수소원자에서 전자운동

강 대현(Daehyeon Kang)
samplemoon@korea.kr

요약

수소원자의 전자의 운동을 새로운 방법으로 기술하였다. 보어-조머펠트의 방식이 아닌 물질의 파동성을 고려하여 고전양자론에서 궤도각운동량을 설정하였고 상대론적 파동 방정식에 대응하는 에너지 준위공식을 유도해 보았다..

1. 서문

20세기 초반에 닐스보어는 수소스펙트럼 선을 설명하고자 물질의 파동성이 알려지기 전에 각운동량에 대한 양자조건을 부여하여 하였다. 그리고 원자핵 주위를 원형으로 도는 전자가 원심력과 쿨롱인력이 같다는 조건을 더하여 역학적에너지 공식을 이용하여 에너지준위 공식을 만든다.

닐스보어는 궤도각운동량을 $p_{\varnothing} = \frac{n_{\varnothing}\hbar}{r}$ 로 사용했다. 전자의 운동량에 원자핵과 전자사이의 거리를 곱해 플랑크상수를 2파이로 나눈 값에 정수배와 같다고 놓은 것이다.

역학적에너지는 아래와 같이 운동에너지에 쿨롱포텐셜 에너지를 더해 만든다.

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \tag{1}$$

그리고 원형궤도에서 원심력과 쿨롱인력이 같다는 조건을 $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$ 붙인다음 간단한 계산을 하여

$$E = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{n_{\varnothing}^2\hbar^2} \tag{2}$$

(2)식을 이끌어내고 이것으로 수소원자의 스펙트럼 선 문제를 해결하는데 대체로 성공한다.

이어서, 아놀드 조머펠트는 보어의 양자조건 $p_{\varnothing} = \frac{n_{\varnothing}\hbar}{r}$ 을 각운동량으로 하고 추가로 r방향으로 $\int p_r dr = n_r h$ 라는 조건을 부여하여 상대론적 관점에서 수소원자의 에너지준위를

설명할 수 있는 이른바 조머펠트공식을 만들어내게 되는데 미세구조를 설명하는 등 상당히

호평을 받았던 것으로 보인다,. 1925년 경 슈뢰딩거방정식이 나오면서 아마도 조머펠트공식은

잊혀진 듯하다.

아무래도 슈뢰딩거방정식이 논리적으로 원자를 잘 설명할 수 있게 되었기 때문이리라.

닐스보어 자신이 주장한 대응원리에 의하면 고전양자론과 양자역학이 보여주는 모습은 양자

수가 큰 경우 같아질 필요가 있는다고 하는데...

수소원자에서 양자수가 커져도 s오비탈은 각운동량이 없다. 상대론적 슈뢰딩거방정식에서도 마찬가지로 각운동량은 없다.
이걸 고전양자론이 다룰수 있게 하려면. 뭔가 새로운 방식을 도입할 필요가 있을 것이다..
양자론을 공부해본 사람은 누구나 이런 생각을 했을 것 같다는 느낌이 온다.
비록 보어나 조머펠트에게 주어졌던 과거의 영광은 온데간데 없고 지금은 별 볼일없는 업적이 되었지만 지금 공부하면서 이걸 못본척 넘어가는 것은 학문하는 자세는 아닐 듯...

2. 주 문

조머펠트 공식은 상대론적 역학적에너지 식을 사용한다.

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^2} - \frac{e^2}{r} \tag{3}$$

(3)식을 가지고 그가 만든 $\int p_r dr = n_r h$ 라는 양자조건을 해보면 이러하다.

$$\int p_r dr = \frac{1}{c}\int \sqrt{(E^2 - m_o^2c^4) + 2Ee^2\frac{1}{r} + \frac{(e^4 - n_\varnothing^2\hbar^2c^2)}{r^2}}\, dr = n_r h \tag{4}$$

(4)식을 보면 각운동량이 없으면($n_\varnothing = 0$) 적분했을 때 발산한다. 그러므로 실제 자연현상과

안 맞다. 수소원자의 s 오비탈은 실험적으로 각운량이 0 이다.

이런 경우 처음부터 끝까지 어떤 문제점이 있는지 뒤돌아보아야 하는데......

닐스 보어가 시작한 출발점부터 문제가 있어보인다. 원자에서 전자가 원운동을 한다고 생각하고 $p_\varnothing = \frac{n_\varnothing \hbar}{r}$ 라는 관계식을 만든 것인데 현상과 잘 맞으니 계속 사용한 거 같다.

양자역학이 나온 지가 100년이 다 되었다. 이 시점에서 $p_r = \frac{n_r \hbar}{r}$ 을 써도 이상할 건 없을 것이다.

에너지 준위가 $E = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(n_r + n_\varnothing)^2 \hbar^2}$ 로 나오는 것도 있고 전자가 원운동만 한다는 것도 좀 억지 같기도하다. 그리고 그 당시엔 몰랐겠지만 물질의 파동성이 $\varnothing$ 방향으로만 작용하는게 아니고 r 방향으로도 작용한다고 보아야 하므로 2가지가 우열은 없겠지만 슈뢰딩거방정식을 놓고 보면 수소원자의 바닥상태는 물질의 파동성이 r 방향으로 작용한다고 보는 것이 더 우위에 있다고 보는 것이 분명하게 옳아 보인다. 양자역학에서 파동함수를 꼼꼼하게 잘 들여다보고 입자의 파동이 적용되는 경우를 판단할 필요가 있는 것이다.

따라서 1910~20년 사이에 당시 조머펠트가 당면했던 상황을 피하려면 $p_\varnothing = \frac{n_\varnothing \hbar}{r}$ 보다는 $p_r = \frac{n_r \hbar}{r}$ 을 사용하는 게 나아보인다. 그리하여 $p_r = \frac{n_r \hbar}{r}$ 를 사용하고자 하는 것이다.

이렇게 되면 닐스보어가 쓰던 원형궤도에서 $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$ 원심력과 쿨롱인력이 같다는 조건을 이용할 수 없는데 이걸 대체할 방법은 $\frac{dE}{dr} = 0$ 이라고 보았다.

역학적에너지를 r 로 미분해서 그 값이 0(제로)인 경우 수소원자가 안정한 상태라고 보는 것이다. 원형궤도가 없는 경우 역학적 에너지 방정식에 $p_r = \frac{n_r \hbar}{r}$ 을 대입해보면 이러하다.

$$E = \frac{n_r^2 \hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} \tag{5}$$

(5)식을 미분하여 본다.

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{n_r^2 \hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0 \tag{6}$$

(6)식에서 $\frac{1}{r}=\frac{me^2}{n_r^2\hbar^2}$ 을 얻는다. 이것을 (5)식에 넣어 처리하면 다음과 같이 얻는다.

$$E=-\frac{1}{2}\frac{me^4}{n_r^2\hbar^2} \tag{7}$$

(여기서 $n_r=1,2,3,4.....$)

(7)식은 닐스보어가 처음 제안한 것과 같은 수소원자의 에너지 준위를 보여준다.

위에 길게 서술한 글의 요점은 s오비탈에서 전자는 r 방향으로 운동을 하는데 물질의 파동성이 있기 때문에 $p_r=\frac{n_r\hbar}{r}$ 관계식을 따르게 된다는 것이다.

위와 같은 기본원리를 그대로 상대론적 역학적 운동에 적용하는 것이다.

(3)식으로부터 (8)식을 얻을 수 있다.

$$(E^2-m_o^2c^4)+2Ee^2\frac{1}{r}+\frac{e^4}{r^2}=(m^2v_r^2+m^2v_\varnothing^2)c^2 \tag{8}$$

(8)식에 위에서 말했던 관계식 $p_r=\frac{n_r\hbar}{r}$ 을 대입하고 정리한다.

$$(E^2-m_o^2c^4)+2Ee^2\frac{1}{r}+\frac{e^4}{r^2}=(\frac{n_r^2\hbar^2}{r^2}+m^2v_\varnothing^2)c^2 \tag{9}$$

(9)식을 이용해서 궤도각운동량은 (10)식과 같이 만들어진다.

$$\int p_\varnothing dr=\frac{1}{c}\int\sqrt{(E^2-m_o^2c^4)+2Ee^2\frac{1}{r}+\frac{(e^4-n_r^2\hbar^2c^2)}{r^2}}\,dr=n_\varnothing h \tag{10}$$

(10)식을 적분표를 이용해서 적분을 해본다.

적분표

$$\oint\sqrt{-A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}}\,dr=2\pi(\frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C}) \tag{11}$$

$$2\pi\left(\frac{Ee^2}{\sqrt{(m_o^2c^4-E^2)}}-\sqrt{n_r^2\hbar^2c^2-e^4}\right)=n_{\varnothing}hc \tag{12}$$

(12)식을 정리를 해보면 (13)식이 나온게 된다.

$$\therefore\ E=\frac{m_oc^2}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{(n_{\varnothing}+\sqrt{n_r^2-\alpha^2})^2}}} \tag{13}$$

3. 결론

전자나 원자핵은 물질파라는 성질을 갖는다. 1920년대에 이론적 실험적으로 확증이 되었다.

이러한 물질의 파동성을 고려하여 $p_r=\frac{n_r\hbar}{r}$ 라는 관계식을 설정하고 고전양자론에서 나오는 문제점을 해결해보았다. 해결했다고 슈뢰딩거방정식을 넘어 선 것도 아니고 턱밑에 다가간 것도 아니다.

그냥, 수소원자의 s오비탈에서 궤도 각운동량이 없어야 한다는 부분에 도달했을 뿐이다.

그저그런 (13)식이 수소원자의 미세구조와 잘 맞다고 하니 놀랍다. 램이동량은 빼고......

참고문헌

[1] PerterG.Bergmann, Introduction to thetheory of Relatvity. (Dover publication 1976), -도서

[2] P.A.M. DIRAC, the Principles of Quantum Macanics 4th ed. (OXFORD AT THE CLAREN 1967), -도서

[3]Gasiorowicz "quantum physics" johnwiely&sons inc 1974, -도서

Electron's motion in hydrogen - Old quantum theory

Daehyeon Kang

The movement of electrons in hydrogen atoms is described in a new way. Not the Bohr-Zommerfeld method.

Considering the wave of matter, the orbital angular momentum was redefined in old quantum theory.

this energylevel formula corresponding to the relativistic Schrodinger equation was induced.