Dzielenie przez zero.

LESZEK MAZUREK

https://www.linkedin.com/in/leszekmazurek/

Spis treści

Naturalną formą liczby jest jej wartość względem pewnej miary.

Leszek Mazurek

Najgorsze w skutkach, są błędy w założeniach.

Leszek Mazurek

1. Wstęp.

Od niepamiętnych czasów zakaz dzielenia przez zero stanowił poważny problem dla wszystkich ludzi myślących, którym ciężko było zaakceptować to ograniczenie. Tym bardziej, że intuicyjnie wydaje się ono bardzo sztuczne i nieuzasadnione. W niniejszej pracy podjąłem wyzwanie, aby bardzo uważnie przeanalizować ten problem i postarać się zrozumieć z czego on wynika, dlaczego stanowi taką trudność i ograniczenie oraz co należy zrobić, aby go rozwiązać. Otrzymane rezultaty nie tylko rozwiązują ten problem, ale również rzucają całkiem nowe światło, na rozumienie liczb, operacje na liczbach i prawdopodobnie będą miały szereg konsekwencji w innych obszarach algebry, matematyki i powiązanych z nią dziedzin jak fizyka, chemia czy astronomia. Zadziwiające jest, że problem ten pozostawał bez należytego zrozumienia przez tak długi czas.

2. Rozumienie mnożenia i dzielenia liczb.

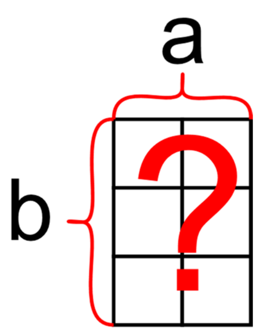
Aby poprawnie zrozumieć dzielenie liczb, a w szczególności dzielenie przez zero, musimy rozpocząć od zrozumienia samego mnożenia. W ogólnej postaci mnożenie możemy przedstawić jako:

$$a \cdot b = c \tag{1}$$

Wykonując działanie mnożenia rozwiązujemy problem polegający na tym, że mamy dane **a** i **b**, szukamy takiego **c**, które równe jest **a**-krotności **b** (a-krotnej sumie b). Działanie to możemy zobrazować tak:

$$a \cdot b = ? \tag{2}$$

Lub w postaci graficznej tak:



Rys. 1. Problem rozwiązywany przy mnożeniu

W przedstawionym na Rys. 1 przykładzie

$$a = 2, b = 3 \tag{3}$$

więc

$$c = a \cdot b \tag{4}$$

$$c = 2 - krotna\ suma\ 3 \tag{5}$$

$$c = 3 + 3 \tag{6}$$

$$c = 6 \tag{7}$$

Jak zatem trzymając się takich bardzo podstawowych symbolicznych zapisów wyglądać będzie operacja dzielenia? W ogólnej postaci możemy dzielenie przedstawić jako:

$$\frac{c}{a} = b \tag{8}$$

Czyli zadanie, który chcemy rozwiązać polega na tym, że mamy dane **c**, które dzielimy na **a** równolicznych grup i pytamy, ile elementów jest w każdej grupie?

$$\frac{c}{a} = ? \tag{9}$$

Przedstawiona powyżej operacja dzielenia, przysparza matematykom sporo problemów, gdyż ma jedno, ale za to znaczne ograniczenie. O ile w przypadku mnożenia nie mamy większych problemów, aby mnożyć przez zero, gdyż dowolna liczba pomnożona przez zero (dowolna ilość dodanych do siebie zer) daje zero. O tyle w przypadku dzielenia, w mianowniku ułamka, nie dopuszczamy dzielenia na zero grup. Wykracza to poza nasze możliwości interpretacji takiego zjawiska na bazie zasad logiki i naszego matematycznego rozumowania.

Patrząc na ogólną formę mnożenia (1):

$$a \cdot b = c \tag{10}$$

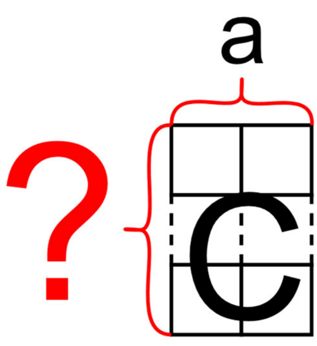
oraz na zdefiniowane w (2) zadanie związane z mnożeniem:

$$a \cdot b = ? \tag{11}$$

dzielenie możemy również zapisać w nieco zmienionej formie:

$$a \cdot ? = c \tag{12}$$

Czyli tym razem problem, który mamy do rozwiązania można by opisać tak. Mamy dane **a**, co należy z nim zrobić, aby otrzymać **c**? Używając nieco innych słów. Jest **dostępne a**, **chcemy dostać c**, co mamy zrobić?



Rys. 2 Problem rozwiązywany przy dzieleniu.

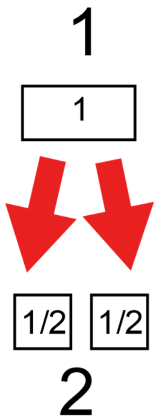
Kontynuując przykład z liczbami **2**,**3** i **6**, zagadnienie podzielności wyglądałoby w następujący sposób. Mamy dane **2**, chcemy dostać **6**, co należy zrobić? Odpowiedź: Wziąć trzykrotność (**3** razy).

Postawione powyżej pytanie wydaje się być bardziej pierwotnym problemem, zazwyczaj staramy się go jednak rozwiązać, stawiając sprawę „do góry nogami”, próbując wyliczyć szukaną wartość - dokonując dzielenia **c** na **a** równych części.

Przeanalizujmy uważnie inny przykład, spróbujmy podzielić 1 przez 2. Czyli przyjrzyjmy się uważnie co oznacza symbol:

$$\mathbf{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

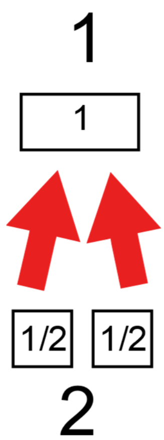
W tradycyjnym rozumieniu oznacza on, że dokonujemy podziału **jedynki** na **dwa równe zbiory**. W rezultacie tej operacji dostajemy **dwa zbiory** po *„pół"*! Na pierwszy rzut oka wydaje się to nieco dziwne, bo dzieląc 1 przez 2 dostajemy tak naprawdę dwa razy (dwa zbiory) po pół, a nie po prostu pół! Słuchając ze zrozumieniem zdania „Jeden dzielone na dwa jest pół" dochodzimy do wniosku, że jest ono nie zgodne z tym, co obserwujemy. Bardziej poprawnie byłoby powiedzieć, że „**Jeden** podzielone na **dwie** równe części (na dwa równe zbiory) daje **pół** w każdej z nich". Warto zauważyć, że aby móc podzielić w tym przypadku na **dwa zbiory**, to co dzielimy reprezentowane jest początkowo przez **jeden zbiór**. Zobrazujmy to klasyczne rozumienie dzielenia na rysunku.



Rys. 3 Dzielenie 1:2.

Działanie odwrotne polegałoby na zsumowaniu, połączeniu tych rozdzielonych zbiorów, jak pokazano poniżej, czego wynikiem byłoby w rezultacie 1.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}=1 \tag{14}$$



Rys. 4 Odwrotność dzielenia $\frac{1}{2}$.

W operacji mnożenia łączymy tu dwa zbiory po pół, czego rezultatem jest otrzymanie jedynki, a ściślej mówiąc jednego zbioru po jeden.

3. Dzielenie i mnożenie jako transformacja.

Zwróćmy uwagę, że w klasycznej interpretacji ułamka posługujemy się analizą od góry w dół. Czyli zaczynamy od licznika i idziemy do mianownika. Dzielimy jeden (licznik) na dwa (mianownik). Operację do niej odwrotną, czyli mnożenie przez dwa można rozumieć jako operację w przeciwnym kierunku przejście od dołu do góry ułamka. Zbieramy dwa (mianownik) i tworzymy jeden (licznik).

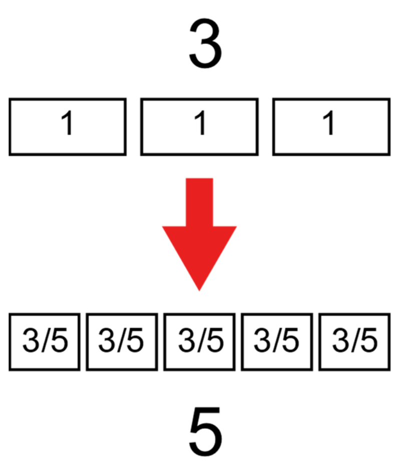
$$\textit{Dzielenie} \downarrow \frac{1}{2} \uparrow \textit{Mnożenie}$$

Rys. 5 Mnożenie i dzielenie jako operacje do siebie odwrotne

Spróbujmy przeanalizować jeszcze jeden przypadek:

$$\frac{3}{5} \tag{15}$$

Ułamek ten przedstawia operację dzielenia 3 przez 5, czytając inaczej mamy trzy i chcemy je podzielić na pięć równych grup. Rys. 6 przedstawia to działanie graficznie.



Rys. 6. 3 dzielone na 5.

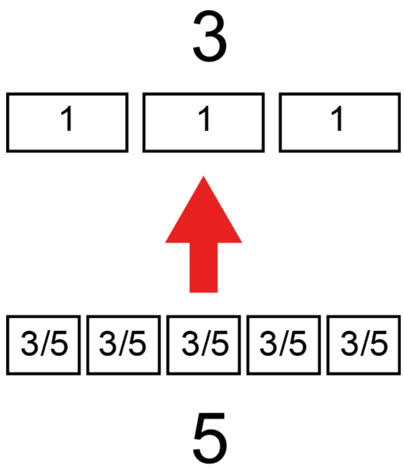
Matematycznie możemy to zapisać np. jak poniżej.

$$3 : 5 = \frac{3}{5} \tag{16}$$

Realizując działanie odwrotne do powyższego dostajemy operację mnożenia, czyli:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = 3 \tag{17}$$

Albo graficznie:



Rys. 7 Mnożenie 5 razy $\frac{3}{5}$.

Uważnie analizując powyżej przedstawione przykłady możemy zauważyć, że w każdym przypadku mamy do czynienia tak na prawdę z **czterema liczbami**, które opisują wspólnie pewnego rodzaju przekształcenie (transformację). I tak np. dzielenie $\frac{3}{5}$ oznacza przekształcenie:

$$3 \cdot 1 \rightarrow 5 \cdot \frac{3}{5} \tag{18}$$

Operacja odwrotna (mnożenie)

$$3 \cdot 1 \leftarrow 5 \cdot \frac{3}{5} \tag{19}$$

Lub zapisana od lewej do prawej

$$5 \cdot \frac{3}{5} \rightarrow 3 \cdot 1 \tag{20}$$

Dzielenie 1 przez 2 rozpisane na cztery liczby tworzące transformację

$$1 \cdot 1 \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \tag{21}$$

Operacja odwrotna (mnożenie)

$$1 \cdot 1 \leftarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \tag{22}$$

Operacja mnożenia pokazana na początku tego rozdziału

$$2 \cdot 3 \rightarrow 6 \cdot 1 \tag{23}$$

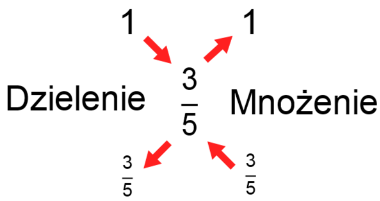
Operacja do niej odwrotna reprezentująca $\frac{6}{3}$ lub $\frac{6}{2}$

$$2 \cdot 3 \leftarrow 6 \cdot 1 \tag{24}$$

Zwróćmy uwagę, że operacja dzielenia powoduje transformację, która jest odwracana przez transformację związaną z operacją mnożenia.

$$\mathbf{3} \cdot 1 \rightarrow \mathbf{5} \cdot \frac{3}{5} \rightarrow \mathbf{3} \cdot 1 \tag{25}$$

Analizując powyższą notację od lewej do prawej mamy 3 (czyli trzy jedności), które rozdzielamy (transformujemy) na 5 równych części po $\frac{3}{5}$. Następnie, transformujemy, łączymy 5 razem (pomnożone 5 razy) przywracają nam początkowe 3 jedności.

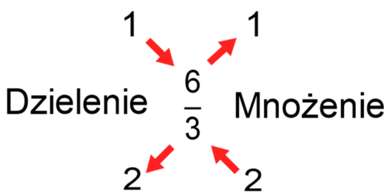


Rys. 8 Dzielenie i mnożenie jako transformacja przez $\frac{3}{5}$

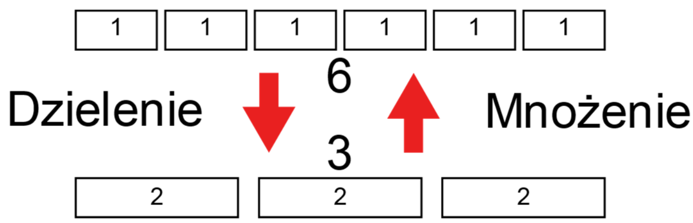
Kolejny przykład poniżej (Rys. 9) możemy przeczytać w następujący sposób.

Dzielenie: Mamy sześć jedności (czyli sześć razy po jeden, sześć elementów po jeden, sześć zbiorów po jeden) i transformujemy je na trzy równoliczne zbiory (grupy elementów) po dwa w każdym zbiorze.

Z kolei mnożenie: Mamy po dwa elementy w trzech równolicznych grupach i transformujemy je w sześć grup po jeden (w skrócie sześć jedynek możemy nazwać po prostu sześć).

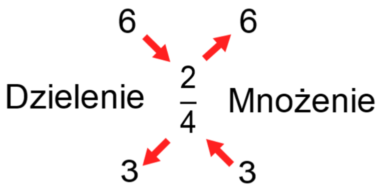


Rys. 9 Dzielenie i mnożenie jako transformacja przez $\frac{6}{3}$.

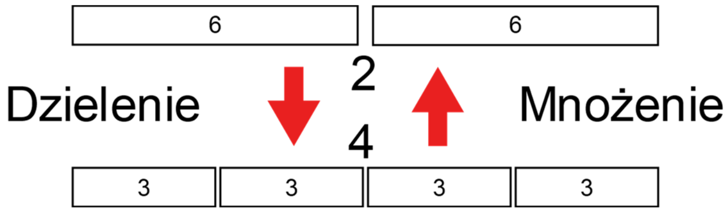


Rys. 10. 6 grup po 1 <-> 3 grupy po 2.

Zazwyczaj w tego typu działaniach występuje z pewnych powodów liczba 1, która często w formalnym zapisie matematycznym jest pomijana, jednak jest to jedynie pewien szczególny przypadek i nie musi tak być. W przykładzie poniżej widać, że tego typu rozumienie mnożenia i dzielenia równie dobrze funkcjonuje w przypadkach bardziej ogólnych.



Rys. 11. Dzielenie i mnożenie jako transformacja przez $\frac{2}{4}$



Rys. 12. 2 grupy po 6 <-> 4 grupy po 3

Przykład ten możemy przeczytać następująco.

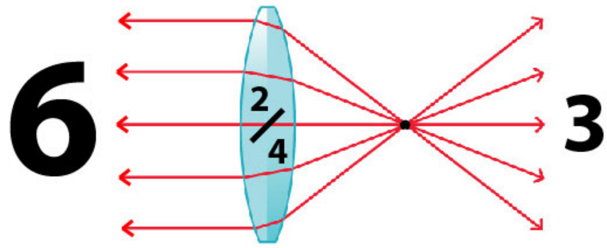
Dzielenie: Mamy dwie grupy po sześć elementów i transformujemy je (dzielimy) na cztery grupy po trzy elementy.

Mnożenie: Mamy cztery grupy po trzy elementy i transformujemy je (łączymy, wykonujemy działanie odwrotne do dzielenia, czyli mnożymy) w dwie grupy po sześć elementów.

Jak widać z powyższych przykładów zarówno w przypadku **mnożenia** jak i **dzielenia** dokonujemy tak naprawdę jedynie pewnej **transformacji**, czyli przekształcenia **dwóch liczb w dwie inne liczby**. W przykładzie powyżej dokonywaliśmy przekształcenia pary (2,6) w parę (4,3).

$$(2,6) \leftrightarrow (4,3) \tag{26}$$

W przykładzie tym dwie liczby 2 i 4 **definiują transformację**, to liczby stanowiące omawiany ułamek $\frac{2}{4}$ (szkło powiększające na Rys. 13). Pozostałe dwie liczby 6 i 3 **podlegają tej transformacji** w jedną lub drugą stronę.



Rys. 13 Ułamek $\frac{2}{4}$ jako szkło powiększające.

W przypadku dzielenia ułamek mówi nam, ile grup transformujemy (w tym przypadku dwie), w ile grup docelowych (w tym przypadku 4).

W przypadku mnożenia (przeciwny kierunek) transformujemy cztery grupy w dwie docelowe.

Mając zdefiniowaną transformację dokonujemy przekształcenia.

W przypadku dzielenia przekształcamy 6 (jako liczność grupy początkowej) w 3 (liczność grupy docelowej).

W przypadku mnożenia (przeciwny kierunek) przekształcamy 3 (liczność grupy początkowej) w 6 (liczność grupy docelowej).

Dzielenie:

2 grupy po 6 elementów → 4 grupy po 3 elementy

Mnożenie:

2 grupy po 6 elementów ← 4 grupy po 3 elementy (jako działanie odwrotne do dzielenia)

Lub

4 grupy po 3 elementy → 2 grupy po 6 elementów

Łatwo zauważyć, że stosunek zdefiniowany przez ułamek $\frac{2}{4}$ (definiujący transformację) jest taki sam jak stosunek pomiędzy licznością grupy docelowej, a licznością grupy początkowej dzielenia $\frac{3}{6}$.

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \tag{27}$$

$$\frac{ilość\ grup\ początkowych}{iość\ grup\ docelowych} = \frac{liczność\ grupy\ docelowej}{liczność\ grupy\ początkowej} \tag{28}$$

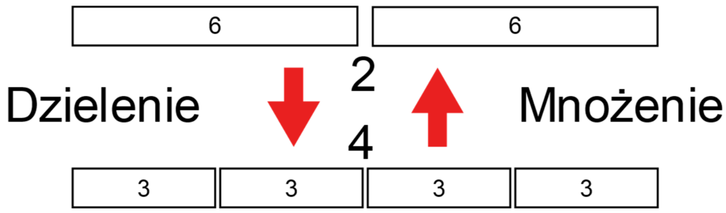
W przypadku dzielenia dokonujemy transformacji 6 poprzez stosunek zapisany w ułamku $\frac{2}{4}$ w rezultacie otrzymujemy 3.

$$6 \cdot \frac{2}{4} = 3 \tag{29}$$

$$\text{liczność grupy początkowej} \cdot \frac{\text{ilość grup początkowych}}{\text{ilość grup docelowych}} = \text{liczność grupy docelowej} \tag{30}$$

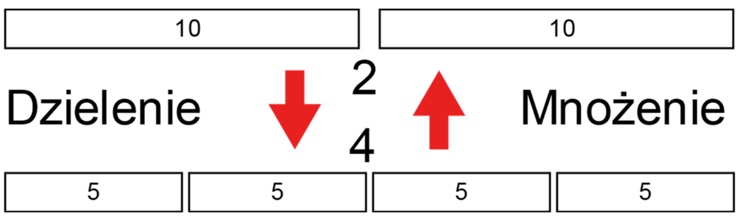
Zauważmy, że ułamek (w omawianym przypadku $\frac{2}{4}$) nie mówi jednoznacznie o liczności grupy początkowej, którą jest zdolny przetransformować do grupy docelowej. Mówi on jedynie o pewnym stosunku, który interpretujemy jako stosunek liczbowy pomiędzy licznością grupy docelowej i licznością grupy początkowej. Często domyślnie przyjmujemy, że liczność elementów grupy początkowej jest 1. Mówiąc, że dwa, rozumiemy przez to dwie jedności, które dzielimy na cztery części, jednak to co faktycznie jest przedstawione to jedynie ilość grup początkowych - 2 oraz ilość grup docelowych - 4, tej transformacji oraz stosunek pomiędzy nimi $\frac{2}{4}$. Porównajmy poniższe przykłady w każdym z nich używamy tego samego ułamka do transformowania innych liczb.

$$6 \cdot \frac{2}{4} = 3 \tag{31}$$



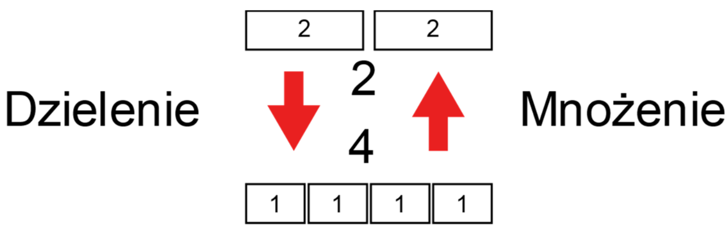
Rys. 14 2 grupy po 6 <-> 4 grupy po 3

$$10 \cdot \frac{2}{4} = 5 \tag{32}$$



Rys. 15 2 grupy po 10 <-> 4 grupy po 5

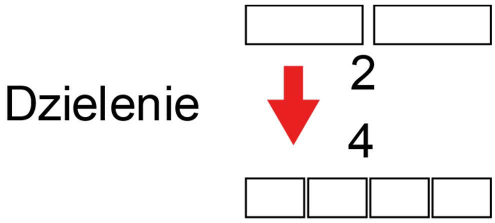
$$2 \cdot \frac{2}{4} = 1 \tag{33}$$



Rys. 16. 2 grupy po 2 <-> 4 grupy po 1.

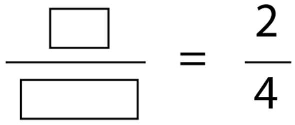
Ogólnie możemy powiedzieć, że ułamek $\frac{2}{4}$ reprezentuje:

a) Transformację **dwóch** grup w **cztery** grupy



Rys. 17. Transformacja 2 grup w 4 grupy.

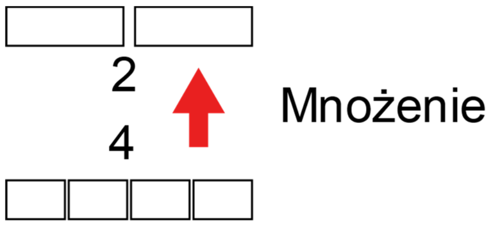
b) Stosunek pomiędzy licznością grupy **docelowej** , a licznością grupy **początkowej**



Rys. 18. Stosunek między licznościami grup w transformacji przez ułamek

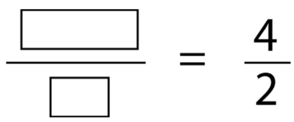
Ale również reprezentuje on działanie do niego odwrotne, czyli mnożenie (czytając odwrotnie, czyli od dołu do góry) (Rys. 13):

a) Transformację **czterech** grup w **dwie** grupy



Rys. 19

b) Stosunek liczbowy pomiędzy licznością grupy docelowej , a licznością grupy początkowej . Jednak w tym przypadku poruszamy się od dołu do góry, czyli transformujemy **odwrotnie,** dlatego ułamek, aby to uwidocznić powinien zostać odwrócony

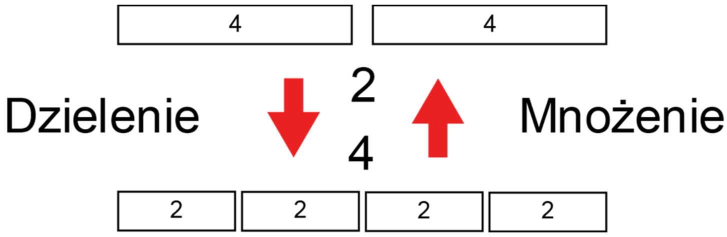


Rys. 20 Stosunek między licznościami grup w transformacji przez ułamek odrotny

4. Ułamek jako element transformujący sam siebie.

Jeżeli w omawianym przykładzie jako liczność grupy początkowej przyjmiemy cztery, to w rezultacie otrzymamy liczność grupy docelowej, czyli dwa.

$$4 \cdot \frac{2}{4} = 2 \tag{34}$$



Rys. 21

Jak widzimy w takim przypadku ułamek $\frac{2}{4}$ nie tylko mówi o przekształceniu dwóch grup w cztery (strzałka czerwona na Rys. 22), ale również pozwala na transformację liczności grypy początkowej 4 w liczność grupy docelowej 2 (strzałka niebieska na Rys. 22)

$$4 \cdot \frac{2}{4} = 2$$

Rys. 22

Z przykładu tego widać, że ułamek posiada tę cechę, że potrafi przetransformować sam swoje elementy składowe. W tym przypadku $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}$ transformuje $\mathbf{4} \ \rightarrow \mathbf{2}$.

W przypadku ogólnym ułamek

$$\frac{licznik}{mianownik} \tag{35}$$

pozwala przetransformować

$$mianownik \ \rightarrow licznik \tag{36}$$

5. Ujednolicenie mnożenia i dzielenia.

Z powyżej przedstawionych przykładów, wyraźnie widać, że zarówno mnożenie jak i dzielenie można sprowadzić do jednej operacji arytmetycznej – **transformacji**.

Dokonując **dzielenia** rozpoczynamy od pewnej ilości grup zawierających pewne liczności elementów i przekształcamy je w inną ilość grup zawierających inne liczności elementów.

Dokonując **mnożenia** również rozpoczynamy od pewnej ilości grup zawierających pewne liczności elementów i przekształcamy je w inną ilość grup zawierających inne liczności elementów.

Oba te działania mówią dokładnie o takim samym rodzaju operacji - transformacji. **Oznacza to, że nie są to różne operacje, ale jedna**. Operacja transformacji (mnożenia i dzielenia) zachowuje proporcję w taki sposób, że zwiększając (lub zmniejszając) ilość grup w czasie transformacji **n-razy**, zmniejszamy (lub zwiększamy) ilość elementów w grupie w tej samej proporcji - również **n-razy**.

W przypadku mnożenia:

n-razy mniej grup

$$4 \cdot 2 = 2 \cdot 4$$

n-razy więcej elementów
w grupie

Rys. 23

n-razy więcej grup

$$4 \cdot 2 = 8 \cdot 1$$

n-razy mniej elementów
w grupie

Rys. 24

W przypadku dzielenia:

n-razy mniej elementów
w grupie

n-razy więcej grup

$$1 \cdot \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Rys. 25

n-razy więcej elementów
w grupie

n-razy mniej grup

$$1 \cdot \frac{4}{2} = 2$$

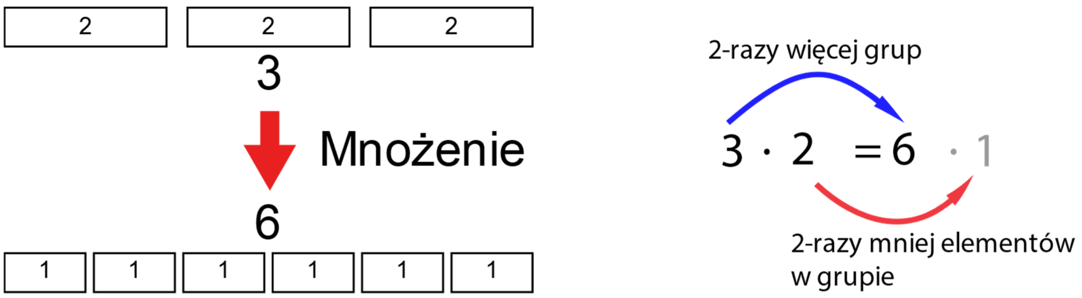
Rys. 26

Jedynka zaznaczona w przykładzie na szaro jest zazwyczaj pomijana w matematycznej notacji jednak dla pełnego zobrazowania zachodzących transformacji możemy ją uwidocznić.

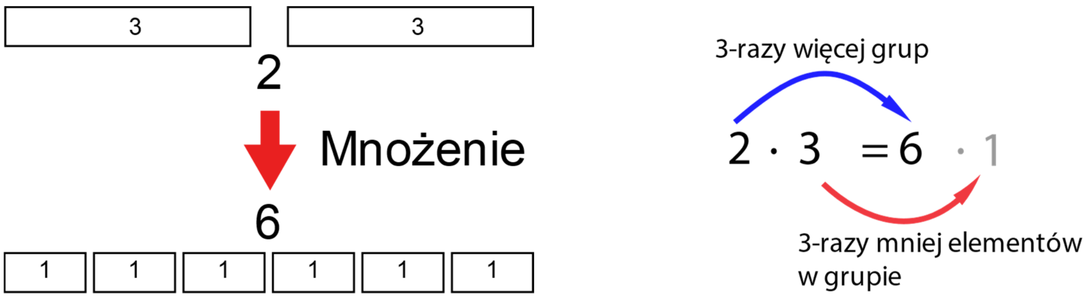
6. Przemienność mnożenia

Traktując mnożenie jako transformację grup elementów w inną ilość grup elementów można zobrazować przemienność mnożenia. Zwróćmy uwagę, że przy każdej transformacji zachowana jest proporcja

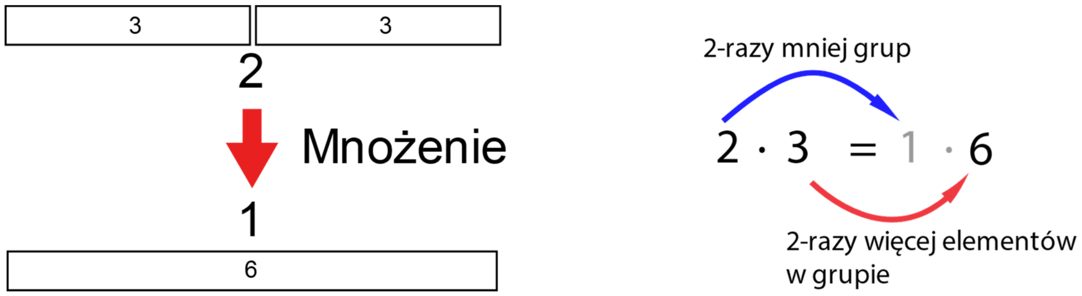
$$\frac{ilość\ grup\ początkowych}{ilość\ grup\ docelowych} = \frac{liczność\ grupy\ docelowej}{liczność\ grupy\ początkowej} \tag{37}$$



Rys. 27



Rys. 28

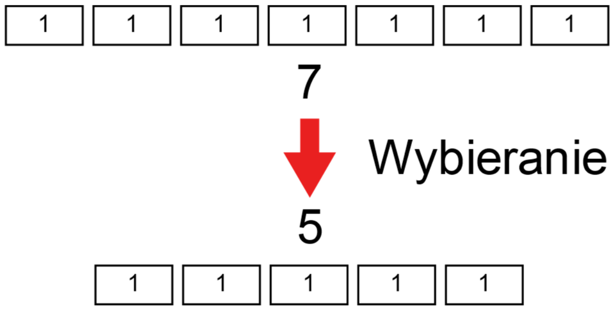


Rys. 29

7. Wprowadzenie do operacji wybierania.

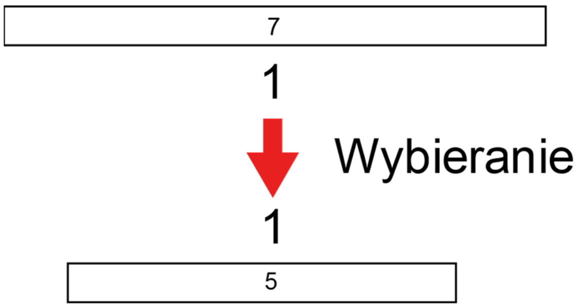
Zaprezentowane powyżej operacje dzielenia i mnożenia zachowują ilość przed i po operacji. Wydaje się, że zmieniają one jedynie „formę” liczb, zachowując w tym samym czasie ich całkowitą wielkość. Jeżeli zsumujemy długości prostokątów w przedstawionych przykładach, ich całkowita długość przed i po operacji będzie dokładnie taka sama. Dla mnożenie i dzielenie jest to wymagana ich cecha, ale możemy sobie wyobrazić operację, pozbawioną takiej własności.

Dla przykładu: Mamy 7 elementów i zabieramy 5 z nich. Możemy powiedzieć, że **wybieramy** 5 elementów z siedmiu.



Rys. 30

W przypadku wybierania możemy mieć jeszcze inny przypadek. Niekoniecznie musimy wybierać pewną ilość elementów, możemy również wybrać pewną część całości (Rys. 30 i Rys. 31).



Rys. 31

Operacja **wybierania** jest odmienna od operacji mnożenia i dzielenia w ten sposób, iż nie zachowuje ona całkowitej ilości, lecz zmienia ją w trakcie operacji. Sumaryczna ilość po operacji może i zazwyczaj jest inna, niż przed jej wykonaniem.

W przypadku operacji wybierania oprócz skalowania w dół $7 \rightarrow 5$ możliwe jest również skalowanie w górę $5 \rightarrow 7$, taką operację również będziemy nazywać wybieraniem. Choć nie jest możliwe wybranie większej liczby elementów z mniejszej, to jednak możemy tego typu operacje interpretować jako chęć wybrania np. 7 elementów, choć dostępne jest jedynie 5.

8. Formalna definicja transformacji (mnożenia, dzielenia, wybierania).

Zdefiniujmy następujące zmienne.

$g1$ – początkowa ilość równolicznych grup transformacji

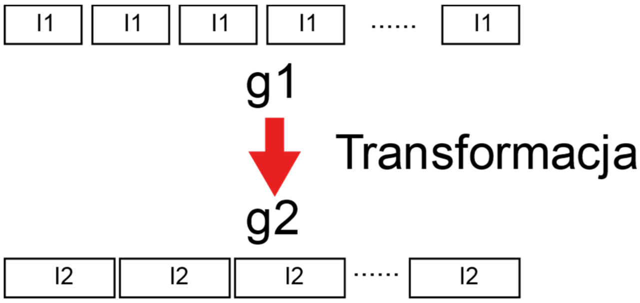
$l1$ – liczność elementów w każdej z początkowych grup

$g2$ – końcowa ilość równolicznych grup transformacji

$l2$ – liczność elementów w każdej z końcowych grup

Transformacją T nazwiemy przekształcenie pary $(g1, l1)$ w parę $(g2, l2)$

$$T(g1, l1) \rightarrow (g2, l2) \tag{38}$$



Rys. 32

Współczynnikiem transformacji (p) lub (**elementem transformującym**) nazwiemy stosunek liczbowy zdefiniowany poniżej:

$$\boldsymbol{p} = \frac{g2}{g1} \tag{39}$$

$$g1 \cdot \boldsymbol{p} = g2 \tag{40}$$

Lub

$$\boldsymbol{p} = \frac{l2}{l1} \tag{41}$$

$$l1 \cdot \boldsymbol{p} = l2 \tag{42}$$

Zauważmy, że p transformuje jeden z elementów transformacji, bądź to ilość grup lub ich liczność w zależności od przypadku.

Transformację nazwiemy **pełną** lub **całkowitą,** jeżeli zachodzi warunek:

$$\forall(g1, g2, l1, l2)\ (g1 \cdot l1 = g2 \cdot l2) \tag{43}$$

(formalnie: $g1$-krotna suma $l1$ = $g2$-krotnej sumie $l2$)

W przypadku transformacji pełnej zachowana jest proporcja pomiędzy ilościami grup oraz ilościami elementów w grupach jak poniżej:

$$\frac{g1}{g2} = \frac{l2}{l1} \tag{44}$$

$$\frac{ilość\ grup\ początkowych}{ilość\ grup\ docelowych} = \frac{liczność\ grupy\ docelowej}{liczność\ grupy\ początkowej} \tag{45}$$

Transformację nazwiemy **niepełną** lub **niecałkowitą,** jeżeli **nie zachodzi** warunek:

$$\forall(g1, g2, l1, l2)\ (g1 \cdot l1 = g2 \cdot l2) \tag{46}$$

Transformację **pełną** nazwiemy **mnożeniem**, gdy $g2 = 1$.

$$T(g1, l1) \to (1, l2) \tag{47}$$

wtedy,

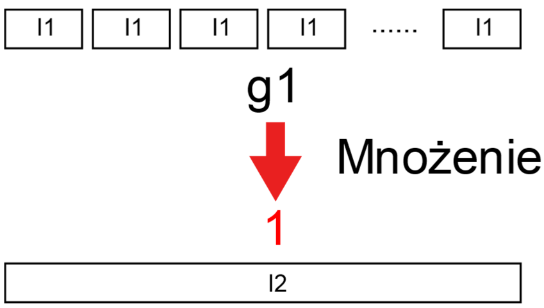
$$g1 \cdot l1 = 1 \cdot l2 \tag{48}$$

$$\boldsymbol{l1 \cdot g1 = l2} \tag{49}$$

Współczynnikiem transformacji p jest:

$$p = \frac{l2}{l1} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{g1}{1}} \tag{51}$$



Rys. 33

Transformację **pełną** nazwiemy **mnożeniem**, gdy $l2 = 1$.

$$T(g1, l1) \to (g2, 1) \tag{52}$$

wtedy,

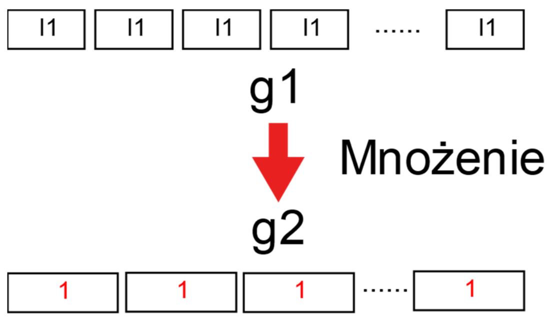
$$g1 \cdot l1 = g2 \cdot 1 \tag{53}$$

$$\boldsymbol{g1 \cdot l1 = g2} \tag{54}$$

Współczynnikiem transformacji p jest:

$$p = \frac{g2}{g1} \tag{55}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{l1}{1}} \tag{56}$$



Rys. 34

Transformację **pełną** nazwiemy **dzieleniem**, gdy $g1 = 1$.

$$T(1, l1) \rightarrow (g2, l2) \tag{57}$$

$$1 \cdot l1 = g2 \cdot l2 \tag{58}$$

$$l1 = g2 \cdot l2 \tag{59}$$

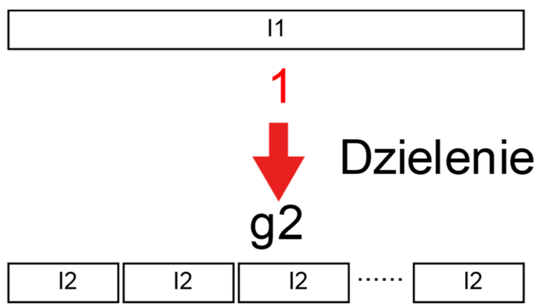
$$\boldsymbol{\frac{l1}{g2} = l2} \tag{60}$$

Współczynnikiem transformacji p jest:

$$l1 \cdot \frac{1}{g2} = l2 \tag{61}$$

$$\frac{1}{g2} = \frac{l2}{l1} \tag{62}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{1}{g2}} \tag{63}$$



Rys. 35

Transformację **pełną** nazwiemy **dzieleniem**, gdy $l1 = 1$.

$$T(g1,1) \rightarrow (g2, l2) \tag{64}$$

$$g1 \cdot 1 = g2 \cdot l2 \tag{65}$$

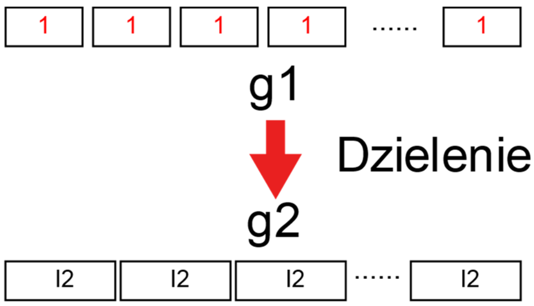
$$g1 = g2 \cdot l2 \tag{66}$$

$$\boldsymbol{\frac{g1}{l2} = g2} \tag{67}$$

Współczynnikiem transformacji p jest:

$$g1 \cdot \frac{1}{l2} = g2 \tag{68}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{1}{l2}} \tag{69}$$



Rys. 36

Transformację **niepełną** nazwiemy **wybieraniem**, gdy $g1 = g2 = 1$.

$$T(1, l1) \rightarrow (1, l2) \tag{70}$$

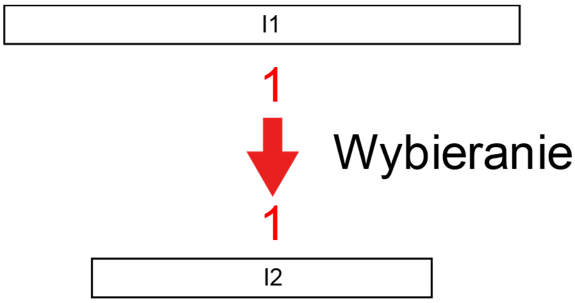
Wtedy,

$$\frac{l2}{l1} = \frac{l2}{l1} \tag{71}$$

$$l1 \cdot \frac{l2}{l1} = l2 \tag{72}$$

Współczynnikiem transformacji p jest:

$$\boldsymbol{p = \frac{l2}{l1}} \tag{73}$$



Rys. 37

Transformację **niepełną** nazwiemy **wybieraniem**, gdy $l1 = l2 = 1$.

$$T(g1,1) \rightarrow (g2,1) \tag{74}$$

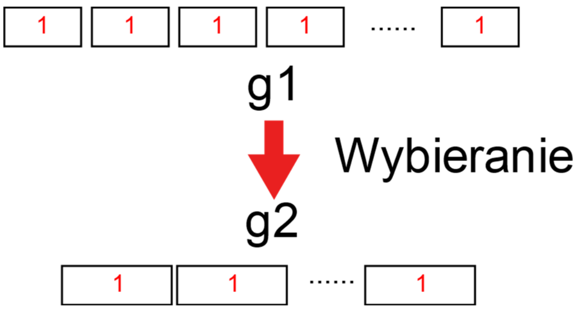
Wtedy,

$$\frac{g2}{g1} = \frac{g2}{g1} \tag{75}$$

$$g1 \cdot \frac{g2}{g1} = g2 \tag{76}$$

Współczynnikiem transformacji p jest:

$$\boldsymbol{p = \frac{g2}{g1}} \tag{77}$$



Rys. 38

Zarówno **mnożenie, dzielenie** jak i **wybieranie** są różnymi formami zdefiniowanej w (38) **transformacji**.

Nazwa operacji	**Definicja transformacji**	**Współczynnik transformacji (p)**	**Przekształcenie** $\boldsymbol{l1 \to l2}$ $\boldsymbol{g1 \to g2}$
Transformacja (postać ogólna)	$T(g1, l1) \to (g2, l2)$	$p1, p2$	$l1 \cdot p1 = l2$ $g1 \cdot p2 = g2$
Mnożenie	$T(g1, l1) \to (1, l2)$	$\frac{g1}{1}$	$l1 \cdot \frac{g1}{1} = l2$
Mnożenie	$T(g1, l1) \to (g2, 1)$	$\frac{l1}{1}$	$g1 \cdot \frac{l1}{1} = g2$
Dzielenie	$T(1, l1) \to (g2, l2)$	$\frac{1}{g2}$	$l1 \cdot \frac{1}{g2} = l2$
Dzielenie	$T(g1, 1) \to (g2, l2)$	$\frac{1}{l2}$	$g1 \cdot \frac{1}{l2} = g2$
Wybieranie	$T(1, l1) \to (1, l2)$	$\frac{l2}{l1}$	$l1 \cdot \frac{l2}{l1} = l2$
Wybieranie	$T(g1, 1) \to (g2, 1)$	$\frac{g2}{g1}$	$g1 \cdot \frac{g2}{g1} = g2$

Tabela 1

9. Czy $\frac{1}{2}$ równe jest $\frac{2}{4}$?

Sprawdźmy co otrzymamy z porównania $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{2}{4}$ rozumianych jako transformacje.

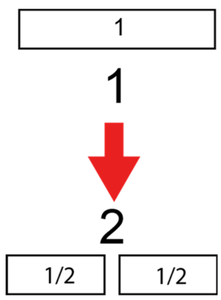
$\frac{1}{2}$	
$T(1, l1) \to (g2, l2)$ $T(1,1) \to (2, l2)$ $l1 \cdot \frac{1}{g2} = l2$ $1 \cdot \frac{1}{2} = l2$ $l2 = \frac{1}{2}$ $T(1,1) \to \left(2, \frac{1}{2}\right)$	 *Rys. 39*

Tabela 2

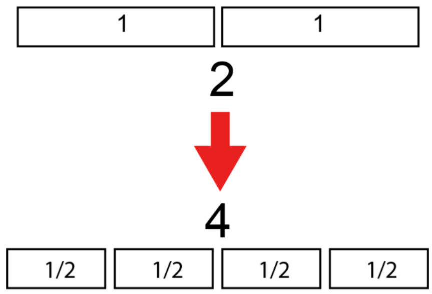
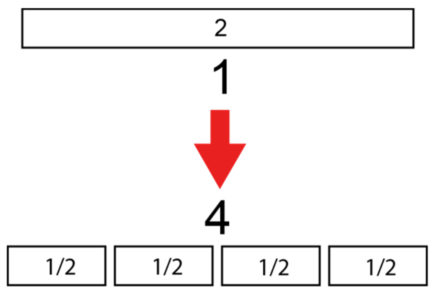
$\frac{2}{4}$	
$T(g1,1) \rightarrow (g2, l2)$ $T(2,1) \rightarrow (4, l2)$ $g1 \cdot \frac{1}{l2} = g2$ $2 \cdot \frac{1}{l2} = 4$ $\frac{1}{l2} = \frac{4}{2}$ $l2 = \frac{2}{4}$ $l2 = \frac{1}{2}$ $T(2,1) \rightarrow \left(4, \frac{1}{2}\right)$	 *Rys. 40*
Lub $T(1, l1) \rightarrow (g2, l2)$ $T(1,2) \rightarrow (4, l2)$ $l1 \cdot \frac{1}{g2} = l2$ $2 \cdot \frac{1}{4} = l2$ $l2 = \frac{2}{4}$ $l2 = \frac{1}{2}$ $T(1,2) \rightarrow \left(4, \frac{1}{2}\right)$	 *Rys. 41*

Tabela 3

Jak widzimy w każdym przypadku wynik dzielenia $l2$ równy jest $\frac{1}{2}$ i pod tym względem możemy powiedzieć, że $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, ale jak również łatwo zauważyć każda z przedstawionych powyżej transformacji jest inna, co wskazuje na odmienność $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$. Propozycja wyjaśnienia tej sytuacji zostanie przedstawiona w dalszej części tej pracy.

10. Dzielenie przez zero jako transformacja.

Spróbujmy przeanalizować $\frac{1}{0}$ jako transformację.

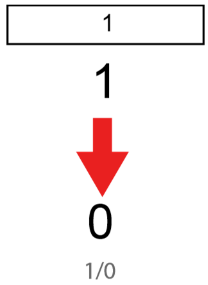
$T(1, l1) \rightarrow (g2, l2)$ $T(1,1) \rightarrow (0, l2)$ $l1 \cdot \frac{1}{g2} = l2$ $1 \cdot \frac{1}{0} = l2$ $l2 = \frac{1}{0}$ $T(1,1) \rightarrow \left(0, \frac{1}{0}\right)$	 *Rys. 42*

Tabela 4

Jak widać wynikiem transformacji $\frac{1}{0}$ jest $l2 = \frac{1}{0}$. Jaki jest sens tego wyniku? Jest to coś, z czym nie bardzo potrafimy sobie poradzić, nie umiemy podzielić 1 na zero grup, próba podzielenia $\frac{1}{0}$ prowadzi nas tak naprawdę również do symbolu $\frac{1}{0}$. Pytanie, czy aby koniecznie musimy to robić? Porównując to co otrzymaliśmy do przykładów z $\frac{1}{2}$ lub $\frac{2}{4}$ powyżej widzimy, że potrafimy zobrazować transformację, lecz mamy problem ze zobrazowaniem wyniku. **Być może sensem dzielenia, NIE jest, tak jak je rozumie współczesna matematyka, tak naprawdę wynik $l2$, lecz sama transformacja?** Można by powiedzieć, że nie mamy tak naprawdę problemu z symbolem $\frac{1}{0}$, problem pojawia się, gdy zaczynamy go obliczać, gdy chcemy go sprowadzić do liczby postaci 5, 7 lub jakiejś im podobnej. Jak sobie poradzić z $\frac{1}{0}$ zostanie wyjaśnione w dalszej części niniejszej pracy.

11. Czy $\frac{1}{2}$ równa jest $\frac{1}{2}$?

Otóż nie jeżeli myślimy o dwóch różnych transformacjach, a możemy o nich myśleć jak to widać z przedstawionych poniżej przykładów. Zacznijmy od klasycznego dzielenia dokładnie jak to było już pokazane wyżej. Traktując $\frac{1}{2}$ jako transformacje dzielenia otrzymamy.

$\frac{1}{2}$ jako **dzielenie**:

$\frac{1}{2}$ jako **dzielenie**	
$T(1, l1) \rightarrow (g2, l2)$ $T(1,1) \rightarrow (2, l2)$ $l1 \cdot \frac{1}{g2} = l2$	

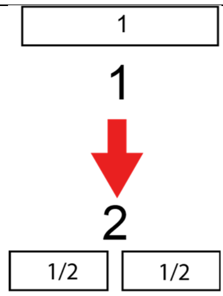
$1 \cdot \frac{1}{2} = l2$ $l2 = \frac{1}{2}$ $T(1{,}1) \rightarrow \left(2, \frac{1}{2}\right)$	 *Rys. 43*

Tabela 5

Jednak $\frac{1}{2}$ możemy również rozumieć jako **wybieranie**:

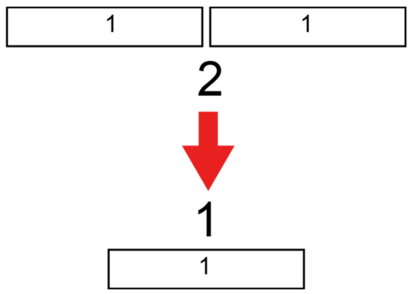
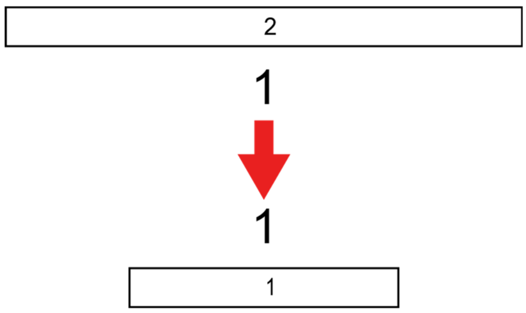
$\frac{1}{2}$ jako **wybieranie**	
$T(g1{,}1) \rightarrow (g2{,}1)$ $T(2{,}1) \rightarrow (1{,}1)$ $g1 \cdot \frac{g2}{g1} = g2$ $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	 *Rys. 44*
Lub $T(1, l1) \rightarrow (1, l2)$ $T(1{,}2) \rightarrow (1{,}1)$ $l1 \cdot \frac{l2}{l1} = l2$ $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	 *Rys. 45*

Tabela 6

Zwróćmy uwagę, że stosunek $\frac{1}{2}$ ma tę **cechę**, że dokonuje on transformacji z dwóch grup początkowych $g1$ do jednej grupy docelowej $g2$ (Rys. 44) lub z podwójnej liczności początkowej $l1$ do pojedynczej liczności końcowej $l2$ (Rys. 45).

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Rys. 46

Czy istnieje sposób, który pozwala pogodzić tak różne wyniki i różne możliwości interpretacji pomiędzy dzieleniem i wybieraniem?

To co jest jednakowe w obu przedstawionych powyżej przykładach to to, że współczynnik transformacji $\boldsymbol{p}$ stosunek liczbowy, który dokonuje transformacji jest w obu przypadkach równy $\frac{1}{2}$.

$$T(1, l1) \rightarrow (g2, l2) \tag{78}$$

W przypadku **dzielenia** początkowe $l1 = 1$ transformowane jest przez $p = \frac{1}{2}$ do $l2 = \frac{1}{2}$.

$$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Rys. 47

W przypadku **wybierania** początkowe $l1 = 2$ transformowane jest przez $p = \frac{1}{2}$ do $l2 = 1$. Tak samo jest w przypadku transformacji liczności (Rys. 45).

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Rys. 48

Różnica między dzieleniem, a wybieraniem w przedstawionych powyżej przykładach polega na tym, że w przypadku dzielenia odczytujemy ułamek niejako od góry w dół. Jeden **dzielimy** na dwa, dostajemy pół.

$$\frac{1}{2}\downarrow$$

Rys. 49

W przypadku wybierania czytamy ułamek od dołu do góry. Z dwóch wybieramy jeden, wybieramy pół.

$$\frac{1}{2}\uparrow$$

Rys. 50

W obu przypadkach mówimy o **połowie** w pierwszym „**dzielimy na pół**” w drugim „**wybieramy pół**”.

To co jest najważniejsze to **stosunek**, który w każdym przypadku jest taki sam. Stosunek, który za każdym razem otrzymujemy pomiędzy **wynikiem**, rezultatem transformacji, a **początkiem**, wartością początkową od której rozpoczęliśmy transformację.

$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Rys. 51

Aby ujednolicić rozumienie $\frac{1}{2}$ symbol ten należy interpretować jako **stosunek pomiędzy dwoma „stanami" pewnej transformacji stanem końcowym w liczniku i stanem początkowym w mianowniku**.

12. Jakie jest znaczenie licznika i mianownika ułamka dokonującego transformacji?

Stosunek liczbowy, który jest elementem „przetwarzającym" w transformacji dokonuje przekształcenia elementu początkowego w rezultat, wynik transformacji. Możemy powiedzieć, że element początkowy transformacji jest tym od czego zaczynamy, czyli czymś co mamy, co jest, dlatego w dalszej części tej pracy nazywać go będziemy ***miarą*** (miarą bazową), oznacza ona stan początkowy, to co jest dane. Następnie miara bazowa (element początkowy) przekształcany jest, transformowany poprzez stosunek liczbowy w element wynikowy, końcowy, rezultat transformacji. Element ten oznacza coś co uzyskujemy w transformacji, wynik przekształcenia, może on też oznaczać coś co chcemy uzyskać, coś czego się spodziewamy, coś czego oczekujemy jako rezultat transformacji. Element ten będziemy w dalszej części pracy nazywać ***wartością*** (wartością wynikową), wynikiem transformacji, wartością oczekiwaną.

$$\overbrace{\text{miara} \cdot \underbrace{\frac{\text{wartość}}{\text{miara}}}_{\text{stosunek}} = \text{wartość}}^{\text{transformacja}}$$

Rys. 52

Dwa proste przykłady poniżej:

a) Dzielenie $\frac{3}{4}$ (dzielenie trzech na cztery) transformacja

$$1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

stosunek

Rys. 53

Dzielenie $\frac{3}{4}$ oznacza transformację polegającą na przekształceniu **trzech** grup po **jeden** i rozdzieleniu ich na **cztery** grupy po $\frac{3}{4}$.

b) Wybieranie $\frac{3}{4}$ (wybieranie trzech z czterech)

transformacja

$$4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

stosunek

Rys. 54

Wybieranie $\frac{3}{4}$ oznacza transformację polegającą na wybraniu z **czterech** elementów, **trzech** elementów. Jak widać stosunek liczbowy dokonujący takiej transformacji jest również $\frac{3}{4}$ i jest to stosunek pomiędzy wartością wynikową (**trzy**), a miarą bazową (**cztery**).

Jak widać w obu przypadkach ten sam stosunek $\frac{3}{4}$ dokonuje opisanej transformacji i jest on równy stosunkowi pomiędzy ***wartością*** wynikową (wynikiem transformacji), a ***miarą*** bazową (początkiem transformacji). W obu przypadkach są one sobie równe.

13. Stosunek liczbowy jako naturalna forma liczby.

Liczba jest zawsze pewną wartością odnoszącą się do pewnej miary „podstawowej", więc najbardziej naturalną jej formą jest ułamek – stosunek liczbowy. Mówi nam on jaką liczba ma wartość względem czegoś, co uznajemy za miarę podstawową.

Naturalną formą liczby jest jej ***wartość*** względem pewnej ***miary***.

$$\frac{wartość}{miara}$$

Miara oznacza bazową, podstawową, dostępną ilość elementów lub wielkość, natomiast ***wartość*** określa ilość elementów lub wielkość, które wybieramy, które chcemy uzyskać, wielkość, którą liczba definiuje, określa w odniesieniu „w stosunku” do swojej miary podstawowej. Nawet gdy mówimy o liczbach całkowitych 2, 5, 7 … itd. to domyślnie zawsze odnosimy je do miary przyjętej za podstawową, czyli do 1. Odpowiednio 2 to $\frac{2}{1}$ (dwukrotność liczby 1), 5 to $\frac{5}{1}$ (pięciokrotność liczby 1) itd. Nawet liczby niewymierne jak $\sqrt{2}$, również domyślnie odnoszą się do miary 1 i tak naprawdę $\sqrt{2}$ oznacza $\frac{\sqrt{2}}{1}$. Chociaż zazwyczaj tego wprost nie pokazujemy, to każda liczba wskazuje na wartość odnosząc się do mniej (w przypadku nie ułamków) lub bardziej (w przypadku ułamków) jawnie wskazanej miary. W przypadku ułamków miara może być bardzo różna i nie zawsze musi być jeden.

Dla przykładu $\frac{1}{2}$ oznacza stosunek liczbowy

a) W przypadku dzielenia jest to stosunek pomiędzy efektem dzielenia, a początkiem dzielenia, czyli tym co zostało podzielone.

$$\frac{efekt\ dzielenia\ (wartość)}{to\ co\ zostalo\ podzielone\ (miara)} \tag{79}$$

Jeden dzielimy na 2.

$$1 : 2 = \frac{1}{2} \tag{80}$$

$$\frac{efekt\ dzielenia\ (wartość)}{to\ co\ zostalo\ podzielone\ (miara)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \tag{81}$$

b) W przypadku wybierania jest to stosunek pomiędzy efektem wybierania, a tym z czego wybieramy

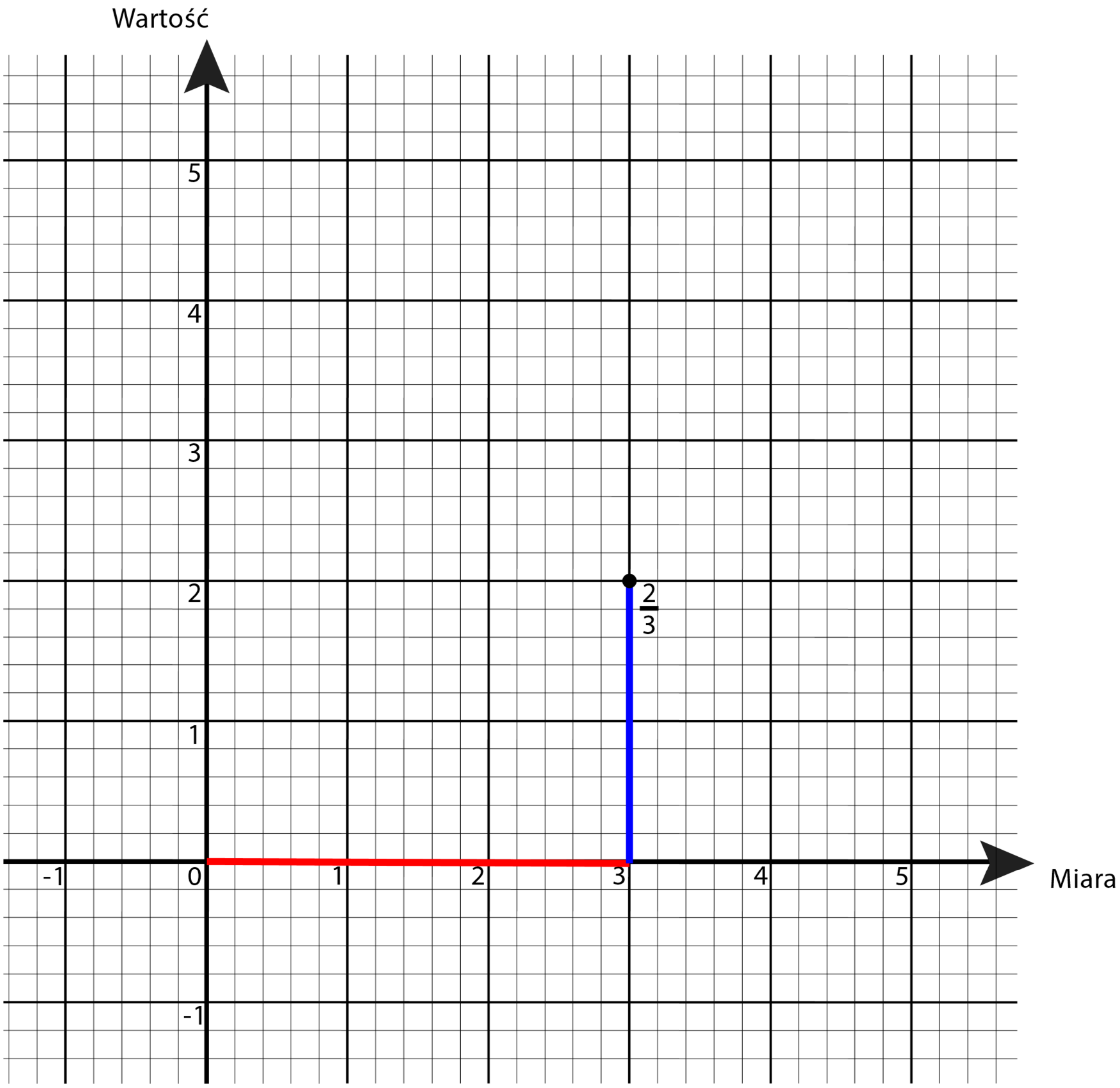
$$\frac{efekt\ wybierania\ (wartość)}{z\ czego\ wybieramy\ (miara)} \tag{82}$$

W tym przypadku wybieramy 1 z 2.

$$\frac{efekt\ wybierania\ (wartość)}{z\ czego\ wybieramy\ (miara)} = \frac{1}{2} \tag{83}$$

Aby zobrazować przedstawiane w niniejszej pracy idee przedstawmy liczby traktując je jako ułamek, stosunek liczbowy $wartości$ do $miary$. Każdą liczbę możemy przedstawić w takiej postaci, zaznaczając na osi poziomej ***miarę***, a na osi pionowej ***wartość***. Konkretnym liczbom postaci $\frac{w}{m}$ ($w - wartość, m - miara$) odpowiadać będą punkty o współrzędnych (m, w). Na wykresie poniżej przedstawiono liczbę $\frac{2}{3}$ ($wartość$ =2, względem $miary$=3), punkt o współrzędnych (3,2).

Uwaga: Wszystkie wykresy w dalszej części pracy, dla łatwiejszej prezentacji i omówienia, zazwyczaj ograniczają się do prezentowania idei jedynie w zakresie, w którym zarówno $wartość$ jak i $miara$ są większe lub równe zeru. Jednak prezentowane idee mają pełną stosowalność na całej płaszczyźnie i mogą być swobodnie prezentowane również w zakresie < 0.



Rys. 55

14. Definicja zbioru relacji n-krotności.

Nazwijmy zbiorem relacji **n-krotności** (lub prościej n-krotnością) zbiór wszystkich **stosunków liczbowych** równych $\frac{n}{1}$. Dla każdej n-krotności zdefiniujmy $\boldsymbol{k_n = \frac{n}{1}}$.

I tak np.

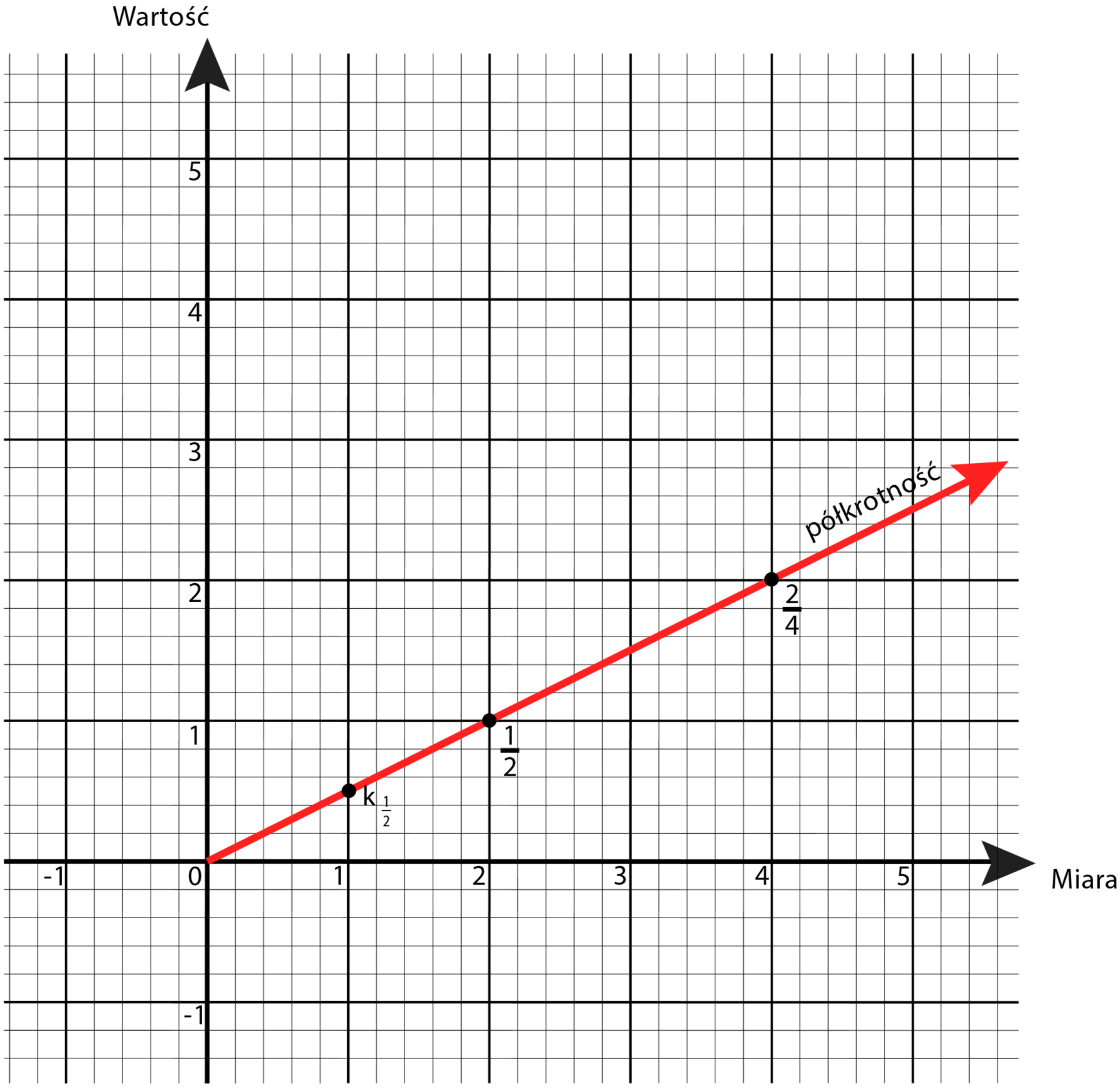
Półkrotnością ($\frac{1}{2} - krotnością$) będą wszystkie liczby postaci $\frac{\frac{1}{2}}{1}$ czyli np. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{50}{100}$ ....

Jednokrotnością - $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}; \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{100}{100}$ ....

Dwukrotnością - $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}; \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{200}{100}$ ....

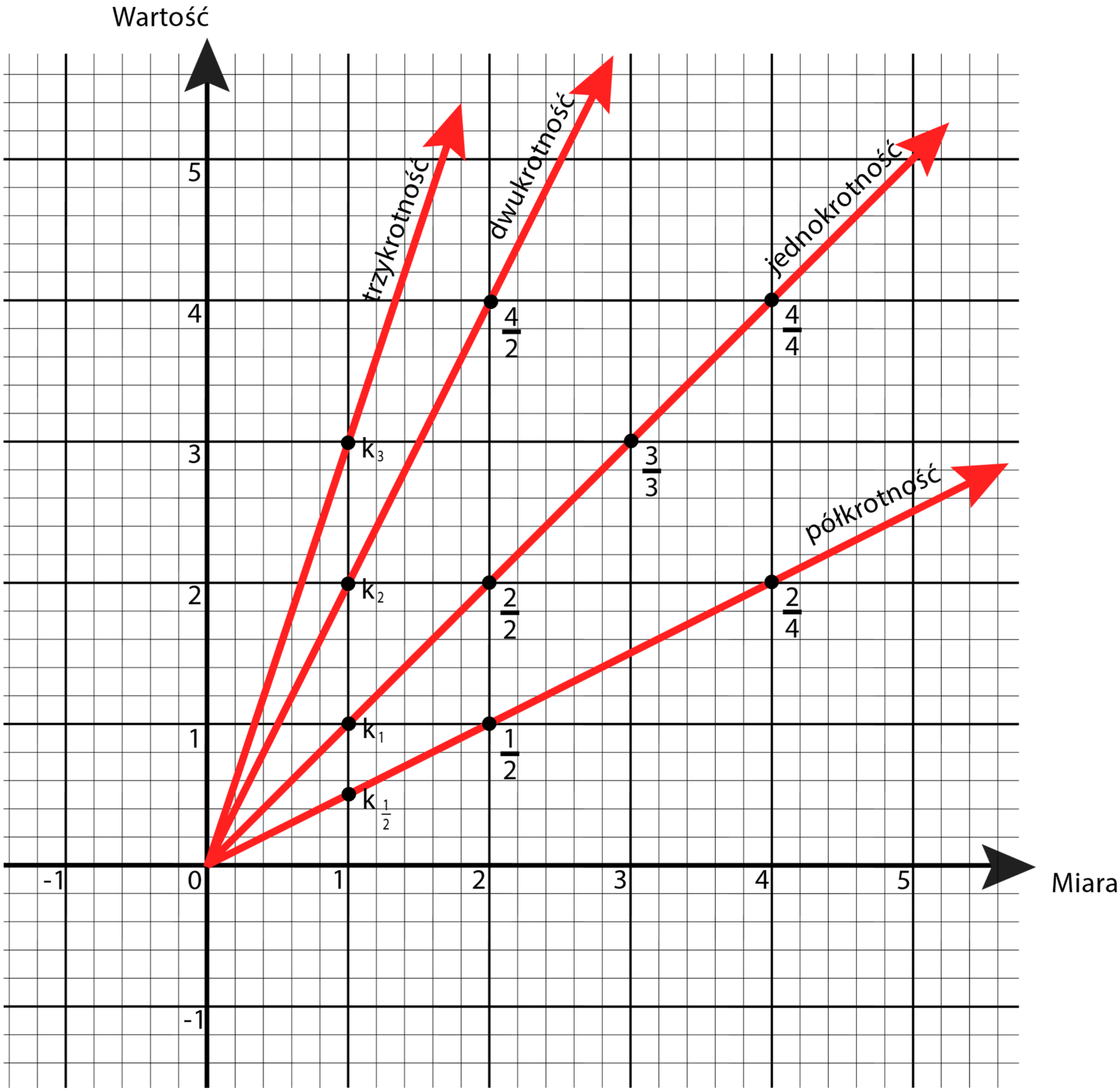
Trzykrotnością - $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}; \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{300}{100}$ ....Itd.

Poniżej wykres półkrotności ($n = \frac{1}{2}$) z zaznaczonymi punktami spełniającymi stosunek $\frac{n}{1}$ oraz punkt $k_n = \frac{\frac{1}{2}}{1}$. Na wykresie widać, że ułamki (stosunki) $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{2}{4}$ reprezentują relację półkrotności.



Rys. 56

Na kolejnym wykresie przedstawiono kilka dodatkowych relacji krotności z zaznaczonymi dla każdej z nich punktami k_n

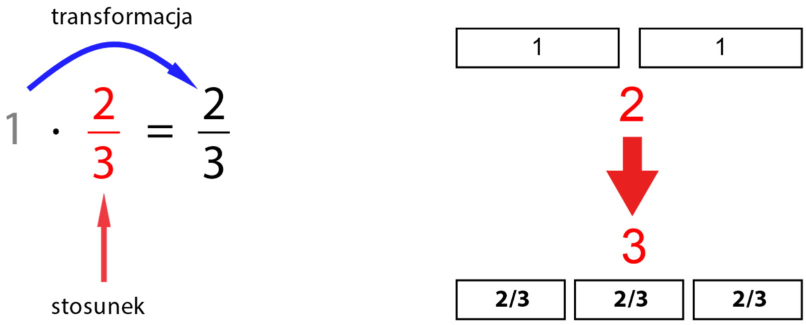


Rys. 57

15. Interpretacja punktu na wykresie stosunków liczbowych.

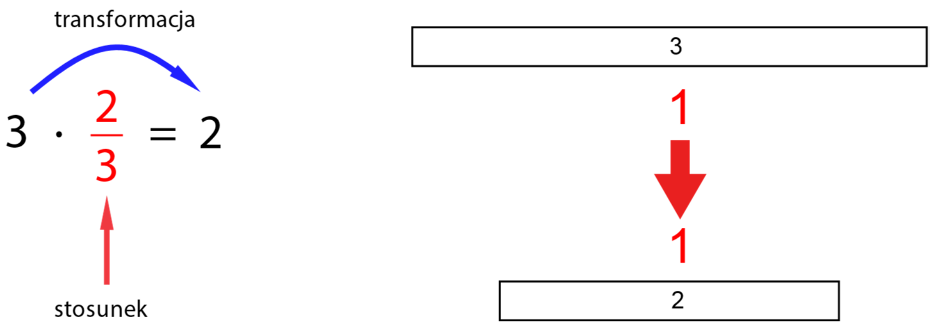
Każdy punkt na wykresie reprezentuje określoną **liczbę w jej prawdziwej ułamkowej postaci,** czyli jako stosunek jej $\frac{wartości}{miary}$. Stosunek ten może też być rozumiany jako element transformujący np. w operacji dzielenia lub operacji wybierania.

I tak $\frac{2}{3}$ w operacji dzielenia możemy przedstawić tak:



Rys. 58

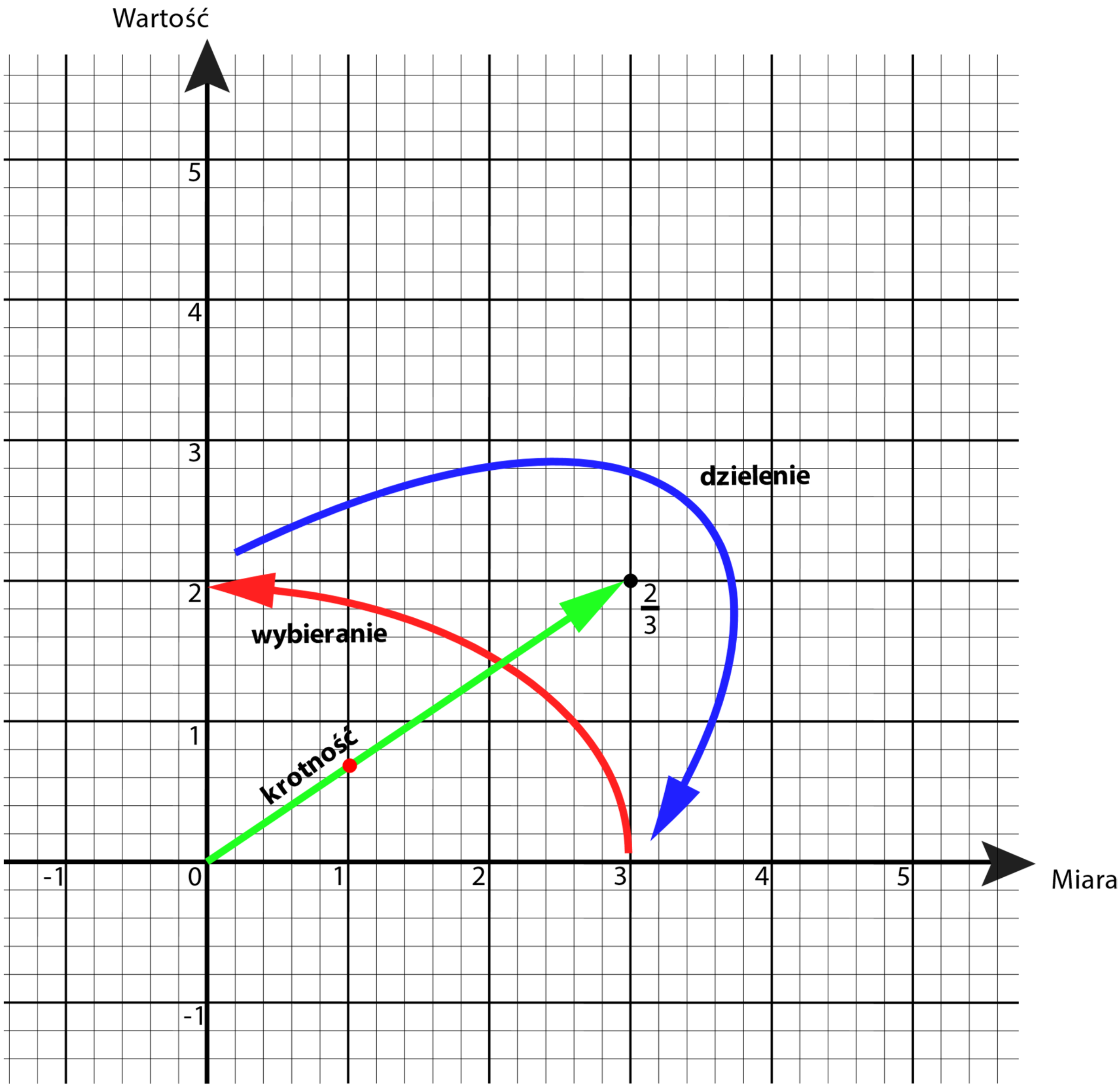
Lub w operacji wybierania:



Rys. 59

Zwróćmy uwagę, że stosunek pomiędzy **efektem** (końcem) transformacji, a **początkiem** transformacji jest w obu przypadkach taki sam.

$$dzielenie \ \rightarrow \ \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3} \qquad\qquad wybieranie \ \rightarrow \ \frac{2}{3} \tag{84}$$



Rys. 60

Patrząc na powyższy rysunek można łatwo zobaczyć, że $\frac{2}{3}$ może być interpretowane na cztery różne sposoby.

1) Jako **dzielenie** w tym przypadku 2 podzielone przez 3, a dokładniej stosunek liczbowy będący elementem transformującym operacji dzielenia, co jest uwidocznione strzałką w kolorze **niebieskim**.
2) Jako **wybieranie** w tym przypadku wybieramy 2 z 3ech, a dokładniej stosunek liczbowy będący elementem transformującym operacji wybierania, co jest uwidocznione strzałką w kolorze **czerwonym**.
3) Jako **element pewnego zbioru n-krotności**, który możemy zrzutować do punktu $k_n = \frac{\frac{2}{3}}{1}$(czerwony punkt). Zbiór ten reprezentowany jest przez oś w kolorze **zielonym**, łączącą wszystkie punkty należące do tego **zbioru n-krotności**.
4) Jako punkt, czyli konkretny **stosunek liczbowy pomiędzy** $\boldsymbol{wartością}$ **i** $\boldsymbol{miarą}$, reprezentowany przez **czarny** punkt $\frac{2}{3}$, który jest najbardziej poprawną i dokładną reprezentacją liczby.

16. Nierzeczywistość osi liczb rzeczywistych.

Przyjęta powszechnie interpretacja liczb oraz ułamków ogranicza się w ich interpretacji jedynie do powiązanych z nimi relacji krotności całkowicie pomijając ich różnorodność i prawdziwy sens.

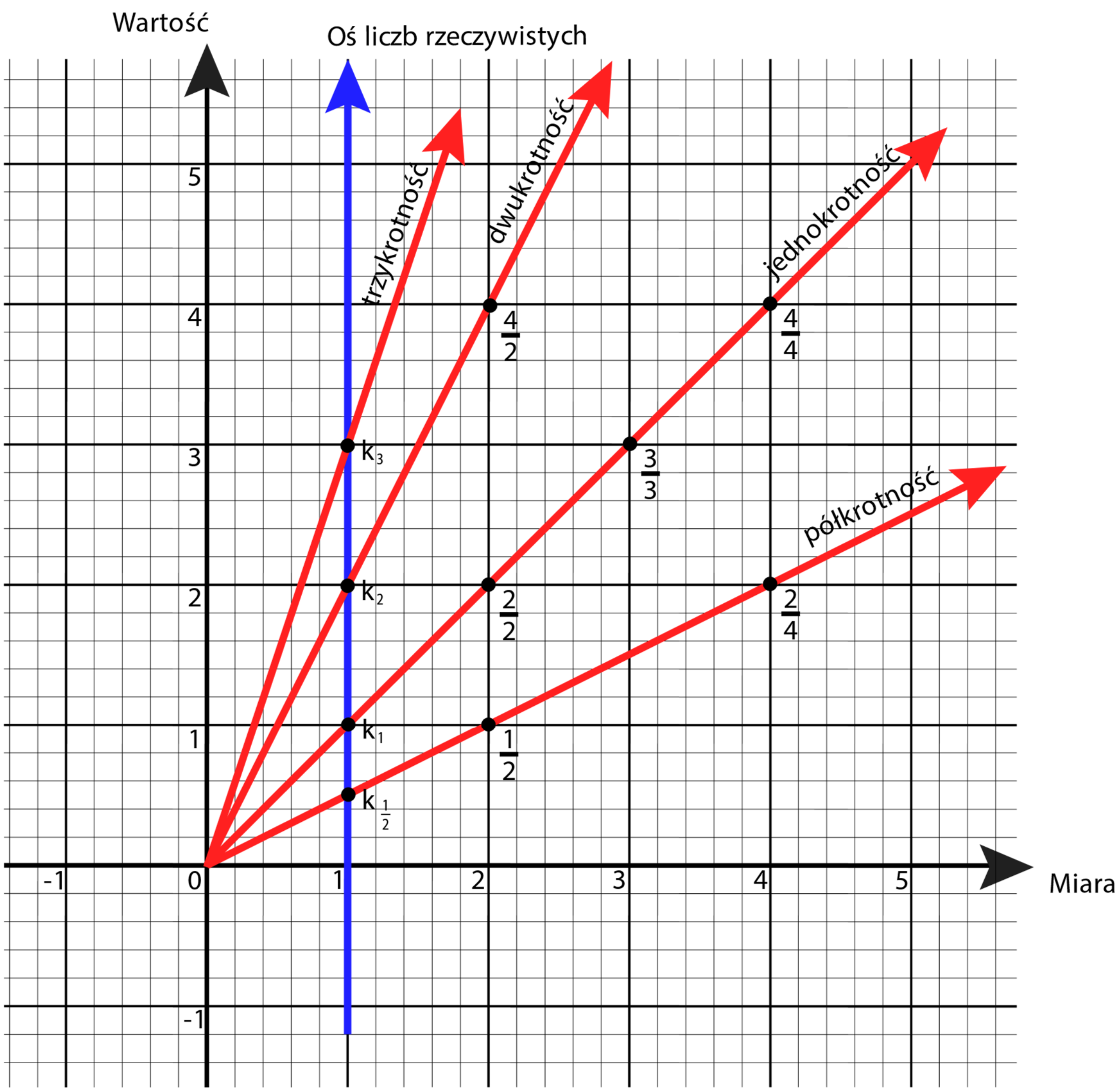
Należy zwrócić uwagę, że wszystkie punkty $k_n = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}}$ reprezentujące poszczególne n-krotności leżą na jednej linii. Linia ta to **oś liczb rzeczywistych**. Przyrównując do siebie wszystkie stosunki liczbowe (ułamki) postaci $\frac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{m}}$ współczesna matematyka sprowadza je jedynie do punktów postaci $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}}$. I tak np.

$$\dots\dots\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\dots..\frac{4}{4} = \frac{3}{3} = \frac{2}{2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1}} = 1$$

$$\dots..\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{1}} = 2$$

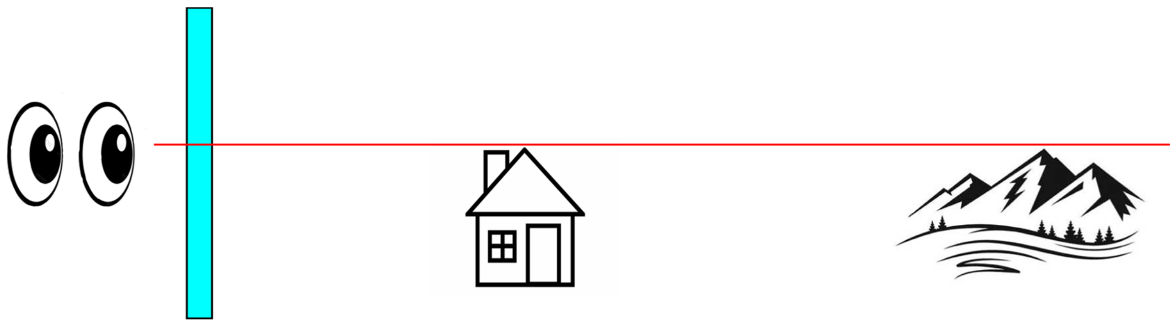
$$\dots\dots\frac{9}{3} = \frac{6}{2} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{1}} = 3$$



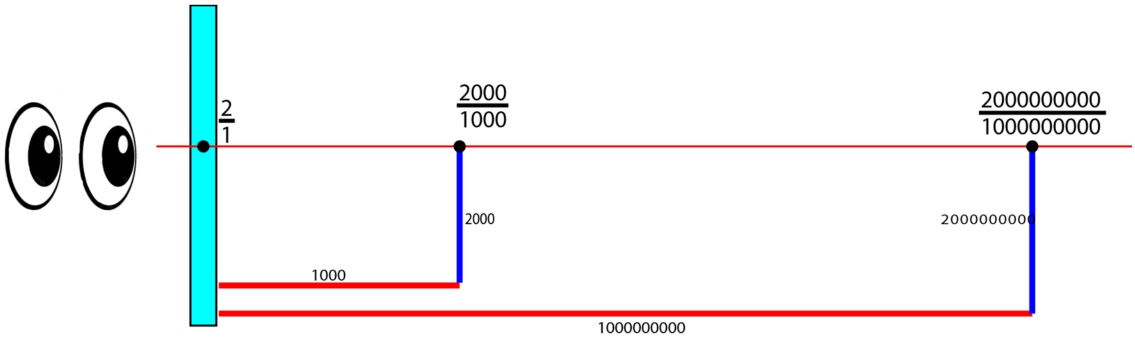
Rys. 61

Na rysunku powyżej przedstawiono w kolorze niebieskim klasycznie rozumianą **oś liczb rzeczywistych**. Wszystkie punkty leżące na tej osi odnoszą się do $\boldsymbol{miary} = \mathbf{1}$, to klasyczne rozumienie powoduje, że zazwyczaj w zapisie $miara = 1$ jest pomijana i zamiast pisać $\frac{x}{1}$ piszemy po prostu x. Łatwo również zauważyć, że to co wcześniej zdefiniowaliśmy jako relacje krotności, to nic innego tylko rzutowanie poszczególnych punktów na oś liczb rzeczywistych (kolor niebieski) wykonane z perspektywy zera. I tak np. punkt oznaczający $k_2 = \frac{2}{1}$ (nazywany w uproszczeniu 2) oznacza tak naprawdę wartość 2, względem miary 1 i reprezentuje relacje dwukrotności i wszystkie z nią związane ułamki zrzutowane na oś liczb rzeczywistych (jak np. $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$….). Jeżeli nie potraktujemy wszystkich liczb w sposób poprawny jako ułamków postaci $\frac{w}{m}$ czyli tak jak to przedstawiono na rysunku powyżej, dokonujemy **nieuprawnionego uproszczenia**, sprowadzając ich znaczenia jedynie do liczb rzeczywistych postaci $\frac{n}{1}$. Wtedy miejsce wszystkich ułamków postaci $\frac{2n}{n}$ (takich jak $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$ …) zostaje sprowadzone do jednego punktu $\frac{2}{1}$ na osi liczb rzeczywistych (oś niebieska). Choć każdy z tych ułamków w wyniku daje to samo $\frac{2}{1}$ to, poza tym, każdy z nich ma w sobie dodatkową informacje mówiącą bądź to o podziale czegoś przez coś, lub też o wybraniu czegoś z czegoś, bądź też po prostu o stosunku, ale w każdym przypadku innych liczb do siebie, choć ich proporcje w rezultacie są sobie równe. Oznacza to, iż mówiąc np. że $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ pomijamy fakt, że w każdym przypadku mówimy o podziale jakiejś liczby przez jakąś, pomijamy całą dokonaną w ten sposób transformację, a jedynie myślimy o jej wyniku.

Sytuacja ta przypomina oglądanie świata przez szybę. Tak jakbyśmy uważali, że wszystko to, co widzimy przez szybę (oś liczb rzeczywistych $\frac{x}{1}$), na tej szybie się znajduje, choć tak naprawdę znajduje się za nią. I tak na przykład góra, która znajduje się daleko może mieć rozmiar domu, który znajduje się blisko zupełnie tak samo jak $\frac{2000000000}{1000000000}$ może wydawać się tym samym, co $\frac{2000}{1000}$ bo w zasadzie na naszej „szybie” (oś liczb rzeczywistych) oba ułamki znajdują się w punkcie $\frac{2}{1}$.



Rys. 62



Rys. 63

Z powyższego rozumowania wynika, że oś liczb rzeczywistych wcale nie jest taka „rzeczywista". Nie „zawiera" ona w sobie wszystkich możliwych liczb, lecz jedynie pewne ich reprezentacje. Jest to również powód, dlaczego mamy tak duże problemy ze zrozumieniem „dzielenia przez zero". **Wszystkie liczby postaci $\frac{x}{0}$, nie mają swojej reprezentacji na osi liczb rzeczywistych** (85). Oś wyznaczona przez wszystkie te liczby $\frac{x}{0}$ **nie przecina się z osią liczb rzeczywistych, bo jest do niej równoległa** (jak to będzie pokazane na jednym z kolejnych wykresów)

$$\frac{x}{0} = \frac{?}{1} \tag{85}$$

17. Problemy z terminologią.

Z uwagi na zaproponowane wyjaśnienia, wydaje się, że istnieje konflikt w nazewnictwie pomiędzy przyjętą w matematyce terminologią, a zaproponowaną w niniejszej pracy. Pierwszy problem jest z "liczbami wymiernymi" (ang. "rational numbers"). Definicja z Wolfram MathWorld:

"Liczba wymierna to taka liczba, która może być wyrażona jako ułamek $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i q≠0."

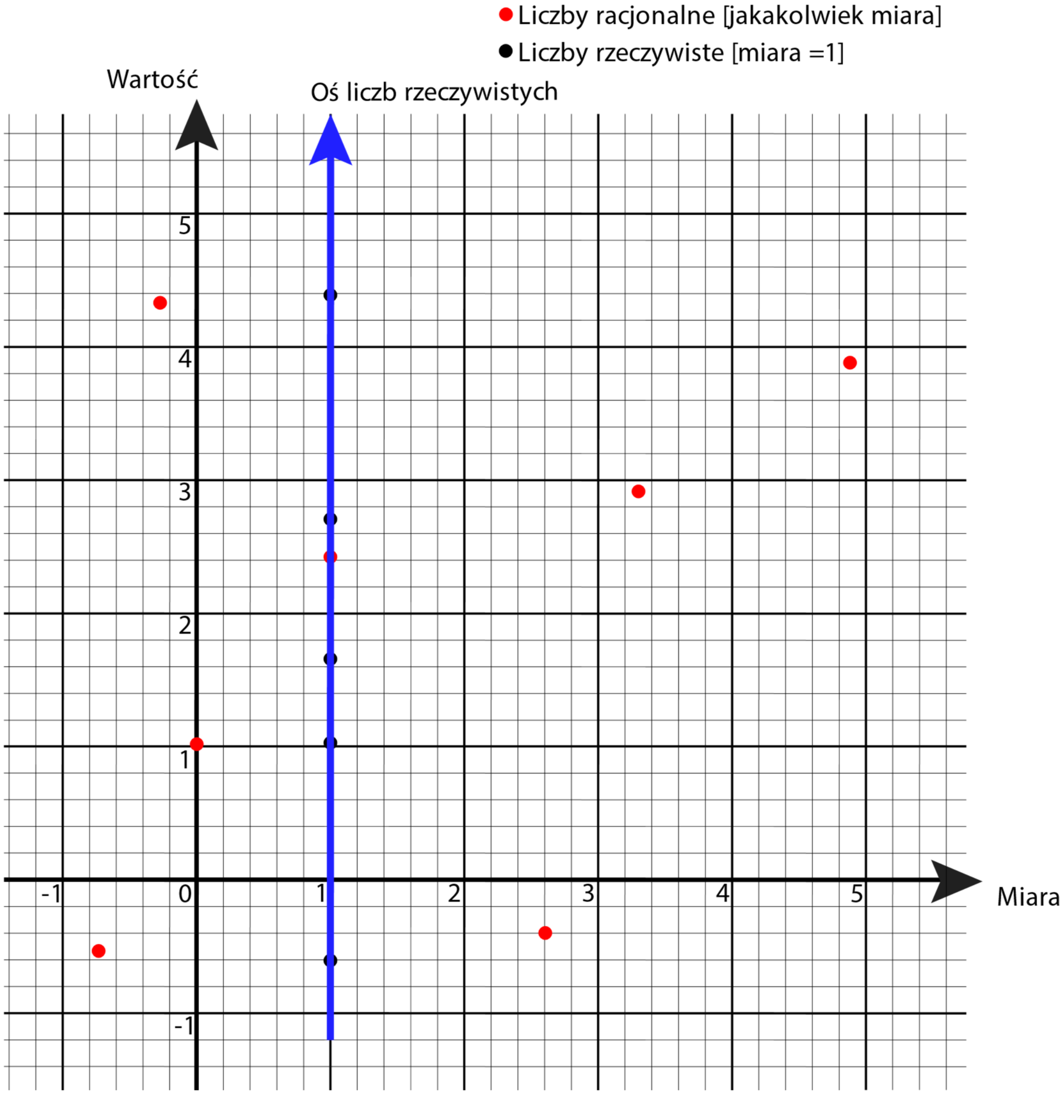
Zaprezentowana definicja jest ograniczona do liczb całkowitych dla p, q i nie pozwala, aby q było równe 0. Są to sztucznie narzucone ograniczenia i powinny być usunięte. Jako, że słowo „ratio" (z angielskiego stosunek liczbowy) nie oznacza jedynie ułamka $\frac{p}{q}$, ale również może być rozumiane jako logiczny, inteligentny, rozsądny i racjonalny. Dobrze by było użyć go do oznaczenia liczb w najszerszym, najpełniejszym znaczeniu. Proponuję rozszerzyć jego znaczenie (z języka angielskiego) i jednocześnie uprościć wprowadzając:

Liczba racjonalna - dowolna liczba w postaci ułamka $\frac{wartość}{miara}$.

Nie widzę żadnego konkretnego powodu, aby mianownik nie mógł być zerem. Nie widzę również powodu, aby licznik i mianownik musiał być liczbą całkowitą. Nowa definicja pozwoliłaby na to, aby wszystkie liczby mogły być reprezentowane przez stosunek $\frac{wartość}{miara}$, i aby można było nazywać je liczbami racjonalnymi. Również wszystkie punkty na wykresie reprezentującym relacje pomiędzy wartością i miarą można by wtedy nazywać liczbami racjonalnymi. Kontynuując tę logikę, liczby rzeczywiste powinny zostać zdefiniowane jako:

Liczba rzeczywista - dowolna liczba racjonalna, która ma $miarę = 1$, reprezentowana przez ułamek $\frac{wartość}{1}$.

Konsekwencją powyższych definicji jest to, że zbiór **liczb racjonalnych** byłby większy niż i zawierał w sobie zbiór **liczb rzeczywistych** jako podzbiór.



Rys. 64

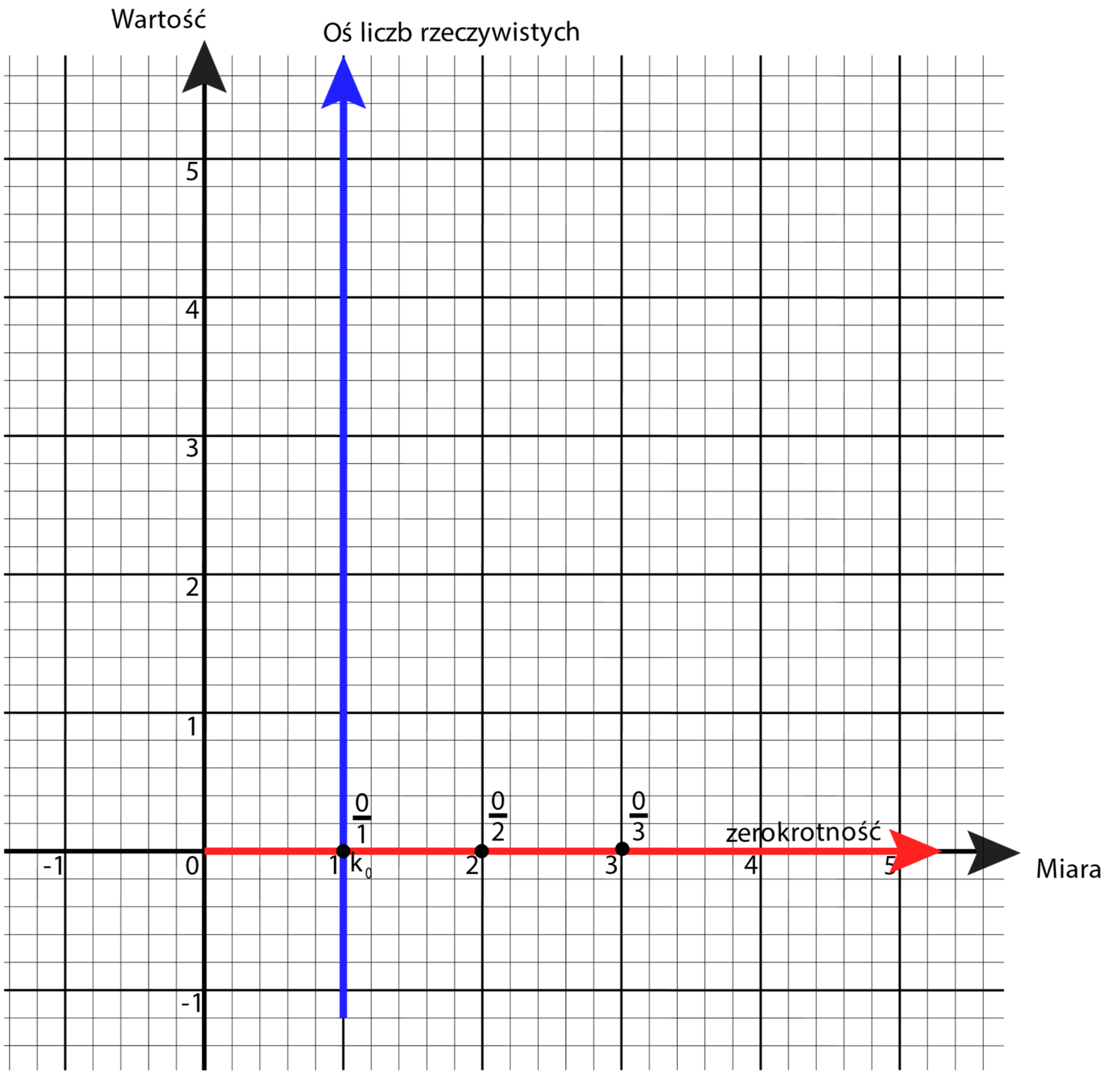
18. Problemy z liczbami.

Opisana rzutowanie całej płaszczyzny liczb racjonalnych rozumianych jako $\frac{wartość}{miara}$, $wartość$ względem pewnej $miary$ „bazowej", na standardowo rozumianą oś liczb rzeczywistych $\frac{wartość}{1}$ (Rys. 61) i potraktowanie wszystkich liczb zawsze względem $miary = 1$, ma cały szereg konsekwencji.

a) Błędnie przyjęto, że liczby racjonalne leżące na jednej „linii krotności" (jak np. $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$) są sobie równe, choć tak naprawdę, rozumiane w pełnym swoim znaczeniu, oznaczają one zupełnie różne rzeczy i mają zaledwie jedną cechę wspólną, krotność - projekcje na oś liczb rzeczywistych Rys. 61, (86). Wystarczy przemyśleć ich prawdziwy sens, aby zrozumieć różnice pomiędzy nimi.

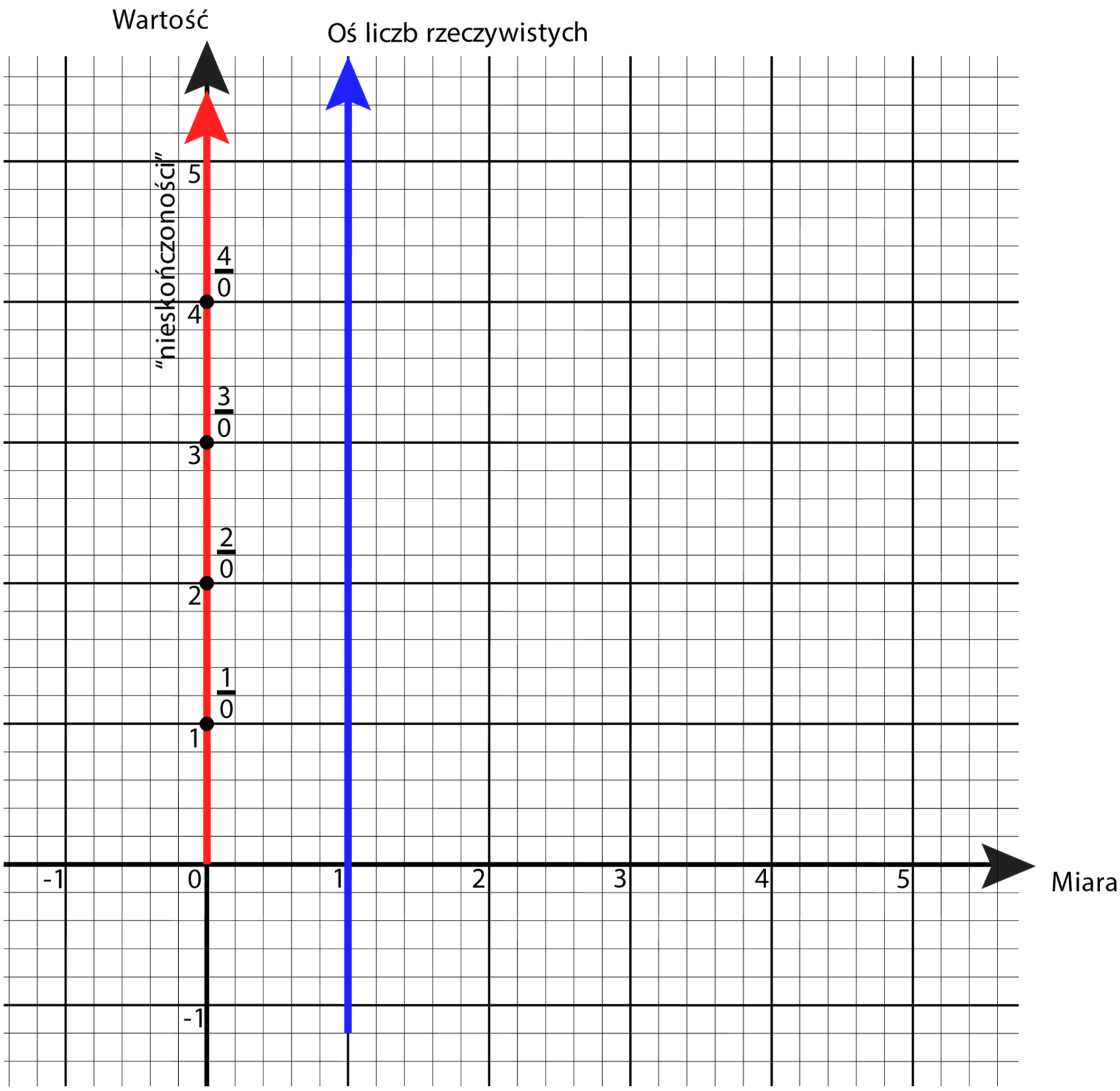
$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} \leftarrow \frac{2}{4} \tag{86}$$

b) Sprowadzono wszystkie liczy ułamkowe postaci $\frac{\mathbf{0}}{\boldsymbol{x}}$ (leżące na linii zerokrotności) do pojedynczej liczby $\frac{0}{1}$ lub prościej 0 co również przekłamuje prawdziwy obraz i prawdziwe ich znaczenie. Starając się zrozumieć sens liczb postaci $\frac{0}{x}$ łatwo jest to pojąć, gdyż reprezentują one po prostu pewien konkretny stosunek. Stosunek pomiędzy dwoma stanami pewnej transformacji, pierwszym początkowym, w którym dostępnych jest x elementów, a my po prostu transformujemy go do innego stanu końcowego, w którym tych elementów jest zero, nie ma ich wcale. Może to również oznaczać, że nie chcemy, nie oczekujemy, nie wybieramy żadnego z nich. Ale one początkowo dostępne były i mówiąc po prostu, że w rezultacie jest ich zero, tracimy tę informację o stanie początkowym. Nawet jeśli na końcu dostajemy zero to na początku było ich x. Niewątpliwie jest różnica kontekstu, jeżeli wybieramy zero elementów spośród np. dwóch, a zero spośród miliona, choć rezultat jest ten sam, wybraliśmy zero, czyli nie wybraliśmy nic.



Rys. 65

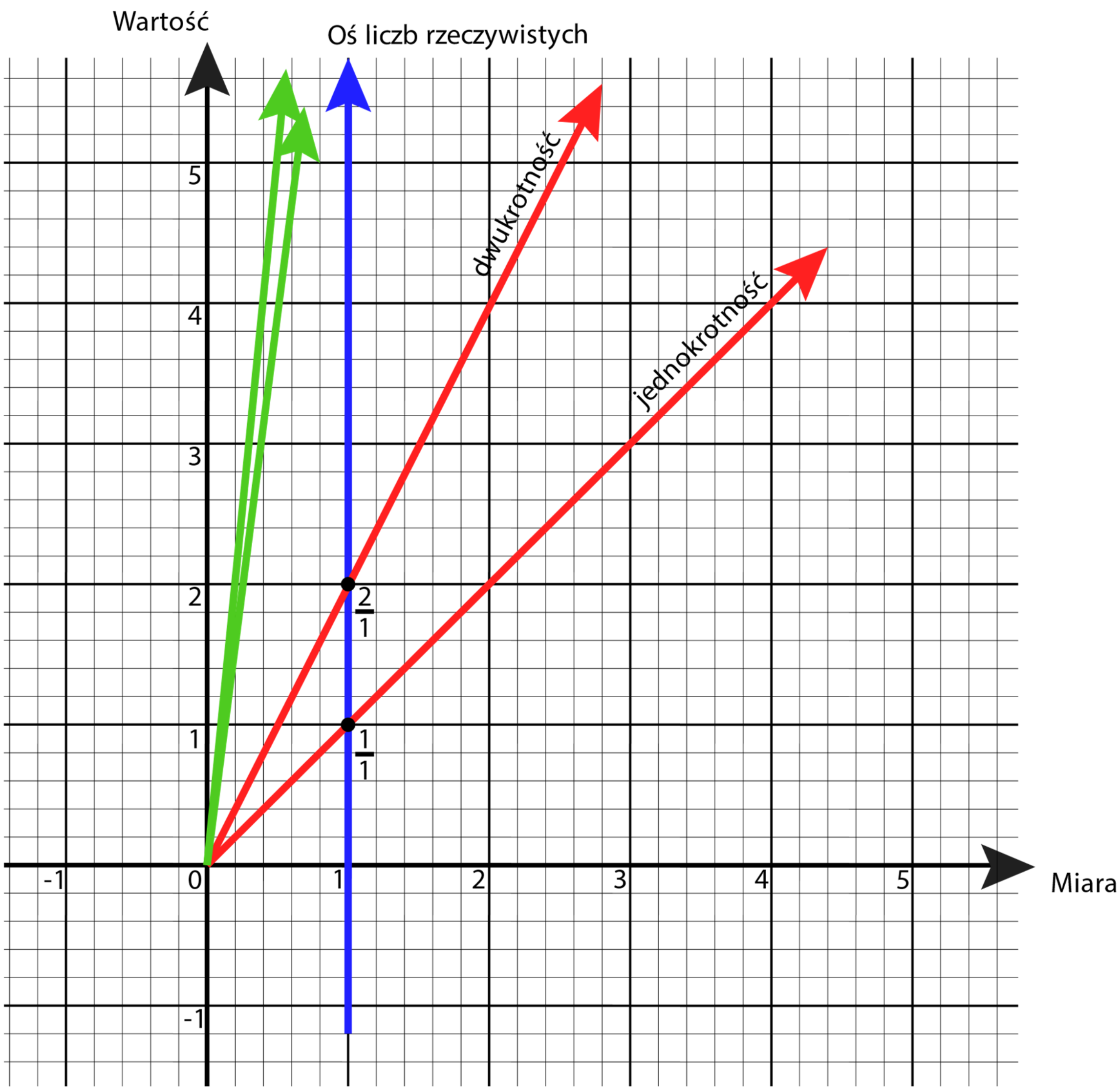
c) Zabroniono w sposób sztuczny dzielenia liczb przez zero. Powodem była nieumiejętność zrozumienia, że liczby postaci $\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{0}}$ są zupełnie normalnymi liczbami racjonalnymi, czyli liczbami w swojej naturalnej postaci $\frac{warto\acute{s}\acute{c}}{miara}$, reprezentującymi $warto\acute{s}\acute{c}$ = x względem bazowej $miary$ =0. Sens takich liczb jest taki, że jest to stosunek pomiędzy dwoma stanami pewnej transformacji, stanem końcowym reprezentowanym przez $warto\acute{s}\acute{c}$ (w tym przypadku x) i stanem początkowym reprezentowanym przez $miar\k{e}$ (w tym przypadku 0). Zupełnie tak jakbyśmy chcieli uzyskać, oczekiwali, chcieli wybrać **x elementów**, jednak ilość dostępnych elementów jest po prostu **zero**. Co nie zmienia faktu, że chcielibyśmy uzyskać **x** takich elementów. Dzielenie przez zero zostało zabronione, gdyż oś stworzona z wszystkich liczb postaci $\frac{x}{0}$ **nie przecina się** nigdy z osią liczb rzeczywistych i **nie można było dokonać jej rzutowania na tę oś** tak jak to zrobiono z wszystkimi pozostałymi liczbami racjonalnymi. Zostały one przyrównane do siebie w ramach tej samej relacji krotności i sprowadzone do ogólnej postaci $\frac{x}{1}$, ich reprezentacji na osi liczb rzeczywistych. W przedstawionej interpretacji nie ma żadnego problemu z tym, aby wskazać liczbę np. $\frac{3}{0}$, a nawet stwierdzić, że jest ona czymś innym, niż liczba $\frac{1}{0}$.



Rys. 66

19. Inne konsekwencje postrzegania liczb ułamkowych przez pryzmat ich krotności.

Postrzeganie liczb przez pryzmat ich krotności jest w nas bardzo głęboko zakorzenione. Jego skutkiem (a być może przyczyną) jest fakt, iż najbardziej odczuwamy zmiany ilościowe w pobliżu jednokrotności, tzn. różnica pomiędzy jednokrotnością, a dwukrotnością jest dla nas stosunkowo duża i zauważalna, podczas gdy różnica pomiędzy tysiąckrotnością, a tysiącjedenkrotnością już nie, choć w rzeczywistości są one jednakowo duże. Przykład z życia: To czy ktoś ma jeden samochód czy dwa wydaje się, że robi stosunkowo dużą różnicę natomiast to czy ktoś ma tych samochodów tysiąc, czy tysiąc jeden to zdaje się już takiej różnicy nie robić, choć tak naprawdę różnica w obu przypadkach jest jednakowo duża – jeden samochód. Poniższy wykres pokazuje w przybliżeniu na czym polega problem.

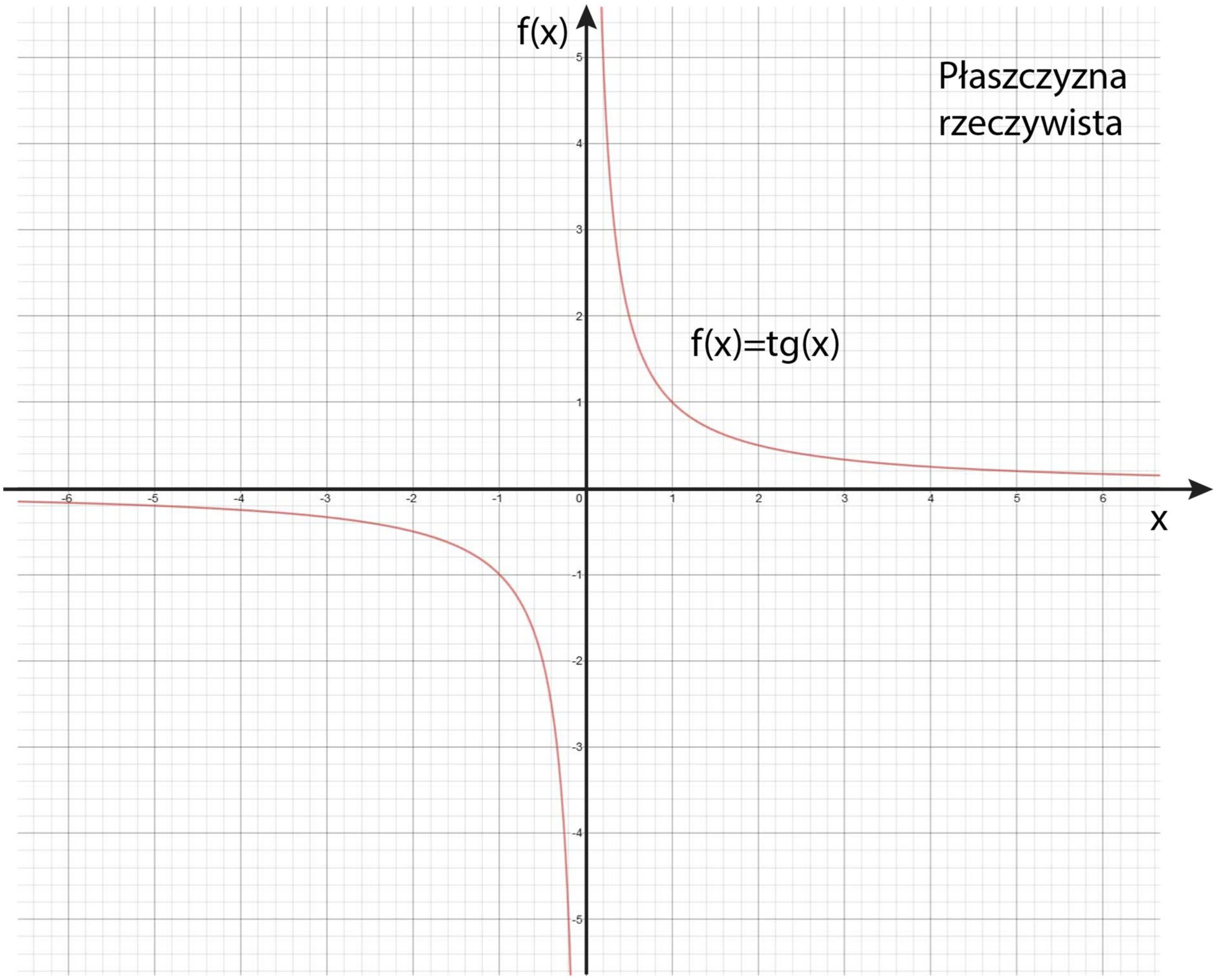


Rys. 67

Linie czerwone pokazują, jak postrzegamy różnicę krotności pomiędzy $\frac{1}{1}$, a $\frac{2}{1}$ (czyli np. jednym samochodem, a dwoma) kąt pomiędzy tymi liniami jest duży. Linie zielone pokazują, jak postrzegamy różnicę krotności pomiędzy $\frac{1000}{1}$, a $\frac{1001}{1}$ (czyli 1000 samochodów, a 1001 samochodów) kąt pomiędzy liniami zielonymi. W rzeczywistości w obu przypadkach różnica ta jest identyczna i wynosi jeden (jedno auto).

20. Graficzna reprezentacja funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w przypadku liczb rzeczywistych i liczb racjonalnych.

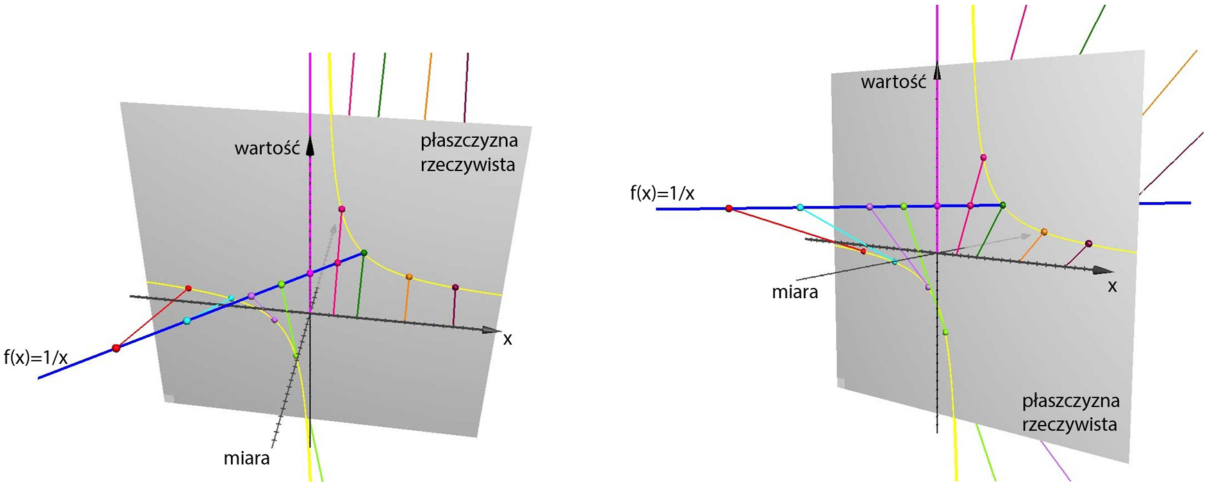
Klasyczna reprezentacja funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, w formie jaką wszyscy dobrze znamy ze szkoły jest zaprezentowane na wykresie Rys. 68. Ma ona punkt nieciągłości dla x=0. Reprezentacja ta jest ograniczona jedynie do liczb rzeczywistych.



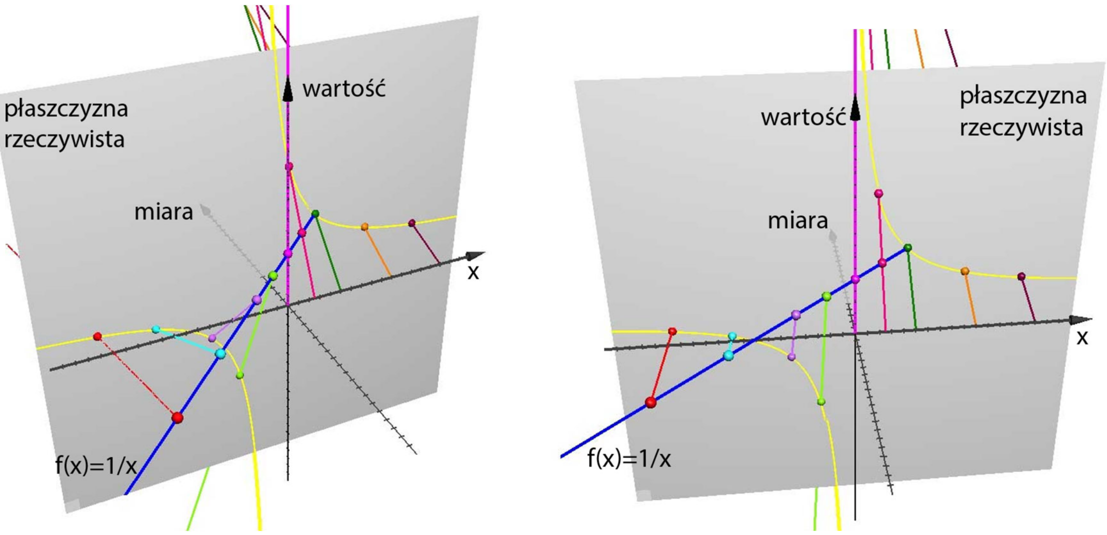
Rys. 68

Na następnych wykresach widzimy reprezentację tej samej funkcji w zakresie liczb racjonalnych. Oznacza to, że wartość funkcji dla każdego x będzie reprezentowana przez stosunek $\frac{wartość}{miara}$ w tym przypadku będzie to $\frac{1}{x}$. Dla lepszego zrozumienia dokładnie ten sam trójwymiarowy wykres jest zaprezentowany w różnych perspektywach. W liczbach racjonalnych wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ reprezentowany jest przez linię prostą oznaczoną na wykresach kolorem **niebieskim**. Wszystkie linie w wielu różnych kolorach reprezentują różne relacje n-krotności i mapują one poszczególne punkty z wykresu **naszej funkcji** na płaszczyznę rzeczywistą (miara=1).

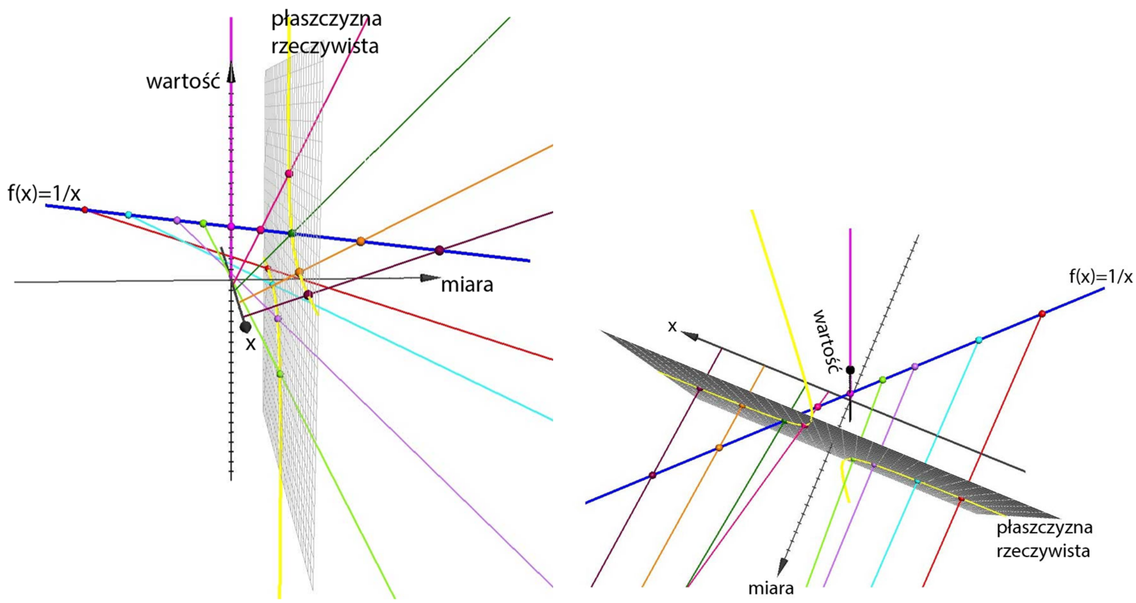
Zwróćmy uwagę, że jedyny punkt, który nie ma swojej reprezentacji na płaszczyźnie rzeczywistej to punkt dla **x=0**. Linia, która przechodzi przez ten punkt, jest równoległa do płaszczyzny rzeczywistej i się z nią nie przecina.



Rys. 69



Rys. 70

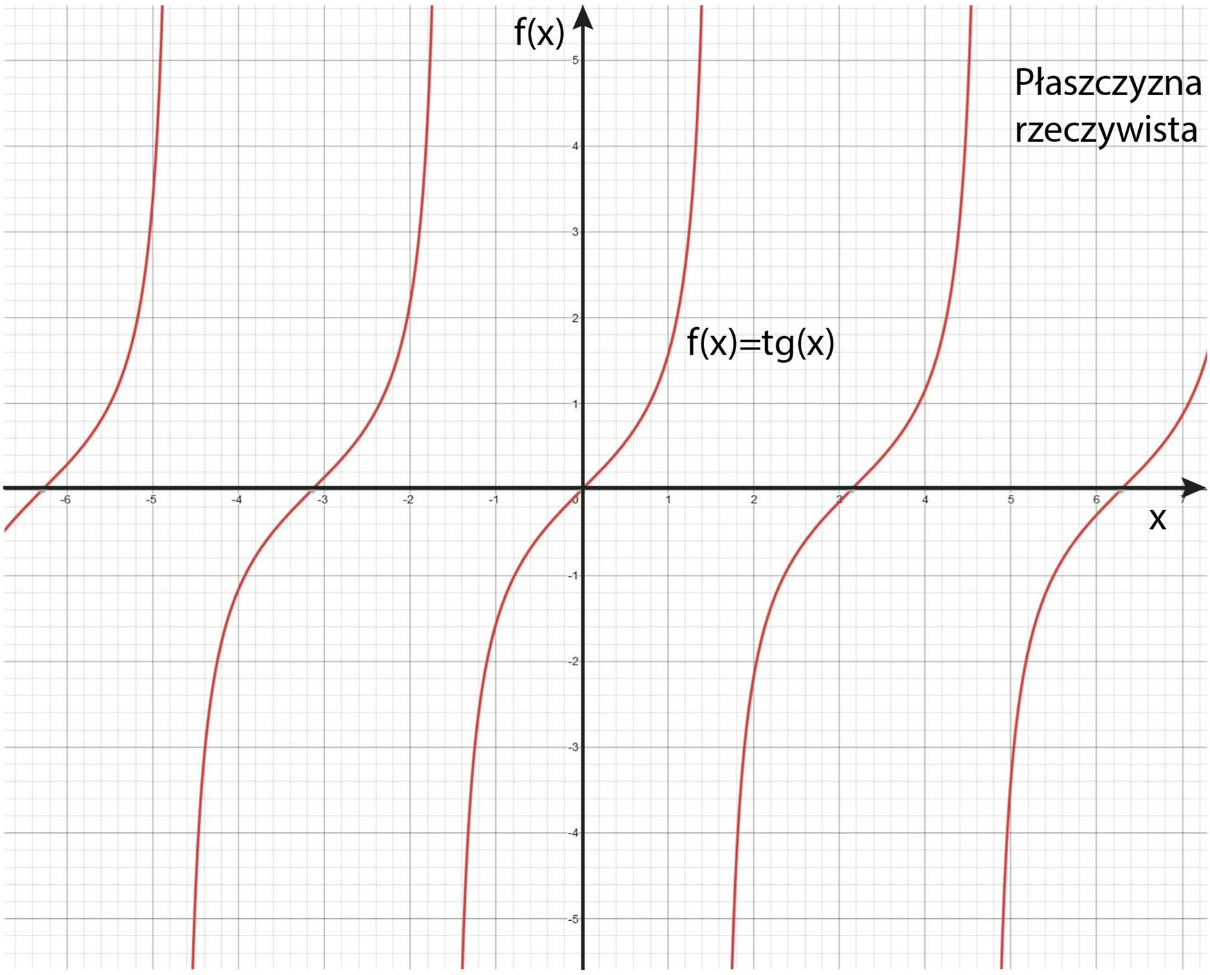


Rys. 71

Z przedstawionych wykresów możemy wyciągnąć wniosek, że wykresem **funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ jest linia prosta w zakresie liczb racjonalnych, która istnieje dla każdego x!** Mapowanie tej funkcji na liczby rzeczywiste (miara=1) zaburza jej obraz do postaci, którą znamy ze szkoły z jednym punktem nieciągłości dla x=0. Punk nieciągłości w naszym mapowaniu bierze się stąd, że nie jesteśmy w stanie zmapować punktu dla **x=0** z naszego wykresu na płaszczyznę rzeczywistą.

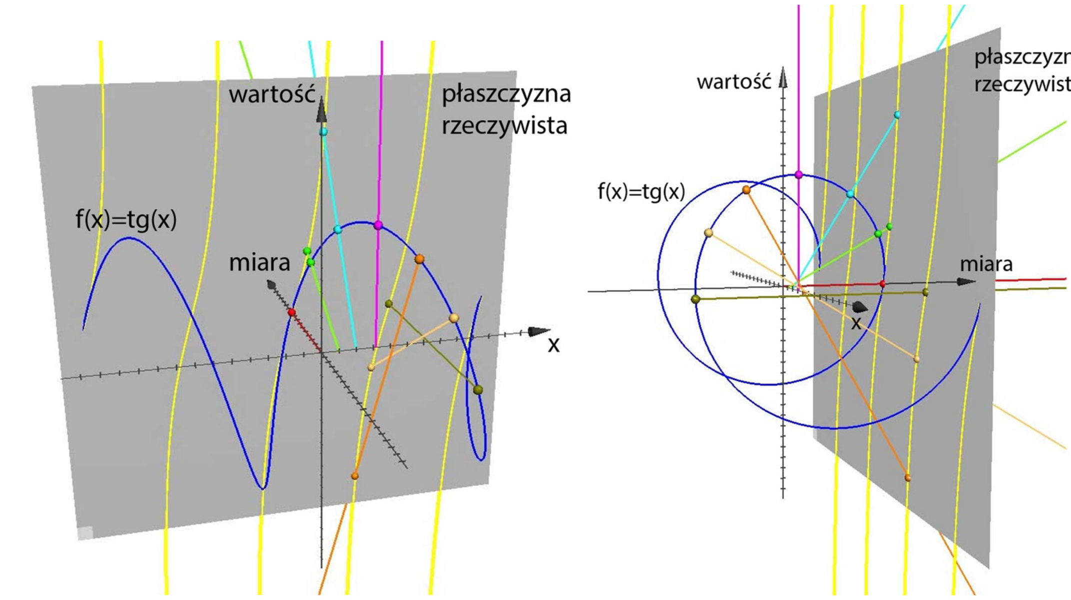
21. Graficzna reprezentacja funkcji $f(x) = tg(x)$ w liczbach rzeczywistych i liczbach racjonalnych.

Podobna sytuacja jak w poprzednim przykładzie ma miejsce w przypadku funkcji $f(x) = tg(x)$. Tradycyjny wykres tej funkcji zaprezentowany jest poniżej. Pokazuje on jak funkcja $tg(x)$ wygląda w zakresie liczb rzeczywistych.

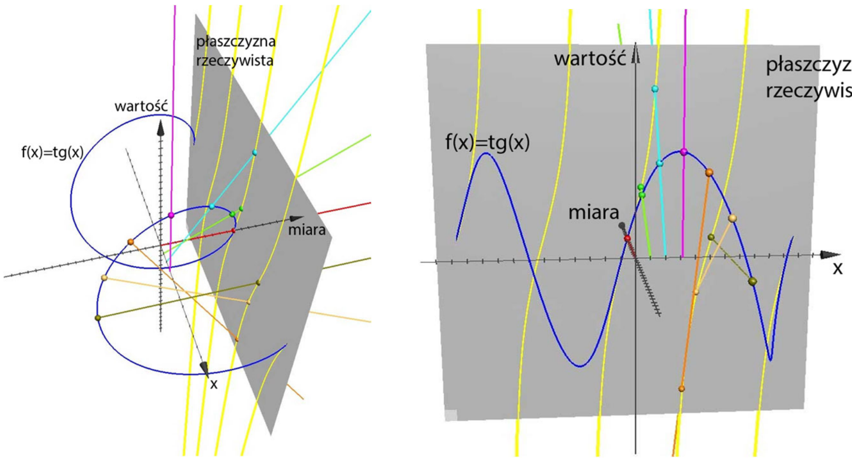


Rys. 72

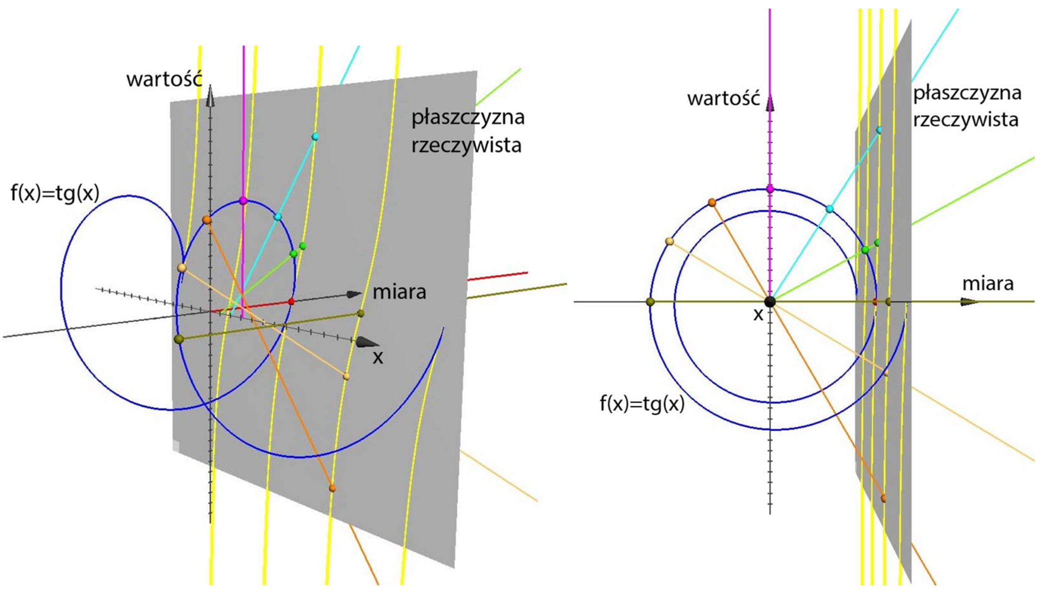
Sprawdźmy jak funkcja ta będzie wyglądać w zakresie liczb racjonalnych. Na kilku kolejnych wykresach przedstawiono jej wykres widziany z różnych perspektyw. Funkcja $f(x) = tg(x)$ jest reprezentowana przez **niebieską spiralę**. Wszystkie kolorowe linie to poszczególne n-krotności, które mapują punkty z wykresu naszej funkcji na płaszczyznę rzeczywistą (miara=1). Tu znowu dla **x**, dla których mapowanie to nie jest możliwe, na płaszczyźnie rzeczywistej pojawiają się punkty nieciągłości.



Rys. 73



Rys. 74



Rys. 75

22. Obraz świata z perspektywy liczb ułamkowych.

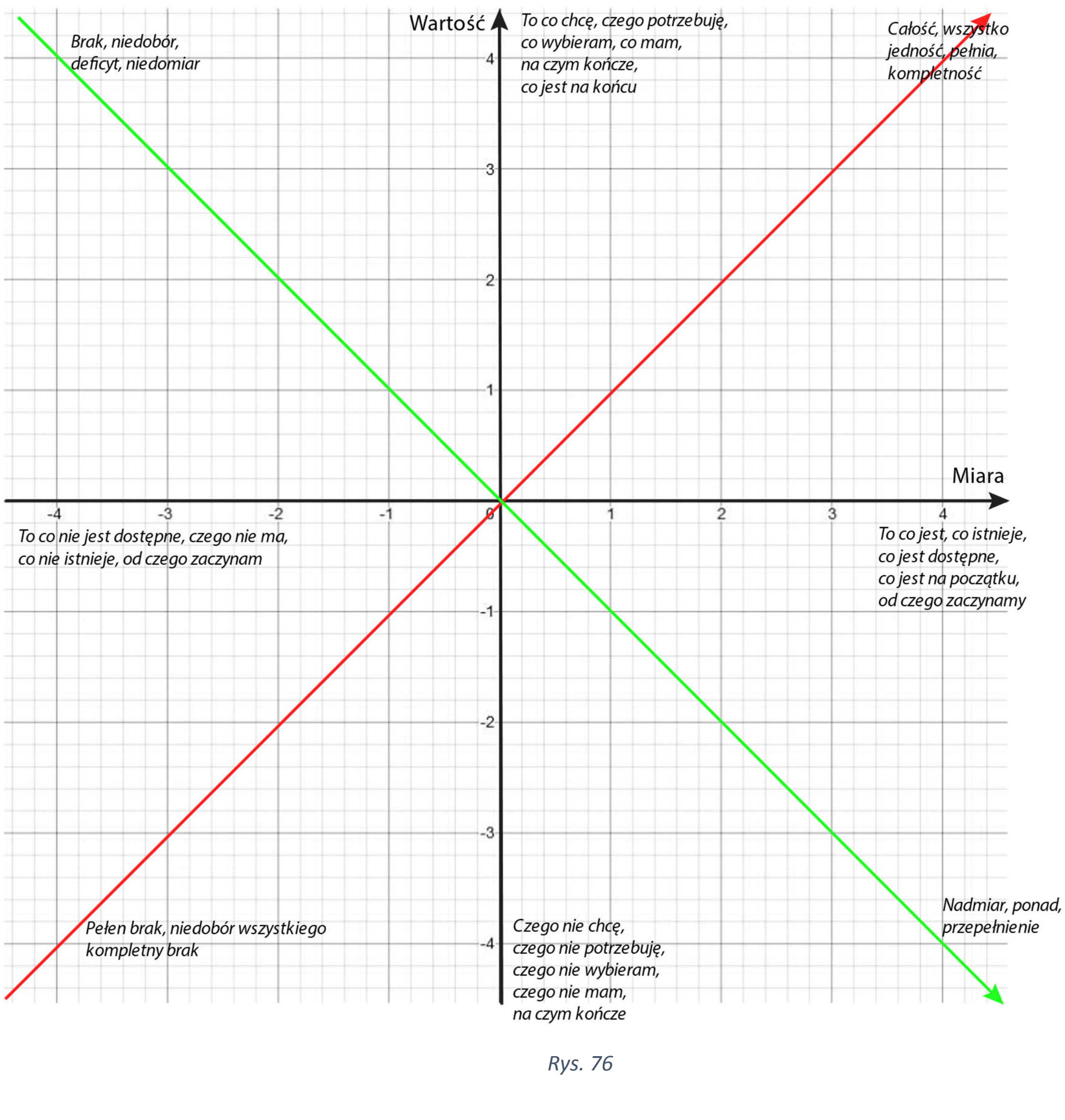
Jeżeli popatrzymy na wszystkie liczby poprzez ich prawdziwą ułamkową, racjonalną naturę, że są one zawsze w postaci stosunku liczbowego $\frac{wartość}{miara}$, albo inaczej nazywając, stosunkiem pomiędzy $\frac{tym\ co\ jest\ wynikiem\ transformacji}{tym\ co\ jest\ początkiem\ transformacji}$ możemy to zobrazować graficznie otrzymując pewne nowe elementy i zależności.

Zwróćmy uwagę, że liczba przedstawiana jako ułamek, stosunek jej $wartości$ do pewnej $miary$ bazowej może być też rozumiana jako stosunek pomiędzy efektem transformacji, a jej początkiem.

$wartość$ - możemy również interpretować jako koniec transformacji, efekt końcowy, to co chcemy otrzymać jako efekt transformacji, to co wybieramy, to co oczekujemy, to co dostajemy, to co jest na końcu itd., itp.

Natomiast,

$miarę$ – możemy również interpretować jako, to od czego zaczynamy, początek transformacji, element przekształcany, element transformowany, to z czego wybieramy, to co jest dane, to co jest na początku.



Rys. 76

23. Podsumowanie.

Transformacja jest operacją przekształcającą parę liczb w inną parę liczb. Dzielenie i mnożenie są jedynie pewnymi szczególnymi formami transformacji. Inną formą transformacji jest również wybieranie. Transformacja może być całkowita jak w przypadku mnożenia i dzielenie, lub niecałkowita jak w przypadku wybierania. W każdej transformacji możemy wskazać stosunek pomiędzy rezultatem tej transformacji, a elementem, który tej transformacji ulega. Stosunek ten stanowi również element dokonujący transformacji. Przekształca on element początkowy transformacji w element wynikowy. Każda liczba w swojej najbardziej naturalnej postaci jest stosunkiem liczbowym pomiędzy pewną wartością, a pewną miarą podstawową, do której się ta wartość odnosi. Współczesna matematyka dokonuje nieuprawnionego uproszczenia sprowadzając wszystkie liczby racjonalne (czyli reprezentowane przez stosunek wartości do miary) do ułamka o mianowniku 1. W ten sposób całe bogactwo liczb racjonalnych jest spłaszczane do osi liczb rzeczywistych, powoduje to zrównanie ze sobą liczb racjonalnych, które reprezentują kompletnie różne transformacje, gubiąc ich prawdziwy sens. Skutkuje to również tym, że współczesna matematyka nie potrafi sobie poradzić z dzieleniem przez zero, gdyż stosowne liczby postaci $\frac{x}{0}$ nie mają swojej reprezentacji na osi liczb rzeczywistych i nie można ich sprowadzić do postaci ułamka o mianowniku 1. Liczby racjonalne postaci $\frac{x}{0}$ mówią nam o stosunku liczbowym pomiędzy x i 0, o transformacji, która rozpoczyna się od 0 i kończy x-em. Możemy powiedzieć, że mówią one o „stworzeniu" lub „oczekiwaniu". Natomiast liczby postaci $\frac{0}{x}$ reprezentują transformację, która kończy się zerem, a zaczyna x-em. Możemy powiedzieć, że mówią one o „anihilacji" lub „braku potrzeby".

24. Zakończenie.

Przedstawione tu rozumienie liczb, ich relacji, transformacji, dzielenia, mnożenia, wybierania niesie za sobą cały szereg konsekwencji i otwiera zupełnie nowe możliwości rozumienia matematyki, jak również ma istotny wpływ na rozumienia fizyki i innych pokrewnych dziedzin nauki. Praca niniejsza pozwala zrozumieć zagadnienie dzielenia przez zero, a przez to prowadzi nas do zupełnie nowego sposobu rozumienia liczb. Myślę, że porządkuje ona jeden z fundamentów matematyki, ale ponieważ wcześniej był on w tym miejscu wadliwy, trudno przewidzieć wszystkie konsekwencje jakie ta zmiana może pociągać za sobą, wobec wszystkiego co zostało na tym fundamencie wybudowane.

„To nie jest koniec, to nawet nie jest początek końca.

Ale prawdopodobnie koniec początku."

Winston Churchill