Законы взаимодействия токов и зарядов и определение магнитного поля

А. Н. Тараканов

Институт информационных технологий,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
220037, Беларусь, Минск, Козлова 28
Email: tarak-ph@mail.ru

Рассматриваются различные варианты взаимодействия элементов токов и движущихся зарядов, записанные в векторной форме, начиная с теории Ампера. Показано, что с точки зрения классической проблемы двух «тел» наиболее адекватной является теория Гаусса-Грассмана-Неймана. Получено выражение для магнитной индукции, создаваемой движущимся элементом тока, которое помимо обычного закона Био-Савара-Лапласа включает дополнительные слагаемые, обусловленные как спином электрона, так и взаимным перемещением элементов.

PACS numbers: 14.60Cd, 41.20.Gz, 45.20.–d, 45.50.–j
Keywords: Classical mechanics, Classical electrodynamics, Two-body problem, Magnetic field, Spin, Electron

1. Введение

Вопрос о взаимодействии движущихся объектов является одним из основных в физике. Несмотря на его длинную историю, он до сих пор не имеет окончательного, или лучше сказать, более или менее приемлемого решения. Известные на сегодняшний день гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые взаимодействия описываются различными теориями, попытки объединения которых осуществляются в многочисленных теоретических схемах. На наш взгляд все эти взаимодействия имеют единую природу, с чем согласны большинство физиков, и должны описываться одним законом, который соответствующим образом проявляется на разных масштабах расстояний.

Поскольку вся материя с общепринятой точки зрения состоит из положительно заряженных, отрицательно заряженных и нейтральных частиц, то прежде всего, этот закон следует установить для взаимодействия стабильных элементарных частиц типа электрона и протона. В классической механике и электродинамике взаимодействие считается известным, если известны силы, действующие на физические объекты и определяющие изменение динамического импульса со временем. Поэтому взаимодействие между двумя движущимися стабильными частицами должно определяться силой, действующей со стороны одной частицы на другую. Если такая система находится в равновесии, то, по-видимому, должен выполняться третий закон Ньютона, который может нарушаться для неравновесной системы.

В электродинамике Максвелла, который рассматривал магнитное поле как совокупность вихрей в несжимаемой эфирной жидкости, сила, действующая на движущуюся заряженную частицу, состоит из электрической и магнитной сил Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\,, \tag{1.1}$$

определяемых напряжённостью электрического поля

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{R}} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,, \tag{1.2}$$

и магнитной индукцией

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\,, \tag{1.3}$$

где φ и $\mathbf{A}$ – скалярный и векторный потенциалы, зависящие только от координат и времени. Значения полей (1.2) и (1.3) следует брать в точке, где находится заряд e. Таким образом, выражение (1.1) по существу применимо лишь для точечных зарядов.[1])

Четыре уравнения Максвелла, включающие электрическое поле (1.2), создаваемое

[1]) Более точно у Максвелла речь идёт о плотности силы, действующей на объект, в котором распределён заряд с некоторой плотностью.

распределением зарядов, и магнитное поле (1.3), создаваемое распределением токов, обычно используются в известных классических теориях электрона. Первые два уравнения Максвелла являются фактически уравнениями для электрической и магнитной сил, а следующие два уравнения, выражаемые теоремой Гаусса, являются условиями, которым эти силы должны удовлетворять, причём, по существу, они имеют место для стационарных распределений зарядов и токов. Спин носителей заряда никак не учитывается. Учёт спина, а также возможная зависимость электрической и магнитной сил от состояния движения носителей заряда неизбежно должны приводить к уравнениям, которые могут отличаться от стандартных уравнений Максвелла. Эти новые уравнения должны учитывать не только характер движения, но и структуру носителей заряда. Для того чтобы построить такие уравнения, необходимо переопределить понятия напряжённостей электрического и магнитного полей, входящих в уравнения Максвелла, и установить соотношения между ними.

В работах [1]-[4] показано, что электрический заряд следует рассматривать не как физическую величину, характеризующую электромагнитное взаимодействие, а как следствие наличия у частицы спина. Тогда электромагнитное взаимодействие можно трактовать как взаимодействие спина с внешним полем. Если отказаться от понятия заряда и использовать вместо него поляризацию спина (спиральность) частицы, то в (1.1) следует либо положить $e = +1$ для положительно заряженных частиц, и $e = -1$ для отрицательно заряженных частиц, либо $e = +1$ для любых частиц. Если в первом случае спиральность e (или заряд) строго фиксирована (тангенциальная компонента спина $s_\tau = es$ для свободных частиц, [6]; бинормальная компонента спина $s_b = es$ для частиц в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B_b \mathbf{e}_b$, где $\mathbf{e}_b$ – вектор бинормали, [7], то второй случай допускает существование решений, в которых поляризация спина отлична от ± 1 (например, в случае частиц в постоянном однородном электрическом поле, [8]). Отсюда следует, что классическое понятие заряда строго определено только в случае свободно движущихся частиц.

В [6] показано, что свободная частица со спином движется по спиралевидной траектории, что можно интерпретировать как Zitterbewegung. Если такая частица создаёт электромагнитное поле, то в каждой точке окружающего пространства значения компонент этого поля будут периодически изменяться в соответствии с движением частицы, что можно рассматривать как прохождение через эту точку электромагнитной волны. Таким образом, квантовые понятия Zitterbewegung'а и корпускулярно-волнового дуализма получают интерпретацию с классической точки зрения.

В классической электродинамике закон взаимодействия между движущимися зарядами обычно получается из силы взаимодействия двух элементов тока (*реофоров* по терминологии Ампера), представляемого как поток носителей заряда. Разделив эту силу на количество носителей заряда в обоих элементах тока, получим выражение для *силы взаимодействия между движущимися зарядами*. Однако сила, полученная таким образом, в действительности будет *средней силой, приходящейся на пару взаимодействующих заряженных частиц*.

Существует несколько вариантов вывода этой силы. Первый вариант, как известно, предложен Ампером в 1820, который исходил из установленных экспериментально четырёх случаев равновесия [2]) и предположения, что эта сила действует вдоль линии, соединяющей реофоры ([9]; [10], с. 151, 197). Пусть в дальнейшем $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ обозначают координаты элементов проводников $\delta\mathbf{R}_1$, $\delta\mathbf{R}_2$, по которым текут токи с интенсивностями $i_1 = i$ и $i_2 = i'$,

---

[2]) 1) Действие тока обратно, когда направление тока обратно; 2) Действие тока, проходящего по слегка волнистому контуру, не отличается от действия тока, проходящего по прямому контуру; 3) Сила, прикладываемая замкнутым контуром к элементу другого контура, расположена под прямым углом к последнему; 4) Пропорциональное увеличение всех линейных размеров контура при неизменной силе тока не влияет на силу между двумя его элементами ([11], p. 85; [12], с. 111).

соответственно, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ – радиус-вектор, проведённый от первого реофора ко второму, $r = |\mathbf{r}_{21}| = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$ – расстояние между ними. Тогда, если представить бесконечно малую силу, действующую на второй элемент со стороны первого, в виде

$$d^2\mathbf{F}_{21} = i_1 i_2 d^2\mathbf{f}_{21}, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{f}_{21}$ – безразмерная векторная функция, то формула, полученная Ампером будет выглядеть следующим образом

$$d^2\mathbf{f}_{21}^{\text{Ampère}} = \frac{1}{r^3}\left[(\delta\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{R}_2) - \frac{3}{2r^2}(\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{R}_1)(\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{R}_2)\right]\mathbf{r} = -d^2\mathbf{f}_{12}^{\text{Ampère}}, \tag{1.5}$$

что означает, что второй элемент отталкивается от первого, если $i_1 i_2 > 0$.

В 1833 Гаусс получил другое выражение, но оно стало известно только в 1867 после его смерти. Вместо токов $i = i_1$ и $i' = i_2$, текущих в реофорах $\delta\mathbf{R}_1$ и $\delta\mathbf{R}_2$, Гаусс использует находящиеся в них элементы электричества $e = e_1$ и $e' = e_2$, движущиеся со скоростями $\mathbf{V}_1 = \delta\mathbf{R}_1 / dt$ и $\mathbf{V}_2 = \delta\mathbf{R}_2 / dt$, соответственно, так что имеют место соотношения $i_{1,2}\delta\mathbf{R}_{1,2} = e_{1,2}\mathbf{V}_{1,2}$, $i_{1,2} = e_{1,2} / dt$. Действие первого элемента на второй выражается безразмерной векторной функцией

$$d^2\mathbf{f}_{21}^{\text{Gauss}} = \frac{1}{r^3}[\delta\mathbf{R}_2 \times [\delta\mathbf{R}_1 \times \mathbf{r}]]. \tag{1.6}$$

По-видимому, Гаусс не был уверен в этом выражении, возможно из-за невыполнения третьего закона Ньютона, т.е. $d^2\mathbf{f}_{21}^{\text{Gauss}} \neq -d^2\mathbf{f}_{12}^{\text{Gauss}}$, и полагал, что «действие *двух гальванических элементов тока друг на друга* ещё предстоит дополнительно изучить» ([13], S. 604).

Если речь идёт о взаимодействии элементов электричества e_1 и e_2, а не элементов тока, то законы (1.5) и (1.6) могут описывать лишь часть этого взаимодействия, связанного с *абсолютным* движением этих элементов. Между тем, полная сила взаимодействия в случае относительного покоя элементов e_1 и e_2 должна сводиться к закону Кулона. В июле 1835 Гаусс нашёл другое выражение *основного закона для всех взаимодействий гальванических токов* в форме силы отталкивания, удовлетворяющей третьему закону Ньютона и учитывающей кулоновское взаимодействие,[3]) которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21}^{\text{G}} &= e_1 e_2 \frac{d^2\mathbf{f}_{21}^{\text{G}}}{dt^2} = \frac{e_1 e_2}{r^3}\left\{1 + k\left(v^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right\}\mathbf{r} = \\ &= \frac{e_1 e_2}{r^3}\left\{1 + \frac{2\mathbf{v}^2}{c^2} - \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2}{c^2 r^2}\right\}\mathbf{r} = \frac{e_1 e_2}{r^3}\left\{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} + \frac{3[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]^2}{c^2 r^2}\right\}\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\sqrt{1/k}$ есть некоторая скорость, которая после опытов Вебера-Кольрауша была связана со скоростью света ($k = 2/c^2$),

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{21} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 \tag{1.8}$$

– скорость второго заряда относительно первого. Свои исследования Гаусс решил не публиковать до тех пор, пока не найдёт механизма передачи электрического действия ([11], p. 240; [12], с. 287).

В дальнейшем выражения для силы взаимодействия между движущимися зарядами

[3]) **[13].** Grundgesetz für alle Wechselwirkungen galvanischer Ströme. (Gefunden im Juli 1835). – [13], S. 616-617; [14], [15], с. 145; [16], p. 183; [17], p. 508.

были получены в 1845 Г. Грассманом, [18], и Ф. Нейманом, [19], которые независимо пришли к закону (1.6), полученному ранее Гауссом ([20], [21], [22], pp. 215-220). Грассман отмечал в нескольких местах своей статьи, что справедливость закона Ампера (1.5) или закона Гаусса-Грассмана-Неймана (1.6) можно установить только делая эксперименты с незамкнутыми цепями. Нейман предложил для построения теории индукционных токов использовать потенциал пондеромоторных сил, действующих согласно теории Ампера, между контуром и магнитом.

В 1845 Г. Т. Фехнер для объяснения природы электрического тока предложил гипотезу о том, что электрический ток состоит из равных потоков положительного (*стеклянного*) и отрицательного (*смоляного*) электричеств, движущихся в противоположных направлениях. Кроме того, одноименные заряды, движущиеся в одном направлении, притягиваются друг к другу, а движущиеся в противоположных направлениях, отталкиваются ([23], p. 338). В 1846 В. Вебер, основываясь на гипотезе Фехнера и законе Ампера (1.5), получил *фундаментальный закон электрического действия*, [24], в котором сила взаимодействия зависит как от относительного положения, так и от состояния относительного движения носителей заряда, и действует по линии, соединяющей электрические элементы.[4]) Он «доказал, что формула сил Ньютона совершенно недостаточна для характеристики электрических действий, что притягательные и отталкивательные силы электрических жидкостей не являются независимыми от движений, как того требуют ньютоновские представления, и что они зависят не только от скорости, но и от ускорения движения» ([30], с. 13).

Закон Вебера можно записать в виде ([24], S. 316, где $a = 1/c$, $c = 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21}^{\mathrm{W}} &= e_1 e_2 \frac{d^2 \mathbf{f}_{21}^{\mathrm{W}}}{dt^2} = \frac{e_1 e_2}{r^3} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right\} \mathbf{r} = \\ &= \frac{e_1 e_2}{r^3} \left\{ 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} + \frac{3[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]^2}{c^2 r^2} + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})}{c^2} \right\} \mathbf{r} \ , \end{aligned} \tag{1.9}$$

откуда видно, что он переходит в закон Гаусса (1.7) при постоянной относительной скорости движения зарядов ($\mathbf{w} = \mathbf{0}$).[5]) Вебер показал, что сила (1.9) может быть получена из потенциала ([29], S. 229-230)

$$U^{\mathrm{W}} = \frac{e}{R}(1 - [R]^2), \tag{1.10}$$

где $[R]$ обозначает производную dR/dt, зависящую как от *R*, так и от времени *t* (в этой формуле *R* Вебера следует заменить на наше *r*).

Ещё один вариант закона взаимодействия зарядов был предложен Риманом, который в 1858 «установил, что электродинамические действия гальванических токов могут быть объяснены, если исходить из допущения, что действие электрической массы на другие совершается не мгновенно, а распространяется по направлению к ним с постоянной скоростью (в пределах возможных ошибок наблюдений равной скорости света). При этом допущении дифференциальное уравнение распространения электрической силы – то же самое, что и уравнение распространения света и лучистой теплоты» ([36], S. 237; [37], с. 443). Риман показал, что установленный из наблюдений потенциал взаимодействия двух элементов тока

$$U = \frac{ee'r^2}{C^2} \frac{dd'\left[\dfrac{1}{r}\right]}{dt^2}, \tag{1.11}$$

может быть получен как решение уравнения

---

[4]) Электродинамические исследования Вебера наиболее полно описаны Рейфом и Зоммерфельдом, [25], и Уиттекером, [11], [12], а в новейшее время в работах Ассиса, [26]-[27]. См. также [14]; [15], с. 140-159; [28].

[5]) Здесь мы не рассматриваем различные возражения (в основном Гельмгольца, [31], и Максвелла, [33], ch. XXIII; [35], гл. XXIII) против закона Вебера, связанные с сохранением энергии. В конце концов эти возражения оказались ошибочными.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \alpha^2(\Delta U - 4\pi\rho) = 0\,, \tag{1.12}$$

где $C = c\sqrt{2}$ – константа Вебера-Кольрауша, $\rho = \rho(x,y,z)$ – плотность электрических масс, $\alpha^2 = C^2 / 2 = c^2$,

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\,,\ \frac{d'}{dt} = \frac{ds'}{dt}\frac{d}{ds'}\,, \tag{1.13}$$

$$ds = ds_1 = |\,\delta\mathbf{R}_1\,| = \sqrt{\delta X_1^2 + \delta Y_1^2 + \delta Z_1^2} = \sqrt{\mathbf{V}_1^2}dt\,,$$
$$ds' = ds_2 = |\,\delta\mathbf{R}_2\,| = \sqrt{\delta X_2^2 + \delta Y_2^2 + \delta Z_2^2} = \sqrt{\mathbf{V}_2^2}dt\,. \tag{1.14}$$

Выражая функцию (1.11), через векторы $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ и их производные по времени, получим

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{R}} &= \frac{ee'r^2}{C^2}\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\frac{ds'}{dt}\left[\frac{d}{ds'}\frac{1}{r}\right] = -\frac{ee'r^2}{C^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r^3}\right] = \\ &= \frac{ee'}{C^2r^3}\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2 - r^2\mathbf{v}^2 - r^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w})\right] = -\frac{ee'}{C^2r^3}\left[3[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]^2 - 2r^2\mathbf{v}^2 + r^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w})\right]. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Как видно, эта функция зависит не только от относительного радиус-вектора $\mathbf{r}$, но и от относительной скорости $\mathbf{v}$ и относительного ускорения $\mathbf{w}$. Поэтому сила, действующая на второй элемент со стороны первого, будет определяться уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21}^{\mathrm{R}} &= -\frac{\partial U^{\mathrm{R}}}{\partial\mathbf{R}_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{\mathrm{R}}}{\partial\mathbf{V}_2} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial U^{\mathrm{R}}}{\partial\mathbf{W}_2} = \frac{2ee'}{C^2r^5}\ \ 2\mathbf{r}^2\mathbf{v}^2 - 3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2 + 2\mathbf{r}^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w})\ \ \mathbf{r} = \\ &= \frac{e_1e_2}{r^3}\left\{-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2} + \frac{3[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]^2}{c^2r^2} + \frac{2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w})}{c^2}\right\}\mathbf{r}\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Для получения действия двух элементов тока Риман суммирует силу (1.16) по всем электрическим массам $e = e_1$ и $e' = e_2$ обоих проводников с током.

Сравнение формулы Римана (1.16) с формулой Вебера (1.9) показывает их полное сходство с единственным отличием, что в формуле Римана не учтена кулоновская сила $\mathbf{F}_{21}^{\mathrm{C}} = \frac{e_1e_2}{r^3}\mathbf{r}$.[6]) Таким образом, закон Римана (1.16) представляет магнитную часть закона Вебера

$$\mathbf{F}_{21}^{\mathrm{W}} = \mathbf{F}_{21}^{\mathrm{C}} + \mathbf{F}_{21}^{\mathrm{R}}. \tag{1.17}$$

В курсе лекций по математической теории тяготения, электричества и магнетизма, которые Риман читал в Гёттингене в 1861, записанном Э. Шульце и опубликованном К. Хаттендорфом в 1876, [38], он предложил для электрокинетической энергии двух электрических частиц ε и ε', находящихся в точках с координатами $\mathbf{R} = (x,y,z)$, $\mathbf{R}' = (x',y',z')$, выражение

$$D = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2r}\left\{\left(\frac{\partial(x-x')}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y-y')}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z-z')}{\partial t}\right)^2\right\} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2r}\mathbf{v}^2\,, \tag{1.18}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}'$ ([38], S. 326, формула (II)),[7]) которое он вывел из предположения, что вся

[6]) Гаусс, Вебер и Риман, исходя из предположения Фехнера, считали, что две частицы электрических жидкостей противоположных знаков, движущихся в противоположных направлениях через точку 1, обе действуют на частицу, находящуюся в точке 2, что привело к удвоению силы.

[7]) У Уиттекера коэффициент перед фигурными скобками почему-то равен $-\frac{ee'}{2r}$ ([11], p. 231; [12], с. 248). По-видимому, это ошибка.

элементарная работа, возникающая из-за взаимодействия двух гальванических токов, является полным дифференциалом потенциала взаимодействия ([38], S. 315)

$$D_1 = -\iint \frac{dS \cdot dS'}{r} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') \,. \tag{1.19}$$

Соответствующий закон взаимодействия в векторной форме имеет вид ([38], S. 327, формулы (4)-(6))

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21}^{\mathrm{Riem}} &= e_1 e_2 \frac{d^2 \mathbf{f}_{21}^{\mathrm{Riem}}}{dt^2} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^3}\left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)\mathbf{r} + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2}\frac{d\left(\frac{2}{r}\mathbf{v}\right)}{dt} = \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^3}\left[\left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)\mathbf{r} - \frac{2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{c^2}\mathbf{v} + \frac{2\mathbf{r}^2}{c^2}\mathbf{w}\right] = \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^3}\left[\left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)\mathbf{r} + \frac{2[\mathbf{v}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]]}{c^2} + \frac{2\mathbf{r}^2}{c^2}\mathbf{w}\right] = -\mathbf{F}_{12}^{\mathrm{Riem}} \,. \end{aligned} \tag{1.20}$$

В отличие от закона (1.16), (1.17) сила (1.20) не коллинеарна радиус-вектору **r**.

В 1863-1864 Э. Бетти предложил теорию, [39]-[41], в которой (как пишет Максвелл) «предполагает, что замкнутые контуры, в которых текут электрические токи, состоят из элементов, каждый из которых поляризуется периодически, т. е. через эквидистантные промежутки времени. Эти поляризованные элементы действуют друг на друга так, как если бы они были маленькими магнитами, оси которых ориентированы в направлении, касательном к контурам. Период этой поляризации одинаков во всех электрических контурах. Бетти предполагает, что действие одного поляризованного элемента на другой, находящийся на некотором расстоянии, происходит не мгновенно, а через промежуток времени, пропорциональный расстоянию между элементами. Таким способом он получает выражения для действия одного электрического контура на другой, совпадающие с теми, которые нам известны как правильные. Однако Клаузиус и в этом случае также подверг критике некоторые части математических вычислений, но в это мы здесь вдаваться не будем» ([33], pp. 436-437; [35], с. 379).

Рудольф Клаузиус, подвергнув «критике некоторые части математических вычислений», также предположил зависимость электродинамических сил от состояния движения, но считал, что электрический ток обусловлен течением только одной электрической жидкости. С этим представлением закон Вебера оказался несовместим и поэтому в 1875 Клаузиус попытался вывести новый закон взаимодействия движущихся электрических частиц, [42]-[46]. В итоге потенциал взаимодействия электрических масс выглядит следующим образом ([44], S. 127; [45], p. 270; [46], S. 277)

$$U^{\mathrm{Claus}} = \frac{ee'}{r}[1 + k(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)] \,, \tag{1.21}$$

где $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ – абсолютные скорости, под которыми Клаузиус подразумевал скорости электрических частиц относительно неподвижной среды, в которой они движутся. Соответственно силы, действующие на частицы, в наших обозначениях равны

$$\mathbf{F}_{21}^{\mathrm{Claus}} = -\frac{\partial U^{\mathrm{Claus}}}{\partial \mathbf{R}_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{\mathrm{Claus}}}{\partial \mathbf{V}_2} = \frac{ee'}{r^3} k\left[\mathbf{W}_1 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{V}_1 + [k^{-1} + (\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2)]\mathbf{r}\right], \tag{1.22}$$

$$\mathbf{F}_{12}^{\mathrm{Claus}} = -\frac{\partial U^{\mathrm{Claus}}}{\partial \mathbf{R}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{\mathrm{Claus}}}{\partial \mathbf{V}_1} = \frac{ee'}{r} k\left[\mathbf{W}_2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{V}_2 - [k^{-1} + (\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2)]\mathbf{r}\right] \neq -\mathbf{F}_{21}^{\mathrm{Claus}} \,. \tag{1.23}$$

Законы взаимодействия между элементами тока или движущимися зарядами, представленные выше, были проанализированы Максвеллом в XXIII главе своего «Трактата об электричестве и магнетизме», [32]-[33], [34]-[35]. По выражению Л. Больцмана «бесплодные дебаты о различных элементарных законах электродинамики»,[8]) были преодолены теорией Максвелла, который описанию взаимодействия электрических корпускул (т. е. теории дальнодействия) предпочёл гидродинамическую аналогию электромагнитного поля, силовые линии которого представлялись трубками тока идеальной несжимаемой эфирной жидкости, скорость и направление движения которой определяют силы, действующие на частицы. В частности, магнитную индукцию **B** можно представить, как скорость этой жидкости.

Ещё одна формула была получена в 1910 Эдмундом Уиттекером, который отметил, что «недостаток работы Ампера заключается в допущении о том, что сила направлена вдоль линии, соединяющей два элемента, поскольку в аналогичном случае взаимодействия двух магнитных молекул мы знаем, что сила не направлена вдоль линии, соединяющей молекулы. Следовательно, интересно найти форму **F** при отсутствии этого ограничения» ([11], p. 91; [12], с. 112-113). В результате в наших обозначениях формула Уиттекера принимает вид

$$d^2\mathbf{f}_{21}^{\mathrm{Whit}} = \frac{1}{r^3}\Big[(\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{R}_2)\delta\mathbf{R}_1 + (\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{R}_1)\delta\mathbf{R}_2 - (\delta\mathbf{R}_1\cdot\delta\mathbf{R}_2)\mathbf{r}\Big], \tag{1.24}$$

приводящий к закону Био-Савара-Лапласа и закону Ампера для пондеромоторной силы, действующей на элемент тока, помещённый в магнитное поле.

В 1888 Хевисайд заметил, что практически применяется не закон силы между двумя элементами тока (имея в виду закон Ампера (1.5)), считающийся основной формулой электродинамики, а закон, «выражающий механическую силу, которая действует на элемент проводника, несущего ток в любом магнитном поле – векторное произведение тока и электромагнитной индукции» ([71], p. 502; [11], p. 88; [12], с. 115). Если в макроскопической электродинамике, каковой является теория Максвелла, *фундаментальный закон электрического действия* действительно не имеет особого значения в силу статистического характера этой теории, то правильная формулировка его совершенно необходима при рассмотрении взаимодействия элементарных частиц. Выбор между различными формулами, приведенными выше, не может быть решён посредством макроскопических экспериментов. Заметим в связи с этим, что законы Ампера (1.5), Гаусса-Грассмана-Неймана (1.6) и Уиттекера (1.24) представляют законы взаимодействия элементов токов, текущих в покоящихся друг относительно друга проводниках, тогда как законы Гаусса (1.7), Вебера (1.9), Римана (1.16), (1.20) и Клаузиуса (1.22)-(1.23) являются законами взаимодействия движущихся электрических частиц. Соответственно получаем отдельно проблему получения правильного закона взаимодействия элементов токов и проблему получения правильного закона взаимодействия движущихся заряженных частиц. Теория, развитая в [1]-[8], предоставляет возможность вывода этих законов. Ниже будет дан вывод первого закона.

2. Взаимодействие токов и зарядов как проблема двух тел

Рассмотрим взаимодействие двух элементарных объектов, обладающих спинами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, которые будем называть частицами. Пусть $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ – координаты центров масс частиц в абсолютной системе отсчёта, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ – соответствующие скорости, $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ – ускорения,

[8]) [47], S. 99; [48], с. 91. Исследования фундаментального закона электрического дальнодействия продолжались в работах физиков в основном немецкой школы: Вильгельма Готтлиба Ханкеля (Лейпциг, [49]-[51]), Германа фон Гельмгольца (Гейдельберг, [31], [52], [53]), его ученика Исидора Фрёлиха (Будапешт, [54]), Эрика Эдлунда (Стокгольм, [55]-[56]), Карла Неймана (Лейпциг, [57]-[60]), Питера Гутри Тэта (Эдинбург, [61]), Йохана Карла Фридриха Цолльнера (Лейпциг, [62], [63],), Альбрехта Лудольфа Германа Лорберга (Страсбург, [64]-[66]), Эдуарда Рикке (Гёттинген, [67]), Эмиля Арнольда Будде (Берлин, [68], [69]), Дидерика Иоханнеса Кортевега (Бреда, [70]). Физики британской школы отказались от теории дальнодействия и стали развивать теорию Максвелла.

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ – координаты, скорости и ускорения центров масс частиц относительно центра масс системы. Общие уравнения движения для системы двух частиц, находящихся во внешнем поле, согласно [5] имеют вид

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{dt} = \mathbf{F}_1\,,\ \frac{d\mathbf{P}_2}{dt} = \mathbf{F}_2\,, \tag{2.1}$$

где

$$\mathbf{P}_1 = m_1\mathbf{V}_1 = m_{01}\mathbf{V}_1 - \frac{\partial(U_1^{\mathrm{ext}} + U^{\mathrm{int}})}{\partial\mathbf{V}_1} + [(\varsigma_1\mathbf{s}_1 + \mathbf{S}_1^{\mathrm{ext}} + \mathbf{S}_{12}^{\mathrm{int}})\times\mathbf{W}_1], \tag{2.2}$$

$$\mathbf{P}_2 = m_2\mathbf{V}_2 = m_{02}\mathbf{V}_2 - \frac{\partial(U_2^{\mathrm{ext}} + U^{\mathrm{int}})}{\partial\mathbf{V}_2} + [(\varsigma_2\mathbf{s}_2 + \mathbf{S}_2^{\mathrm{ext}} + \mathbf{S}_{21}^{\mathrm{int}})\times\mathbf{W}_2] \tag{2.3}$$

– динамические импульсы, m_{01} и m_{02} – голые массы частиц, не учитывающие взаимодействия и внутренней структуры, m_1 и m_2 – эффективные массы, определяемые из динамических импульсов,

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\partial(U_1^{\mathrm{ext}} + U^{\mathrm{int}})}{\partial\mathbf{R}_1} + [(-\varsigma_1\Omega_{01}^2\mathbf{s}_1 + \mathbf{C}_1^{\mathrm{ext}} + \mathbf{C}_{12}^{\mathrm{int}})\times\mathbf{V}_1], \tag{2.4}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\partial(U_2^{\mathrm{ext}} + U^{\mathrm{int}})}{\partial\mathbf{R}_2} + [(-\varsigma_2\Omega_{02}^2\mathbf{s}_2 + \mathbf{C}_2^{\mathrm{ext}} + \mathbf{C}_{21}^{\mathrm{int}})\times\mathbf{V}_2] \tag{2.5}$$

– силы, действующие на первую и вторую частицы, соответственно.

Потенциальные функции $U_1^{\mathrm{ext}} = U_1^{\mathrm{ext}}(t;\mathbf{R}_1,\mathbf{V}_1,\ldots)$, $U_2^{\mathrm{ext}} = U_2^{\mathrm{ext}}(t;\mathbf{R}_2,\mathbf{V}_2,\ldots)$ и псевдовекторы $\mathbf{S}_1^{\mathrm{ext}} = \mathbf{S}_1^{\mathrm{ext}}(t;\mathbf{R}_1,\mathbf{V}_1,\ldots)$, $\mathbf{S}_2^{\mathrm{ext}} = \mathbf{S}_2^{\mathrm{ext}}(t;\mathbf{R}_2,\mathbf{V}_2,\ldots)$, $\mathbf{C}_1^{\mathrm{ext}} = \mathbf{C}_1^{\mathrm{ext}}(t;\mathbf{R}_1,\mathbf{V}_1,\ldots)$, $\mathbf{C}_2^{\mathrm{ext}} = \mathbf{C}_2^{\mathrm{ext}}(t;\mathbf{R}_2,\mathbf{V}_2,\ldots)$ определяют взаимодействие частиц с внешними полями и объектами, тогда как взаимодействие между частицами определяется функцией $U^{\mathrm{int}} = U_0(\mathbf{r},\mathbf{v},\mathbf{w},\ldots) + u(\mathbf{v},\mathbf{w},\ldots)$ и псевдовекторами

$$\mathbf{S}_{12}^{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\varsigma_{12}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) - \varsigma_1\mathbf{s}_1 + \varsigma_{12}\frac{m_1m_2}{2m}[\mathbf{r}\times\mathbf{v}], \tag{2.6}$$

$$\mathbf{S}_{21}^{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\varsigma_{21}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) - \varsigma_2\mathbf{s}_2 + \varsigma_{21}\frac{m_1m_2}{2m}[\mathbf{r}\times\mathbf{v}], \tag{2.7}$$

$$\mathbf{C}_{12}^{\mathrm{int}} = -\Omega_0^2\mathbf{S}_{12}^{\mathrm{int}} = -\frac{1}{2}\varsigma_{12}\Omega_0^2(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) + \varsigma_1\Omega_{01}^2\mathbf{s}_1 - \varsigma_{12}\frac{m_1m_2\Omega_0^2}{2m}[\mathbf{r}\times\mathbf{v}], \tag{2.8}$$

$$\mathbf{C}_{21}^{\mathrm{int}} = -\Omega_0^2\mathbf{S}_{21}^{\mathrm{int}} = -\frac{1}{2}\varsigma_{21}\Omega_0^2(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) + \varsigma_2\Omega_{02}^2\mathbf{s}_2 - \varsigma_{21}\frac{m_1m_2\Omega_0^2}{2m}[\mathbf{r}\times\mathbf{v}], \tag{2.9}$$

где константы ς_1 и ς_2 связаны с поляризациями частиц, тогда как ς_{12} и ς_{21} относятся к системе частиц, Ω_{01}, Ω_{02} и Ω_0 – некоторые функции от относительных переменных, которые в случае свободных невзаимодействующих частиц являются постоянными частотами Zitterbewegung'а частиц, определяемыми из уравнений движения спинов

$$\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} = [\mathbf{\Omega}_1\times\mathbf{s}_1] + \mathbf{m}_1(t)\,,\ \mathbf{\Omega}_1 = \Omega_{10}\mathbf{N}_1\,, \tag{2.10}$$

$$\frac{d\mathbf{s}_2}{dt} = [\mathbf{\Omega}_2\times\mathbf{s}_2] + \mathbf{m}_2(t)\,,\ \mathbf{\Omega}_2 = \Omega_{20}\mathbf{N}_2\,, \tag{2.11}$$

$\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ – единичные векторы направлений, вдоль которых происходит Zitterbewegung частиц, $\mathbf{m}_1(t)$, $\mathbf{m}_2(t)$ – псевдовекторы, зависящие от внешних полей и определяющие поведение ориентации спинов. Постоянство спинов частиц по модулю означает $(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{s}_1) = 0$, $(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{s}_2) = 0$.

Переход к переменным центра масс и относительным координатам задаётся преобразованиями

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2}{m}, \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1; \tag{2.12}$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m}\mathbf{r}, \ \mathbf{R}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m}\mathbf{r}; \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{R}_1} = -\frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{R}_2} = -\frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{r}}, \ \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{V}_1} = -\frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{V}_2} = -\frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{v}}. \tag{2.14}$$

В переменных (2.12) уравнения (2.2)-(2.5) с учётом соотношений (2.6)-(2.9) принимают вид

$$\mathbf{P}_1 = m_1\mathbf{V}_1 = m_{01}\mathbf{V}_1 - \frac{\partial U_1^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{V}_1} + [\mathbf{S}_1^{\text{ext}} \times \mathbf{W}_1] + \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{2}\varsigma_{12}[\mathbf{s} \times \mathbf{W}_1], \tag{2.15}$$

$$\mathbf{P}_2 = m_2\mathbf{V}_2 = m_{02}\mathbf{V}_2 - \frac{\partial U_2^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{V}_2} + [\mathbf{S}_2^{\text{ext}} \times \mathbf{W}_2] - \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{2}\varsigma_{21}[\mathbf{s} \times \mathbf{W}_2]; \tag{2.16}$$

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\partial U_1^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{R}_1} + [\mathbf{C}_1^{\text{ext}} \times \mathbf{V}_1] + \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{2}\varsigma_{12}\Omega_0^2[\mathbf{s} \times \mathbf{V}_1], \tag{2.17}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\partial U_2^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{R}_2} + [\mathbf{C}_2^{\text{ext}} \times \mathbf{V}_2] - \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{2}\varsigma_{21}\Omega_0^2[\mathbf{s} \times \mathbf{V}_2], \tag{2.18}$$

где скорости $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ и ускорения $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ вычисляются из (2.13) с учётом возможной зависимости эффективных масс m_1, m_2 от времени,

$$\mathbf{s} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{l} \tag{2.19}$$

– полный момент импульса системы частиц относительно центра масс, фактически представляющий спин системы,

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = \frac{m_1 m_2}{m}[\mathbf{r} \times \mathbf{v}], \tag{2.20}$$

– полный орбитальный момент импульса системы частиц относительно центра масс,

$$\mathbf{l}_1 = m_1[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1], \ \mathbf{l}_2 = m_2[\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2] \tag{2.21}$$

– орбитальные моменты импульса частиц относительно центра масс,

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{s}_1, \ \mathbf{j}_2 = \mathbf{l}_2 + \mathbf{s}_2 \tag{2.22}$$

– полные моменты импульса частиц относительно центра масс.

В том случае, когда система частиц образует связанное состояние, она обладает спином (2.19), удовлетворяющим уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = [\mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{s}] + \mathbf{m}(t) = \Omega_0[\mathbf{N} \times \mathbf{s}] + \mathbf{m}(t), \tag{2.23}$$

где $\mathbf{N}$ – единичный вектор мгновенного направления, вдоль которого происходит Zitterbewegung системы. Псевдовектор $\mathbf{m}(t)$ согласно (2.10), (2.11), (2.19) и (2.23) должен удовлетворять соотношению

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + [(\mathbf{\Omega}_1 - \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{s}_1] + [(\mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{s}_2] + \frac{d\mathbf{l}}{dt} - [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{l}]. \tag{2.24}$$

Полагая, что псевдовекторы $\mathbf{m}_1(t)$, $\mathbf{m}_2(t)$, $\mathbf{m}(t)$ имеют подобную структуру в виде

$$\mathbf{m}_{1,2} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \mathbf{A}_{1,2}\,,\ \mathbf{m} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \mathbf{A}\,, \tag{2.25}$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}$ должны содержать только величины, относящиеся к первой частице, второй частице и к системе частиц, соответственно, и подставляя (2.25) в (2.24), получим

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + [\mathbf{\Omega}_1 \times \mathbf{s}_1] + [\mathbf{\Omega}_2 \times \mathbf{s}_2] - [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{s}], \tag{2.26}$$

т.е.

$$\mathbf{A}_1 = -[\mathbf{\Omega}_1 \times \mathbf{s}_1],\ \mathbf{A}_2 = -[\mathbf{\Omega}_2 \times \mathbf{s}_2],\ \mathbf{A} = -[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{s}]. \tag{2.27}$$

Тогда

$$\mathbf{m}_1 = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} - [\mathbf{\Omega}_1 \times \mathbf{s}_1],\ \mathbf{m}_2 = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} - [\mathbf{\Omega}_2 \times \mathbf{s}_2],\ \mathbf{m} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} - [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{s}], \tag{2.28}$$

и уравнения движения (2.10), (2.11) и (2.23) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt},\ \frac{d\mathbf{s}_2}{dt} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt},\ \frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt}, \tag{2.29}$$

откуда следует сохранение направления спинов друг относительно друга,

$$\frac{d\Delta\mathbf{s}}{dt} = \frac{d(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)}{dt} = 0\,, \tag{2.30}$$

и отсутствие прецессии, т.е. можно положить $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Omega}_2 = \mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, тогда как третье уравнение (2.29) является следствием первых двух.

Кроме (2.27) допустимо также представление $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}$ в виде

$$\mathbf{A}_1 = [(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_1) \times \mathbf{s}_1],\ \mathbf{A}_2 = [(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_2) \times \mathbf{s}_2],\ \mathbf{A} = -[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{l}]. \tag{2.31}$$

Тогда

$$\mathbf{m}_1 = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} + [(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_1) \times \mathbf{s}_1],\ \mathbf{m}_2 = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} + [(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_2) \times \mathbf{s}_2],\ \mathbf{m} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} - [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{l}], \tag{2.32}$$

и уравнения движения (2.10), (2.11) и (2.23) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{s}_1] - \frac{d\mathbf{l}}{dt},\ \frac{d\mathbf{s}_2}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{s}_2] - \frac{d\mathbf{l}}{dt}, \tag{2.33}$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{s}] - \frac{d\mathbf{l}}{dt} - [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{l}]. \tag{2.34}$$

Из (2.33) следует

$$\frac{d\Delta\mathbf{s}}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \Delta\mathbf{s}], \tag{2.35}$$

т.е. $\Delta\mathbf{s}$ прецессирует с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, так что $|\Delta\mathbf{s}| = \mathrm{const}$.

Если система частиц не образует связанное состояние, как это можно предполагать для рассеивающихся друг на друге свободных электронов или электронов, движущихся по разным проводникам под действием сторонних сил, то понятие спина системы теряет смысл. Кроме того, как видно из (2.15)-(2.18), спины частиц не входят в уравнение движения независимо от того, свободные они или нет. В соответствии с вышесказанным силы взаимодействия двух элементов тока, элемента тока и заряда и двух движущихся зарядов должны описываться различными формулами.

3. Взаимодействие двух элементов тока

В случае двух элементов тока для определения сил взаимодействия используем уравнения (2.17)-(2.18). Полагая, что электрический ток обусловлен упорядоченным движением электронов под действием сторонней напряжённости поля, следует допустить, что спины

$\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ электронов направлены антипараллельно их скоростям $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Заметим здесь, что эти скорости (а также ускорения $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_2$) являются скоростями (ускорениями) движения электронов по проводникам только в случае покоящихся друг относительно друга проводников. В случае движущихся проводников $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ состоят из скоростей электронов в проводниках, $\mathbf{v}_{e1} = \delta\mathbf{R}_1 / dt$, $\mathbf{v}_{e2} = \delta\mathbf{R}_2 / dt$, и скоростей элементов токов, $\mathbf{u}_1 = d\mathbf{x}_1 / dt$, $\mathbf{u}_2 = d\mathbf{x}_2 / dt$. Поэтому в общем случае следует положить

$$d\mathbf{R}_1 = \delta\mathbf{R}_1 + d\mathbf{x}_1,\ d\mathbf{R}_2 = \delta\mathbf{R}_2 + d\mathbf{x}_2, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{V}_1 = d\mathbf{R}_1 / dt = \mathbf{v}_{e1} + \mathbf{u}_1,\ \mathbf{V}_2 = d\mathbf{R}_2 / dt = \mathbf{v}_{e2} + \mathbf{u}_2, \tag{3.2}$$

где $d\mathbf{x}_1$ и $d\mathbf{x}_2$ – абсолютные перемещения элементов $\delta\mathbf{R}_1$ и $\delta\mathbf{R}_2$. Тогда условие коллинеарности (антипараллельности) спинов и элементов токов можно представить в виде

$$[\mathbf{v}_{e2}\times\mathbf{s}_1] = [\mathbf{s}_2\times\mathbf{v}_{e1}] = -[\mathbf{v}_{e1}\times\mathbf{s}_2],\ [\mathbf{v}_{e1}\times\mathbf{s}_1] = [\mathbf{v}_{e2}\times\mathbf{s}_2] = \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

Если элементы тока не находятся во внешнем поле, то следует положить $U_1^{\mathrm{ext}} = U_2^{\mathrm{ext}} = 0$, $\mathbf{S}_1^{\mathrm{ext}} = \mathbf{S}_2^{\mathrm{ext}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_1^{\mathrm{ext}} = \mathbf{C}_2^{\mathrm{ext}} = \mathbf{0}$. Тогда силы (2.17)-(2.18) с учётом (2.13), (2.19), (2.20) можно представить в виде суммы электрической и магнитной сил

$$\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{12}^e + \mathbf{F}_{12}^m,\ \mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{21}^e + \mathbf{F}_{21}^m, \tag{3.4}$$

где

$$\mathbf{F}_{21}^e = \mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_1 = -\mathbf{F}_{12}^e = -\frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial\mathbf{r}} \tag{3.5}$$

– электрическая сила (напряжённость электрического поля), действующая на второй заряд со стороны первого заряда,

$$\mathbf{F}_{12}^m = -\frac{1}{2}\varsigma_{12}\Omega_0^2[\mathbf{s}\times\mathbf{V}_1] = \frac{1}{2}\varsigma_{12}\Omega_0^2[\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\times\left(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \frac{m_e}{2}[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]\right)], \tag{3.6}$$

$$\mathbf{F}_{21}^m = -\frac{1}{2}\varsigma_{21}\Omega_0^2[\mathbf{s}\times\mathbf{V}_2] = \frac{1}{2}\varsigma_{21}\Omega_0^2[\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\times\left(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \frac{m_e}{2}[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]\right)] \tag{3.7}$$

– магнитные силы, действующие на первый и второй заряды, соответственно, $m_1 = m_2 = m_e$ – эффективная масса электрона в проводнике, определяемая из уравнений (2.15)-(2.16).

Сложение $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ с учётом (3.3) даёт

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \frac{1}{2}\Omega_0^2\big[(\varsigma_{12} - \varsigma_{21})[\mathbf{v}_{e1}\times\mathbf{s}_2] + \varsigma_{12}[\mathbf{u}_1\times\mathbf{s}_2] + \varsigma_{21}[\mathbf{u}_2\times\mathbf{s}_1]\big] + \\ + \frac{1}{4}m_e\Omega_0^2[(\varsigma_{12}\mathbf{V}_1 + \varsigma_{21}\mathbf{V}_2)\times[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]],\end{aligned} \tag{3.8}$$

откуда следует, что в случае проводников, покоящихся друг относительно друга, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, третий закон Ньютона, $\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}$, выполняется в системе центра масс при $\varsigma_{12} = \varsigma_{21} = \varsigma$. Тогда уравнения (2.15)-(2.16), сводятся к

$$m_e\mathbf{V} = m_{0e}\mathbf{V} + \frac{1}{2}\varsigma[\mathbf{s}\times\mathbf{W}], \tag{3.9}$$

$$m_e\mathbf{v} = m_{0e}\mathbf{v} - 2\frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\varsigma[\mathbf{s}\times\mathbf{w}], \tag{3.10}$$

и приводят к зависимости эффективной массы от состояния относительного движения электронов. Из (3.8) следует, что в абсолютной системе отсчёта полный орбитальный момент импульса **l** системы частиц относительно центра масс коллинеарен скорости движения центра масс **V**.

Выражения (3.6)-(3.7) представляют собой фактически обобщение закона Ампера, о котором говорил Хевисайд ([71], p. 502), определяющего пондеромоторную силу, действующую на элемент тока, помещённый в магнитное поле. В нашем случае сила, действующая на элемент $i_2\delta\mathbf{R}_2$ со стороны элемента $i_1\delta\mathbf{R}_1$, будет равна

$$d^2\mathbf{F}_{21}^m = i_1 i_2 d^2\mathbf{f}_{21}^m = i_2[\delta\mathbf{R}_2 \times d\mathbf{B}_1], \tag{3.11}$$

где $d\mathbf{B}_1$ обычно определяется по закону Био-Савара-Лапласа

$$d\mathbf{B}_1 = d\mathbf{B}_1^{\mathrm{BSL}} = \frac{i_1}{r^3}[\delta\mathbf{R}_1 \times \mathbf{r}] = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r^3}[\delta\mathbf{R}_1 \times \mathbf{r}], \tag{3.12}$$

если I_1 измеряется в Амперах. В данной статье $d\mathbf{B}_1$ можно определить из (3.7). Учитывая соотношения (2.12) и условие (3.3), из которых следует

$$\mathbf{V}_1 = \frac{d\mathbf{R}_1}{dt} = \mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{v},\ \mathbf{V}_2 = \frac{d\mathbf{R}_2}{dt} = \mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{v} = 2\mathbf{V} - \mathbf{V}_1, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{s}_1 = -\frac{s}{v_{e1}}\mathbf{v}_{e1} = -\frac{\hbar}{2v_{e1}}\mathbf{v}_{e1},\ \mathbf{s}_2 = -\frac{s}{v_{e2}}\mathbf{v}_{e2} = -\frac{\hbar}{2v_{e2}}\mathbf{v}_{e2}, \tag{3.14}$$

где $s = \hbar / 2$ – спин электрона, выражения (3.6)-(3.7) можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{12}^m = -\frac{1}{2}\varsigma\Omega_0^2[\mathbf{s} \times \mathbf{V}_1] = -\frac{1}{4}\varsigma\Omega_0^2 m_e[\frac{d\mathbf{R}_1}{dt} \times \left(\frac{\hbar}{m_e v_{e1}}\mathbf{v}_{e1} + \frac{\hbar}{m_e v_{e2}}\mathbf{v}_{e2} + [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]\right)], \tag{3.15}$$

$$\mathbf{F}_{21}^m = -\frac{1}{2}\varsigma\Omega_0^2[\mathbf{s} \times \mathbf{V}_2] = -\frac{1}{4}\varsigma\Omega_0^2 m_e[\frac{d\mathbf{R}_2}{dt} \times \left(\frac{\hbar}{m_e v_{e1}}\mathbf{v}_{e1} + \frac{\hbar}{m_e v_{e2}}\mathbf{v}_{e2} + [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]\right)], \tag{3.16}$$

или

$$d^2\mathbf{F}_{12}^m = [d\mathbf{R}_1 \times \left(-\frac{\varsigma\Omega_0^2\hbar}{4v_{e2}}\delta\mathbf{R}_2 - \frac{1}{4}\varsigma\Omega_0^2 m_e[d\mathbf{R}_2 \times \mathbf{r}] + \frac{1}{4}\varsigma\Omega_0^2 m_e[d\mathbf{R}_1 \times \mathbf{r}] + \frac{\varsigma\Omega_0^2\hbar}{4v_{e1}}d\mathbf{x}_1\right)], \tag{3.17}$$

$$d^2\mathbf{F}_{21}^m = [d\mathbf{R}_2 \times \left(-\frac{\varsigma\Omega_0^2\hbar}{4v_{e1}}\delta\mathbf{R}_1 + \frac{1}{4}\varsigma\Omega_0^2 m_e[d\mathbf{R}_1 \times \mathbf{r}] - \frac{1}{4}\varsigma\Omega_0^2 m_e[d\mathbf{R}_2 \times \mathbf{r}] + \frac{\varsigma\Omega_0^2\hbar}{4v_{e2}}d\mathbf{x}_2\right)]. \tag{3.18}$$

Магнитное поле в точке, где находится движущийся элемент $i_2\delta\mathbf{R}_2$, определяется выражением

$$\begin{aligned} d\mathbf{B}_1 &= \frac{\varsigma\Omega_0^2 m_e}{4i_2}\left(-\frac{\hbar}{m_e v_{e1}}\delta\mathbf{R}_1 - [d\mathbf{r} \times \mathbf{r}] + \frac{\hbar}{m_e v_{e2}}d\mathbf{x}_2\right) = \\ &= \frac{\varsigma\Omega_0^2 m_e}{2i_2}\left([d\mathbf{R}_1 \times \mathbf{r}] - \frac{\hbar}{2m_e v_{e1}}\delta\mathbf{R}_1 + \frac{\hbar}{2m_e v_{e2}}d\mathbf{x}_2 - [d\mathbf{R} \times \mathbf{r}]\right), \end{aligned} \tag{3.19}$$

которое состоит из четырёх частей. Первая из них представляет закон Био-Савара-Лапласа

$$d\mathbf{B}_1^{\mathrm{BSL}} = \frac{\varsigma m_e \Omega_0^2}{2i_2}[d\mathbf{R}_1 \times \mathbf{r}], \tag{3.20}$$

который соответствует закону взаимодействия Гаусса-Грассмана-Неймана (1.6). Сравнивая (3.20) с (3.12) и учитывая, что для покоящегося проводника $d\mathbf{R}_1 = \delta\mathbf{R}_1$, получим, что Ω_0 должно зависеть от *r* по закону

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{2i_1 i_2}{\varsigma m_e}}r^{-3/2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sqrt{\frac{2I_1 I_2}{\varsigma m_e}}r^{-3/2}, \tag{3.21}$$

где знак постоянной ς совпадает со знаком произведения интенсивностей токов $i_1 i_2$ когда токи коллинеарны.

Вторая часть (3.19) является магнитной индукцией вращающегося электрона первого элемента тока,

$$d\mathbf{B}_1^{\mathbf{s}_1} = -\frac{\varsigma\Omega_0^2\hbar}{4i_2 v_{e1}}\delta\mathbf{R}_1 = -\frac{\hbar i_1}{2m_e v_{e1} r^3}\delta\mathbf{R}_1 = \frac{\varsigma\Omega_0^2}{2i_2}\mathbf{s}_1 dt = \frac{i_1}{m_e r^3}\mathbf{s}_1 dt\,. \tag{3.22}$$

Полагая, что ток первого элемента создаётся одним электроном, т. е. $i_1 dt = e$, из (3.22) находим магнитное поле вращающегося электрона [9])

$$\mathbf{B}^{\mathbf{s}} = \frac{e}{m_e r^3}\mathbf{s}\,. \tag{3.23}$$

Третье слагаемое в (3.19) определяется смещением $d\mathbf{x}_2$ второго элемента тока $\delta\mathbf{R}_2$

$$d\mathbf{B}_1^{\mathbf{s}_2} = \frac{\varsigma\Omega_0^2\hbar}{4i_2 v_{e2}}d\mathbf{x}_2 = \frac{i_1\hbar}{2m_e v_{e2} r^3}d\mathbf{x}_2\,. \tag{3.24}$$

Наконец, четвёртый вклад,

$$d\mathbf{B}_1^{\mathbf{R}} = \frac{\varsigma\Omega_0^2 m_e}{2i_2}[d\mathbf{R}\times\mathbf{r}] = \frac{i_1}{r^3}[d\mathbf{R}\times\mathbf{r}], \tag{3.25}$$

обусловлен абсолютным движением центра масс элементов $i_1\delta\mathbf{R}_1$ и $i_2\delta\mathbf{R}_2$, которые всегда принадлежат токам, текущим по замкнутым проводникам L_1 и L_2, соответственно.

Очевидно, действие первого элемента на второй определяется только первыми двумя слагаемыми, (3.20) и (3.22), тогда как слагаемые (3.24) и (3.25) связаны только со вторым элементом. Поэтому, если говорить о магнитном поле, создаваемом первым током в некоторой точке, то следует проинтегрировать по контуру L_1 выражение (3.19) без двух последних слагаемых, т. е.

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\varsigma m_e}{2i_2}\oint_{L_1}\Omega_0^2\left([d\mathbf{R}_1\times\mathbf{r}] - \frac{\hbar}{2m_e v_{e1}}\delta\mathbf{R}_1\right). \tag{3.26}$$

Рассмотрим примеры с длинными прямыми проводниками. В случае параллельных покоящихся друг относительно друга проводников спиновая часть магнитного поля не влияет на силу взаимодействия элементов токов, так как в формулах (3.17)-(3.18) первое слагаемое в круглых скобках вклада не даёт и для магнитной индукции получаем закон Био-Савара-Лапласа (3.20) с условием (3.21). Если проводники перпендикулярны, то к обычным магнитным силам, определяемым законом (3.20), прибавляются спиновые силы, определяемые добавкой (3.22) и дополнительно добавками (3.24) и (3.25), если проводники движутся. Если соотношения (3.17)-(3.18) верны, то влияние этих спиновых сил может быть обнаружено с помощью простых, но прецизионных экспериментов. В связи с этим обратим внимание на эффект Грано, который можно объяснить действием продольной силы Ампера, [72].

Проблемой остаётся зависимость $\Omega_0(r)$, полученная не с помощью независимого вывода, а посредством только сравнения (3.20) с (3.12). Кроме того, учёт запаздывания, связанного с конечной скоростью распространения взаимодействия, должен привести к зависимости Ω_0 также от относительной скорости и к соответствующей модификации закона (3.12).

---

[9]) В системе СИ, где $I_1 dt = e$, это выражение следует умножить на $\mu_0 / 4\pi$.

Литература

[1] **Tarakanov A.N.** Generalized Dynamics of the Mass Point with Internal Degrees of Freedom. // http://www.arXiv.org/hep-th/1010.4645v1 . – 9 pp.

[2] **Tarakanov A.N.** On the Dynamics of the Mass Point with Internal Degrees of Freedom. // Foundations & Advances in Nonlinear Science. Proceedings of the 15th International Conference-School, September 20-23, 2010, Minsk, Belarus. – Minsk: Publishing Center of BSU, 2010. – P. 123-132.

[3] **Tarakanov A.N.** Zitterbewegung as purely classical phenomenon. // http://www.arXiv.org/physics.class-ph/1201.4965v3 . – 15 pp.

[4] **Tarakanov A.N.** Nonrelativistic Dynamics of the Point with Internal Degrees of Freedom and Spinning Electron. // J. Theor. Phys., 2012, **1**, № 2, 76-98; http://www.arXiv.org/physics.gen-ph/1301.1636v1 . – 9 pp.

[5] **Tarakanov A.N.** Dynamical relations in the system of two objects with internal degrees of freedom. // J. Theor. Phys., 2012, **1**, № 3, 201-220. – http://www.arXiv.org/physics.class-ph/1305.1356v1 . – 20 pp.

[6] **Tarakanov A.N.** On the Possible Trajectories of Spinning Particles. I. Free Particles. // arxiv:1511.03515v2 [physics.class-ph]. – 16 pp.

[7] **Tarakanov A.N.** On the Possible Trajectories of Spinning Particles. II. Particles in the Stationary Homogeneous Magnetic Field. // arxiv:1601.01674 [physics.class-ph]. – 12 pp.

[8] **Tarakanov A.N.** On the Possible Trajectories of Spinning Particles. III. Particles in the Stationary Homogeneous Electric Field. // arXiv:1703.09760v1 [physics.class-ph]. – 23 pp.

[9] **Ampère A.-M.** Note Sur un Mémoire lu à l'Académie royale des Sciences, dans la séance du 4 décembre 1820. // J. de phys., de chim. et d'hist. natur., 1820, **XCI**, 226-230.

[10] **Ampère A.-M.** Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience. – Paris: A. Hermann, 1826. – 164 pp.; **Ampère A.-M.** Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 21 novembre 1825. // Mém. Acad. Roy. Sci., Paris, Sci. Math. et Phys., 1827, **6**, 175-387. – (Перевод: **Ампер А.-М.** Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта. // В кн.: **Ампер А.-М.** Электродинамика. – Л.: Изд. АН СССР, 1954. – 492 с. – с. 9-220).

[11] **Whittaker E.T.** A History of the Theories of Aether and Electricity. The Classical Theories. – London-Edinburgh-Paris-Melbourne-Toronto-New York: Thomas Nelson and Sons, Ltd., 1951. – XIV, 434 pp.

[12] **Уиттекер Э.** История теорий эфира и электричества. Классические теории. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 512 с.

[13] **Gauss C.F.** Zur mathematischen Theorie der elektrodynamischen Wirkungen. // In: **Gauss C.F.** Werke. Bd. 5. – Göttingen: Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1867. – S. 601-630; **Schering.** Bemerkungen. // Ibid., S. 637-640.

[14] **Roseveare N.T.** Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein. – Oxford: Clarendon Press, 1982. – VIII, 208 pp.

[15] **Роузвер Н.Т.** Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна. – М.: Мир, 1985. – 246 с.

[16] **Bertrand J.** Leçons sur la theorie mathématique de l'électricité. – Paris: Gauthier-Villars, 1890. – xiii+296 pp.

[17] **Tisserand F.** Traité de Mécanique céleste. Tome IV. – Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1896. – XII, 548 pp.

[18] **Grassmann H.** Neue Theorie der Elektrodynamik. // Ann. d. Physik u. Chemie, 1845, **64**, H. 1, 1-18 (reprinted in: **Marinov S.** The Thorny Way of Truth. Part VIII. – Graz: East-West, 1990. – P. 40-58).

[19] **Neumann F.E.** Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. // Abh. Kön. Akad.

Wiss. Berlin, Phys. Kl., 1845, 1-88. – (Перепечатано в: Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 10. – Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1889. – 96 S.; J. math. pures et appl., 1848, **13**, Avril, 113-178).

[20] **Assis A.K.T., Bueno M.A.** Equivalence Between Ampère and Grassmann's Forces. // IEEE Trans. Magn., 1996, **32**, no. 2, 431-436.

[21] **Bueno M., Assis A.K.T.** Proof of the Identity Between Ampère and Grassmann's Forces. // Physica Scripta, 1997, **56**, no. 6, 554-559.

[22] **Assis A.K.T., Chaib J.P.M.C., Ampère A.-M.** Ampère's electrodynamics: Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of his Masterpiece: Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Deduced from Experience. – Montreal: Apeiron, 2015. – 544 pp.

[23] **Fechner G.Th.** Ueber die Verknüpfung der Faraday'schen Inductions-Erscheinungen mit den Ampère'schen elektro-dynamischen Erscheinungen. // Ann. d. Phys. u. Chem., 3 F., 1845, **64**, H. 3, 337-345.

[24] **Weber W.** Elektrodynamische Maassbestimmungen. Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. // Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier Leibnizen's herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. – Leipzig: 1846, S. 209-378; **Wilhelm Weber's** Werke. Bd. 3. Th. 1. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1893. – S. 25-214; English translation by Susan P. Johnson: http://www.ifi.unicamp.br/~assis/).

[25] **Reiff R., Sommerfeld A.** Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze. (Abgeschlossen im Dezember 1902). // In: Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Fünfter Band in drei Teilen. Physik. Zweiter Teil. – Leipzig: Verlag und Druck von B. G. Teubner, 1904-1922. – S. 3-62.

[26] **Assis A.K.T.** Weber's electrodynamics. (Fundamental theories of physics, Vol. 66). – Dordrecht: Springer-Science+Business Media, B. V., 1994. – XIV, 274 pp.

[27] **Assis A.K.T., Hernandes J.A.** The Electric Force of a Current. Weber and the surface charges of resistive conductors carrying steady currents. – Montreal: Apeiron, 2007. – VIII, 239 pp.

[28] **Бернштейн В.М.** Перспективы «возрождения» и развития электродинамики и теории гравитации Вебера. – М.: КомКнига, 2005. – 72 с.

[29] **Weber W.** Elektrodynamische Maassbestimmungen. // Poggendorf's Ann., 1848, **LXXIII**, H. 2, S. 193-240; Wilhelm Weber's Werke. Bd. 3. Th. 1. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1893. – S. 215-254.

[30] **Розенбергер Ф.** История физики. Часть третья. История физики за последнее (XIX) столетие. Выпуск II. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 448 с.

[31] **Helmholtz H.** Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. // J. f. die r. u. angew. Math., 1870, **LXXII**, H. 1, 57-96; H. 2, 97-129.

[32] **Maxwell J.C.** A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. I. – London: MacMillan and Co.; Oxford: At the Clarendon Press, 1873. – XXIX, 425 pp.

[33] **Maxwell J.C.** A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. II. – London: MacMillan and Co.; Oxford: At the Clarendon Press, 1873. – XXIII, 444 pp.

[34] **Максвелл Дж.К.** Трактат об электричестве и магнетизме. В двух тт. Т. I. – М.: Наука, 1989. – 415 с.

[35] **Максвелл Дж.К.** Трактат об электричестве и магнетизме. В двух тт. Т. II. – М.: Наука, 1989. – 436 с.

[36] **Riemann B.** Ein Beitrag zur Elektrodynamik. // Ann. d. Physik u. Chem., 1867, **11**, H. 6, 237-243; In: Riemann B. Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. – Leipzig: B. G. Teubner, 1876. – S. 270-275; 1892 – S. 288-293.

[37] **Риман Б.** По поводу электродинамики. // В кн: **Риман Б.** Сочинения. – М.-Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. – С. 443-448, 540-541.

[38] **Riemann B.** Schwere, Elektricität und Magnetismus. Bearbeitet von Karl Hattendorff. –

Hannover: Carl Rümpler, 1876. – X, 358 S.
[39] **Betti E.** Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton, e sua applicazione alla elettricita statica. // Nuovo Cim., 1863, **18**, no. 1, 385-402; 1864, **19**, no. 1, 59-75, 77-95, 149-175, 357-377, **20**, no. 1, 19-39, 121-141.
[40] **Betti E.** Sopra la elettrodinamica. // Nuovo Cim., 1868, **27**, no. 1, 402-407.
[41] **Betti E.** Teorica delle forze Newtoniane e sua applicazione all'elettrostatica e al magnetismo. – Pisa: Tipografia T. Nistri, 1879. – VIII, 359 pp.
[42] **Clausius R.** Ueber ein neues Grundgesetz der Electrodynamik. // Sitz. der Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn, 1875, **32**, December 6th, 306-309; In: Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens, 1875, **32**.
[43] **Clausius R.** On a new Fundamental Law of Electrodynamics. // Phil. Mag., 1876, **1**, no. 1, 69-71.
[44] **Clausius R.** Ueber die Ableitung eines neuen elektrodynamischen Grundgesetzes. // J. für die reine und angew. Math., 1877, **82**, H. 2, 85-130.
[45] **Clausius R.** On the Employment of the Electrodynamic Potential for the Determination of the Ponderomotive and Electromotive Forces. // Phil. Mag., 1880, **10**, no. 62, 255-279.
[46] **Clausius R.** Die mechanische Behandlung der Electricität. – Braunschweig: Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1879. – XII, 352 S.
[47] **Maxwell J.C.** Ueber Faraday's Kraftlinien. Hrsg. Von L. Boltzmann. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 69). – Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1895. – 130 S.
[48] Из примечаний Л. Больцмана к работе Максвелла «О фарадеевых силовых линиях». // В кн: **Максвелл Дж.К.** Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. – М.: ГИТТЛ, 1952. – С. 89-104.
[49] **Hankel W.G.** Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte, erster Theil. // Abh. der math.-phys. Cl. der Kön. Sächs. Ges. der Wiss., 1864, **6 (Abh. 9)**, 1-52.
[50] **Hankel W.G.** Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte, zweiter Theil. // Abh. der math.-phys. Cl. der Kön. Sächs. Ges. der Wiss., 1865, **7 (Abh. 11)**, 585-693.
[51] **Hankel W.** Neue Theorie der elektrischen Erscheinungen. // Poggendorf's Ann., 1865, **6**, H. 11, 440-466; 1867, **11**, H. 8, 607-621.
[52] **Helmholtz H.** Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte. // Monatsber. Kön. Preuss. Akad. Wiss. zu Berlin, Sitz. phys.-math. Kl., 1873, 6 Februar, 91-107. «Гельмгольц допускает, что взаимодействие двух элементов тока можно получить из потенциала, что влечёт существование пары сил дополнительно к силе, действующей вдоль линии, соединяющей элементы» ([11], p. 87; [12], с. 114).
[53] **Helmholtz H.** Kritisches zur Elektrodynamik. // Ann. d. Phys. u. Chem., 1874, **3**, H. 4, 545-556.
[54] **Fröhlich J.** Bemerkungen zu den electrodynamischen Grundgesetzen von Clausius, Riemann und Weber. // Ann. d. Phys. u. Chem., 1880, **9**, H. 2, 261-286; Berichtigungen. // ibid., H. 4, 680.
[55] **Edlund M.E.** On the Nature of Electricity. // Phil. Mag., 1872, **44**, no. 291, 81-100; no. 292, 174-188.
[56] **Edlund E.** Théorie des phénomènes électriques. – Stockholm: P. A. Norstedt & Söner, 1873. – 73 S.
[57] **Neumann C.** Ueber die Elementargesetze der Kräfte electrodynamischen Ursprungs. (In etwas veränderter Form abgedruckt aus dem Ber. der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss., 1872). // Math. Ann., 1872, **5**, 602-624.

[58] **Neumann C.** Notiz zu dem Aufsatz: Ueber die Elementargesetze der Kräfte electrodynamischen Ursprungs, Bd. 5, Seite 602. // Math. Ann., 1873, **6**, 350.

[59] **Neumann C.** Die elektrischen Kräfte. Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff entwickelten mathematischen Theorien. Erster Theil. Die durch die Arbeiten von A. Ampère und F. Neumann angebahnte Richtung. – Leipzig: Druck und Verlag von B.G.Teubner, 1873. – XV, 272 S.

[60] **Neumann C.** Allgemeine Betrachtungen über das Weber'sche Gesetz. (Auszug aus den Abhandl. der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch., 1874, pag. 79). // Math. Ann., 1875, **8**, 555-566.

[61] **Tait P.G.** Note on the Various Possible Expressions for the Force exerted by an Element of one Linear Conductor on an Element of another. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1873, **8**, no. 87, 220-228.

[62] **Zöllner F.** Beitrage zur Elektrodynamik. // Ann. d. Phys. u. Chem., 1875, **4**, H. 3, 321-335.

[63] **Zöllner J.K.F.** Principien einer elektrodynamischen Theorie der Materie. – Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1876. – CXXVIII, 444 S.

[64] **Lorberg H.** Ueber Magnetinduction und über einige Folgerungen aus dem Clausius'schen Grundgesetz der Electrodynamik. // Ann. d. Phys. u. Chem., 1878, **Ergänzungsband VIII**, St. 4, 581-598.

[65] **Lorberg H.** Ueber das Grundgesetz der Electrodynamik. // Ann. d. Phys. u. Chem., 1878, **Ergänzungsband VIII**, St. 4, 599-607.

[66] **Lorberg H.** Ueber das elektrodynamische Grundgesetz. // J. für die reine und angew. Math., 1878, **84**, H. 1, 305-331.

[67] **Riecke E.** Ueber die electrischen Elementargesetze. // Ann. d. Phys. u. Chem., 1880, **11**, H. 10, 278-315.

[68] **Budde E.** Das Clausius'sche Gesetz und die Bewegung der Erde im Raume. // Ann. d. Phys. u. Chem., 1880, **10**, H. 8, 553-560.

[69] **Budde E.** Mittel zur praktischen Entscheidung zwischen den elektrodynamischen Punktgesetzen von Weber, Riemann und Clausius. // Ann. d. Physik u. Chem., 1887, **30**, H. 8, 100-156.

[70] **Korteweg D.J.** Ueber das ponderomotorische Elementargesetz. // J. für die reine und angew. Math., 1881, **90**, H. 1, 49-70.

[71] **Heaviside O.** The Mutual Action of a Pair of Rational Current-Elements. // The Electrician, 1888, **24**, № 2 (Dec. 28), 229-231; Electrical Papers. Vol. II. – New York-London: Macmillan and Co., 1894. – P. 500-502.

[72] **Graneau P.** First indication of Ampère tension in solid electric conductors. // Physics Letters, 1983, **A97**, no. 6, 253-255.