# Equations of wave propagation in cyclic Galilean spaces

# Уравнения распространения волны в циклических галилеевых пространствах


Valery Timin





(January 7, 2021)

Russia, RME



This paper is devoted to the equations of propagation of harmonic waves in Galilean spaces with a single cyclic coordinate, in which a certain inercial reference system is distinguished as an absolute reference system for waves. The equations of wave propagation in the case of infinite, unbounded spaces are derived.

(Translated by Yandex Translator Яндекс–Переводчик)

Данная работа посвящена уравнениям распространения гармонических волн в галилеевых пространствах с одной циклической координатой, в которой выделяется некоторое ИСО как абсолютная система отсчета (АСО) для волн. Выведены уравнения распространения волн в случае бесконечных, неограниченных размерами пространств.


## Оглавление

# 1. Уравнения распространения волны в циклических галилеевых пространствах

Волна формально является периодической функцией своего параметра:

$$\mathrm{A}(q) = \sin\varphi(q) \tag{1.1}$$

волнового и функционально волна в одномерном однородном ПВ $t$ "распространяется" в соответствии с гармоническим уравнением

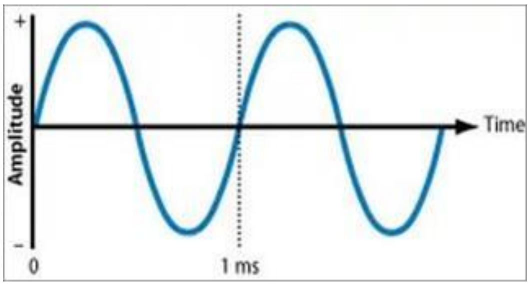


Рисунок 1.1

График синусоидальной волны.

$$A = \sin\varphi(q) = \sin 2\pi n(q) = \sin(2\pi\omega t - \varphi_s),$$
$$\varphi = 2\pi\omega t - \varphi_s. \tag{1.2}$$

где $A(q)$ – значение волнового поля в точке с координатами $q^i$,

$\varphi(q)$ – значение фазы волнового поля в этой же точке,

$\varphi_s$ – начальная фаза волны,

ω – частота [об/с] (в оборотах – как на рисунке – 1000 в одну с.),

2πω – частота круговая – в радианах [рад/с].

**В многомерном пространстве** процесс распространения волн дополнительно связан с наличием дополнительных измерений и определенным пространственным направлением распространения фронта волны и соответствующими параметрами. При наличии пространственных координат произвольная свободная волна в неограниченном бесконечном пространстве распространяется и вдоль пространственных направлений в соответствии с гармоническим уравнением

$$A(t, r^i) = A_s \sin[\varphi - \varphi_s] = A_s \sin[2\pi(\omega_0 t + \omega_i r^i) - \varphi_s] =$$
$$= A_s \sin[2\pi\omega_0(c_0 t + c_i r^i) - \varphi_s]: \tag{1.3}$$
$$\omega_0\omega^0 + \omega_i\omega^i = 0.$$

в котором $\omega_0$ – частота волнового процесса, или ковариантная скорость распространения волнового процесса во временном направлении,

$\omega_i$ – пространственная частота и/или направляющий ковариантный вектор волнового процесса,

$c_i = c^i/c^2$ – пространственные ковариантная и контравариантная скорости распространения волнового процесса.

Если говорить строго, то первые два уравнения волны дают стоячую во времени волну, а (1.3) – бегущую. Понятие "бегущая" обозначает, что фаза волны в конкретной точке ПВ со временем изменяется. Мы далее будем предполагать, что скорость распространения бегущей волны постоянна и равна

$$c = c_0 = 1, \omega_0 c_i = \omega_i, c_i c^i = -1. \tag{1.4}$$

Рассмотренные выше волны с одной единственной частотой и формой волны не являются единственными формами ее существования. Они – простейшие (понятие "простейшие" – само по себе понятие тоже относительное). Кроме этих, простейших, форм с определенными параметрами, возможно существование бесконечного множества других форм, получаемых сложением произвольного числа простейших форм с различными значениями амплитуды, частоты, скорости и начальной фазы. Эта возможность называется свойством линейности множества волновых состояний:

$$\begin{gathered} A(t, r^i) = \int A_n \sin 2\pi \omega_n (t - c_{ni} r^i - \varphi_{n0}) dn, \\ A(t, r^i) = \sum\nolimits_n A_n \sin 2\pi \omega_n (t - c_{ni} r^i - \varphi_{n0}). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $n$ – индексирующий элемент из (дискретного или непрерывного) множества возможных значений соответствующего параметра. Возможность такого "интегрального", "суммируемого" или "смешанного" определения для возможных волновых процессов называется "интерференцией" состояний. При этом сами составляющие общую "волну" частные волны не теряют своей индивидуальности и независимости. Наиболее просто такие непрерывные ортогональные решения на основе гармонических уравнений существуют только в однородных изотропных неограниченных линейных (см. выше) пространствах, а дискретные – в ограниченных (цилиндрических, тороидальных, …) пространствах.

Интеграл (1.5) в общем случае может задавать и не дифференцируемые состояния. Поэтому предполагается, что законом изменения в ПВ общего волнового состояния является ее ограниченность и непрерывность до всех своих важных производных.

В ограниченном пространстве с произвольной топологией и метрикой в решениях (1.5), может присутствовать не любое, а только некоторое ограниченное, перенумерованное через параметр $n$, множество ортогональных решений $\{\Phi_n(t, r^i)\}$. В общем случае решения $\Phi_n(t, r^i)$ не являются чисто гармоническими одночастотными периодическими функциями с постоянными амплитудами в ПВ, но они обладают свойствами элементарности и ортонормированности. Тогда обобщенное решение для всех возможных решений уравнений движения волн задается линейным уравнением

$$A(t, r^i) = \sum\nolimits_n A_n \Phi_n(t, r^i). \tag{1.6}$$

Решение (1.6) в общем случае могут задавать и не дифференцируемые состояния. Поэтому в некоторых случаях можно принять, что законом изменения общего волнового состояния в ПВ является ее ограниченность и непрерывность до всех своих важных производных.

В наиболее простой форме непрерывные ортогональные решения на основе гармонических уравнений для уравнения (1.17) существуют только в однородных изотропных неограниченных линейных (см. выше) пространствах, а дискретные – в цилиндрических и тороидальных пространствах.

## 1. *Одна циклическая координата и покоящийся*[1] *источник*

Пусть ПВ представляет собой пространство с одной неограниченной временной и одной цилиндрической пространственной координатами. Уравнение изотропной волны (1.3) при этом не претерпевает каких либо изменений:

[1] "Покоящийся источник" означает, что источник волны находится в покое относительно текущей АСО.

$$A(t, r^i) = A_s \sin[2\pi\omega_0(t + c_i r^i) - \varphi_s],$$
$$1 + c_i c^i = 0. \tag{1.7}$$

Но! В ПВ при определенном значении $t$ по единственному циклическому (цилиндрическому) направлению "круговой, циклической" координаты $r^ц$ с радиусом $R^ц$ и "круговой", "циклической" длиной $\lambda^ц = 2\pi R^ц$ возможны только "застывшие" периодические решения волнового уравнения только с целыми значениями $n^ц$ полных длин волн λ вдоль циклической координаты:

$$\lambda^n = \frac{\lambda^ц}{n^ц} = \frac{2\pi R^ц}{n^ц} : \{n \in \mathbf{N}\}, \tag{1.8}$$

где $n$ – гармоника действующей по циклической координате волны,

**N** – множество целых чисел,

с уравнением застывшей волны

$$A(r^ц) = A_s \sin\left(2\pi \frac{r^ц}{\lambda^n} - \varphi_{0t}\right) = A_s \sin\left(n^ц \frac{r^ц}{R^ц} - \varphi_{0t}\right) = A_s \sin\left(\frac{n^ц}{R^ц} r^ц - \varphi_{0t}\right),$$
$$\varphi = n^ц \frac{r^ц}{R^ц} = 2\pi n^ц \frac{r^ц}{\lambda^ц}. \tag{1.9}$$

где $\varphi_{0t}$ – некоторое смещение волновой функции, возможно, зависящее от координаты $t$.

При таком определении волновой функции по окружности циклической координаты уложится ровно $n$ волн. При наличии дополнительной координаты "время" уравнение волны получает "движение" и будет следующим (источник волны "покоится"):

$$A(t, r^ц) = A_n \sin\left(2\pi\omega_n t - \frac{c^ц}{c^2}\frac{n^ц}{R^ц} r^ц\right) = A_n \sin 2\pi\left(\omega_n t - \frac{c^ц n^ц}{c^2 \lambda^ц} r^ц\right) : \{n \in \mathbf{N}\}, \tag{1.10}$$

где $\omega_n$ – частота (не круговая) $n$–ой гармоники, $c^ц$ – скорость волны. При таком определении волновой функции в ПВ ($t$, $r^ц$) в 2π единиц времени на круг уложится ровно $n$ волн. Перепишем (1.10) в более привычном виде с использованием ковариантного вектора скорости $c_ц = -c^ц/c^2$ волны в циклическом направлении:

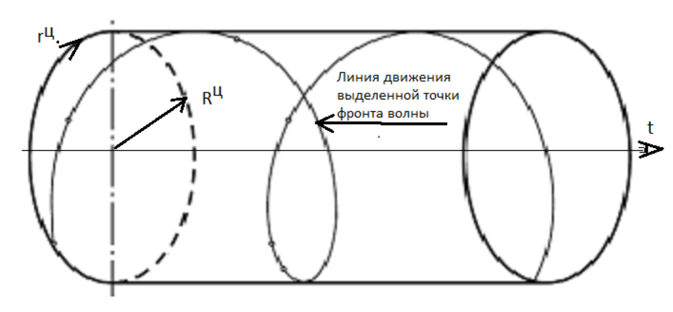

Рисунок 1.2
Схематическое изображение движения выделенной точки фронта волны для $n$ = 2 по поверхности цилиндра (t, r)

$$A(t, r^ц) = A_n \sin\left(2\pi\omega_n t + c_ц \frac{n^ц}{R^ц} r^ц\right). \tag{1.11}$$

В (1.11) появился еще один параметр $|c^ц| = c$ – скорость волны в циклическом направлении. Учитывая, что в 2–мерном пространстве ($t$, $r^ц$) должно выполняться равенство

$$2\pi\omega_n = -c_{ц}\frac{n^{ц}}{R^{ц}} = 2\pi n^{ц}\omega_{min}, \tag{1.12}$$

и $c = 1$, имеем результат:

$$\begin{gathered}\omega_{min} = -\frac{1}{2\pi R^{ц}} = -\frac{1}{\lambda^{ц}},\\ A(t, r^{ц}) = A_n \sin\frac{n^{ц}}{R^{ц}}(t - r^{ц}).\end{gathered} \tag{1.13}$$

Здесь $\lambda^{ц}$ – круговая длина волны по окружности. Как видно из (1.10), (1.11) и особенно (1.13), частота волны может иметь только определенные дискретные значения. При $n = 1$ она имеет минимальное значение $\omega_{min} = c^{ц}/\lambda^{ц}$, все остальные значения кратны ему (см. Рисунок 1.3).

## 2. Ограничения применения

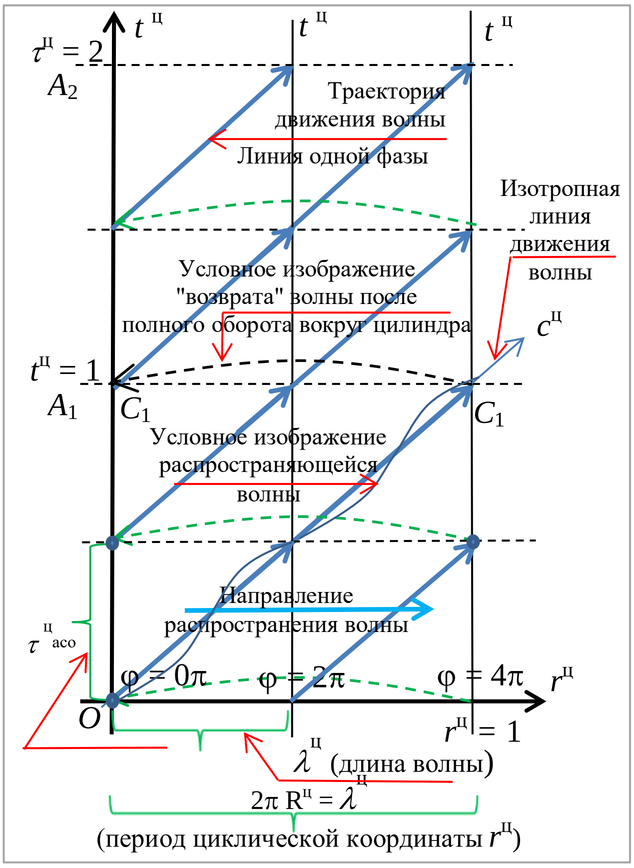


Рисунок 1.3

Схематическое изображение распространения волны покоящегося источника при n = 2 вдоль образующей окружности "цилиндра" ПВ(t, $r^{ц}$) (развертка) и "видимые" параметры волны с т.з. наблюдателя АСО.

Ограничением применения уравнения (1.13) является $n \neq 0$: $n = 0$ является отдельным случаем. В смысле циклической частоты при $n = 0$ волновая функция перестает быть циклической и будет постоянной в форме (1.13), независимой от координаты $r^{ц}$ и времени $t$:

$$\begin{gathered}A(t, r^{ц}) = A_n \sin(2\pi \cdot 0 \cdot (t - r^{ц}) + \varphi_0)\\ = \text{const}.\end{gathered} \tag{1.14}$$

Другие решения соответствуют предельным значениям скорости распространения волны. И они вырожденные по одной из координатных осей. Это отдельные независимые решения. При бесконечной скорости распространения волны пропадает цикличность по единственной пространственной координате $r^{ц}$:

$$\begin{gathered}A(t, r^{ц}) = A_n \sin\left(2\pi\omega_n t - \frac{c^{ц}}{c^2}\frac{n^{ц}}{R^{ц}}r^{ц}\right):\\ c^{ц} = \infty \to \frac{c^{ц}}{c^2} \to 0 \to\\ A(t, r^{ц}) = A_n \sin(2\pi\omega t).\end{gathered} \tag{1.15}$$

Значение частоты может быть произвольным. При нулевой скорости распространения волны теряется смысл определение самой волновой функции.

Ps. Можно было все это и не расписывать – результат (1.13) очевиден. Но далее не все так очевидно.

## 3. Одна циклическая координата и волны с т.з.

### ***движущегося наблюдателя***

Не тривиальным способом волновая функция (1.10) может быть определена при определении параметра $\varphi_{0t}$. Если она будет определена линейно от времени,: $\varphi_{0t} = 2\pi\omega(\varphi_0 - vt)$ или даже проще: $\varphi_{0t} = -2\pi\omega vt$, то это будет соответствовать волновому уравнению не изотропной волны, соответствующему в свою очередь движению источника и/или приемника во времени относительно АСО.

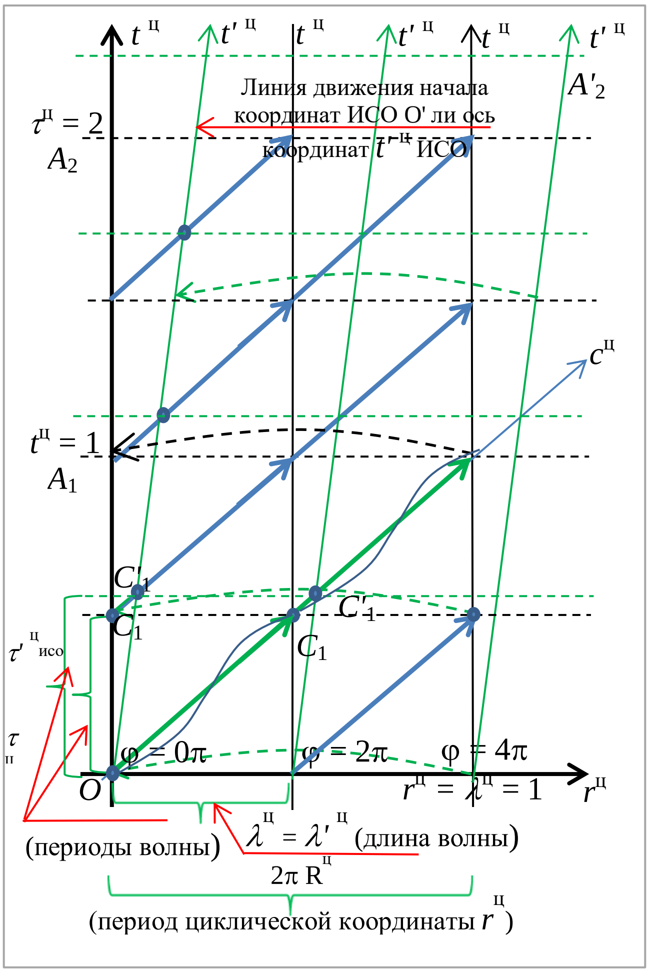


Рисунок 1.4

Схематическое изображение распространения волны от источника в АСО при n = 2 вдоль образующей окружности "цилиндра" ПВ(t, $r^{ц}$) (в развертке) и "видимые" параметры волны с т.з.

В предыдущем случае был рассмотрен случай покоящегося источника с т.з. наблюдателя АСО. Здесь рассмотрим этот же источник, но с т.з. наблюдателя ИСО, движущегося[2] со скоростью $v$ вдоль координаты $r^{ц}$. Запишем уравнение движения волны в цилиндрическом ИСО наблюдателя:

$$A(t, r^{\text{ц}}) = A_n \sin\left(2\pi\omega_n t + \frac{c_{\text{ц}} n^{\text{ц}}}{R^{\text{ц}}}(r'^{\text{ц}} - vt)\right) = \\ = A_n \sin\left(\left(2\pi\omega_n - \frac{c_{\text{ц}} n^{\text{ц}}}{R^{\text{ц}}} v\right) t + \frac{c_{\text{ц}} n^{\text{ц}}}{R^{\text{ц}}} r'^{\text{ц}}\right), \tag{1.16}$$

Здесь ($r^{ц} - vt$) – преобразование координат в ИСО. Учитывая, что в 2–мерном пространстве ($t$, $r^{ц}$) должно выполняться равенство

$$2\pi\omega_n - \frac{c_{\text{ц}} n^{\text{ц}}}{R^{\text{ц}}} v = -\frac{c_{\text{ц}} n^{\text{ц}}}{R^{\text{ц}}}, \tag{1.17}$$

и $c$ = 1, имеем:

$$\omega_{min} = \frac{c_{\text{ц}} n^{\text{ц}}}{2\pi R^{\text{ц}}}(1 - v) = \frac{1 - v}{\lambda^{\text{ц}}}. \tag{1.18}$$

В результате получаем, что движущийся в АСО наблюдатель должен увидеть измененную частоту волны. При этом частота должна зависеть от направления ее движения. Если догоняет ($v$ > 0)– частота уменьшается, в противном случае – увеличивается. Формула (1.18) полностью соответствует расчетному эффекту Доплера для наблюдателя ИСО от покоящегося в АСО источника волны.

Схематически этот результат показан на Рисунок 1.4. Здесь зеленой линией показана линия движения точки начала координат движущегося ИСО наблюдателя. Т.к. волна по-прежнему формируется неподвижным источником, картина волны на рисунке не изменится. Точка С соответствует периоду волны в АСО. А точка С', соответствующая периоду волны уже "догоняющего" АСО ИСО уже будет соответствовать другой длительности волны – в

[2] "Движущийся наблюдатель" в данном случае означает, что модельная с.с., в которой формируется волна, находится в покое, а в движении с некоторой скоростью $v$ относительно АСО находится наблюдатель ИСО. Естественно, через один оборот он прибывает в исходное место.

соответствии с принципом Доплера. Но длина соответствующей волны не изменится.

Если такой наблюдатель посмеет подумать, что он находится в покое (на линии одномерной окружности – в соответствии с принципом относительности Галилея), то он должен предположить, что это АСО вращается вдоль циклической линии окружности. И в соответствии с законом сложения скоростей в ГП он будет иметь разные скорости распространения фронта волны в разных направлениях.

## 4. *Одна циклическая координата и движущийся в АСО источник волны с т.з. источника*

Если предыдущий случай можно описать как "видение" волны, генерируемой неподвижным в модельной АСО эталонным генератором с т.з. движущегося наблюдателя ИСО, то данный случай подобен "видению" волны, генерируемой подвижным[3] в модельной циклической АСО (аналог – свисток паровоза в движении) эталонным генератором с т.з. неподвижного в АСО наблюдателя. Т.е. в ИСО генерируется волна, в АСО детектируются его параметры. Распространение волны осуществляется (синхронизируется), естественно, в соответствии с абсолютным временем ГП, но процесс ее генерации должен осуществляться на оси координат $t'^{ц}$ подвижной системы. Схематически этот результат показан на Рисунок 1.5. Он практически совпадает с предыдущим рисунком. Только источник и приемник поменялись местами. Здесь зеленой линией показана линия движения точки начала координат движущегося ИСО источника и с.о., связанная с ним.

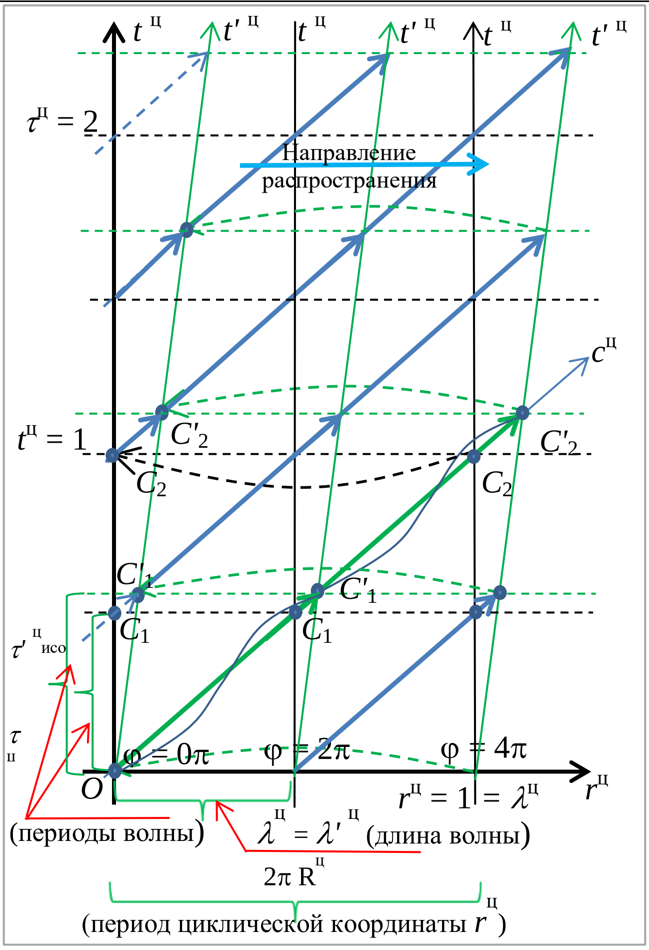


Рисунок 1.5

Схематическое изображение распространения волны, генерируемой движущимся в АСО источником волн при n = 2 вдоль образующей окружности "цилиндра" ПВ(t, r$^{ц}$) (развертка) и "видимые" параметры волны с т.з. наблюдателя АСО.

Рассмотрим, как распространяется волна. **Т.к. волна формируется подвижным источником, картина волны на рисунке изменится,** хотя линии ее движения не изменятся. Волна, возникающая в точке $O$, движется по изотропной линии $c^{ц}$, проходит через точки $2\pi \sim C_1$, достигает точки $4\pi \sim C_2$, и оказывается в т. $C_1$ – с т.з. наблюдателя АСО. Но источник уже ушел из образующей цилиндра АСО ПВ $C_2$ – и в этой точке он не сможет сформировать новый фронт волны. Тем более, это не соответствует ее началу координат. Новый фронт волны можно сформировать только в точке $C'_2$ – с приходом фронта соответствующей волны в начало штрихованных координат. И точка $C'_2$

[3] "Движущийся относительно АСО источник" означает, что источник волны находится в движущейся со скоростью $v$ ИСО относительно текущей АСО.

– в силу цикличности координатной линии $r^{ц}$ – становится началом нового цикла обхода волной цилиндра ($t'$, $r'^{ц}$) источником волны. (в точке $C'_1$ – мы ее пропустили – как в начале своей с.к. сформирует новый фронт волны – первой волны, а в т. $C'_2$ сформируется уже вторая волна – т.к. у нас на рисунке показана ситуация с двумя вонами на циклической окружности). Т.к. точка $C'_2$ дальше точки $C_2$, то соответствующая периоду волны длина волны движущегося генератора ИСО уже будет соответствовать другой длительности волны $\tau'^{ц}$. Но длина соответствующей волны с т.з. ИСО не изменится и она по прежнему будет равна $C_2 – C_2 = C'_2 – C'_2$. Это изменение периода волны можно оправдать и изменением скорости волны в АСО. Для попутного направления распространения волны длина волны увеличивается, частота уменьшается.

Если такой наблюдатель посмеет подумать, что он находится в покое (на линии одномерной окружности – в соответствии с принципом относительности Галилея), то он должен предположить, что это АСО вращается вдоль циклической линии окружности. И в соответствии с законом сложения скоростей в ГП он будет иметь разные скорости распространения фронта волны в разных направлениях. Здесь нет связи с эффектом Доплера – об этом далее.

Словами закончили – далее с формулами.

В предыдущих случаях был рассмотрен случай покоящегося источника. Здесь рассмотрим движущийся со скоростью $v$ вдоль оси $r^{ц}$ источник. Запишем уравнение движения волны в цилиндрическом ИСО источника с использованием скорости волны в ИСО источника:

$$A(t, r^{ц}) = A_n \sin\left(2\pi\omega'_n t + \frac{c_{ц} n^{ц}}{R^{ц}} r'^{ц}\right) = A_n \sin 2\pi\omega'_n \left(t + \frac{c_{ц}}{2\pi\omega'_n} \frac{n^{ц}}{R^{ц}} r'^{ц}\right) \rightarrow$$

$$A(t, r^{ц}) = A_n \sin 2\pi\omega'_n \left(t + \left(\frac{1-v}{2\pi\omega'_n} \frac{n^{ц}}{R^{ц}}\right) r'^{i}\right) = \tag{1.19}$$

$$= A_n \sin\left(2\pi\omega'_n t + (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}} r'^{i}\right),$$

Учитывая, что в 2–мерном пространстве ($t$, $r'^{ц}$) должно выполняться равенство

$$2\pi\omega'_n = (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}} \tag{1.20}$$

и $c = 1$, имеем:

$$\omega'_{min} = \frac{(1-v)}{2\pi R^{ц}} = \frac{1-v}{\lambda^{ц}}. \tag{1.21}$$

В результате получаем, что движущийся с ИСО наблюдатель должен увидеть измененную частоту волны (на рисунке зеленая сетка), причем равную предыдущему случаю (1.18). При этом частота должна зависеть от направления ее движения. Если убегает - частота уменьшается, в противном случае – увеличивается. В отличие от формулы (1.18), здесь неуместно сравнение с эффектом Доплера.

Картина распространения волны во всех трех случаях одна и та же. Это хорошо видно на рисунках. Но между ними все же есть разница.

## 5. Движущийся источник из АСО

Произведем переход в с.о. АСО:

$$A(t,r^{ц}) = A_n \sin\left(2\pi\omega_n t + (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}}(r^{ц} - vt)\right) =$$
$$= A_n \sin\left(2\pi\omega_n t - (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}}vt + (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}}r^{ц}\right) = \qquad (1.22)$$
$$= A_n \sin\left(\left(2\pi\omega_n - (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}}v\right)t + (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}}r^{ц}\right).$$

Вычислим минимальную циклическую частоту в АСО:

$$2\pi\omega_n - (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}}v = (1-v)\frac{n^{ц}}{R^{ц}} \rightarrow$$
$$\omega_{min} = \frac{(1-v)}{2\pi R^{ц}} + \frac{(1-v)}{2\pi R^{ц}}v. = \qquad (1.23)$$
$$= \frac{(1-v)}{2\pi R^{ц}}(1+v) = \frac{(1-v^2)}{2\pi R^{ц}} = \frac{(1-v^2)}{\lambda^{ц}}.$$

В результате получили, что в АСО минимальная  частота волны также будет измененной, но независимой от направления движения источника в АСО и это изменение определяется квадратом скорости ИСО источника. Что соответствует метрике АСО в движущемся ИСО.

Ps. В специальной теории относительности (СТО) А.Эйнштейна первый и третий случаи не отличаются друг от друга. В них оба эти случая соответствуют двум эквивалентным случаям – двум ИСО = АСО. Интерпретация результатов в СТО, естественно, другая. Да и время в обеих системах различные. Релятивистские – в СТО и абсолютные – в галилеевом пространстве (ГП). И процедура синхронизации времени в СТО совершенно отличается от галилеевых, и они не позволяют выделить какое либо выделенное ИСО как АСО. Единственное, что их объединяет – это существование фундаментальной скорости $c$ распространения фронтов волн. А первый и третий случаи различаются только тем, что один из них – источник, а другой приемник. И имеется эффект Доплера – отличающиеся друг от друга в галилеевом и релятивистском пространствах "релятивистским" фактором.

В общей теории относительности (ОТО) А.Эйнштейна добавляются дополнительные факторы, вытекающие из римановости ПВ. Единственное, что объединяет ее с ОТО ГТО – это существование фундаментальной скорости $c$ распространения локальных фронтов волн.

## 2. Много неограниченных и одна циклическая координаты

В общем случае пространство-время может иметь много пространственных осей координат. Некоторые из них могут быть неограниченными, а другие – циклическими с разными периодами цикличности.

При наличии нескольких ничем неограниченных координатных осей $r^i$ и одной ограниченной оси $r^{ц}$ уравнение волны будет следующим см. (1.7):

$$A(t,r^i) = A_s \sin\left[2\pi\omega\left(t + c_i r^i + c_{ц} r^{ц}\right) - \varphi_s\right]:$$
$$1 + \left(c_i c^i + c_{ц} c^{ц}\right) = 0. \qquad (2.1)$$

Зная уравнение волны, в частности – частоту и скорость волны, мы можем найти длину волны в каждом из координатных направлений. Для этого запишем "срез" волны в необходимом направлении, приняв значения координаты в других направлениях равными нулю:

$$A\left(t,r^i\right)=A_s\sin\left[2\pi\omega c_i r^i\right]. \tag{2.2}$$

Теперь найдем ближайшую координату волны с фазой 2π вдоль этого направления:

$$2\pi\omega c_i r^i=2\pi\rightarrow\lambda^i=\frac{1}{\omega c_i}. \tag{2.3}$$

Если направление цикличное, то частота ω должна находиться из условия цикличности по циклической координате:

$$\lambda^{\text{ц}}=\frac{2\pi R^{\text{ц}}}{n}. \tag{2.4}$$

Для нее можно найти циклическую частоту, соответствующую одному циклическому обороту:

$$\begin{gathered}A\left(t,r^i\right)=A_s\sin\left[2\pi\omega c_{\text{ц}}r^{\text{ц}}\right]\rightarrow\\ 2\pi\omega c_{\text{ц}}\frac{\lambda^{\text{ц}}}{2\pi}=2\pi n\rightarrow\lambda^{\text{ц}}=\frac{2\pi n}{\omega c_{\text{ц}}}\rightarrow\\ \omega=\frac{2\pi n}{\lambda^{\text{ц}}c_{\text{ц}}}=\frac{2\pi n}{2\pi R^{\text{ц}}c_{\text{ц}}}=\frac{n}{R^{\text{ц}}c_{\text{ц}}}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Отсюда находим длины волн в неограниченных направлениях:

$$\lambda^i=\frac{1}{\omega c_i}=\frac{2\pi R^{\text{ц}}c_{\text{ц}}}{nc_i}. \tag{2.6}$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, ограничением применения уравнений является условие $n\neq 0$, а случай $n=0$ является отдельным случаем. При $n=0$ имеем обычное уравнение волны произвольной частоты без цикличности по неограниченным координатам:

$$A\left(t,r^i\right)=A_n\sin 2\pi\omega\left(t+c_i r^i\right):\{n^{\text{ц}}=0\}. \tag{2.7}$$

Если скорость фронта волны в соответствующем направлении $c^i=0$, то можем сделать вывод, что в этом направлении волна не распространяется и длина волны, соответственно, равна бесконечности. Соответственно, при $c_i=0$ имеем случай предыдущего раздела (1.10) распространения волны исключительно в циклическом направлении.

Если скорость фронта волны в циклическом направлении $c^{\text{ц}}=0$, то по формуле (2.6) скорость фронта волны должна быть равна нулю. Но это не так, т.к. в этом случае должно быть равно нулю количество волн в циклическом направлении. И, следовательно, формула (2.6) не может быть применена.

## 1. *Одна неограниченная и одна циклическая координаты*

Далее будем рассматривать случай одной циклической $r^{\text{ц}}$ и одной неограниченной $r^b$

координатных осей. На Рисунок 2.1a изображен этот "плоский" случай. Ось времени в ней не изображена, но подразумевается:

$$A(t,r^i) = A_s\sin[2\pi\omega(t + c_b r^b + c_ц r^ц) + \varphi_s]. \quad (2.8)$$

Если волна распространяется только в циклическом направлении $r^ц$, то никакой периодичности в распространении волны в не циклическом направлении $b$ не будет наблюдаться: $c^b = 0$ и

$$A(t,r^i) = A_s\sin[2\pi\omega(t + c_ц r^ц) + \varphi_s].$$

Вдоль неограниченной координаты $r^b$ никакого движения волны не будет наблюдаться. Этот случай полностью соответствует первой части.

Соответственно, в случае распространения волны только в не циклическом направлении при $c^ц = 0$:

$$A(t,r^i) = A_s\sin[2\pi\omega(t + c_b r^b) + \varphi_s].$$

Вдоль циклической координаты $r^ц$ никакого движения волны не будет наблюдаться. Этот случай не циклический.

В общем случае движения скорость распространения волны будет раскладываться в обеих направлениях – и в циклическом, и не циклическом. Это наш случай. При этом параметр скорости $c^ц$ по циклической координате не обязан быть постоянным и равным фундаментальной скорости $c$, а с учетом скорости в не циклических направлениях осей пространственных координат должно соблюдаться условие общей скорости, равной фундаментальной (1.4). Этот случай изображен на Рисунок 2.1b. Распространение волны происходит как бы по винтовой линии $OB'$ с определенным наклоном, определяемым отношением скоростей $v^b$ и $c^ц$, и фронтом $B'B''$.

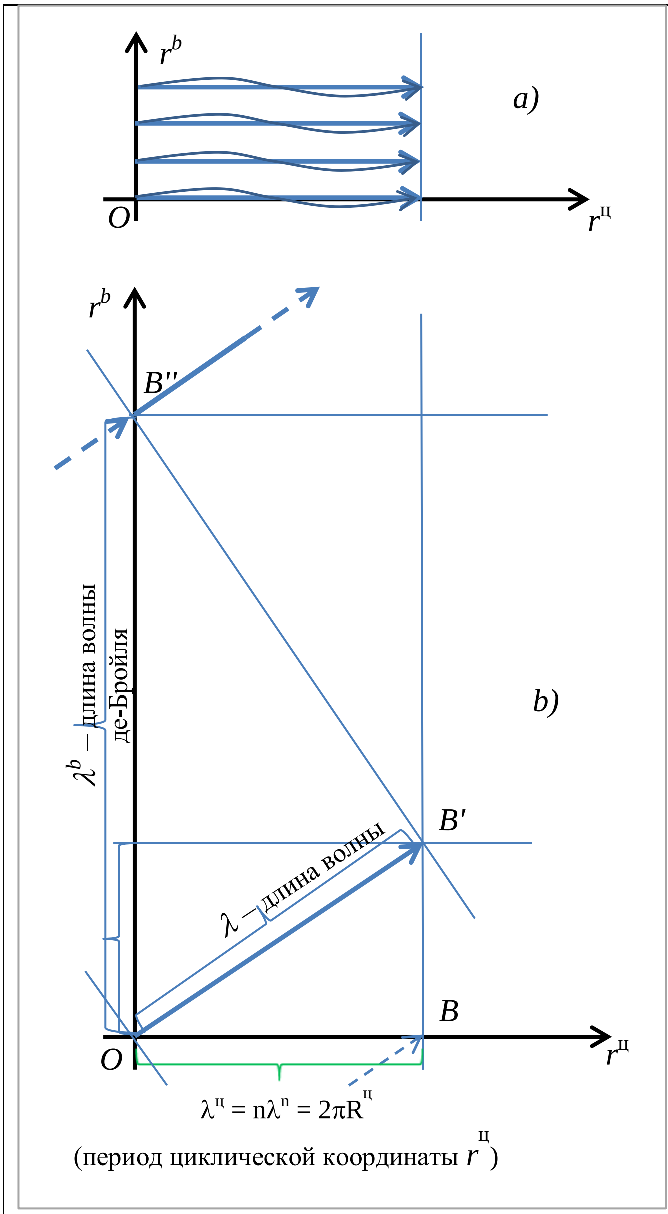


Рисунок 2.1

Схематическое изображение распространения волны, генерируемой в АСО источником волн: a) при распространении только вдоль циклической координаты; b) при частичном распространении со скоростью $v$ вдоль неограниченной координаты.

Т.к. скорость по циклической координате является только частью общей скорости $c^i$, то ее параметры, точнее – длина волны $\lambda^n$, с учетом целочисленности количества волн $n^ц$ вдоль циклической координаты, должна удовлетворять условию:

$$\lambda^n = \frac{\lambda^ц}{n^ц} : \{n \in N, n \neq 0\}. \quad (2.9)$$

Чтобы удовлетворить этому условию, необходимо, чтобы скорость волны в этом направлении удовлетворяла следующему:

$$\lambda^{n} = \frac{c^{ц}}{\omega}. \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) определяем возможную частоту

$$\frac{\lambda^{ц}}{n^{ц}} = \frac{c^{ц}}{\omega} \to \omega = \frac{c^{ц} n^{ц}}{\lambda^{ц}} = \frac{c^{ц} n^{ц}}{2\pi R^{ц}}. \tag{2.11}$$

и минимальное ее значение при $n = 1$:

$$\omega_{min} = \frac{c^{ц}}{\lambda^{ц}} = \frac{c^{ц}}{2\pi R^{ц}}. \tag{2.12}$$

Этому условию при неопределенности скорости волны $c^i$ вдоль нециклических и $c^ц$ вдоль циклической координаты удовлетворяет волновое уравнение

$$\begin{aligned} A(t, r^i) &= A_n \sin\left(2\pi\omega_n(t + c_i r^i) + \left(2\pi c^{ц}\frac{n^{ц}}{\lambda^{ц}}\right) c_{ц} r^{ц}\right). \\ &= A_n \sin 2\pi \frac{c^{ц} n^{ц}}{\lambda^{ц}}(t + c_i r^i + c_{ц} r^{ц}) = \\ &= A_n \sin \frac{c^{ц} n^{ц}}{R^{ц}}(t + c_i r^i + c_{ц} r^{ц}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Скорость $c^ц$ можно определить из (2.1) и известных значений $c^i$:

$$\begin{gathered} \{c = 1\} \to 1 + c_i c^i + c_{ц} c^{ц} = 0 \to \\ -c_{ц} c^{ц} = 1 + c_i c^i \to \\ c^{ц} \sim -c_{ц} \sim \pm\sqrt{1 + c_i c^i} = \pm\sqrt{1 - v^2}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Здесь $v$ – скорость в нециклических направлениях. По сравнению со случаем с единственной циклической координатой минимальная частота изменяется за счет перераспределения скорости распространения волны между циклической и нециклической координатами.

## 2. Длина волны в двухмерном пространственном случае

Длина волны в циклическом направлении была найдена в (2.9). Она является константой пространства. Для нахождения длины волны в не циклическом направлении рассмотрим уравнение распространения волны (2.13) в трехмерном пространстве $(t, r^b, r^ц)$.

$$A(t, r^{ц}) = A_n \sin \frac{c^{ц} n^{ц}}{R^{ц}}\left(t + \frac{v r^b + c^{ц} r^{ц}}{c^2}\right). \tag{2.15}$$

Найдем уравнение движения волны в не циклическом направлении вдоль образующей цилиндра $r^ц = 0$:

$$A(t, r^{ц}) = A_n \sin \frac{c^{ц} n^{ц}}{R^{ц}} (t + v r^b). \tag{2.16}$$

Найдем длину волны в не циклическом направлении из условия, что изменение фазы фронта волны должно быть равно 2π при неизменном времени и циклической координаты:

$$\begin{gathered} \omega v \lambda^b = 2\pi \rightarrow \\ \lambda^b = \frac{2\pi}{v\omega} = \frac{2\pi}{v} \frac{R^{ц}}{c^{ц} n^{ц}} = \frac{\lambda^{ц}}{v c^{ц} n^{ц}}. \end{gathered} \tag{2.17}$$

С учетом (2.14) имеем:

$$\lambda^b = \frac{2\pi R^{ц}}{n^{ц} v \sqrt{1 - v^2}} = \frac{\lambda^{ц}}{v n^{ц} \sqrt{1 - v^2}}. \tag{2.18}$$

## Сокращения и другие соглашения

| | |
|---|---|
| (*)<br>А – абсолютное,<br>В – время,<br>Г – галилеево,<br>И – инерциальное,<br>К – координаты, квантовая,<br>М – механика, метрическое, магнитное,<br>Н – ньютоново, неинерциальная,<br>О – отсчета, относительности, общая,<br>П – пространство,<br>Р – релятивистская,<br>С – система, специальная,<br>Т – теория, тензоры,<br>Ф – физика,<br>Ч – частная,<br>Э – электро–, электрическая, | АПВ – ПВ с абсолютным временем и пространством.<br>АСО (АИСО) – абсолютная (инерциальная) система отсчета,<br>ВП – волновое пространство,<br>ГП – галилеево пространство,<br>ИСО – инерциальная система отсчета – координатная с.о., полученная из исходного ортонормированным линейным преобразованием координат и тензоров (ЛПТК),<br>ЛПТК – линейные преобразования тензоров и координат,<br>МГП – метрическое галилеево пространство,<br>ПВ – пространство–время,<br>ПТК – преобразования тензоров и координат.<br>СО, с.о. – система отсчета,<br>СК, с.к. – система координат,<br>ЭМВ – электромагнитная волна,<br>(и)т.д. – (и) так далее,<br>(и)т.п. – (и) тому прочие,<br>в т.ч. – в том числе,<br>т.з. – точка зрения. |

1) *При использовании более чем одной буквы.
2) Выделение красным цветом в формуле может обозначать равный нулю элемент формулы или выражения.
3) По одинаковым верхнему и нижнему индексам производится свертка (суммирование) соответствующих элементов (по правилу Эйнштейну).
4) По индексу в скобке типа "$_{(k)}$" или "$^{(k)}$" свертка не выполняется, но она привязана к соответствующему тензорному или другому индексу "функционально".
5) Формат ссылок на формулы: **(nn)** , где nn – номер формулы При необходимости указания на конкретную строку формулы применяется формат **(nn):n**, где n – номер строки формулы, начиная с 1 (единицы), причем эта нумерация продолжается и на дальнейшие не нумерованные формулы и их строки.

## Литература

1. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : Наука, 1972. – 351 с.
2. Детлаф, А. А. Курс общей физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. Высшая школа, 2017. – 245 с.
3. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М. : Высш. шк., 2001. – 575 с. 74
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики: В 10 т. : т. 1. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с
5. Тимин В. А. Эксперимент Майкельсона–Морли. URL: http://vixra.org/abs/1908.0574
6. Тимин В. А. Уравнения распространения волн в различных пространствах. URL: http://vixra.org/abs/1908.0091
7. Тимин В. А. Преобразования галилеевых тензоров. //Galilean Transformations of Tenzors, URL: http://vixra.org/abs/1907.0546

## Мои работы

http://vixra.org/author/valery_timin

E-mail: timinva@yandex.ru