New paradox in the special relativity

Mass-spring-mass oscillator

Category: Relativity and Cosmology

Title: New paradox in the special relativity - mass-spring-mass oscillator

Authors: Randolf Rolff

Comment: 13 pages; German language
Deutsch: Neues Paradoxon in der SRT–
Masse-Feder-Masse-Schwinger

Abstract

When calculating the resonance frequency of a fast moving mass-spring-mass oscillator, this contradicts the relativistic time dilation. The calculated frequency depends on the inertial system used for the calculation. There are indications that the elastic potential energy of a spring decreases with increasing speed and does not increase as predicted by the theory of relativity.

Zusammenfassung

Bei der Berechnung der Resonanzfrequenz eines schnell bewegten Masse-Feder-Masse-Schwingers widerspricht diese, je nach zur Berechnung verwendetem Inertialsystem, der relativistischen Zeitdilatation. Es deutet sich an, dass die Spannenergie einer Feder mit Zunahme der Geschwindigkeit abnimmt und nicht, wie von der Relativitätstheorie vorhergesagt, zunimmt.

Neues Paradoxon in der SRT
Masse-Feder-Masse-Schwinger

© Randolf Rolff
POST@PHYSIK4D.DE

Kerpen,20.3.2020

Zusammenfassung

Bei der Berechnung der Resonanzfrequenz eines schnell bewegten Masse-Feder-Masse-Schwingers widerspricht diese, je nach zur Berechnung verwendetem Inertialsystem, der relativistischen Zeitdilatation. Es deutet sich an, dass die Spannenergie einer Feder mit Zunahme der Geschwindigkeit abnimmt und nicht, wie von der Relativitätstheorie vorhergesagt, zunimmt.

1 Betrachtetes System

Betrachtet wird ein idealer Masse-Feder-Masse-Schwinger (z.B. ein Quarzkristall) der in einer fliegenden Rakete schwingt. Die Besatzung der Rakete ist im Inertialsystem S, in dem der Oszillator in x-Richtung ruht und in y-Richtung schwingt.

Die Erde ist im Inertialsystem S′, in dem die Rakete in x'-Richtung mit v'_x fliegt und der Oszillator transversal schwingt. Berechnet wird die Resonanzfrequenz ω' des Oszillators im Inertialsystem der Erde.

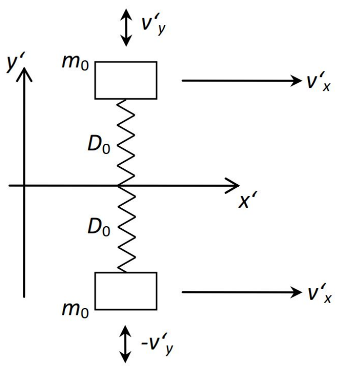

Abbildung 1: Oszillator

Im Ruhesystem S der Rakete und des Oszillators ist m_0 die Ruhemasse einer der beiden schwingenden Massen und D_0 die Federkonstante einer Federhälfte. Für die Oszillationsgeschwindigkeit soll $v'_y \ll v'_x$ gelten.

Für die Lorentzfaktoren γ_0, zwischen den beiden Inertialsystemen S' und S, und γ, zwischen S' und der bewegten Masse m_0, gilt, mit c_0 als Vakuumlichtgeschwindigkeit:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v'_x}^2}{c_0^2}}} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v'_x}^2 + {v'_y}^2}{c_0^2}}}$$

Wegen $v'_y \ll v'_x$ kann γ mit einer Taylorreihe um v'_x angenähert werden zu:

$$\gamma \approx \gamma_0 + \frac{1}{2}{\gamma_0}^3 \cdot \frac{{v'_y}^2}{c_0^2} + ... \approx \gamma_0 \cdot [1 + \frac{1}{2}{\gamma_0}^2 \cdot \frac{{v'_y}^2}{c_0^2}] = \gamma_0 \cdot [1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{{v'_y}^2}{c_0^2 - {v'_x}^2}]$$

Zusätzlich gilt im hier betrachteten Fall ${v'_y}^2 \ll c_0^2 - {v'_x}^2$ und es folgt:

$$\gamma \approx \gamma_0 \tag{1}$$

Für die in einer Federhälfte gespeicherten Spannenergie gilt:

$$E = \frac{1}{2} D_0 \cdot y^2$$

Für die Kraft F der Feder gilt:

$$F = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}y} = D_0 \cdot y$$

Vom System S$'$ der Erde aus gesehen ist diese Energie E' wegen der Bewegung mit v'_x größer. Es gilt:

$$E' = \gamma_0 \cdot E \tag{2}$$

Weiter soll im System S' (aus Sicht der Erde) gelten:

$$E' = \frac{1}{2} D'_0 \cdot y'^2$$

Dabei ist $y' = y$, da die Längen nennenswert nur in x-Richtung kontrahiert sind. Daraus folgt für die Federkonstante im System S':

$$D'_0 = \gamma_0 \cdot D_0 \tag{3}$$

und es folgt:

$$E' = \frac{1}{2} \cdot \gamma_0 \cdot D_0 \cdot y'^2 \tag{4}$$

Für die Kraft der Feder folgt:

$$F' = \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}y'} = D'_0 \cdot y'$$

2 Ruhesystem S

Im Ruhesystem S der Rakete und des Oszillators gilt für die Schwingungsgleichung folgendes Kräftegleichgewicht:

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} + D_0 \cdot y = 0$$

Dabei ist p_y der Impuls der Masse m_0 in y-Richtung zur Zeit t.
Es folgt:

$$\frac{\mathrm{d}(m_0 \cdot v_y)}{\mathrm{d}t} + D_0 \cdot y = 0$$

Wegen $v_y \ll c_0$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D_0}{m_0} \cdot y = 0$$

Mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{D_0}{m_0}}$ und passender Anfangsbedingung erhält man folgende Schwingungsgleichung:

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

Wegen der Zeitdilatation gilt im System S' der Erde: $\Delta t' = \gamma_0 \cdot \Delta t$
Man erhält damit als Schwingungsgleichung aus Sicht der Erde:

$$y'(t') = \hat{y}' \cdot \sin(\frac{\omega_0}{\gamma_0} \cdot t') \tag{5}$$

d.h., eine Schwingung mit der reduzierten Kreisfrequenz $\omega_1' = \frac{\omega_0}{\gamma_0}$.

3 System der Erde S'

Im System S' der Erde bewegt sich der Oszillator mit der Rakete mit v'_x. Die Schwingung des Oszillators kann alternativ direkt vom System der Erde aus berechnet werden. Es gilt folgendes Kräftegleichgewicht für die Schwingungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}t'} + D'_0 \cdot y' = 0$$

Dabei ist p'_y der relativistische Impuls der Masse m_0 in y'-Richtung zur Zeit t' im System S'.
Es folgt:

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma \cdot m_0 \cdot v'_y)}{\mathrm{d}t'} + D'_0 \cdot y' = 0$$
$$m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t'} \cdot v'_y + \gamma \cdot m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t'} + D'_0 \cdot y' = 0$$

Wegen $v'_y \ll v'_x$ gilt gemäß (1) $\gamma \approx \gamma_0 = \text{const.}$, damit $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t'} \to 0$, und es folgt :

$$\gamma_0 \cdot m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t'} + D'_0 \cdot y' = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t'^2} + \frac{D'_0}{\gamma_0 \cdot m_0} \cdot y' = 0 \tag{6}$$

Mit (3) folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t'^2} + \frac{D_0}{m_0} \cdot y' = 0$$

Mit $\omega'_2 = \sqrt{\frac{D_0}{m_0}} = \omega_0$ und passender Anfangsbedingung erhält man folgende Schwingungsgleichung:

$$y'(t) = \hat{y}' \cdot \sin(\omega_0 \cdot t') \tag{7}$$

4 Paradoxon

Beim Berechnen der Schwingungsgleichung aus dem Ruhesystem S heraus gilt für die Schwingung vom System S' der Erde aus gesehen eine Kreisfrequenz

$$\omega_1' = \frac{\omega_0}{\gamma_0}$$

mit der Schwingungsgleichung (5).

Bei direkter Berechnung im System S' der Erde gilt für die selbe Schwingung jedoch die Kreisfrequenz

$$\omega_2' = \omega_0$$

mit der Schwingungsgleichung (7).
Der Oszillator kann aber nicht mit zwei Kreisfrequenzen gleichzeitig schwingen. D.h., dass mindestens eine der beiden Berechnungen falsch sein muss.

5 Schlussfolgerung

Zum obigen Paradoxon sind folgende drei Begründungsmöglichkeiten zu unterscheiden:

a) Es könnte noch ein Fehler in obigen Überlegungen versteckt sein. Diesen zu finden soll von dieser Veröffentlichung unterstützt werden.

b) Es könnte sein, dass die Lorentz-Transformation im Falle eines Masse-Feder-Oszillators nicht gilt und der bewegte Oszillator nicht langsamer schwingt.

c) Es könnte sein, dass die Spannenergie einer Feder bei Bewegung nicht zunimmt, sonder abnimmt.

Zu b): Da eine bewegte Atomuhr nachweislich langsamer läuft erscheint es eher wahrscheinlich, dass auch ein bewegter Masse-Feder-Oszillator langsamer laufen wird. Auf jeden Fall würde eine nicht verlangsamte Oszillation dem Relativitätsprinzip widersprechen, da sich ein mit einer Rakete bewegter Oszillator und eine mitfliegende Atomuhr desynchronisieren würden.

Zu c): Zur Berechnung dieser Möglichkeit wird in Gleichung(6) statt D_0' ein noch zu bestimmendes D_1' eingesetzt und es folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t'^2} + \frac{D_1'}{\gamma_0 \cdot m_0} \cdot y' = 0$$

Das Ergebnis soll die als korrekt angenommene Schwingungsgleichung (5) aus Sicht der Erde sein:

$$y'(t') = \hat{y}' \cdot \sin\left(\frac{\omega_0}{\gamma_0} \cdot t'\right)$$

d.h., eine Schwingung mit der reduzierten Kreisfrequenz $\omega_1' = \frac{\omega_0}{\gamma_0}$. Dazu muss gelten:

$$\omega_1' = \sqrt{\frac{D_1'}{\gamma_0 \cdot m_0}}$$

und es folgt:

$$D_1' = \gamma_0 \cdot {\omega_1'}^2 \cdot m_0 = \frac{{\omega_0}^2 \cdot m_0}{\gamma_0}$$

$$D_1' = \frac{D_0}{\gamma_0} \tag{8}$$

Die bewegte Feder ist damit schwächer als die ruhende und für die Spannenergie der bewegten Feder gilt $E_1' = \frac{E}{\gamma}$ im Gegensatz zur Gleichungt (2). Die Spannenergie nimmt durch Bewegung ab.

Anhang

a. Berechnungen zum SRT-Oszillator-Paradoxon - mittels der Energie

Es gilt $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v{\prime}_x{}^2+v{\prime}_y{}^2}{c^2}}}$

Nach der Taylorreihe (über Formel (1) im Manuskript) gilt:

$$\gamma \approx \gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_0{}^3 \cdot \frac{v'_y{}^2}{c^2}$$

Weiter gilt:

$$E' = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 \approx \left(\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_0{}^3 \cdot \frac{v'_y{}^2}{c^2}\right) \cdot m_0 \cdot c^2 = \gamma_0 \cdot m_0 \cdot c^2 + \frac{1}{2}\gamma_0{}^3 \cdot v'_y{}^2 \cdot m_0$$

Für den Anteil der durch die Bewegung mit v_y verursachten **kinetischen Energie** gilt:

$$E'_{kin\_y} = \frac{1}{2}\gamma_0{}^3 \cdot m_0 \cdot v'_y{}^2$$

Gleichung 1

Es gilt wegen der Lorentz'schen Zeitdilatation:

$$v'_y{}^2 \approx \frac{1}{\gamma_0{}^2} \cdot v_y{}^2$$

und es folgt damit:

$$E'_{kin\_y} = \frac{1}{2}\gamma_0 \cdot m_0 \cdot v_y{}^2 = \gamma_0 \cdot E_{kin\_y}$$

Die kinetische Energie nimmt, wie in der SRT nominell alle Energien, mit Gamma zu.

Für die **Spannenergie** gilt nach (4) Manuskript:

$$E'_s = \frac{1}{2}\gamma_0 \cdot D_0 \cdot y'^2$$

Gleichung 2

Die **Spannenergie** und die **kinetische Energie** wandeln sich periodisch in einander um. Dabei muss gelten:

$$E'_{kin\_y} + E'_s = const.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{dt'}\left[E'_{kin\_y} + E'_s\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt'}\left[\frac{1}{2}\gamma_0{}^3 \cdot m_0 \cdot v'_y{}^2 + \frac{1}{2}\gamma_0 \cdot D_0 \cdot y'^2\right] = 0 \quad \text{mit} \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}$$

$$\frac{d}{dt'}\left[\left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma_0{}^2} \cdot \frac{D_0}{m_0} \cdot y'^2\right] = 0$$

$$2 \cdot \frac{dy'}{dt'} \cdot \frac{d^2y'}{dt'^2} + \frac{2}{\gamma_0{}^2} \cdot \frac{D_0}{m_0} \cdot y' \cdot \frac{dy'}{dt'} = 0$$

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} + \frac{1}{\gamma_0{}^2} \cdot \frac{D_0}{m_0} \cdot y' = 0$$

Gleichung 3

Daraus folgt: $\omega'_3 = \frac{1}{\gamma_0} \cdot \sqrt{\frac{D_0}{m_0}}$

Das ist die ganz normale zeitdilatierte Kreisfrequenz (ω'_1 im Manuskript).

b. Berechnungen zum SRT-Oszillator-Paradoxon - mittels des Impulses

Die Berechnung mittels des Impulses führt im Kapitel 3 „System der Erde S‘ “ zu einem falschen Ergebnis. Die Berechnung soll hier weiter analysiert werden.

Nach „Theoretische Physik“ (M. Bartelmann et al, Springer-Verlag 2015, S.357 Formel 10.9) gilt für die relativistische Trägheitskraft in einem allgemeinen Bezugssystem:

$$\vec{F} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{a} + \gamma^3 \cdot m_0 \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c_0{}^2} \cdot \vec{v}$$

Gleichung 4

Die Trägheitskraft zeigt damit nicht notwendigerweise in dieselbe Richtung wie die Beschleunigung. Im Falle der oszillierenden Masse m_0 folgt aus obiger Gleichung:

$$F'_y = \gamma_0 \cdot m_0 \cdot a'_y + \gamma_0{}^3 \cdot m_0 \cdot (v'_x \cdot a'_x + v'_y \cdot a'_y) \cdot \frac{v'_y}{c_0{}^2}$$

Mit $a'_x = 0$ und mit $v'_y << c_0$ folgt:

$$F'_y \approx \gamma_0 \cdot m_0 \cdot a'_y$$

Gleichung 5

Das ist die Gleichung, die in der Berechnung der Schwingung auch verwendet wurde (mit $a'_y = \frac{dv'_y}{dt'}$).

Nach Gleichung 4 muss jedoch noch der Kraft-Anteil in x-Richtung berücksichtigt werden. Es folgt:

$$F'_x = \gamma_0 \cdot m_0 \cdot a'_x + \gamma_0{}^3 \cdot m_0 \cdot (v'_x \cdot a'_x + v'_y \cdot a'_y) \cdot \frac{v'_x}{c_0{}^2}$$

Mit $a'_x = 0$ folgt:

$$F'_x = \gamma_0{}^3 \cdot m_0 \cdot \frac{v'_x \cdot v'_y}{c_0{}^2} \cdot a'_y$$

Gleichung 6

Interessant ist jetzt die Begründung für diese Kraft in x-Richtung, obwohl die Geschwindigkeit v'_x konstant ist (Fluggeschwindigkeit der Rakete). Für den Impuls p'_x in x-Richtung gilt:

$$p'_x = \gamma \cdot m_0 \cdot v'_x$$

Durch die Oszillations-Bewegung in y-Richtung ändert sich γ, wenn auch nur geringfügig. Diese Änderung veranlasst eine Impulsänderung quer zur Oszillationsrichtung und dazu ist die Kraft F'_x erforderlich. Die Problematik ist hier bereits zu erkennen. Im Allgemeinen ist eine Impulsänderung Folge einer Kraft; hier gibt es eine Impulsänderung, zu der eine Kraft existieren muss.

c. Energiebetrachtung mit Hilfe der Kräfte

Für die Kraft F'_{sy} der Feder gilt, abgeleitet nach Gleichung 2:

$$F'_{sy} = \gamma_0 \cdot D_0$$

Gleichung 7

Diese Kraft liefert die Energie

$$E'_s = \frac{1}{2}\gamma_0 \cdot D_0 \cdot y'^2$$

Die beschleunigte Masse nimmt als kinetische Energie die folgenden beiden Energien auf:

$$E'_x = \int F'_x \, dx' \quad \text{und} \quad E'_y = \int F'_y \, dy'$$

Mit Gleichung 6, Gleichung 5, $dx' = v'_x dt'$ und $dy' = v'_y dt'$ folgt:

$$E'_x = \gamma_0{}^3 \cdot m_0 \cdot \frac{v'_x{}^2}{c_0{}^2} \cdot \int v'_y \cdot a'_y \, dt' \quad \text{und} \quad E'_y = \gamma_0 \cdot m_0 \cdot \int v'_y \cdot a'_y \, dt'$$

Weiter gilt: $\int v'_y \cdot a'_y \, dt' = \int v'_y \cdot \frac{dv'_y}{dt'} dt' = \int v'_y \, dv'_y = \frac{1}{2} \cdot {v'_y}^2$

Es folgt:

$$E'_x = \frac{1}{2} \cdot {\gamma_0}^3 \cdot m_0 \cdot \frac{{v'_x}^2}{{c_0}^2} \cdot {v'_y}^2 \quad \text{und} \qquad E'_y = \frac{1}{2} \cdot \gamma_0 \cdot m_0 \cdot {v'_y}^2$$

Die Gesamtenergie, die die Masse aufnimmt, setzt sich aus der Summe beider Energien zusammen:

$$E'_x + E'_y = \frac{1}{2} \cdot \gamma_0 \cdot m_0 \cdot {v'_y}^2 \cdot \left[1 + {\gamma_0}^2 \cdot \frac{{v'_x}^2}{{c_0}^2}\right]$$

Mit $1 + {\gamma_0}^2 \cdot \frac{{v'_x}^2}{{c_0}^2} = {\gamma_0}^2$ folgt:

$$E'_x + E'_y = \frac{1}{2} \cdot {\gamma_0}^3 \cdot m_0 \cdot {v'_y}^2$$

Beim Vergleich mit Gleichung 1 ist zu erkennen, dass gilt:

$$E'_x + E'_y = E'_{kin\_y}$$

Die Energiebetrachtung ist somit in sich schlüssig. Die durch v'_x um Faktor γ_0 erhöhte Federenergie passt genau zur Summe der beiden Energien, die die beiden Kräfte zur Beschleunigung der Masse benötigen.

d. Impulsbetrachtung

Bei der bisherigen Betrachtung ist ein Impuls noch nicht berücksichtigt worden. Der Spannenergie E'_s entspricht eine Masse $\gamma_0 \, m_s$. Diese bewegt sich mit v'_x und verursacht damit einen Impuls p'_{sx}. Es gilt mit Gleichung 2:

$$p'_{sx} = \gamma_0 \cdot m_s \cdot v'_x = \frac{E'_s}{{c_0}^2} \cdot v'_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_0 \cdot D_0 \cdot v'_x}{{c_0}^2} \cdot y'^2$$

Damit ergibt sich eine zugehörige Kraft F'_{sx} in x-Richtung mit:

$$F'_{sx} = \frac{dp'_{sx}}{dt'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_0 \cdot D_0 \cdot v'_x}{{c_0}^2} \cdot \frac{d}{dt'} y'^2 = \frac{\gamma_0 \cdot D_0 \cdot v'_x}{{c_0}^2} \cdot y' \cdot \frac{dy'}{dt'}$$

Mit Schwingungs-Gleichung 3 gilt betragsmäßig: $a'_y = \frac{1}{{\gamma_0}^2} \cdot \frac{D_0}{m_0} \cdot y'$ und damit folgt:

$$F'_{sx} = {\gamma_0}^3 \cdot \frac{m_0 \cdot v'_x \cdot v'_y}{{c_0}^2} \cdot a'_y$$

Gleichung 8

Beim Vergleich mit Gleichung 6 ist sofort zu erkennen, dass betragsmäßig gilt:

$$F'_{sx} = F'_x$$

Diese Kraft verursacht eine Energie:

$$E'_{sx} = \int F'_{sx} dx' = \frac{\gamma_0 \cdot D_0 \cdot v'_x}{c_0{}^2} \cdot \int y' \cdot \frac{dy'}{dt'} dx' = \frac{\gamma_0 \cdot D_0 \cdot v'_x{}^2}{c_0{}^2} \cdot \int y' \cdot dy'$$

$$E'_{sx} = \frac{1}{2} \gamma_0 \cdot D_0 \cdot y'^2 \cdot \frac{v'_x{}^2}{c_0{}^2}$$

Für die Kraft in y-Richtung bleibt dann noch folgender Energieanteil übrig:

$$E'_{sy} = E'_s - E'_{sx} = \frac{1}{2} \gamma_0 \cdot D_0 \cdot y'^2 \cdot \left[1 - \frac{v'_x{}^2}{c_0{}^2}\right]$$

$$E'_{sy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D_0}{\gamma_0} \cdot y'^2 \qquad \text{und} \qquad E'_{sx} = \frac{1}{2} \gamma_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{\gamma_0{}^2}\right] \cdot D_0 \cdot y'^2$$

Gleichung 9 und Gleichung 10

Die resultierende Federkraft in y-Richtung ist betragsmäßig gleich, wie die entsprechende Trägheitskraft der Masse:

$$F'_y = \frac{dE'_{sy}}{dy'} \qquad\qquad F'_y = \frac{D_0}{\gamma_0} \cdot y'$$

Gleichung 11

e. Normierung der Kräfte

Die vorhergehenden Kräfte lassen sich mit recht einfachen Berechnungen auf die Ruhe-Federkraft $\hat{F}_0 = D_0 \cdot \hat{y}$ normieren.

Für die scheinbare, erhöhte Federkraft gilt: $\widehat{F'}_{sy} = \gamma_0 \cdot \hat{F}_0$

Diese teilt sich jedoch für die Masse als auch für die Feder in je zwei Kraftkomponenten auf:

$$\widehat{F'}_y = \frac{1}{\gamma_0} \cdot \hat{F}_0 \qquad \text{und} \qquad \widehat{F'}_x = \hat{F}_0 \cdot \frac{v'_x}{c_0} \cdot \frac{\omega_0 \cdot \widehat{y'}}{c_0}$$

Wegen $\omega_0 \cdot \widehat{y'} \ll c_0$ ist die Kraft in x-Richtung sehr klein, transportiert jedoch wegen der hohen Geschwindigkeit v'_x viel Energie.

f. Schlussfolgerung zum Paradoxon

Die im Manuskript unter „5 Schlussfolgerung“ mit Punkt c) gemachte Vermutung ist somit fast richtig. Das heißt, bei Bewegung nimmt die Spannenergie E'_s der Feder zwar zu, die Spannkraft F'_y nimmt in y-Richtung jedoch, wie in Gleichung 11 berechnet, ab. Die Gleichung (8) des Manuskripts gilt:

$$D'_1 = \frac{D_0}{\gamma_0} \qquad \text{mit} \qquad F'_y = D'_1 \cdot y'$$

Für die gesamte Spannenergie gilt:

$$E'_s = \frac{1}{2}{\gamma_0}^2 \cdot D'_1 \cdot y'^2$$

Die Gleichung $F'_y = \frac{dE'_s}{dy'}$ gilt in diesem Fall **nicht**!

g. Zusammenfassung der Problematik

Die Kräfte in x-Richtung sind nur schwer zu erklären, da sie im unbewegten Inertialsystem S nicht auftreten. Die mathematische Begründung kann man an der Berechnung von γ erkennen:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v'_x}^2 + {v'_y}^2}{c^2}}}$$

Für den Impuls der Masse in x-Richtung gilt:

$$p'_x = \gamma \cdot m_0 \cdot v'_x$$

Dabei sind m_0 und v'_x konstant. γ ist jedoch auch abhängig von v'_y und damit beeinflusst v'_y auch den Impuls in x-Richtung. Wenn für den Impuls $p = \int f dt$ gelten soll, muss mit einer Änderung von v'_y eine Kraft F'_x in x-Richtung einhergehen. Bei der Feder ist es die Federruhemasse die von der Federspannung abhängt und damit den Impuls beeinflusst.

Normalerweise ist eine Impulsänderung Folge einer Kraft, hier jedoch wird der Impuls geändert und die zugehörige Kraft ist nicht klar zu erkennen. Diese Querkraft F'_x ist die Lösung des Paradoxons, jedoch stellt sie selber wieder ein Problem dar. Sie hat keine Gegenkraft, oder, wie in diesem Fall, eine seitlich versetzte.

Da die Kraft F'_x der Masse im Schwerpunkt der Masse und die entgegen gerichtete Kraft F'_x der Feder im Schwerpunkt der Feder angreift verursachen die Kräfte einen Drehimpuls, der nach dem Drehimpulserhaltungssatz nicht sein dürfte.

Diese Problematik lässt sich besser mit einem einfacheren Modell analysieren. Dazu wird ein Handy im Rakentensystem S betrachtet, welches geladen wird. Durch das Laden nimmt die innere Energie des Handys zu und damit auch seine relativistische Masse $\left(\gamma \cdot m_0 = \frac{E}{{c_0}^2}\right)$. Diese Erhöhung führt wieder zu einer Kraft in x-Richtung, die nur im Erdsystem S‘ existiert, aber nicht im Raketensystem S. Zu dieser Kraft fehlt die Gegenkraft, das Handy müsste aus Sicht von S‘ vom Tisch rutschen.