Equation of a wave in Galilean space

Valery Timin

(January 22, 2021)

Russia, RME

This paper is devoted to the equations of propagation of harmonic waves in one of the inercial system of Galilean space-time, which can be taken as an absolute counting system for waves. The equations of wave propagation in the case of infinite spaces are derived.

In addition to waves, there may also exist non-wave objects whose speed of movement is not limited by the speed of sound. The word "relativistic"is hardly used. This is the next level of abstraction of the independent existence of the wave.

The word "Galilean" is very often used in the work. This word is the main thing in this work. Galilean space, Galilean standard, Galilean metric. Other main phrases are associated with the word "wave" – wave in Galilean space, wave standard, wave metric, Galilean WS.

(Translated by Yandex Translator Яндекс–Переводчик)

Данная работа посвящена уравнениям распространения гармонических волн в одном из ИСО галилеева пространства–времени, которое можно принять как абсолютная система отсчета (АСО) для волн. Выведены уравнения распространения волн в случае бесконечных, неограниченных размерами пространств.

Кроме волн, в ней могут существовать и не волновые объекты, скорость движения которых не ограничена скоростью звука. Практически не используется слово "релятивистское". Это – следующий уровень абстракции самостоятельного существования волны.

В работе очень часто используется слово "галилеево". Именно это слово – главное в этой работе. Галилеево пространство, галилеев эталон, галилева метрика. Другие главные словосочетания связаны со словом "волна" – волна в галилеевом пространстве, волновой эталон, волновая метрика, галилеево ВП.

Оглавление

1. Уравнение волны в галилеевом пространстве 2
  1. Выбор модельного пространства 2
  2. Уравнение волны и ее параметры 2
  3. Особенности уравнения волны 5
  4. Инварианты волнового уравнения 7
  5. Формы записи волновых уравнений 8
  6. Расшифровки значений параметров уравнения волны 10
2. Рассмотрение различных случаев взаимного расположения источника и приемника в ГП 11
  7. Уравнение изотропной волны АИСО в ИСО 11
  8. Уравнение волны в системе движущегося в АИСО источника и ее параметры 12
  9. Движение ИСО перпендикулярно к направлению распространения волны 13
  10. Уравнение волны при движущихся источнике и приемнике 14
  11. Движение источника перпендикулярно к направлению распространения волны 15
  12. Интерференция волн 15

Сокращения и другие соглашения 17

Литература 18

1. Уравнение волны в галилеевом пространстве

Расстояние между любыми двумя точками ГП можно измерить, приложив галилеевы линейки между этими двумя точками в одно и то же галилеево время, а время – с помощью галилеевых часов (устройство этих эталонов не является задачей этой работы). Основное свойство галилеевых эталонов – независимость их параметров от скорости с.о., в которой они используются: независимо от состояния взаимного движения результат измерения будет одним и тем же. Основное свойство ГП – инвариантность "плоскости" одновременности, что выражается в неизменности координаты "время" при галилеевых преобразованиях координат.

А если их нет, но есть только волны и их генераторы?

1. Выбор модельного пространства

Практической физической моделью для применения (использования) этих слов и словосочетаний является неподвижная сплошная (воздушная, жидкая, твердая) среда, в которой распространяется волна, а то, где находится эта "воздушная" среда, есть пустое абсолютное галилеево пространство. Само по себе эта среда не является абсолютной инерциальной системой отсчета (АИСО), но для распространяющихся волн как самостоятельных сущностей при вложении в галилеево пространство это настоящее галилеево АИСО. Волна в среде в галилеевом пространстве может распространяться только с одной определенной скоростью – скоростью звука. После того, как определены волны как сущности, их можно рассматривать отдельно от ее основы, забыть о существовании материальной основы для ее существования, оставив только существенные моменты этого факта. В этом случае волна как самостоятельный объект само определяет АИСО. Галилеево пространство с вложенной в нее АИСО допускает определение параметров АИСО с использованием волновых эталонов.

Физическое модельное пространство ВП – сплошная среда со свойствами абсолютности АИСО, в котором распространяются гармонические волны.

2. Уравнение волны и ее параметры

Волна формально является периодической функцией своего параметра:

$$A(q) = \sin\varphi(q)$$

волнового и функционально волна в одномерном однородном ПВ t "распространяется" в

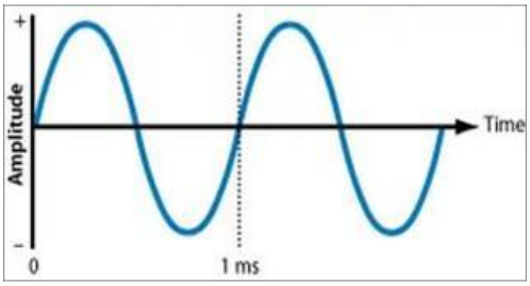

Рисунок 1.1

График синусоидальной волны.

соответствии с гармоническим уравнением

$$A = \sin\varphi = \sin 2\pi n = \sin(\omega t + \varphi_s),$$
$$\varphi = \omega t + \varphi_s. \tag{1.1}$$

где $\varphi(q)$ – значение фазы волнового поля в этой же точке,

φ_s – начальная фаза волны в начале с.о.,

n – количество длин волн.

Процесс существования волн в ПВ сам по себе обладает инвариантными параметрами. Ими являются фаза φ волны в произвольной точке ПВ и разность фаз $\Delta\varphi$ (количество волн n) между любыми двумя точками ПВ. Разность фаз $\Delta\varphi$ непосредственно связана с количеством волн n между этими точками:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \Delta n,$$
$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t + \varphi_s}{2\pi}. \tag{1.2}$$

Множитель 2π присутствует для согласования фазы волны $\Delta\varphi$ с количеством волн Δn.

Физически параметр **фазы волны *n*** тесно связан с **временем *t*** и **частотой ω**: это количество волн, разделяющих два значения времени – начала и конца отсчета времени. А параметр φ тесно связан с интервалом s для координаты t:

$$d\varphi = \omega_0 dt - \omega_i dr^i = \omega ds. \tag{1.3}$$

Параметр φ выступает в роли универсального параметра состояния. Смысл ее – закономерное упорядочение на множестве состояний "фаза" пространства. Физический смысл ее – последовательное прохождение множества состояний, связываемое с собственным временем, которое связывается с фазой: каждый изменение фазы на 2π есть один цикл собственного времени волнового поля.

В многомерном пространстве процесс распространения волн дополнительно связан с наличием дополнительных измерений и определенным пространственным направлением распространения фронта волны и соответствующими параметрами. При наличии пространственных координат произвольная свободная не изотропная волна в неограниченном бесконечном пространстве распространяется и вдоль пространственных направлений в соответствии с гармоническим уравнением

Физически уравнение распространения волны в различных видах без учета начальной фазы φ_s выражает закон распространения волны в пространстве–времени:

$$\begin{aligned} A(t, r^i) &= A_s \sin(\omega_0 t + \omega_i r^i) \colon \{\omega_0\omega^0 + \omega_i\omega^i = 0\} = \\ &= A_s \sin\omega\left(t - \frac{c^i r^i}{c^2}\right) \colon \{c_0 = c_i c^i = 1\} = \\ &= A_s \sin\omega(c_0 t + c_i r^i) \colon \{c_0 c^0 + c_i c^i = 0\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $A(q)$ – значение волнового поля в точке с координатами q^i,

A_s – амплитуда волнового поля,

ω – частота скалярная (круговая! – в радианах) волнового процесса,

ω^0, ω_0 – контра- и ковариантная частота волнового процесса, или ковариантная скорость распространения волнового процесса во временном направлении,

ω^i, ω_i – контра- и ковариантная пространственная частота или направляющий ковариантный вектор волнового процесса,

c^0, c_0 (чаще всего =1, за некоторым исключением) – контра- и ковариантная скорости волны во временном направлении

c – фундаментальная скорость распространения волны в данном направлении,

c^i, $c_i = c^i/c^2$ – контра- и ковариантная пространственная скорости фронта волны.

Если учесть, что при опускании пространственного индекса знак параметра меняется, то противоположные знаки при параметрах ω_0 и ω_i соответствуют распространению волны в положительном направлении соответствующей оси, одинаковые – в отрицательном направлении этой же оси.

Параметр частоты ω – частота периодического процесса – может интерпретироваться в двух формах: 1) стандартно – как частота "ω", измеряемая в радианах и 2) как частота "f" в количествах колебаний в единицу времени (длины). По контексту использования в форме "2πω" предполагается ее использование как частота в единицу времени (длины) "$2\pi f$", иначе – как частота в радианах.

Общее количество параметров уравнения волны (1.4) в 4-мерном ПВ получается равным пяти. Если прибавить 10 параметров метрического тензора – то уже 15 параметров. С учетом инварианта формы (1.4) – 14 параметров. В ортонормированном пространстве количество независимых параметров сокращается до четырех.

В (1.4**) первая форма** – векторная универсальная независимая форма уравнения волны. Параметр ω в следующих формах уравнения – некоторая универсальная скалярная частота данного волнового поля с некоторой свободной интерпретацией, соответствующая, возможно, эталонной частоте в некоторой выбранной с.о. **Во второй форме** ω соответствует частоте волнового поля в эталонном времени, c – скорость волны с текущей координатной системе.

Модельное математическое пространство, в котором все это определяется – галилеево пространство с выделенным АИСО. Вопрос о возможных значениях волновых параметров частоты (ω_0, ω_i) решается просто: предельные ограничения на ω_0 и ω_i должны сниматься – иначе теряется смысл введения гармонического уравнения (1.4) , т.к. уравнение (1.4) вырождается. Параметры ω_0, ω_i фактически определяют метрику пространства–времени в волновых единицах – количество эталонных волн с выбранной частотой на единицу координатной оси t и пространственного направления r^i соответствующего направлению распространения.

Дополнительным условием могло бы быть снятие ограничения единственности скорости c в произвольном направлении. Это означает, что в этом направлении могли бы быть организованы множество волн с различной скоростью распространения. Но снятие такого ограничения либо вообще приводит к снятию вопроса построения ВП – к чему мы стремимся, либо к выбору приоритетного из всех c. К тому же есть способы логически безупречного обхода этого выбора. Оно заключается в дополнении пространственных направлений дополнительными "виртуальными", "невидимыми" для макроразмерной физики координатными направлениями. В современной физике эти направления могут быть циклическими с очень малыми радиусами. Возможны и другие интерпретации, маскирующие эти дополнительные направления, например, "бранные" или потенциальные.

В ортонормированной синхронизированной со скоростью распространения фронта волны с.к. $c^0 = |c^i| = c_0 = c = 1$. Такой с.о. является АИСО, синхронизированное по эталонам с волновым АИСО. В случае произвольной параметризации ПВ оно может быть не нормированным, и не только в этом случае – но и при переходе просто в другое ортонормированное галилеево ИСО. При переходе в другое ИСО, как известно, наблюдается эффект Доплера.

С т.з. математики уравнение (1.4) есть скалярная функция от координат ПВ, а в качестве параметра скалярной функции имеем скалярное произведение некоторого вектора – вектора направления распространения $\omega(c_0, c_i)$ на координаты точки ПВ плюс произвольная начальная фаза, что представляет скалярную фазу гармонической функции. Раз это скалярное произведение, то у него есть метрический тензор, и операции поднятия – опускания индекса. Раз мы имеем в виду галилеево пространство, то разрешены только галилеевы преобразования координат. Раз мы в ней ввели метрику – то это галилеево метрическое пространство. В дополнение к своим метрикам – "промежуток времени" и 3–мерное "расстояние". В метрическом ГП метрический тензор и другие тензоры преобразуются по правилам преобразования тензоров галилеева пространства. И в ней определена операция поднятия–опускания индексов тензоров и скалярного произведения с использованием этого метрического тензора.

Волновые эталоны являются однородными и изотропными. И это свойство выполняется автоматически: длина волны эталона, измеренная в любом направлении, равна самой себе, при любых движениях, перемещениях и преобразованиях координат. То же самое относительно скорости распространения волны c. Даже если они на самом деле не изотропны и не однородны с т.з. других видов эталонов. Для появления не изотропности и не однородности необходимо "измерять" волновые параметры какими то другими, не волновыми, эталонами. Примером не изотропного ПВ для волны является ГП: галилеева скорость волны в ней подчиняется галилееву правилу закона сложения скоростей и скорость волны в разных ИСО в разных направлениях (в т.ч. противоположных) может быть различной.

Это свойство может генетически переходить и к ВП и проявляться в ее свойствах. Например, волновой эталон длины в ИСО ГП является направленным эталоном, зависимым от направления распространения волны. Но есть способ проверки не изотропности для противоположных направлении вектора распространения собственными волновыми эталонами: сравнить эталоны длины в двух противоположных направлениях наложением (или покоординатно) и подсчетом количества волн между выделенными точками. Это свойство позволяет выявить волновое АИСО. Для исключения таких альтернативных возможностей можно считать ПВ изотропным, однородным хотя бы в одной, выделенной с.о. – АИСО, в котором $c = 1$ в любом направлении.

Уравнение (1.4) означает, что частота ω является универсальным параметром волны, определяющим взаимную скорость изменения волнового процесса во времени, c – универсальная фундаментальная скорость, параметр c_i – ковариантная скорость ее распространения во всех возможных направлениях. В связи с тем, что все эти параметры включаются в обобщающий их ковариантный векторный параметр $\omega(c_0, c_i) = (\omega c_0, \omega c_i)$, все они могут изменяться при переходе в другое ИСО по правилам преобразования соответствующих векторов.

Преобразования координат r^i и произвольных векторов ω^i и ω_i в ГП производятся в соответствии с формулами

$$\begin{cases} t = t', \\ r^i = r'^i + v_{\text{п}}{}^i t'. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \omega^0 = \omega'^0, \\ \omega^i = \omega'^i + v_{\text{п}}{}^i \omega'^0. \end{cases} \tag{1.5}$$
$$\begin{cases} \omega_0 = \omega'_0 + \omega'_i v_{\text{п}}{}^i, \\ \omega_i = \omega'_i. \end{cases}$$

где $v_{\text{п}}{}^i$ – скорость новой ИСО относительно исходной. Волновые частота ω и фаза φ также преобразуются по особым правилам.

3. Особенности уравнения волны

Уравнение (1.4) предполагает наличие особенностей в отношении значений параметров скорости и частоты в ПВ: 1) $c \to \infty$, 2) $c = 0$ и 3) $c \neq 0 \wedge c = \text{const} < \infty$, 4) циклические направления.

1) **Условие бесконечности скорости света** $c \to \infty$ определяет абсолютность координаты времени и выделяет временную составляющую направления поля, а именно – составляющая ω_0, которая может существовать независимо от пространственных составляющих c_i. Это соответствует уравнению (1.3). Физически это означает, что во всех точках 3-мерного пространства фаза волны имеет одно и то же значение, зависящее только от абсолютного времени t. С другой стороны это означает бесконечную скорость синхронизации генератора волны в ПВ в этой, и как следствие – во всех других с.о.

$$A(t,r^i) = A_s \sin\omega_0\left(t - \frac{c^i}{c^2}r^i\right) : (c \to \infty) \to$$
$$A(t,r^i) = A(t) = A_s \sin\omega_0 t. \tag{1.6}$$

Процесса "распространения" волны фактически здесь и не будет, потому что фактически она существует с одной и той же фазой в любой точке 3-пространства.

2) В уравнениях (1.6) в ГП **условие равенства нулю скорости волны** $\boldsymbol{c = 0}$ формально не входит в область ее допустимых значений параметров волнового уравнения.

$$A(t,r^i) = A_s \sin\omega\left(t - \frac{c^i r^i}{c^2}\right) : (c \to 0). \tag{1.7}$$

Но уравнение (1.6) можно немножко видоизменить (что, конечно, не снимает проблем с определением волновой функции).

$$A(t,r^i) = A(r^i) = A_s \sin\omega_i r^i. \tag{1.8}$$

Это соответствует базовому волновому уравнению (1.4) при $c_0 = 0$ – что опять же не входит в область допустимых значений параметров волнового уравнения (1.4). Само по себе уравнение (1.8) предполагает независимость и абсолютность волновой функции от координаты времени. Но эта независимость теряется при переходе в любое ИСО, т.к. скорость c получает добавку v^i скорости ИСО в соответствии с уравнениями преобразования координат. Для ГП

$$c'^i = c^i - v^i = -v^i,$$
$$c'_0 = c_0 + c_i v^i.$$

3**) соответствует общему случаю конечной ненулевой скорости распространения волны** (1.4). При этом не предполагается ее постоянство, т.е может быть множество волн с одним и тем же направлением, но разными скоростями распространения. Условие c = const выделяет из всех возможных полей только некоторое ее подмножество $|c^i| = 1$. А именно – АИСО – абсолютную с.о.:

$$A(t,r^i) = A_s \sin(\omega_0 t + \omega_i r^i) : \{\omega_0\omega^0 + \omega_i\omega^i = 0\} =$$
$$= A_s \sin\omega\left(t - \frac{c^i r^i}{c^2}\right) : \{c_0 = c_i c^i = 1\} = \tag{1.4}$$
$$= A_s \sin\omega(c_0 t + c_i r^i) : \{c_0 c^0 + c_i c^i = 0\}.$$

4) **соответствует существованию циклических координатных осей**, вдоль которых частота может принимать только некоторые определенные значения, пропорциональные некоторой минимальной частоте, удовлетворяющие условию[1]:

$$A(t,r^i) = A_s \sin(\omega_0 t + \omega_i r^i) : \{\omega_0\omega^0 + \omega_i\omega^i = 0\} :$$
$$\sin(\omega_0 t + \omega_i r^i) = \sin\left(\omega_0 t + \omega_i(r^i + 2\pi n R^i)\right) : \exists i : n \in \mathbf{N}. \tag{1.9}$$

где R^i – условный радиус i–ой циклической координаты,

$2\pi R^i$ – один цикл координаты вдоль циклического направления (длина окружности),

[1] При интерпретации необходимо учитывать разницу между частотой в [1/с] и частотой в [рад/с].

Уравнения (1.4) формально учитывают одновременно движение и наблюдателя, и источника волны. Даже начальная фаза φ_s может быть линейной функцией от координат (t, r^i), которая после приведения войдет в параметры (ω_0, ω_i), и которые можно интерпретировать как переход в ИСО. Но даже это не изменяет форму уравнения: она остается ковариантной исходному уравнению (1.4) .

Условия уравнения (1.4) также одновременно выражают закон Гюйгенса для распространяющейся волны: однофазная поверхность или фронт волны всегда перпендикулярен к направлению своего распространения c_i движения. Это определяется тем, что фаза волны есть проекция координаты r^i точки на вектор направления c_i. Эта проекция предполагает, что существует перпендикулярная к направлению движения волны однофазная плоскость, называемая фронтом этой самой волны.

4. Инварианты волнового уравнения

Из (1.4) также можно усмотреть, что одна и та же фазовая картина может быть обеспечена при различных значениях параметров (ω_0, ω_i) и параметризации (t, r^i). Например, любая добавка к параметру (t, r^i) вектора $(\Delta t', \Delta r'^i)$ такого, что $\omega_0\Delta t' - \omega_i \Delta r'^i = 0$, не изменяет фазовой картины. Это – движение ИСО перпендикулярно направлению волнового вектора ω_j с произвольной скоростью.

И второе – фазовая картина также не изменяется при преобразовании смещения, изменяющего фазу волны на $2\pi n$. Этому условию удовлетворяет галилеево преобразование смещения

$$(t', r'^i) = (t, r^i + \Delta r^i) : \omega_i \Delta r^i = 2\pi n.$$

Инвариантами формы (1.4) при преобразованиях координат являются (по определению) скаляры – сама функция $A(t, r)$, амплитуда A_s, скалярное произведение $\omega_0\omega^0$ - $\omega_i\omega^j$ и фаза $(\omega_0 t + \omega_i r^i) + \varphi_s$. Скалярная фаза

$$\Delta\varphi = \left(\omega_0 dt \ + \ \omega_i dr^i\right). \tag{1.10}$$

может выполнять роль линейного метрического "материального" "расстояния" = "время жизни", равного количеству периодов эталонной фазы периодической эталонной волновой функции с материальным вектором (ω_0, ω_i), существующего параллельно с билинейным метрическим тензором для определения самого скалярного произведения и связанного с преобразованиями координат.

При преобразованиях координат фаза φ_s может – точнее, должен изменяться прибавлением к ней некоторого "калибровочного" члена. Этот "калибровочный" член должен быть явно просуммирован с начальной фазой φ_s при преобразованиях смещения и/или неявно включен в состав элементов ω_0 и ω_i. Для примера рассмотрим изменение уравнения (1.10) при преобразованиях смещения

$$\begin{cases} t \to t' + t_s, \\ r^i \to r'^i + r_s, \end{cases} \tag{1.11}$$

Уравнение (1.4) при этом преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} A'\left(t, r^i\right) &= A_s \sin\left[\left(\omega_0(t' + t_s) + \omega_i\left(r'^i + r_s\right)\right) + \varphi_s\right] = \\ &= A_s \sin\left[\left(\omega_0 t' + \omega_i r'^i\right) + \left(\omega_0 t_s + \omega_i r_s{}^i + \varphi_s\right)\right] = \\ &= A_s \sin\left[\left(\omega_0 t' + \omega_i r'^i\right) + \varphi'_s\right]: \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\varphi'_s = \varphi_s + \Delta\varphi = \varphi_s + (\omega_0 t_s + \omega_i r_s{}^i).$$

Из (1.12) видно, что при смещении начала координат начальная фаза изменяется на постоянную величину $\Delta\varphi = \omega_0 t_s$ - $\omega_i r_s{}^i$ рад. Возьмем более общие преобразования, но без смещения и поворота:

$$\begin{aligned} t &= (1 + v_0^0)t' + v_j^0 r'^j, \\ r^i &= (1 + v_0^i)r'^i + v_j^i r'^j \\ \omega_0 &= (1 + v_0^0)\omega'_0 - v_0^j \omega_j', \\ \omega_i &= (1 - v_i^0)\omega_i' + v_i^j \omega_j' \end{aligned} \tag{1.13}$$

(красным обозначены равные нулю элементы при галилеевых преобразованиях). Здесь через тензор v^i_j определяется разница значений преобразованной и исходной координат. Воспользовавшись формулами (1.12) по отношению к преобразованиям (1.13), имеем:

$$\varphi'_0 = \Delta\varphi + \varphi_s:$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \Big(&(\omega'_0 + v_0^0\omega'_0 - v_0^j\omega_j')(v_0^0 t' + v_j^0 r'^j) + (\omega'_i - v_i^0\omega'_0 + v_i^j\omega_j')(v_0^i t' + v_j^i r'^j)\Big) = \\ = &[(\omega'_0 + v_0^0\omega'_0 - v_0^j\omega_j')v_0^0 + (\omega'_i - v_i^0\omega'_0 + v_i^j\omega_j')v_0^i]t' \\ &+ [(\omega'_0 + v_0^0\omega'_0 - v_0^j\omega_j')v_j^0 + (\omega'_i - v_i^0\omega'_0 + v_i^j\omega_j')v_j^i]r'^j. \end{aligned} \tag{1.14}$$

При галилеевых преобразованиях без поворота формула значительно упрощается:

$$\Delta\varphi = \omega'_i v_0^i t'. \tag{1.15}$$

Результат ожидаемый, только сложным путем от общих ПТК. Зависимость Δφ от времени t' говорит о том, что начальная фаза при $t' = 0$ не изменяется, но изменяется частота.

5. Формы записи волновых уравнений

Волновое уравнение (1.4) можно записать и во многих других эквивалентных математических формах, выделяющих какие-либо особенности этого уравнения. Ниже представлены пять форм уравнения волны.

1). Координатное представление. В принципе любое представление является координатным:

$$A(t, r^i) = A_s \sin[(\omega_0 t + \omega_i r^i) + \varphi_s] = \tag{1.4}$$

$$= A_s \sin[\omega_0(t + c_i r^i) + \varphi_s]. \tag{1.16}$$

ω_0 и ω_i – ковариантные координатные частот скорость (на единицу длины оси) волны,

φ_s – начальная фаза волны в начале координат,

$c_i = \omega_i / \omega_0$ – ковариантная скорость распространения волны в единицу времени,

c^i – скорость (контравариантная) распространения волны в единицу времени,

Уравнение (1.16) явно определяет ковариантные координатные частоту ω_0 и скорость c_i в текущей координатной системе.

2). Ортонормированное представление с синхронизированными часами в произвольной с.о. (ИСО приемника):

ω - эталонная частота источника волны,

ω_0 - частота в ИСО приемника волны.

Первая форма (**1.17**) – через эталонную частоту источника:

$$= A_s \sin\left[\omega\left(c_0 t + c_i r^i\right) + \varphi_s\right]. \tag{1.17}$$

c_0 – коэффициент, соответствующий эффекту Доплера,

c_i – коэффициент укорочения длины волны в ортонормированной с.к., а также ковариантная скорость распространения волны.

Вторая форма (**1.18**) задает уравнение волны в с.о. приемника через частоту в с.о. приемника:

$$= A_s \sin\left[\omega_0\left(t + c_i r^i\right) + \varphi_s\right]. \tag{1.18}$$

c_i - ковариантная скорость распространения волны,

В частности, в ортонормированном АИСО изотропная волна распространяется в соответствии с уравнением

$$A\left(t, r^i\right) = A_s \sin\left[\omega\left(t + c_i r^i\right) + \varphi_0\right] = A_s \sin\left[\omega\left(t - \frac{k_i}{c} r^i\right) + \varphi_s\right], \tag{1.19}$$

в котором $\omega = \omega_0 = \omega c_0$, $\omega_i = \omega c_i$, параметр c_0 равен единице, волновой вектор $|k_i| = 1$, c – изотропная скорость волны, модуль которой равен единице, $\varphi_0 = \text{const}$. Вектор c_i здесь есть ковариантный вектор скорости c^i распространения волны в определенном направлении.

Третья форма **(1.20)** – то же, что во втором случае, но с выделением параметров в ИСО источника:

$$= A_s \sin\left[\omega c_0\left(t + \frac{c_i}{c_0} r^i\right) + \varphi_s\right]. \tag{1.20}$$

ωc_0 - ковариантная координатная частота волны (на единицу длины координаты время),

c_i / c_0 - ковариантная скорость распространения волны,

$c^i = c^2 c_i$ – контравариантная скорость распространения волны,

$\lambda = c^2 c_i / \omega_0$ - координатная длина волны,

$c = c_0 / c_i$ - координатная скорость волны в направлении распространения:

$$c = |c^i| = 1/|c_i|,\ c^i c_i = 1.$$

Сразу замечу: никаких других свойств ни ИСО, ни АИСО, ни тип пространства, и даже то, что это – АИСО или ИСО, из уравнения (1.4) вывести невозможно. Это просто обобщенная форма уравнения волны в произвольном ИСО. Нельзя даже сказать, это АИСО ГП или другого. Законы преобразования параметров волны зависят от законов преобразования тензоров соответствующего пространства. Даже уравнение (1.4) ничего не говорит о его принадлежности галилеевому пространству или Минковского (Лоренца-Пуанкаре-Эйнштейна) и др. Выбор соответствующего нашему разбору типа пространства мы произведем чуть позже.

6. Расшифровки значений параметров уравнения волны

следующие:

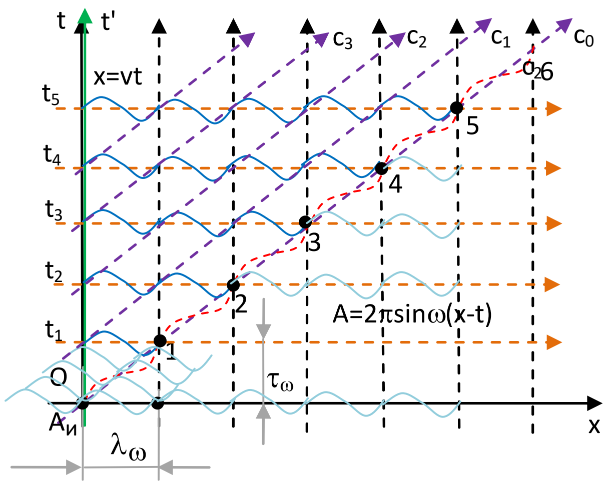

Рис. 1

Плоская одномерная бесконечная гармоническая волна в с.о. источника $A_и$. Для каждого момента условно показаны графики значения функции волны по оси *x*.

t, r_i – координаты точки ПВ,

A_s – амплитуда волнового процесса,

A – текущее значение напряженности волнового процесса,

ω – эталонная скалярная частота волнового процесса,

$c^i = k_i \cdot c$ – контравариантная векторная скорость распространения фронта волны,

$c = |c^i|$ =– скалярная скорость (координатная) распространения волны в этом пространственном направлении,

c_0 – ковариантная координатная "скорость" распространения во "временном" направлении, фактически определяет количество эталонных волн частотой ω = 1 Гц на единицу координатной оси "время", а в форме ωc_0 – количество волн частотой ω на единицу этой же координатной оси.

$c_i = -k_i/c$ – ковариантная векторная скорость распространения волны в соответствующем направлении (обратите внимание на знак "–" в формуле – намек на похожесть на релятивистский инвариант "интервал" распространения волнового процесса в сплошной среде в ПВ!, но не более):

$$c_i = -k_i/c = -c^i/c^2 \rightarrow k_i \uparrow\downarrow c_i.$$

Параметры c_i фактически определяет количество эталонных волн частотой ω = 1 Гц на единицу длины в направлении распространения фронта волны, а в форме ωc_i – количество волн частотой ω на единицу длины этого же направления.

$k_i = c^i/c$: $|k_i| = 1$– волновой вектор (направление) процесса распространения волны (в дальнейшем использовать ее практически не будем или очень редко в связи с трудновыполнимым условием ее "единичности" при преобразованиях координат и тензоров),

φ_s – начальная фаза волны в этом же направлении (скаляр). Она может зависеть от координаты, например, линейно:

$$\varphi'_s = \omega(v_0 t + v_i r^i),$$

И тогда обобщенное уравнение волны после подстановки в (1.4) может быть записано в виде

$$A(t, r^i) = A_s \sin\left[\omega\left(c_0 t + c_i r^i\right) + 2\pi\omega\left(v_0 t + v_i r^i\right) + \varphi'_s\right] =$$

$$= A_s \sin\left[\omega\left(c_0 t + v_0 t + c_i r^i + v_i r^i\right) + \varphi_s\right] =$$

$$= A_s \sin\left[\omega\left((c_0 + v_0)t + (c_i + v_i)r^i\right) + \varphi_s\right] =$$

$$= A_s \sin\left[\omega(c_0 + v_0)\left(t + \frac{c_i + v_i}{c_0 + v_0} r^i\right) + \varphi_s\right].$$

При этом собственная частота источника не меняется. Но частота, измеряемая наблюдателем, изменяется по сравнению с частотой самого источника, при этом длина волны остается той же, что и с т.з. источника. Этот эффект называется эффект Доплера.

Из (1.21) можно сделать вывод, что форма уравнения волны осталась ковариантной к (1.4). Следовательно, форма (1.4) является наиболее общей, ковариантной формой уравнения распространения волны.

2. Рассмотрение различных случаев взаимного расположения источника и приемника в ГП

Уравнением изотропной волны в АИСО является уравнение (1.19):

$$\begin{aligned} A(t, r^i) &= A_s \sin\left[\omega\left(t + c_i r^i\right) + \varphi_0\right] = \\ &= A_s \sin\left[\omega\left(t - \frac{k_i}{c} r^i\right) + \varphi_s\right], \end{aligned} \tag{1.19}$$

7. Уравнение изотропной волны АИСО в ИСО

Движущийся приемник можно заменить на движущийся с той же скоростью ИСО. Для записи уравнения волны в с.о. ИСО мы должны учесть правила преобразования векторных параметров (1.5) к уравнениям (1.19). Также мы должны учесть изменение начальной фазы волны в ИСО: если без смещения, то она не изменится.

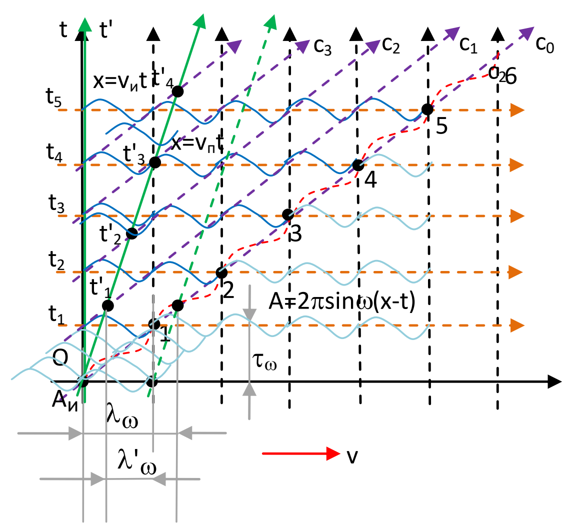

Рис. 2

Плоская одномерная бесконечная гармоническая волна от покоящегося источника $A_и$ в присутствии движущегося со скоростью $v_п{}^i$ приемника (ИСО). Для каждого момента условно показаны графики значения функции волны по оси *x*.

Первый способ.

В ИСО приемника уравнение волны должно описываться стандартным образом:

$$A'(t, r^i) = A_s \sin\left[\left(\omega'_0 t' + \omega'_i r'^i\right) t' - \varphi_s\right]. \tag{2.1}$$

Используя правила преобразования векторов в ГП из АИСО в ИСО (1.5):

$$\begin{cases} t = t', \\ r^i = r'^i + v_п{}^i t'. \end{cases} \quad \begin{cases} \omega^0 = \omega'^0, \\ \omega^i = \omega'^i + v_п{}^i \omega'^0. \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_0 = \omega'_0 + \omega'_i v_п{}^i, \\ \omega_i = \omega'_i. \end{cases} \tag{1.5}$$

получим следующие формулы преобразований уравнения распространения волны при переходе в ИСО, движущуюся со скоростью $v_п{}^i$.

$$\begin{aligned} A'(t, r^i) &= A_s \sin\left[\left(\omega'_0 t' + \omega'_i r'^i\right) t' - \varphi_s\right] \rightarrow \\ A'(t, r^i) &= A_s \sin\left[\left(\left(\omega_0 + \omega_i v_п{}^i\right) t' + \omega_i r'^i\right) t' - \varphi_s\right] = \\ &= A_s \sin\left[\omega_0\left(\left(1 + c_i v_п{}^i\right) t' + c_i r'^i\right) t' - \varphi_s\right] = \\ &= A_s \sin\left[\omega_0\left(1 + c_i v_п{}^i\right)\left(t' + \frac{c_i r'^i}{\left(1 + c_i v_п{}^i\right)}\right) t' - \varphi_s\right]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Второй способ. Используя те же правила преобразования (1.5) к координатам уравнениям (1.19), получим следующие цепочку преобразований:

$$
\begin{aligned}
A(t,r^i) &= A_s\sin\left[\omega(t + c_i r^i) - \varphi_s\right] \rightarrow \\
A'^{(t,r^i)} &= A_s\sin\left[\omega\left(t' + c_i\left(r'^i + v_п{}^i t'\right)\right) - \varphi_s\right] = \\
&= A_s\sin\left[\omega\left(\left(1 + c_i v_п{}^i\right)t' + c_i r'^i\right) - \varphi_s\right] = \\
&= A_s\sin\left[\omega\left(1 + c_i v_п{}^i\right)\left(t' + \frac{c_i}{\left(1 + c_i v_п{}^i\right)} r'^i\right) - \varphi_s\right].
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Уравнения (2.2) говорят о том, что в ИСО (с т.з. приемника-наблюдателя) и частота, и скорость волны, и длина волны изменяются следующим образом.

$$
\begin{gathered}
\omega' = \omega\left(1 + c_i v_п{}^i\right), \\
c'^i = c^i - v_п{}^i c^0 = c^i - v_п{}^i, \\
c'_i = \frac{c_i}{\left(1 + c_i v_п{}^i\right)}, \\
\lambda' = \frac{c'^i}{\omega'} = \frac{1}{\omega}\frac{\left(c^i - v_п{}^i\right)}{\left(1 + c_i v_п{}^i\right)} = \frac{c_i c^i}{\omega}\frac{\left(c^i - v_п{}^i\right)}{c_i\left(c^i - v_п{}^i\right)} = \frac{c^i}{\omega} = \lambda.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Эти уравнения выражают эффект Доплера по отношению к движущемуся со скоростью $v_п{}^i$ ИСО. Из (2.4) видно, что длина волны при этом не изменяется.

8. Уравнение волны в системе движущегося в АИСО источника и ее параметры

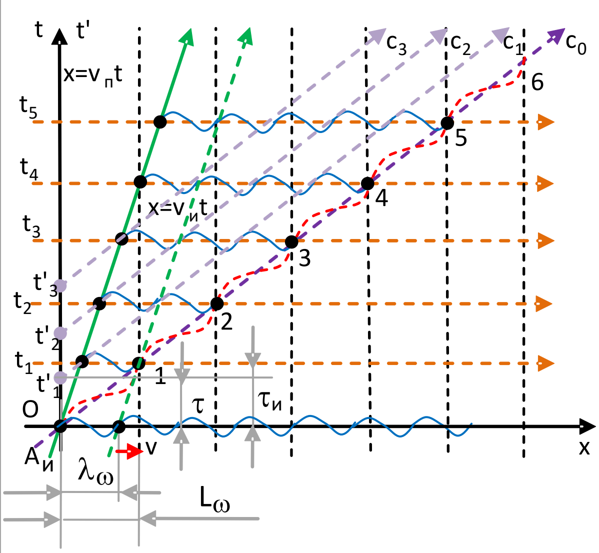

Рис. 3

Плоская одномерная бесконечная гармоническая волна от движущегося источника $A_и$. Для каждого момента условно показаны графики значения функции волны по оси *x*.

При наличии движущегося в ИСО источника (генератора) волнового процесса уравнение волны в с.к. источника должно быть следующим (см. Рис. 3):

$$
A'\left(t', r'^i\right) = A_s\sin\left[\omega'\left(t' + c'_i r'^i\right) + \varphi_s\right], \tag{2.5}
$$

Здесь ω' – частота сигнала в подвижном АИСО. При этом координаты и скорости распространения волны должны быть равны (в сравнении с ними же изотропными в АИСО), в соответствии с правилом сложения скоростей в ГП:

$$
\begin{aligned}
t' &= t, & r'^i &= r - v_и{}^i t, \\
c'^0 &= c^0, & c'^i &= c^i\left(1 + c_i v_и{}^i\right), \\
c'_0 &= \frac{c_0 + c_i v_и{}^i}{c_0 + c_i v_и{}^i} = 1, & c'_i &= \frac{c_i}{c_0 + c_i v_и{}^i}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Подставим в уравнение (2.5) из (2.6) необходимые значения и проведем преобразования:

$$\begin{aligned} A(t,r^i) &= A_s \sin\left[\omega'\left(c_0 t + \frac{c_i}{(c_0 + c_i {v_\text{и}}^i)}(r^i - {v_\text{и}}^i t)\right) + \varphi_s\right] = \\ &= A_s \sin\left[\omega'\left(\left(\frac{c_0}{1} - \frac{c_i {v_\text{и}}^i c_0}{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)}\right)t + \frac{c_i}{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)} r^i\right) + \varphi_s\right] = \\ &= A_s \sin\left[\omega'\left(\left(\frac{c_0(1 + c_i {v_\text{и}}^i) - c_i {v_\text{и}}^i c_0}{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)}\right)t + \frac{c_i r^i}{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)} r^i\right) + \varphi_s\right] = \\ &= A_s \sin\left[\omega'\left(\frac{1}{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)} t + \frac{c_i r^i}{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)}\right) + \varphi_s\right] = \\ &= A_s \sin\left[\omega' \frac{1}{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)}(t + c_i r^i) + \varphi_s\right]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Уравнения (2.7) говорят о том, что в АИСО (с т.з. покоящегося наблюдателя) и частота и длина волны изменяются следующим образом.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega'}{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)}, \\ \lambda = \lambda' &= c^i \frac{(1 + c_i {v_\text{и}}^i)}{\omega}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Эти уравнения выражают эффект Доплера для покоящегося наблюдателя по отношению к движущемуся со скоростью ${v_\text{и}}^i$ ИСО волнового источника.

9. *Движение ИСО перпендикулярно к направлению распространения волны*

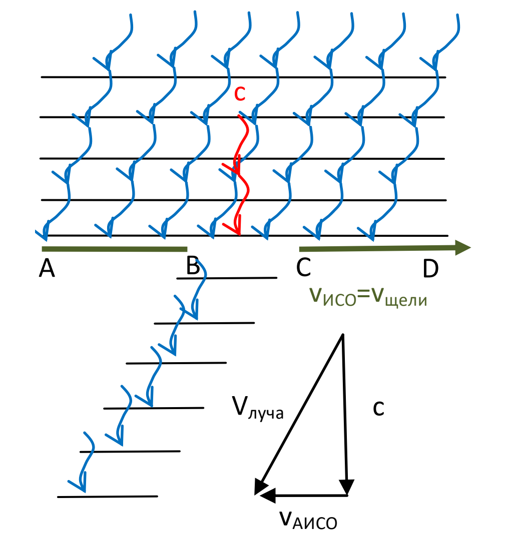

Рис. 4

Графическое изображение аберрации волн в движущемся ИСО.

При движении ИСО приемника или АИСО источника перпендикулярно к направлению распространения волны каких либо изменений с волной не происходит, т.к. $c_i \perp {v_\text{п}}^i$ и $c_i {v_\text{п}}^i = 0$, и эффекта Доплера наблюдаться не будет: ω = ω' (см. (2.4):1). Но будет наблюдаться аберрация контравариантного вектора скорости (Рис. 4), т.к. скорость контравариантная распространения волны подчиняется закону сложения скоростей галилеева пространства:

$$c'^i = c^i - v^i_\text{п}. \tag{2.9}$$

Ковариантный вектор скорости волны при этом не изменяется и этот эффект проявляется в том, что фронт волны не изменяет своего положения. Так отклоняются вертикально падающие капельки дождя по отношению к движущемуся автомобилю.

На Рис. 4 показан механизм образования эффекта аберрации. Здесь ABCD – бесконечная пластина с отверстием BC, движущаяся слева направо со скоростью $v_{ИСО}$. Черные тонкие горизонтальные линии условно соответствуют фронтам волн. Красная волнистая линия соответствует направлению движения фронта волны в соответствии с законом Гюйгенса со скоростью c.

Синие волнистые линии моделируют направление движения волн в соответствии с (2.6). Через отверстие ВС часть волн проходит из верхней полуплоскости в нижнюю. В результате визуально создается эффект "косого" движения "луча" после отверстия.

На Рис. 4 можно увидеть еще один эффект движения перпендикулярного к направлению движения ИСО волны. Он заключается в том, что в ИСО получается видимость нарушения закона Гюйгенса при распространении луча волны – она как бы движется не перпендикулярно к фронту луча. Разрешение этого противоречия в том, что закон Гюйгенса в галилеевом пространстве работает только в с.о. АИСО. В ИСО кусок фронта волны распространяется так, как будто он находится в АИСО. Т.е. он не наследует скорость источника в ИСО, как ее наследуют галилеевы объекты – например, брошенные кем то в ИСО перпендикулярно к направлению движения камни.

10. Уравнение волны при движущихся источнике и приемнике

Воспользуемся предыдущим результатом (2.7) движущегося в АИСО источника:

$$A(t,r^i) = A_s\sin[\omega'(t + c_i r^i) + \varphi_s] = A_s\sin\left[\omega\frac{1}{(1 + c_i v_и{}^i)}(t + c_i r^i) + \varphi_s\right]. \tag{2.7}$$

и результатом (2.2) движущегося в АИСО приемника:

$$A(t,r^i) = A_s\sin\left[\omega\left((1 + c_i v_п{}^i)t' + c_i r'^i\right) + \varphi_s\right] \tag{2.2}$$

Если за исходное уравнение распространения волны возьмем уравнение волны от движущегося источника, но в АИСО, то для добавления движущегося приемника достаточно применить уравнение (2.2) к уравнению (2.7), что равносильно простой замене частоты волнового поля:

$$\begin{aligned} A_п(t,r^i) &= A_s\sin\omega' A_s\sin\left[\omega'\left((1 + c_i v_п{}^i)t' + c_i r'^i\right) + \varphi_s\right] = \\ &= A_s\sin\left[\omega\frac{1}{(1 + c_i v_и{}^i)}\left((1 + c_i v_п{}^i)t' + c_i r'^i\right) + \varphi_s\right] = \\ &= A_s\sin\left[\omega\frac{1 + c_i v_п{}^i}{1 + c_i v_и{}^i}\left(t' + \frac{c_i}{1 + c_i v_п{}^i} r'^i\right) + \varphi_s\right]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

(Под источником с положительной скоростью (с положительным направлением движения волны) вдоль оси x будем понимать источник, находящийся бесконечно далеко с другой стороны оси. Поэтому волна получается направленной строго в одном направлении в любом месте пространства и оси x.) Уравнения (2.7) говорят о том, что в ИСО и частота, и скорость волны, и длина волны изменяются.

$$\begin{gathered} \omega' = \omega\frac{1 + c_i v_п{}^i}{1 + c_i v_и{}^i}, \\ c'^i = c^i - v_п{}^i = c^i - v_п{}^i, \\ c'_i = \frac{c_i}{(1 + c_i v_п{}^i)}, \end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\lambda' = \frac{c'^i}{\omega'} = \frac{1}{\omega}\frac{(c^i - v_п{}^i)(1 + c_i v_и{}^i)}{(1 + c_i v_п{}^i)} = \frac{c_i c^i}{\omega}\frac{(c^i - v_п{}^i)(1 + c_i v_и{}^i)}{c_i(c^i - v_п{}^i)} = \frac{c^i(1 + c_i v_и{}^i)}{\omega}.$$

11. Движение источника перпендикулярно к направлению распространения волны

При движении ИСО приемника и источника перпендикулярно к направлению распространяемой им или при равенстве их скоростей каких либо изменений с волной не происходит, и эффекта Доплера не будет наблюдаться. Для этого необходимо, чтобы в выражении

$$A(t,r^i) = A_s \sin 2\pi\omega \frac{1 + c_i v_{\text{п}}{}^i}{1 + c_i v_{\text{и}}{}^i}\left(t + \frac{c_i}{1 + c_i v_{\text{п}}{}^i} r^i\right) + \varphi_s \to$$
$$A(t,r^i) = A_s \sin 2\pi\omega\left(1 + c_i v_{\text{п}}{}^i\right)\left(t + \frac{c_i}{1 + c_i v_{\text{п}}{}^i} r^i\right) + \varphi_s. \quad (2.12)$$

частота ω = ω', что возможно при условии

$$c_i v_{\text{п}}{}^i = c_i v_{\text{и}}{}^i \to$$
$$c_i\left(v_{\text{п}}{}^i - v_{\text{и}}{}^i\right) = 0. \quad (2.13)$$

А это возможно, если $v_{\text{п}}{}^i = v_{\text{и}}{}^i$. Вторая возможность заключается в перпендикулярности вектора скорости волны c^i к относительной скорости приемника $v_{\text{п}}{}^i$ и источника $v_{\text{и}}{}^i$ при любых значениях скоростей приемника и источника, что означает направление относительной скорости движения вдоль фронта волны.

12. Интерференция волн

Рассмотренные выше волны с одной единственной частотой и формой волны (1.4) не являются единственными формами ее существования. Они – простейшие (понятие "простейшие" – само по себе понятие тоже относительное). Кроме этих, простейших, форм с определенными параметрами, возможно существование бесконечного множества других форм, получаемых сложением произвольного числа простейших форм с различными значениями амплитуды, частоты, скорости и начальной фазы. Эта возможность называется свойством линейности множества волновых состояний:

$$A(t,r^i) = \int A_n \sin 2\pi\omega_n\left(t - c_{ni} r^i - \varphi_{n0}\right) dn,$$
$$A(t,r^i) = \sum_n A_n \sin 2\pi\omega_n\left(t - c_{ni} r^i - \varphi_{n0}\right). \quad (2.14)$$

Здесь n – индексирующий элемент из (дискретного или непрерывного) множества возможных значений соответствующего параметра. Возможность такого "интегрального", "суммируемого" или "смешанного" определения для возможных волновых процессов называется "интерференцией" волновых состояний. При этом сами составляющие общую "волну" частные волны не теряют своей индивидуальности и распространяются независимо от других без взаимодействия. Наиболее просто такие непрерывные ортогональные решения на основе гармонических уравнений существуют только в однородных изотропных неограниченных линейных (см. выше) пространствах, а дискретные – в ограниченных (цилиндрических, тороидальных, …) пространствах.

Интеграл (2.14) в общем случае может задавать и не дифференцируемые состояния. Поэтому предполагается, что законом изменения в ПВ общего волнового состояния является ее ограниченность и непрерывность до всех своих важных производных.

В ограниченном пространстве с произвольной топологией в решении (2.14) может присутствовать не любое непрерывное интегрируемое множество решений, а только некоторое ограниченное дискретное суммируемое множество решений $\{\Phi_n(t, r^i)\}$, связанных между собой линейным уравнением

$$A(t, r^i) = \sum\nolimits_{(n)} a_n \Phi_n(t, r^i). \tag{2.15}$$

и удовлетворяющее некоторым граничным условиям. Здесь $\Phi_n(t, r^i)$ является некоторым набором взаимно ортогональных гармонических функции пространства-времени соответствующего пространства.

Сокращения и другие соглашения

(*) А – абсолютное, В – время, волновое, Г – галилеево, И – инерциальное, К – координаты, квантовая, классическая, М – механика, метрическое, материя, Н – ньютоново, неинерциальная, О – отсчета, относительности, общая, П – пространство, Р – релятивистская, С – система, специальная, Т – теория, тензоры, У – условный, Ф – физика, Ч – частная, ~ –(индекс) обозначает волновой параметр, ‖ – (индекс) параллельный, продольный, ⊥ – (индекс) перпендикулярный, поперечный.	АПВ – ПВ с абсолютным временем и пространством. АСО (АИСО) – абсолютная (инерциальная) система отсчета, ВП – волновое пространство, ГП – галилеево пространство, ГПТК – линейные преобразования тензоров и координат, ГВП – галилеево волновое пространство, ИСО – инерциальная система отсчета – координатная с.о., полученная из исходного ортонормированным ЛПТК, КМН – классическая механика ньютонова, ЛПТК – линейные преобразования тензоров и координат, МГП – метрическое галилеево пространство, МП – метрическое пространство, ПВ – пространство–время, ПВМ – пространство–время–материя, ГПВ – галилеево пространство–время, ПТК – преобразования тензоров и координат. СК, с.к. – система координат, См. – смотри, СО, с.о. – система отсчета, СТО – специальная теория относительности, (и)т.д. – (и) так далее, (и) т.п. – (и) тому прочие, в т.ч. – в том числе, т.з. – точка зрения, т.[Идентиф.точки] – точка.[Идентиф.точки], м.о. – материальный объект, с.с. – сплошная среда, См. – смотри [далее], УАИСО – Условная Абсолютная ИСО,

1) *При использовании более чем одной буквы.

2) Выделение красным цветом в формуле может обозначать равный нулю элемент формулы или выражения.

3) По одинаковым верхнему и нижнему индексам производится свертка (суммирование) соответствующих элементов (по правилу Эйнштейну).

4) По индексу в скобке типа "$_{(k)}$" или "$^{(k)}$" свертка не выполняется, но она привязана к соответствующему тензорному или другому индексу "функционально".

5) Формат ссылок на формулы: (N). При необходимости указания на конкретную строку формулы применяется формат (N):n, где n – номер строки формулы, начиная с 1 (единицы), причем эта нумерация продолжается и на дальнейшие не нумерованные формулы.

Литература

1. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : Наука, 1972. – 351 с.
2. Детлаф, А. А. Курс общей физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. Высшая школа, 2017. – 245 с.
3. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М. :Высш. шк., 2001. – 575 с. 74
4. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Бином, 2017. – 146 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики: В 10 т. : т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с.
6. Малыкин Г. Б. Паралоренцевские преобразования, УФН, 179:3 (2009), 285–288; Phys. Usp., 52:3 (2009), 263–266 // Полный текстURL: PDF файл (899 kB) (дата обращения: 05.07.2019).
7. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. М. :Наука, 1965. [Einstein A Ann. Physik 322 891 (1905)]
8. ЧепикА. М. Сходство и различие СЭТ и СТО. [Электронный ресурс] //URL: http://redshift0.narod.ru/Rus/Stationary/Absolute/ Absolute_Principles_4.htm(дата обращения: 16.07.2019). // Нижний Новгород, e–mail: redshift0@narod.ru.
9. Tangherlini F R "The velocity of ligh in uniformly moving frame", Ph D Thesis (Stanford: Stanford Univ., 1958)]
10. Timin Valery. Two–way Wave Metrics of Galilean Space. Двусторонние волновые метрики ГП. [Электронный ресурс] // URL: https://viXra:2008.0186viXra:2008.0186 (Дата загрузки: 2020-08-24 20:54:29).
11. Тимин В. А. Метрики галилеева пространства. [Электронный ресурс] //Metrics Galileia Space. URL: http://vixra.org/abs/1907.0545.
12. Тимин В. А. Преобразования галилеевых тензоров. [Электронный ресурс] //Galilean Transformations of Tenzors, URL:http://vixra.org/abs/1910.0602 .
13. Тимин В. А.Уравнения распространения волн в различных пространствах. [Электронный ресурс] // URL: http://vixra.org/abs/1908.0091.
14. Тимин В. А. Эксперимент Майкельсона–Морли. [Электронный ресурс] // URL: http://vixra.org/abs/1908.0574.

Все мои работы в VIXRA.ORG:

15. Тимин В. А. Все работы.URL: http://vixra.org/author/valery_timin.

E–Mail: timinva@yandex.ru.