio de indeterminación, que fijada la cantidad de movimiento ( $p$ ) con exactitud, queda totalmente imprecisada la posición ( $x$ ) de la partícula.

Esto lo soluciona en algún modo los paquetes de ondas de diversa tipología o distribución (gaussianos, lorentzianos) que se pueden obtener mediante la construcción de pulsos luminosos (tren de ondas de longitud finita) o mediante la superposición de muchas ondas de vector de onda  $k$  aproximado, es decir, de distintos valores  $p$ , y consecuentemente de un valor  $p$  indeterminado, que restringe la indeterminación de  $x$  a un intervalo  $\Delta x$ , dando cuenta de una localización definida y de un cierto sentido de ocupación (la onda de materia de de Bloge).

Las citadas distribuciones son arreglos funcionales que hacen que la onda original se extinga más allá de unos límites a ambos lados de un punto central, de tal modo que resulta una disposición espacial discreta que incluso puede evolucionar con el tiempo. De forma explícita, aplicando la función  $\theta = \exp(-x^2 / 20)$  a la función previa (ver Figura 2),

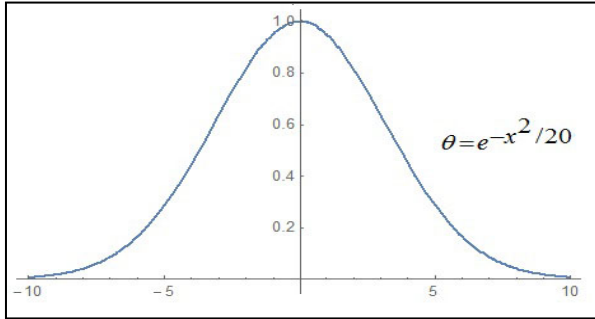


Figura 2: amplitud modulada

a la función previa  $\psi$ , obtenemos (ver Figura 3):

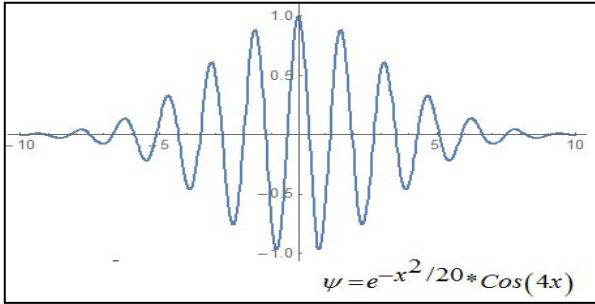


Figura 3: paquete de ondas

Esto es lo que conocemos también por modulación de onda u onda modulada utilizada para la transmisión de información asociada precisamente a una determinada distribución energética. Es esa forma de distribuirse la energía en el grupo la que se pretende utilizar para identificar a la partícula, como forma evidente de energía-información, en el mismo.

Los intentos, no obstante, de asociar este modelo ondulatorio a la constitución real de la partícula elemental han sido fallidos, dado que, contrariamente a lo ocurrido con las partículas que tratan de representar, se extinguen en el tiempo, lo que resulta ineludible en el paradigma actual.

## 2. PAQUETE DE ONDAS SIMETRIZADO (SWP)

Nosotros en primer orden no vamos a tratar de superar en nuestro análisis lo ineludible en el paradigma actual sino a caracterizar el comportamiento corpuscular mediante la utilización de algún tipo de distribución. A partir de ahí serán los resultados los que nos obliguen a interpretar las cosas de una determinada manera, entre las que puede haber alguna paradigmática. Para esto, y de forma particular, vamos a utilizar la superposición de un conjunto de ondas planas de frecuencia variable y amplitud constante, como:

$$\Psi_k(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(w_k t - kx)} dk, \quad (2.1)$$

que para el coseno de la exponencial compleja, restringida al intervalo  $k = k_0 \pm \Delta k / 2$ , da lugar a una onda monocromática modulada de frecuencia  $w_0$ ,

$$\Psi_k(x, t) = B \frac{\sin[\Delta k / 2(\nu t - x)]}{\nu t - x} e^{i(w_0 t - k_0 x)}, \quad (2.2)$$

es decir, a una onda plana y a un factor modulador o envolvente acompañado de una constante de normalización  $B$ , que incluye el factor 2 que debería acompañar al factor  $\nu t - x$ . La función (2.1) tiene en realidad la forma:

$$\Psi_k(x, t) = e^{i(w_0 t - k_0 x)} \int_{k_0 - \Delta k / 2}^{k_0 + \Delta k / 2} e^{i[(k - k_0) / 2(\nu t - x)]} dk, \quad (2.3)$$

cuya solución completa y matemáticamente más manejable es:

$$\Psi_k(x, t) = B(i) \frac{e^{-i[\Delta k / 2(\nu t - x)]}}{\nu t - x} e^{i(w_0 t - k_0 x)}, \quad (2.4)$$

a la que luego podremos exigir su carácter real y a la hemos añadido el factor  $(i)$  precisamente para que en este supuesto la parte real sea análoga a la presentada en (2.2).

Nosotros sobre esta base podemos construir dos funciones que guarden un cierta simetría. La primera puede ser una similar a (2.4) pero invirtiendo la propagación de la onda viajera, esto es:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= B(i) \frac{e^{-i[\Delta k / 2(\nu t - x)]}}{\nu t - x} e^{-i(w_0 t - k_0 x)} \\ &= B(i) \frac{e^{-i(M/2)}}{\nu t - x} e^{-i(N)} = B(i) \frac{e^{-i(M/2)}}{\nu t - x} \phi^{-1}(x, t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

transformación que es análoga a haber considerado originariamente una función conjugada a la original (2.1) con los límites de integración traspuestos:

$$\Psi_1(x, t) = \tilde{\Psi}_k^*(x, t) = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-i(w_k t - kx)} dk. \quad (2.6)$$

La segunda, respecto a la originaria (2.4), sería una función de onda que conserva la propagación de la onda viajera pero invierte la envolvente:

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, t) &= B(-i) \frac{e^{i[\Delta k / 2(\nu t - x)]}}{\nu t - x} e^{i(w_0 t - k_0 x)} \\ &= B(-i) \frac{e^{i(M/2)}}{\nu t - x} e^{i(N)} = B(-i) \frac{e^{i(M/2)}}{\nu t - x} \phi(x, t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

acción que es equivalente a intercambiar los límites de de integración en la función original, esto es:

$$\Psi_2(x,t) = \tilde{\Psi}_k(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(w_k t - kx)} dk, \quad (2.8)$$

Tendremos como resultado dos funciones de onda, (2.5) y (2.7), sobre las que podremos efectuar una combinación, que no será sino un proceso de simetrización, es decir, una adecuación similar a la realizada sobre determinados observables cuánticos destinada a asegurar su validez clásica. En este caso tendremos dos ondas planas propagándose en sentidos contrarios que se cruzan en interfieren en el espacio mutuo de las envolventes, de forma constructiva para la componente real y destructiva en lo referido a la imaginaria, alcanzando su carácter único real de forma natural y no, como en (2.4), mediante criterios o imposiciones físicas. Situación que podemos asociar a una composición real de las ondas, esto es, a la forma de estructurarse las mismas físicamente (ésta es nuestra tesis de hecho) y no sólo a un modelo operacional bien dispuesto, que lo es también por participar de las ventajas operativas de las funciones formantes, ya mencionadas. Por tanto:

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \frac{(\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t))}{\sqrt{2}} = B \frac{(i)e^{-i(M/2)}e^{-i(N)} + (-i)e^{i(M/2)}e^{i(N)}}{\sqrt{2}(vt-x)} \\ &= (i)B \frac{e^{-i(M/2)}e^{-i(N)} - e^{i(M/2)}e^{i(N)}}{\sqrt{2}(vt-x)} = (i)B \frac{e^{-i(M/2)}\phi^{-1}(x,t) - e^{i(M/2)}\phi(x,t)}{\sqrt{2}(vt-x)} \\ &= (i)B \frac{[\mathcal{I}_1\phi^{-1}(x,t) - \mathcal{I}_2\phi(x,t)]}{\sqrt{2}} = (i)B \frac{[\mathcal{I}_1\phi_1 - \mathcal{I}_2\phi_2]}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el valor  $\sqrt{2}$  es un nuevo factor de normalización que nos deja intacto el factor  $B$  inicial y nos permitirá calcular el mismo sobre la función inicial. Cuestión para la que sólo tenemos que tomar la Ec.(2.3) con  $t = 0$ , expresada de una forma más genérica como:

$$\Psi_1(x,t) = B \frac{e^{i(x/b)} e^{i(k_0 x)}}{x}, \quad (2.10)$$

para  $b = 2 / \Delta k$ , y proceder a normalizar<sup>1</sup>.

$$\begin{aligned} B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,0) \Psi(x,0) dx &= B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx \\ &= B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2(x/b)}}{x^2} \phi^*(x,t) \phi(x,t) dx = B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2(x/b)}}{x^2} dx \\ &\rightarrow B^2 \oint \frac{e^{i2(z/b)}}{z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f + \oint f = \int_{-\infty}^{+\infty} f = B^2 (-\pi i) \frac{2i}{b} = B^2 \frac{2\pi}{b} = 1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

de lo que resulta,  $B = (b / 2\pi)^{1/2} = (1 / \Delta k \pi)^{1/2}$ .

<sup>1</sup> Mediante el cálculo de residuos, resolvemos el valor de la integral para polo de 2º orden en  $z=0$  que pasa por el contorno, puesto que estamos calculado  $x$  en la recta real, y cuya contribución es en consecuencia la mitad  $(-\pi)$  en la misma (valor principal de Cauchy), y nula en el resto del contorno.

### 3. FORMA ENERGÉTICA DEL SWP

Como el objeto de nuestro tratamiento es obtener la energía corpuscular a partir de la función de onda, podemos decir que el objeto es distinguir del valor de la energía total esos valores que son netamente ondulatorios, e incontrovertibles, dado el carácter ondulatorio por defecto de nuestro sistema físico de partida, y diferenciarlos de los restantes valores, es decir, separar el valor de la energía al menos en dos términos energéticos, el estrictamente ondulatorio y el que no lo es. Para ello, tomemos nuevamente la función del paquete de ondas simetrizado (SWP) dada en (2.9) y calculemos sobre ella el valor de expectación de la energía, que vendrá dado por:

$$\bar{E} = \int \xi P dx = \int \Psi^*(x,t) i\hbar \partial_t \Psi(x,t) dx, \quad (3.1)$$

y que debe coincidir con la energía del sistema descrito por una partícula libre tal como el electrón, incluida la que deriva de su carácter netamente ondulatorio.

El valor de expectación es una aplicación del operador energía  $\xi$  sobre una densidad de probabilidad  $P$ , que debe ser un valor real positivo. De hecho, el proceso de normalización (2.11) está destinado mediante la conjugación de la función a alcanzar un valor real positivo coincidente con ese valor de densidad. Esto es:

$$B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,0) \Psi(x,0) dx = B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P dx = 1 \quad (3.2)$$

Esto nos lleva a reconsiderar el proceso de normalización y reparar en que el mismo se hace mediante la conjugación para alcanzar una función de cuadrado integrable, que arroja precisamente un valor real positivo. Esa función de cuadrado integrable es, según lo visto en (2.11), la que resulta de anular la parte imaginaria de la función original a través de la relación  $\phi^*(x,t)\phi(x,t) = 1$ , siendo usualmente esa función resultante una función real toda vez que se ha eliminado el factor imaginario por este método.

Pero ni necesariamente la función resultante tiene que ser real, como de hecho ocurre en (2.11) ni necesariamente se tiene que alcanzar mediante la conjugada de la función original completa, como ocurre igualmente en nuestro caso. Es decir, que la conjugación es un método (el más usual) pero no un fin, siendo este último el de alcanzar un valor real positivo para la densidad de probabilidad y la consiguiente constante de normalización. Por esto mismo, y por la posibilidad de resolver el valor de la integral compleja tal cual (por tener solución), nosotros sólo hemos necesitado conjugar la onda plana y no la envolvente. Siendo tal resolución consecuencia de la extrapolación del comportamiento complejo al real o, dicho de otro modo, de la posibilidad de llevarla a cabo por ser nula la contribución de la parte imaginaria, puesta de manifiesto en  $\oint f$ .

Es decir, que tomando  $\Psi = \mathcal{G} \times \phi$ , de forma genérica, no hemos hecho  $\Psi^* = \mathcal{G}^* \times \phi^*$  para obtener el valor real, dado que esto nos hubiera llevado a  $\Psi^* \times \Psi = 1$ , sino  $\Psi^* = \mathcal{G} \times \phi^*$ , siendo la propia idiosincrasia de la integral la que se encarga de contabilizar el valor (principal de Cauchy) allí donde lo tiene, esto es, en la recta real.

Este carácter real que se deriva de las propiedades de la integral de forma natural, y que adoptamos nosotros originariamente en (2.5) y (2.7) mediante criterios físicos, lo alcanzaremos en lo que sigue revalidando  $\Psi^* = \mathcal{G} \times \phi^*$  y dejando (sin imponer criterios) que sea la propia operativa la que se encargue de rescatar el valor real de la función donde corresponda sin adulterarla, es decir, sin suprimir la parte imaginaria (obligándola a ser real) ni conjugarla para obtener de forma forzada un valor real. Todo esto se puede resumir diciendo que la densidad de probabilidad  $P$  tiene la misma forma para cualquier uso de la misma.

Teniendo en cuenta esto y tomando en consideración lo ya establecido para  $M \equiv [\Delta k (\nu t - x)]$ ,  $N \equiv (w_0 t - k_0 x)$ ,  $\phi(x, t) \equiv e^{i(N)} = \phi_2 = \phi_1^{-1}$  y  $\Psi_i = \mathcal{G}_i \phi_i$ , podemos calcular la Ec. (3.1). Ecuación que, de acuerdo con el resultado obtenido en Ec. (2.9), podemos separar en sus dos componentes:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int \Psi^*(x, t) i\hbar \partial_t \Psi(x, t) dx = (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) \\ &= (i)^2 B^2 \frac{\left[ \int \zeta_1(x, t) dx - \int \zeta_2(x, t) dx \right]}{(\sqrt{2})^2} \\ &= B^2 \frac{\int (\zeta_2(x, t) - \zeta_1(x, t)) dx}{2} = B^2 \int \zeta(x, t) dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde se cumple:

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \Psi_2^*(x, t) i\hbar \partial_t \Psi_2(x, t) = \mathcal{G}_2 \phi_2^* i\hbar \partial_t (\mathcal{G}_2 \phi_2) \\ &= \mathcal{G}_2 \phi_2^{-1}(x, t) i\hbar [\mathcal{G}_2 \partial_t \phi_2(x, t) + \phi_2(x, t) \partial_t \mathcal{G}_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{i(M/2)} e^{-i(N)}}{(\nu t - x)} i\hbar \left[ \frac{e^{i(M/2)} e^{i(N)}}{(\nu t - x)} \left( iw_0 + \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) - \nu \frac{e^{i(M/2)} e^{i(N)}}{(\nu t - x)^2} \right] \\ &= i\hbar e^{i(M/2)} \left[ \frac{e^{i(M/2)}}{(\nu t - x)^2} \left( iw_0 + \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) + \frac{e^{i(M/2)}}{(\nu t - x)^3} (-\nu) \right] \\ &= \hbar \left[ \frac{e^{i(\nu t - x) \Delta k}}{(\nu t - x)^2} \left( -w_0 - \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) + \frac{e^{i(\nu t - x) \Delta k}}{(\nu t - x)^3} (-i\nu) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

y

$$\begin{aligned} -\zeta_1(x, t) &= -\Psi_1^*(x, t) i\hbar \partial_t \Psi_1(x, t) = -\mathcal{G}_1 \phi_1^* i\hbar \partial_t (\mathcal{G}_1 \phi_1) \\ &= \mathcal{G}_1 \phi_1(x, t) i\hbar [\mathcal{G}_1 \partial_t \phi_1^{-1}(x, t) + \phi_1^{-1}(x, t) \partial_t \mathcal{G}_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{e^{-i(M/2)} e^{i(N)}}{(\nu t - x)} i\hbar \left[ \frac{e^{-i(M/2)} e^{-i(N)}}{(\nu t - x)} \left( -iw_0 - \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) - \nu \frac{e^{-i(M/2)} e^{-i(N)}}{(\nu t - x)^2} \right] \\ &= i\hbar e^{-i(M/2)} \left[ \frac{e^{-i(M/2)}}{(\nu t - x)^2} \left( iw_0 + \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) - \frac{e^{-i(M/2)}}{(\nu t - x)^3} (-\nu) \right] \\ &= \hbar \left[ \frac{e^{-i(\nu t - x) \Delta k}}{(\nu t - x)^2} \left( -w_0 - \frac{i\nu \Delta k}{2} \right) - \frac{e^{-i(\nu t - x) \Delta k}}{(\nu t - x)^3} (-i\nu) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

De lo que resulta:

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \frac{\zeta_2(x, t) - \zeta_1(x, t)}{2} \\ &= \left[ \frac{\hbar \nu \sin(\Delta k (\nu t - x))}{(\nu t - x)^3} - \frac{\hbar \nu \Delta k \cos(\Delta k (\nu t - x))}{2(\nu t - x)^2} \right] \\ &+ \left[ -\frac{\hbar w_0 \cos(\Delta k (\nu t - x))}{(\nu t - x)^2} \right] = \zeta^m(x, t) + \zeta^\sigma(x, t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde hemos tenido en cuenta las siguientes relaciones:

$$2i \sin M = e^{iM} - e^{-iM} \quad \text{y} \quad 2 \cos M = e^{iM} + e^{-iM}, \quad (3.7)$$

y en donde, reagrupando términos, se diferencian claramente, como ya adelantamos, la parte netamente ondulatoria de la corpuscular, caracterizadas por los parámetros  $w_0$  y  $\nu$  respectivamente. En efecto, en el segundo término del integrando,  $\zeta^\sigma(x, t)$ , se pone de manifiesto las características lumínicas del integrando, y por tanto del conjunto de la función, cuestión que dada su naturaleza es natural. Será, por tanto, el término  $\zeta^m(x, t)$  del integrando el que podrá poner de manifiesto, a partir de su valor integral, la doble naturaleza onda-corpúsculo, a pesar de tener un origen lumínico.

#### 4. TRATAMIENTO ENERGÉTICO DEL SWP

Nosotros hemos dividido la cuestión propuesta en varias partes o acciones. De una parte (que son dos en realidad) obtener una función con una distribución o configuración particular de la que se derive una forma energética plausible, y de otra, que abordamos ahora, relacionar esa forma energética con la de una partícula. Es el momento, por tanto, de enfrentarnos a la tarea de obtener un resultado, una expresión energética corpuscular a partir de la anterior de origen ondulatorio. Dicho de forma más exacta, es el momento de obtener un valor energético corpuscular reconocible, que es la única forma de asegurarnos de que, efectivamente, la función de onda describe a una partícula. En otro orden de las cosas es el momento de enfrentarnos a la verdad del problema, a lo que de verdad impide tener ese valor energético corpuscular reconocible a partir de la expresión energética de un paquete

de ondas, es decir, el de enfrentarnos a nuestras concepciones y el de poner de relieve qué cosas son equivocadas o simplemente equívocas en el tratamiento y promueven un esquema adulterado de la realidad.

La función de onda viene expresada sobre las variables  $x$  y  $t$ , lo cual está muy bien para la parte ondulatoria en la que queremos conocer su evolución en el tiempo y en el espacio de las que depende su valor energético. Esto no ocurre para una partícula libre, que tiene un valor energético independientemente de su posición (salvo que haya un potencial) ni del tiempo si está en reposo, y siempre lo está para su sistema de referencia.

Además de esto el cálculo de la energía en función de la variable  $x$  conlleva un error derivado de la doble consideración de la variable  $x$ , por un lado distancia y por otro tamaño. Del mismo modo que determinados experimentos con partículas diseñados para comportarse como radiación lo hacen así ineludiblemente, la determinación sobre una doble y ambigua consideración espacial nos obliga a una determinada forma de tratamiento. En este caso, si mis variables son tan precisas que sobrepasan el orden de magnitud de las partículas y tienen una evolución que no se corresponde con la de las partículas, sino que es interna, no voy a percibir partículas ni mis ecuaciones van a hablar de partículas.

Difícilmente, por tanto, podremos obtener un resultado si no somos capaces de distinguir la variable interna  $x$  asociada a la partícula de la coordenada genérica espacial  $x$  dependiente de su posición. No obstante, aunque la cuestión parece a priori inabordable podemos restringir en alguna medida esta doble consideración o ambigüedad si tenemos en cuenta que la función de ondas del paquete de ondas se anula prácticamente fuera del mismo, es decir, que la probabilidad de que fuera de dicho intervalo se represente a una partícula (o, que la partícula se encuentre fuera de dicho intervalo) y que fuera del mismo haya valores significativos de energía que contribuyan al valor medio de la misma es casi nula. Podemos restringir en consecuencia esta doble consideración si, equiparando la variable  $x$  que representa el desplazamiento del grupo con el tamaño del propio grupo, calculamos el valor medido al intervalo del grupo. Esto es:

$$\bar{E} = B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x,t) dx \cong B^2 \int_{x_0 - \Delta x/2}^{x_0 + \Delta x/2} [\zeta^m(x,t) + \zeta^\sigma(x,t)] dx, \quad (4.1)$$

En este caso, para  $x_0 = 0$  y  $t = 0$  no estamos calculando la energía del paquete de ondas en el intervalo de integración para un desplazamiento del mismo (aunque éste exista, esto es, aunque pueda ser  $v \neq 0$ ) sino el desplazamiento de la variable que representa a la función del paquete de ondas a lo largo de toda su extensión. En consecuencia,  $[+\Delta x/2, -\Delta x/2]$  no es una distancia sino un tamaño (o una distancia coincidente con un tamaño) de tal modo que podemos prescindir de la variable  $x$  como coordenada, que es superflua dentro de los límites (por primar la otra consideración), y darle

su verdadera funcionalidad o utilidad.

Sin embargo, vemos que a pesar del planteamiento no hemos conseguido superar la dualidad de  $x$  dado que a pesar de no existir fuera de los límites de integración (el tamaño) sigue siendo necesaria para evaluar el interior, ocurriendo además que el valor energético diferenciaría posiciones internas que en modo alguno se pueden diferenciar en una partícula, salvo para procesos de formación de la misma. Además de esto vemos que, incluso suponiendo que de esta forma fuésemos capaces de alcanzar un valor energético real de la partícula, en el mejor de los casos sólo serviría para evaluar el valor energético en un estado de reposo (hemos restringido la variable  $x$  al tamaño) pero no para otros estados como los cinéticos, que conocemos en función de la velocidad. Lo cual nos obliga a ir más allá en nuestra forma de razonar el problema.

Está claro que en el caso planteado el valor esperado es el valor energético de la propia partícula en reposo ( $t = 0$ ), y que el tamaño  $\Delta x$  es coincidente con el tamaño de la partícula en esa situación. La pregunta es si, partiendo de esto, podríamos ser capaces de averiguar el valor esperado en una situación general de no reposo, esto es, para otro sistema de referencia. La respuesta es sí, y que lo es al margen de todas las acotaciones hechas anteriormente si consideramos la magnitud de ese tamaño  $\Delta x$  como la longitud propia relativista del mismo, porque una vez que está definida la longitud propia  $a = \Delta x$  está definida para todos los sistemas inerciales mediante la transformación de Lorentz, en la consideración de que cualquier valor  $vt - x$  será un valor fijo  $a$  para alguna velocidad  $v$ , y para cualquier instante (siéndolo, en particular, para  $t = 0$ ), es decir, con

$$vt - x = a(1 - v^2/c^2)^{1/2} = a\gamma^{-1}, \quad (4.2)$$

pasamos de forma natural de un espacio de posiciones a un espacio de momentos, transformando una variable inespecífica en otra,  $v$ , de clara significación y mejor tratamiento.

Resumiendo el planteamiento hecho, difícilmente podremos calcular la energía de un grupo de ondas (que reside en su envolvente) como un todo, si no lo consideramos a nivel geométrico como un todo, esto es, como una entidad única capaz de representar o soportar los diferentes estados.

En este caso, y volviendo al punto de partida de la ecuación original (3.1), conocido el integrando en función de la velocidad, y los nuevos límites de integración relativos a los originales  $\pm\infty$ , sólo tenemos que definir la nueva integral para el valor de expectación de la energía, y calcular.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int_0^c \Psi^*(v) i\hbar \partial_t \Psi(v) dv = \int_0^c A^2 \zeta(v) dv = \\ &= A^2 \int_0^c [\zeta^m(v) + \zeta^\sigma(v)] dv, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde se ha modificado la constante de normalización como

consecuencia del cambio a la nueva variable y del intervalo de integración adscrito a la misma, equiparable a la semirecta real, para el que se cumple:

$$A^2 = 2B^2 = \frac{b}{\pi} = \frac{2}{\Delta k \pi}, \quad (4.4)$$

y donde, considerando (4.2) los integrando expresados en (3.6) toman la forma:

$$\zeta^\sigma(v) = -\frac{\hbar w \cos(\Delta k(vt-x))}{(vt-x)^2} = -\frac{\hbar w \cos(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{a^2 \gamma^{-2}} \quad (4.5)$$

y

$$\begin{aligned} \zeta^m(v) &= \frac{\hbar v \sin(\Delta k(vt-x))}{(vt-x)^3} - \frac{\hbar v \Delta k \cos(\Delta k(vt-x))}{2(vt-x)^2} \\ &= \frac{\hbar v \sin(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{a^3 \gamma^{-3}} - \frac{\hbar v \Delta k \cos(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{2a^2 \gamma^{-2}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

Podemos observar que en (4.3) hemos efectuado el cambio de variable de acuerdo con (4.2) para el integrando pero no para el diferencial de la integral, en la que hemos realizado directamente la sustitución  $dx \leftrightarrow dv$  en vez de la que en una primera estimación parecería más adecuada, esto es,  $dx = tdv + vdt = tdv$ , y que daría para (4.3) una expresión distinta ( $\bar{E} = \int \Psi^*(v) i\hbar \partial_t \Psi(v) tdv$ ) aunque errónea.

La razón es que nosotros estamos obligados a obtener el valor de la energía de una determinada manera, dado que por definición  $\zeta^P(x) = i\hbar \partial_t \Psi(x)$ , teniendo luego la posibilidad de cambiar a la variable que nos interese y sea dimensionalmente homogénea, en tanto que el espacio para el que calculamos el valor de expectación  $\bar{E}$  es arbitrario, con la condición de tener bien definidos los estados límite para (3.2). Es decir, el espacio de estudio ahora no es  $x = x(v)$  sino  $v$  con sus límites correspondientes, que podríamos haber fijado sin necesidad de realizar todo este tránsito. Para darnos cuenta de esto sólo tenemos que recordar que:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int_1^2 \Psi^*(x) i\hbar \partial_t \Psi(x) dx = \int_1^2 \frac{\Psi^*(x) i\hbar \partial_t \Psi(x) dx}{\Psi^*(x) \Psi(x) dx} \\ &= \int_1^2 \frac{\Psi^*(x) i\hbar \partial_t \Psi(x) tdv}{\Psi^*(x) \Psi(x) tdv} = \int_a^b \frac{\Psi^*(v) i\hbar \partial_t \Psi(v) dv}{\Psi^*(v) \Psi(v) dv}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

es decir, que el valor de expectación o más probable de una variable puede prescindirse de elementos que la acompañan si los mismos son también eliminados en el denominador, esto es, en la función probabilidad (ocultada por defecto). Pudiéndose hacer esto si en todos los casos está normalizada y cumple que:

$$P = \int_1^2 \Psi^*(v) \Psi(v) tdv = \int_a^b \Psi^*(v) \Psi(v) dv = 1 \quad (4.8)$$

En cualquier caso, y en un sentido físico, no queremos calcular  $\bar{E}$  en el espacio probabilístico de las posiciones sino de las velocidades, y éste no se alcanza haciendo un cambio de variable sobre el primero, sino definiéndolo correctamente.

Resolviendo los términos de la integral, tal como hacemos en el ANEXO, nos queda una suma de integrales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= A^2 \int \zeta^m(v) dv + \zeta^\sigma(v) dv \\ &= A^2 \int (\zeta_k(v) + \zeta_f(v) + \zeta_\sigma(v)) dv \\ &= A^2 \left( \frac{\hbar}{a^3} \right) \sin[\Delta k(a\gamma^{-1})] \int_{v_o}^{v_f} \frac{v}{\gamma^{-3}} dv \\ &\quad - A^2 \left( \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \right) c^2 \int \frac{\cos[\Delta k(a\gamma^{-1})]}{\gamma^{-1}} d(\gamma^{-1}) \\ &\quad + A^2 \left( \frac{\hbar w}{a^2} \right) c \int \frac{\cos[\Delta k(a\gamma^{-1})]}{(1-\gamma^{-2})^{1/2} \gamma^{-1}} d(\gamma^{-1}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

en la que el término masivo del integrando ha resultado separado en dos de otra especie, uno cinético y otro corpuscular o de formación.

Expresión que, teniendo en cuenta el factor de normalización (4.4), clarificando la notación de la variable mediante  $v \equiv \gamma^{-1}$  en los dos últimos términos, y distinguiendo los argumentos de las funciones trigonométricas en los mismos a través de la variable (a pesar de ser matemáticamente iguales en la expresión antecedente),

$$\Phi \equiv [\Delta k(a\gamma^{-1})] = [\Delta k(av)] \equiv \Phi_v, \quad (4.10)$$

para reseñar que dichos argumentos están afectados por la integral mediante dicha variable, podemos escribir como,

$$\begin{aligned} \bar{E} &= A^2 \int \zeta^m(v) dv + \zeta^\sigma(v) dv \\ &= A^2 \int (\zeta_k(v) + \zeta_f(v) + \zeta_\sigma(v)) dv = \bar{E}_k + \bar{E}_f + \bar{E}_\sigma \\ &= \left( \frac{\hbar b}{\pi a^3} \right) \sin[\Phi]_v \int_{v_o}^{v_f} \frac{v}{\gamma^{-3}} dv \quad (a) \\ &\quad - \left( \frac{\hbar \Delta k b}{2\pi a^2} \right) c^2 \int \frac{\cos[\Phi_v]}{v} dv \quad (b) \\ &\quad + \left( \frac{\hbar w b}{\pi a^2} \right) c \int \frac{\cos[\Phi_v]}{(1-v^2)^{1/2} v} dv, \quad (c) \end{aligned} \quad (4.11)$$

que podemos asimilar a la energía pro-corpuscular o utilizarla para definirla. No vamos a entrar aquí en el análisis de todos los términos, que será el objeto de otro trabajo, pero sí a poner en evidencia para lo que nos importa en éste que los mismos ya empiezan a tomar, en efecto, una apariencia corpuscular, cuestión que apreciaremos más notablemente en el primero de ellos (4.11a) si prescindiendo por ahora del factor  $\sin[\Phi]_v$  lo desarrollamos entre el límite  $v_o = 0$  y cualquier  $v$  final:

$$\begin{aligned}
E_k &= \left( \frac{\hbar b}{\pi a^3} \right) \int_0^v \frac{v}{\gamma^{-3}} dv = \left( \frac{\hbar b}{\pi a^3} \right) \int_0^v \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} dv \\
&= \left( \frac{\hbar b}{\pi a^3} \right) c^2 \left( \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right) = m_R c^2 \left( \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right) \\
&= m_R c^2 (\gamma - 1) = m_R \gamma c^2 - m_R c^2 = E_T - E_R = E_c,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

por cuanto que se corresponde con la expresión que describe la energía cinética relativista de una partícula de masa  $m_R$ , que en este caso es:

$$m_R = A^2 \frac{\hbar}{a^3} = \frac{\hbar b}{\pi a^3} = \frac{2\hbar}{(\Delta k)\pi a^3}, \tag{4.13}$$

esto es, una masa expresada en términos ondulatorios o, más exactamente, expresada mediante sus constituyentes ondulatorios. Resultado (4.12) que implícitamente establece que los otros dos términos de la Ec. (4.11) se corresponden con la parte energética del proceso que no es cinética, y que es necesariamente de formación corpuscular o transito energético entre los objetos iniciales y finales, esto es, del encapsulado material, que precisará una definición apropiada y diferenciada de los límites de integración, pero que por de pronto podemos asociar a  $E_R$  en (4.12). Con esto hemos alcanzado, a expensas de ser debidamente caracterizado, lo que pretendíamos inicialmente, esto es, una expresión energética corpuscular reconocible a partir de la expresión ondulatoria. Cuestión que no obstante alcanzará otros fundamentos mediante el conocimiento o la interpretación correcta de los procesos y del espacio natural y distinto en que tienen lugar, que nos lleva al concepto de fase, del que  $\text{sen}[\Phi]_v$  es su expresión precursora. Expresión de la que derivará, de acuerdo con unas determinadas condiciones (o una condición única que postularemos para mayor claridad y formalidad), toda fenomenología de la materia, esto es, su

creación y transformación, según lo ya mostrado en <https://vixra.org/abs/2003.0001>, en correspondencia con los cambios de fase asociados a dichos procesos.

## 5. SUMARIO Y DISCUSIÓN

Aquí no hemos calculado la energía de una partícula sino la energía de formación de una partícula a partir de un paquete de ondas, y de su energía propiamente dicha. La formación del corpúsculo o encapsulado material no aniquila la onda fuera de los límites de la partícula sino que deja la parte oscilante “sobrante”  $\text{sen}[\Phi]_v$ , que de ordinario no se manifiesta (toda nuestra dinámica se comprende sin ella), como muestra o vestigio de su naturaleza ondulatoria incluso en el término cinético, en la masa en sí que le sirve de soporte. En este contexto, el término (4.11a) representa una extensión o generalización de la expresión dinámica relativista (4.12), mediante la presencia de un término ondulatorio que está ahí, pero que no se muestra porque su acción en la fenomenología es inexistente salvo para aquellos procesos de formación que culminan precisamente con su anulación o desactivación.

La Ec. (4.12) es por tanto una restricción o situación particular de (4.11a). La diferencia entre la situación de formación en (4.11a) y la expresada en (4.12) es que en esta última  $\text{sen}[\Phi]_v$  es irrelevante toda vez que el proceso ha concluido y sólo quedan los productos finales. Es decir, (4.11a) en origen acompaña el proceso de formación o progreso de los otros dos términos, y lo hace mediante la evolución de  $\text{sen}[\Phi]_v$  en la integral por cuanto que todos sus factores tienen la misma naturaleza mientras dura el proceso, y hasta que termina. Una vez que se completa, sigue evolucionando de la misma forma expresada en (4.11a), pero con dos elementos de diferente especie, esto es, con el factor  $\text{sen}[\Phi]_v$  de diferente especie que la envolvente materializada del paquete de onda (corpúsculo) y, por tanto, sin consecuencias cinéticas, quedando circunscrita de facto a la expresión (4.12).

## ANEXO

Vamos a calcular la integral sobre  $v$  del integrando:

$$\begin{aligned}
\zeta(v) &= \frac{\hbar v \sin(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{a^3 \gamma^{-3}} - \frac{\hbar v \Delta k \cos(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{2a^2 \gamma^{-2}} - \frac{\hbar w \cos(\Delta k(a\gamma^{-1}))}{a^2 \gamma^{-2}} \\
&= \frac{\hbar v \sin\left[\Delta k\left(a(1-v^2/c^2)^{1/2}\right)\right]}{a^3 (1-v^2/c^2)^{3/2}} - \frac{\hbar v \Delta k \cos\left[\Delta k\left(a(1-v^2/c^2)^{1/2}\right)\right]}{2a^2 (1-v^2/c^2)} - \frac{\hbar w \cos\left[\Delta k\left(a(1-v^2/c^2)^{1/2}\right)\right]}{a^2 (1-v^2/c^2)}
\end{aligned} \tag{A.2}^{\S}$$

<sup>§</sup> Notaremos los diferentes términos de las expresiones con el número de la misma seguida de una letra, en este caso, (A.1a), (A.1b), (A.1c)

**TÉRMINO PRIMERO-** El término (A.1a) queda:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\hbar v \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{a^3 \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv = \frac{\hbar}{a^3} \int \frac{v \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv \\
& = \frac{\hbar}{a^3} \left\{ \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right] \int \frac{v}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv - \int \left[ \int \frac{v}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv \right] \partial_v \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right] dv \right\} \\
& = \frac{\hbar}{a^3} \left[ \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right] \int \frac{v}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv \right]_{v_0}^{v_f} + \frac{\hbar \Delta k}{a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv
\end{aligned} \tag{A.2}$$

El término (A.2a) será el TÉRMINO-1 de la solución general, que podemos poner de una forma más elegante como:

$$\frac{\hbar}{a^3} \sin \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]_{v_0}^{v_f} \int_{v_0}^{v_f} \frac{v}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{3/2}} dv = \frac{\hbar}{a^3} \sin \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]_{v_0}^{v_f} \int_{v_0}^{v_f} \frac{v}{\gamma^{-3}} dv \tag{A.3}$$

**TÉRMINO SEGUNDO-** El término (A.2b) tiene la misma forma que el término (A.1b) por lo que lo sumamos para su análisis.

$$\frac{\hbar \Delta k}{a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv - \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv = \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv \tag{A.4}$$

(A.4) podemos ponerla como:

$$\frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv = \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} \int \frac{v \cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{\gamma^{-2}} dv \stackrel{(1)}{=} - \frac{\hbar \Delta k}{2a^2} c^2 \int \frac{\cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{\gamma^{-1}} d(\gamma^{-1}) \tag{A.5}$$

$$\text{con } \left[ \frac{d(\gamma^{-1})}{dv} = \frac{d(1 - v^2 / c^2)^{1/2}}{dv} = \frac{v / c^2}{(1 - v^2 / c^2)^{1/2}} = \frac{v}{c^2 \gamma^{-1}} \Rightarrow -c^2 \gamma^{-1} d(\gamma^{-1}) = v dv \right]^{(1)}$$

que será el TÉRMINO-2 de la solución general.

**TÉRMINO TERCERO-** El Término (A.1c), queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar w}{a^2} \int \frac{\cos \left[ \Delta k \left( a \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \right) \right]}{\left( 1 - v^2 / c^2 \right)} dv &= \frac{\hbar w}{a^2} \int \frac{\cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{\gamma^{-2}} dv \stackrel{(1)}{=} - \frac{\hbar w}{a^2} \int \frac{c^2 \gamma^{-1} \cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{v(\gamma^{-2})} d(\gamma^{-1}) \\
&= - \frac{\hbar w}{a^2} \int \frac{c \cos \left[ \Delta k \left( a \gamma^{-1} \right) \right]}{\left( 1 - \gamma^{-2} \right)^{1/2} (\gamma^{-1})} d(\gamma^{-1})
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\text{con la misma transformación (1) y } \left[ \gamma^{-1} = \left( 1 - v^2 / c^2 \right)^{1/2} \Rightarrow v = c \left( 1 - \gamma^{-2} \right)^{1/2} \right]^{(2)}$$

que será el TÉRMINO-3 de la solución general.