# ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЦЕЛЫХ, МЕРОМОРФНЫХ И СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО МАЛЫМ МНОЖЕСТВАМ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

*Б.Н. Хабибуллин*
(Уфа, БашГУ; khabib-bulat@mail.ru)

В теории роста целых и мероморфных функций $f$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ нередко возникала необходимость в оценках интегралов с подынтегральным выражением

$$\mathsf{M}_{\ln^+|f|}(r), \quad \text{где } \mathsf{M}_u(r) := \sup_{|z|=r} u(z),\ u^+ := \max\{0.u\},$$

возможно, дополненным некоторой весовой функцией-множителем. Такие оценки относительно множества интегрирования можно отнести к одному из следующих двух типов: по интервалам или дугам на луче или окружности или же по малым подмножествам на таких интервалах или дугах. Среди исходных результатов первого типа —

**Теорема Р. Неванлинны** ([1], [2; гл. 1, теорема 7.2]). *Для мероморфной функции $f$ на $\mathbb{C}$ с характеристикой Неванлинны $T_f$ и для числа $k>1$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{r}\int_1^r \mathsf{M}_{\ln^+|f|}(t)\mathrm{d}t \leq C(k)T_f(kr,f), \quad r\geq 1,$$

*где число $C(k)>1$ зависит только от $k$.*

Истоки второго типа оценок — лемма Эдрея – Фукса о малых дугах [3; **2**, лемма III, **9**], [2; гл. 1, теоремы 7.3, 7.4], а также приведённая в [4] без доказательства

**Лемма Гришина – Содина о малых интервалах**([4; лемма 3.1]). *Пусть в условиях Теоремы Р. Неванлинны $\lambda$ — линейная мера Лебега на вещественной оси $\mathbb{R}$ и $E\subset[1,r]\subset\mathbb{R}$ — $\lambda$-измеримое подмножество. Тогда*

$$\frac{1}{r}\int_E \mathsf{M}_{\ln^+|f|}(t)\mathrm{d}t \leq A\frac{k}{k-1}\Bigl(\frac{\lambda(E)}{r}\ln\frac{2r}{\lambda(E)}\Bigr)T_f(kr),$$

*где $A$ — абсолютная постоянная.*

Версия леммы Гришина – Содина о малых интервалах для *субгармонических функций конечного порядка* —

**Теорема Гришина – Малютиной о малых интервалах** ([5; теорема 8]). *Пусть $v \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция уточнённого порядка $\rho$ и $E \subset [1, R]$ — $\lambda$-измеримое множество. Тогда для некоторого числа $M$, не зависящего от $r, \theta, E$, имеет место неравенство*

$$\int_E \bigl|v(te^{i\theta})\bigr| \mathrm{d}t \leq M \frac{\lambda(E)}{r} \ln \frac{4r}{\lambda(E)}\, r^{\rho(r)+1}.$$

Для $\lambda$-измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ и $p \in [1, +\infty]$ через $L^p(E)$ обозначаем *$L^p$-пространство* функций $f\colon E \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{L^p(E)} := \Bigl(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\lambda\Bigr)^{1/p}$ при $p < +\infty$ и с нормой *существенная верхняя грань* $\operatorname*{ess\,sup}_E |f|$ на $E$ при $p = +\infty$.

Существенное обобщение и развитие Теоремы Гришина – Малютиной о малых интервалах уже при $p = +\infty$ —

**Теорема о малых интервалах с весом.** *При любом значении $p \in (1, +\infty]$ и при значении $q$, определяемом из равенства $1/p + 1/q = 1$, для любого числа $k > 1$ существует такое число $A_p(k) \geq 1$, что для любого числа $R > 0$, для любого $\lambda$-измеримого множества $E \subset [0, R]$, для любой функции $g \in L^p(E)$ и для любой субгармонической функции $v$ со значением $v(0) \geq 0$ имеет место неравенство*

$$\int_E \mathsf{M}_{|v|} g \,\mathrm{d}\lambda \leq A_p(k) \mathsf{M}_v(kR) \|g\|_{L^p(E)} \bigl(\lambda(E)\bigr)^{1/q} \ln \frac{e^q R}{\lambda(E)}.$$

Из Теоремы о малых интервалах с весом уже при $p = +\infty$, $g \equiv 1$ и $v := \ln|f|$ из известных вариантов определения характеристики Неванлинны и её взаимосвязей с другими характеристиками роста мероморфных функций легко получаются Теорема Р. Неванлинны и Лемма Гришина – Содина о малых интервалах. Более того, равномерный характер оценки в ней позволяет получить многомерные версии Теоремы о малых интервалах с весом для разностей плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^n$ и для мероморфных функций в $\mathbb{C}^n$.

Версия Теоремы о малых интервалах с весом для случая $p = +\infty$ принята к печати [6]. Её варианты с $p \in (1, +\infty]$ и с применениями к плюрисубгармоническим и мероморфным функциям в $\mathbb{C}^n$, а также к разностям субгармонических функций в $\mathbb{R}^n$ готовятся для отправки в печать.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

## Литература

1. *Nevanlinna R.* Le théoremè de Picard – Borel et la théorie des fonctions méromorphes Paris: Gauthier-Villars, 1929, Pp. 171.

2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970, 591 с.

3. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* Bounds for number of deficient values of certain classes of meromorphic functions // Proc. London Math. Soc. 1962, V. 12, P. 315–344 .

4. *Гришин А. Ф., Содин М. Л.* Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения Харьков: Вища школа, 1988, вып. 50, С. 47–61.

5. *Гришин А. Ф., Малютина Т. И.* Новые формулы для индикаторов субгармонических функций // Матем. физ., анал., геом. 2005, Т. 12, вып. 1, С. 25–72.

6. *Габдрахманова Л. А., Хабибуллин Б. Н.* Одна теорема о малых интервалах для субгармонических функций // Известия вузов. Математика, 2020 (принято к печати).