

Galilean space and the Doppler effect

Галилеево пространство и эффект Доплера

Valery Timin

Creative Commons Attribution 3.0 License

(January 14, 2021)

Russia, RME

The Doppler effect is the most important phenomenon in wave physics. This phenomenon, theoretically justified in 1842 by the Austrian physicist Christian Doppler, was later named after him. The Doppler effect is a change in the frequency and, accordingly, the wavelength of radiation perceived by the observer (receiver), due to the movement of the radiation source relative to the observer (receiver). In this paper, the formulas of the Doppler effect are derived, and the methods of localization of the observer in an absolute inertial frame of reference are considered.

(Translated by Yandex Translator [Яндекс-Переводчик](#))

Эффект Доплера – важнейшее явление в физике волн. Данное явление, теоретически обоснованное в 1842 году австрийским физиком Кристианом Допплером, было впоследствии названо его именем. Эффект Доплера — изменение частоты и, соответственно, длины волны излучения, воспринимаемой наблюдателем (приёмником), вследствие движения источника излучения относительно наблюдателя (приёмника). В работе выведены формулы эффекта Доплера, рассмотрены способы локализации наблюдателя в АИСО.

1. Оглавление

1. Галилеево пространство и эффект Доплера.....	2
1. Уравнение волны и ее параметры	3
2. Доплеровский эффект и альтернатива выбора АИСО.....	4
3. Локализация ИСО в АИСО	7
2. Взаимный доплеровский эффект и скорость.....	8
4. Случай одинаковых скоростей	9
5. Взаимная скорость в случае разных скоростей.....	10
6. А что в трехмерном (многомерном) пространстве?.....	13
3. Поперечный эффект Доплера. Абберация. Закон Гюйгенса	13
7. Волна бесконечной ширины.....	13
8. Волна конечной ширины	14
9. Волна от точечного движущегося источника и абберация.....	14
4. Общие выводы относительно эффекта Доплера и абберации:.....	16
Сокращения и другие соглашения.....	16
Литература	17

1. Галилеево пространство и эффект Доплера

Эффект Доплера – важнейшее явление в физике волн. Самый популярный и простой пример, объясняющий суть эффекта Доплера – неподвижный наблюдатель и паровоз (машина) с сиреной. Допустим, мы стоим возле железной дороги. К нам движется поезд со включенной сиреной. Частота звука, которую мы будем слышать по мере приближения паровоза, не одинакова. Сначала звук будет более высокой частоты. Когда паровоз поравняется с оставкой, мы услышим истинную частоту звука сирены, а по мере удаления частота звука будет понижаться. Это и есть эффект Доплера.

Данное явление, теоретически обоснованное в 1842 году австрийским физиком Кристианом Доплером, было впоследствии названо его именем. Сам Доплер вывел свою теорию, наблюдая за кругами на воде и предположил, что наблюдения можно обобщить для всех волн. Экспериментально подтвердить эффект Доплера с расчетами для звука и света удалось позднее. Именно эксперименты со звуковыми волнами помогли дать первое экспериментальное подтверждение этому эффекту.



Доплер Кристиан (1803–1853), австрийский физик и астроном, член Венской АН (1848 г.). Учился в Зальцбурге и Вене. С 1847 г. профессор Горной академии в Хемнице, с 1850 г. профессор Политехнического института и университета в Вене. Основные труды посвящены абберации света, теории микроскопа и оптического дальномера, теории цветов и др. В 1842 г. теоретически обосновал зависимость частоты колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направления движения наблюдателя относительно источника колебаний.

Подтверждением правильности рассуждений Кристиана Доплера связано с одним из интересных и необычных физических экспериментов. В 1845 году метеоролог из Голландии Христиан Баллот взял мощный локомотив и оркестр, состоящий из музыкантов с абсолютным слухом. Часть музыкантов – это были трубачи – ехали на открытой площадке поезда и постоянно тянули одну и ту же ноту. Другие музыканты находились на станции и слушали, что играют их коллеги. Абсолютный слух всех участников эксперимента сводил вероятность ошибки к минимуму. Эксперимент длился два дня, все устали, было сожжено много угля, но результаты того стоили. Оказалось, что высота звука действительно зависит от относительной скорости источника или наблюдателя (слушателя), а не поосто кажется.

Эффект Доплера справедлив не только для звука. Различают:

1. Акустический эффект Доплера;
2. Оптический эффект Доплера;
3. Эффект Доплера для электромагнитных волн;
4. Релятивистский эффект Доплера.

Одно из наиболее широко известных применений эффекта Доплера – определение скорости движения объектов при помощи датчиков-радаров скорости. Радиосигналы, посылаемые радаром, отражаются от машин и возвращаются обратно. При этом, смещение частоты, с которой сигналы возвращаются, имеет непосредственную связь со скоростью машины. Сопоставляя скорость и изменение частоты, можно вычислять скорость.

Эффект Доплера широко применяется в медицине. На нем основано действие приборов ультразвуковой диагностики. Существует отдельная методика в УЗИ, называемая доплерографией.

Эффект Доплера также используют в оптике, акустике, радиоэлектронике, астрономии, радиолокации.

1. Уравнение волны и ее параметры

Начнем с определений волны и явления ее распространения. А также пространства и времени, в котором она распространяется.

В данной работе будем рассматривать распространение волны в галилеевом пространстве, в котором определены абсолютные расстояния и время. Расстояние между любыми двумя точками ГП можно измерить, приложив галилеевы линейки между этими двумя точками в одно и то же галилеево время, а время – с помощью галилеевых часов (устройство этих эталонов не является задачей этой работы). Основное свойство галилеевых эталонов – независимость их параметров от скорости с.о., в которой они используются: независимо от состояния взаимного движения результат измерения будет одним и тем же. Основное свойство ГП – инвариантность "плоскости" одновременности, что выражается в неизменности координаты "время" при галилеевых преобразованиях координат.

Волна формально является периодической функцией своего параметра:

$$A(q) = \sin\varphi(q) \tag{1.1}$$

Функционально волна в одномерном однородном ПВ t "распространяется" в соответствии с гармоническим уравнением

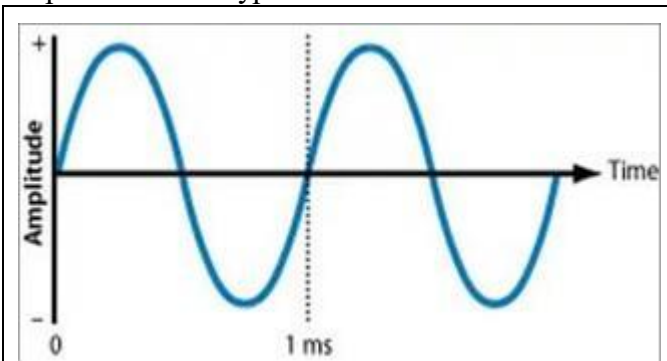


Рисунок 1.1

График синусоидальной волны

$$A = \sin\varphi = \sin 2\pi n = \sin(2\pi\omega t + \varphi_s), \tag{1.2}$$

$$\varphi = 2\pi\omega t + \varphi_s.$$

где $A(q)$ – значение волнового поля в точке с координатами q^i ,

ω – частота (здесь – не круговая!) волнового процесса,

φ – значение фазы волнового поля в этой же точке.

φ_s – начальная фаза волны в начале с.о.,

Процесс существования волн в ПВ сам по себе обладает инвариантными параметрами. Ими являются фаза φ волны в произвольной точке ПВ и разность фаз $\Delta\varphi$ (количество волн n) между любыми двумя точками ПВ. Разность фаз $\Delta\varphi$ непосредственно связана с количеством волн n :

$$\Delta\varphi = 2\pi\omega\Delta t = 2\pi\Delta n,$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \omega t + \frac{\varphi_s}{2\pi}. \tag{1.3}$$

Множитель 2π присутствует для согласования фазы волны $\Delta\varphi$ с количеством волн Δn и фактически приравнивает их.

Физически параметр **фазы волны n** тесно связан с **временем t** и **частотой ω** : это количество волн Δn , разделяющих два значения времени – начала и конца отсчета времени. А параметр φ выступает в роли универсального скалярного параметра состояния волнового поля. Смысл ее – закономерное упорядочение на множестве состояний "фаза" пространства. Физический смысл ее – последовательное прохождение множества состояний, связываемое с собственным "волновым" временем, которое связывается с фазой: каждое изменение фазы на 2π есть один цикл собственного времени волнового поля. И с ним вполне однозначно можно связать некоторую глобальную метрику.

В многомерном пространстве процесс распространения волн дополнительно связан с наличием дополнительных измерений и определенным пространственным направлением

распространения фронта волны и соответствующими параметрами. При наличии пространственных координат произвольная свободная не изотропная волна в неограниченном бесконечном пространстве распространяется и вдоль пространственных направлений в соответствии с гармоническим уравнением

$$\begin{aligned} A(t, r^i) &= A_s \sin[2\pi(\omega t - \omega_i r_i) + \varphi_s] = \\ &= A_s \sin \left[2\pi\omega \left(t - \frac{c_i r_i}{c^2} \right) + \varphi_s \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

в котором ω – частота волнового процесса, или ковариантная скорость распространения волнового процесса во временном направлении,

ω – частота или направляющий ковариантный вектор волнового процесса,

c_i – пространственная ковариантная скорость распространения волнового процесса,

c – изотропная скорость распространения фронта волны.

Если учесть, что при опускании пространственного индекса знак параметра меняется, то противоположные знаки при параметрах ω и ω_i соответствуют распространению волны в положительном направлении соответствующей оси, одинаковые – в отрицательном направлении этой же оси.

2. Доплеровский эффект и альтернатива выбора АИСО

Для расчета Доплеровского эффекта важно рассмотреть вопрос синхронизации волнового процесса с галилеевыми. **Определим синхронизацию волновых процессов (и эталонов) в галилеевом пространстве** следующим образом. В состоянии покоя они синхронизованы естественным образом через длину волны и продолжительность одного такта частоты источника волны эталонной частоты, что в принципе означает дополнительно изотропность скорости волны в любом направлении. Также постулируем абсолютность времени: время по галилеевым эталонам совпадает с временем в волновых эталонах. **Это не просто предположение – это значит, что все технические средства, основанные как на галилеевых эталонах, так и на волновых явлениях – реально отсчитывают одно и то же время в состоянии любого движения.** Для волновых источников эталонной частоты это означает, что в состоянии любого движения длительность формирования одного периода волны не изменяется по галилеевым часам. Причиной такой синхронизации может быть прямая зависимость волновых эталонов времени от галилеевых, но не будем уточнять этот момент. Примем это как постулат. В земных условиях для звуковых волн этот постулат вполне справедлив. Любые технические средства излучают звук одной и той же частоты, независимо от состояния движения.

Волновые эталоны длины, как отмечено выше, синхронизованы естественным образом через длину волны в АИСО. Но в состоянии движения, как показывает опыт, частота и длина волны не совпадают с их галилеевыми значениями в АИСО. И волновой эталон длины при этом не остается абсолютным. А галилеевы эталоны при этом остаются неизменными. Проявляется эффект Доплера.

Еще один фактор абсолютности времени проявляется при формировании волны (и он указан выше) и имеет причиной конечные размеры объектов, формирующих волну. Синхронное формирование волны таким объектом означает, что **все ее точки одновременно в соответствии с абсолютным временем формируют одну и ту же или контролируруемую по абсолютным часам фазу волны.** Т.е. если волну формирует точечный объект – вопросов нет. Если волну формирует не точечный (линейный, плоский объект или пространственный) объект – то все ее точки синхронно по абсолютным часам формируют одну и ту же или контролируемую по абсолютным часам частоту и фазу волны. Пример: двумерная пластина

(диффузор громкоговорителя) колеблется в воздушной среде перпендикулярно к своей плоскости, причем эти колебания происходят по всей ее поверхности одновременно, т.е. синхронно с галилеевыми абсолютными часами.

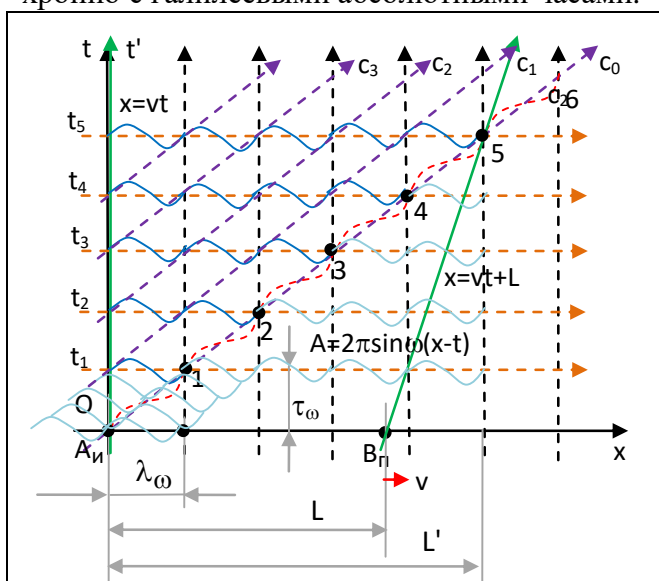


Рисунок 1.2

Эффект Доплера при движущемся эталонном приемнике B_n и покоящемся источнике A_n . Частота, измеряемая приемником, и другие параметры волны зависят только от скорости приемника v_n .

Замечу: реальные волновые часы могут и не соответствовать галилеевым абсолютным часам: широко известный пример – СТО. Ну а синхронизация волновых эталонов с галилеевыми необходима в данной главе для их независимого применения, безотносительно к тому, существуют или нет галилеевы эталоны, и в конечном счете, возможно ли исключительно по ним выявить АИСО.

Эффект Доплера в ГП с т.з. движения волны в ПВ в форме уравнения $A = \sin \omega(t - vx/c^2)$ с различными свойствами эталонов подробно рассмотрены в статье [Timin V. A. Wave Propagation Equations in Spaces with Different Metrics // Уравнения распространения волн в различных пространствах, URL: <http://vixra.org/abs/1908.0091>]. Он заключается в том, что движущийся со скоростью v измерительный прибор B измерит частоту волнового процесса от источника A , отличающуюся от ее частоты в АИСО, в которой она распространяется изотропно. Под

"волновым процессом от источника" здесь понимается периодический волновой процесс, распространяющийся при положительном значении направления ее распространения (скорости) по направлению оси координат x . Это равносильно расположению источника бесконечно далеко со стороны с меньшими значениями координаты x по сравнению с координатой приемника.

Для рассмотрения и изучения эффекта Доплера расположим приемник справа, а источник бесконечно далеко слева, ось движения волны направим вправо. Рассчитаем для движущегося со скоростью v_n приемника изменение частоты, длины волны и других параметров для одномерного случая по отношению к покоящемуся (слева) в АИСО источнику волн при $c = 1$ равно (см. Таблица 1.1, Рисунок 1.2). Основным моментом здесь является скорость волны относительно приемника c_n , рассчитываемый по закону сложения скоростей в галилеевом пространстве: $c_n = c - v_n$:

Таблица 1.1

С т.з. источника	С т.з. приемника
$c_n = c = 1,$	$c_n = c - v_n,$
$\omega_A = \frac{\omega c_n}{c} = \omega,$	$\omega_B = \frac{\omega c_n}{c} = \omega \left(1 - \frac{v_n}{c}\right),$
$\tau_A = \frac{1}{\omega},$	$\tau_B = \frac{1}{\omega_B} = \frac{c}{\omega(c - v_n)},$
$\lambda_A = \frac{c_n}{\omega} = \frac{c}{\omega},$	$\lambda_B = \frac{c_n}{\omega_B} = \frac{(c - v_n)}{\omega \left(1 - \frac{v_n}{c}\right)} = \frac{c}{\omega}.$

(1.5)

Из Таблица 1.1 видно, что с т.з. приемника изменились измеряемая приемником частота получаемого сигнала, длительность волны и ее скорость от A до B . Длина волны не изменилась. Скорость хода часов приемника не изменилась – по условию галилеевой синхронизации. Здесь

$\omega = \omega_A$ – частота передатчика (соответствует галилеевой частоте),

ω_B – частота, измеренная приемником,

$c_{и}, c_{п}$ – скорости волны с т.з. источника и приемника,

λ_A, λ_B – длины волн, измеренные источником и приемником по галилеевым эталонам ($c = 1$),

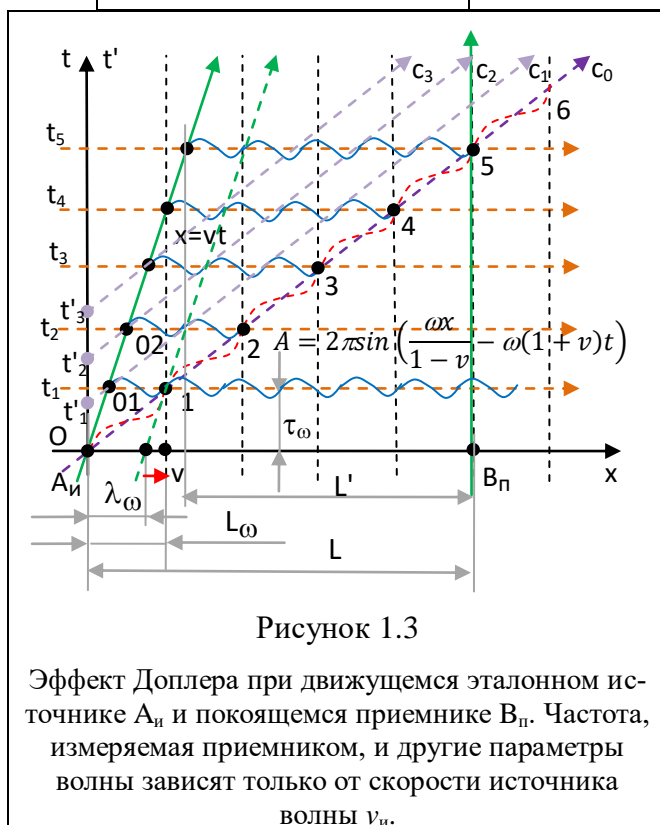
τ_A, τ_B – длительность одной волны.

А для движущегося в АИСО передатчика по отношению к покоящемуся (справа) приемнику в том же направлении измеренные параметры волны будут равны (см. Таблица 1.2, Рисунок 1.3):

Таблица 1.2

В условном АСО	С т.з. источника	С т.з. приемника
c	$c_{и} = 1 - v_{и}$	$c_{п} = c = 1$
$\omega_{АСО} = \omega(1 + v_{и})$	$\omega_A = \omega$	$\omega_B = \omega \frac{1}{1 - \frac{v_{и}}{c}}$
$\tau_{АСО} = \frac{1}{\omega_{АСО}} = \frac{1}{\omega(1 + v_{и})}$	$\tau_A = \frac{1}{\omega}$	$\tau_B = \frac{1}{\omega_B} = \frac{1 - \frac{v_{и}}{c}}{\omega}$
$\lambda_{ИСО} = \frac{c}{\omega_B} = \frac{c - v_{и}}{\omega}$	$\lambda_A = \frac{c_{и}}{\omega} = \frac{c - v_{и}}{\omega}$	$\lambda_B = \frac{c}{\omega_B} = \frac{c}{\omega \frac{1}{1 - \frac{v_{и}}{c}}} = \frac{c - v_{и}}{\omega}$

(1.6)



В Таблица 1.1 не совсем ожидаемым оказалось то, что длина волны не зависит от скорости приемника. Ожидалось, что $\lambda' = c/\omega' \neq \lambda$. Действительно, было бы логично, что если приемник движется вправо, а волна его догоняет, то никак не сможет догнать его за один период и/или длину волны источника. При стремлении скорости приемника к скорости волны это расстояние все более и более удаляется и стремится к бесконечности. На Рисунок 1.3 это соответствует длине L' . Но эта длина соответствует всего лишь расстоянию между разновременными точками, поэтому оно не отражает длину волны.

Напомню: частота источника ω в ГП с эталонами, синхронизированными с галилеевыми абсолютными, не зависит от ее состояния движения и фронты волн формируются по галилеевым часам. Для движущегося источника волн такая синхронизация означает, что независимо от скорости начало фронтов каждой волны формируются в мо-

менты времени

$$t_n = n/\omega + t_0,$$

где t_0 – время начала формирования первой волны, а координата точки формирования волны линейно зависит перемещается от времени:

$$x_n = m \cdot \tau_\omega \cdot v.$$

И длина волны зависит только от скорости передатчика. Поэтому длина волны определяется по формуле, не зависящей от скорости приемника:

$$\lambda = c/\omega.$$

Комплексный взаимный эффект будет равен

$$\omega'_{AB} = \omega \frac{1 - v_{\Pi}}{1 - v_{И}}. \quad (1.7)$$

3. Локализация ИСО в АИСО

Можно ли эффект Доплера использовать для собственной локализации в АИСО? Локализацию источника в АИСО можно определить, воспользовавшись формулой галилеевой длины волны λ от движущегося источника (1.6):

$$\lambda_A = \frac{c_{И}}{\omega} = \frac{c - v_{И}}{\omega} \rightarrow \quad (1.8)$$

$$v_{И} = c - \lambda_A \omega.$$

Для этого надо иметь галилееву линейку для возможности измерения галилеевой длины волны. Но линейки у меня нет, а часы – есть, и единственное, что я могу сделать – это измерить частоту ω_B или ω_{AB} с помощью используемого мною волнового эталонного частотомера.

Зная эталонную частоту ω , из (1.5) и (1.6) можно однозначно определить соответственно скорость приемника относительно покоящегося передатчика или скорость передатчика относительно покоящегося приемника по отношению частот:

$$v_{\Pi} = \left(1 - \frac{\omega_B}{\omega}\right) c, \quad (1.9)$$

$$v_{И} = \left(\frac{\omega}{\omega_B} - 1\right) c.$$

или через длительность периода волны из (1.6) **Ошибка! Источник ссылки не найден.:**

$$v_{\Pi} = c \left(1 - \frac{\tau_B}{\tau}\right), \quad (1.10)$$

$$v_{И} = c \left(1 - \frac{\tau}{\tau_B}\right).$$

Из уравнения (1.7) комплексного взаимного эффекта Доплера видно, что для того, чтобы определить собственную скорость v_{Π} , надо знать скорость источника $v_{И}$, и наоборот:

$$v_{\Pi} = 1 - \frac{\omega'_{AB}(1 - v_{И})}{\omega}, \quad (1.11)$$

$$v_{И} = 1 - \frac{\omega(1 - v_{\Pi})}{\omega'_{AB}}.$$

Но чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо знать, кто – источник или передатчик – находятся в состоянии покоя в АИСО. Действительно, из формул (1.8) – (1.11) видно, что в них недостаточно параметров для определения скорости исследователя в АИСО. В

них для этого необходимо знать, кто из них – приемник или передатчик – находятся в состоянии покоя относительно АИСО. В (1.11) для решения поставленной задачи можно принять значение одной из скоростей за известное, что означает, что этот исследователь находится в соответствующем состоянии движения относительно АИСО, вполне можно вычислить другую скорость относительно этого АИСО. Но остается альтернатива выбора "главного АИСО-шного" исследователя: их столько, сколько исследователей!

Таким образом, из измерений временных параметров эталонной волны приемником (частота, период), генерируемой движущимся источником, невозможно определить ни абсолютную, ни относительную скорости объектов – приемника и источника.

Напомню: эти формулы получены для волн галилеева пространства с использованием галилеевых абсолютных эталонов времени и длины. И еще существенные замечания: 1) время (и частота) эталонных источника и приемника волн волнового пространства также синхронизированы с галилеевым эталоном времени. Как следствие, моменты времени формирования начал фронтов источником не зависят от ее скорости. 2). А вот галилеева длина волны в каждый момент абсолютного времени определяется частотой и скоростью источника волн. и в данном случае не является абсолютной, потому что место формирования новой волны постоянно смещается со скоростью движения источника (см. Рисунок 1.3, точки O и O_1 и $1, O_2$ и 2).

Т.к. в АИСО в состоянии покоя все эталоны являются равноправными и взаимно синхронизированными, то я могу предположить и принять, что **в отсутствие моей "связи" (или локализации) с галилеевым АИСО, в моей собственной с.о. (ИСО) мой волновой эталон также остается эталоном – эталоном частоты, времени и длины.** Для меня! Других эталонов у меня нет. И галилеевых эталонов длины вблизи меня тоже не просматривается. Но для этого я должен постулировать, что используемый мною эталон остается эталоном и в состоянии движения. Пусть даже динамически изменяющимся, но одним и тем же в состоянии одного и того же движения. При этом я не знаю, как соотносятся (синхронизируются) мои эталонные источник и приемник с абсолютными эталонами АИСО в движении. Но я знаю, что они синхронизированы между собой в состоянии взаимного покоя. Это знание не позволяет мне выделить эту АИСО, но я знаю, что наши часы синхронизированы.

Для справки: в нашем физическом пространстве и в рассматриваемом пространстве в системе единиц СИ эта скорость " c " точно равна 299 792 458 м/с. Эталон секунды соответствует 9192631779 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. Как видно, используемый нами эталон является волновым. В соответствии с этим определением эталонов длины и времени я могу пользоваться только этими же определениями в любой другой ИСО, т.к. у меня нет других "реперов", идентифицирующих галилеево выделенное АИСО. **И скорость распространения волн в любой сопутствующей мне ИСО могу принять за фундаментальную константу и обозначить " c ".**

В системе звуковых эталонов в воздухе это будет около 331 м/с, в воде около 1500 м/с, в железе – 5850 м/с (с твердыми средами имеется известная проблема – скорости продольных и поперечных волн различаются, а в жидких и особенно в газовых средах поперечной волны нет). Даже несмотря на зависимость АИСО-шной скорости звука от температуры, давления, плотности и даже материала. И это мое ощущение подтверждается следующим эффектом (см. следующий параграф), и мой эталон могут принять и/или применять все другие покоящиеся и не покоящиеся относительно меня исследователи для определения собственной скорости относительно меня, сравнивая с собственными.

2. Взаимный доплеровский эффект и скорость

Пусть оба исследователя используют одни и те же галилеевы волновой эталон частоты и часы. Вопрос: возможно ли измерить их **взаимную лучевую скорость** и скорость в АИСО,

используя взаимный доплеровский эффект (см. выше)? При этом необходимо допустить, что технически возможно подсчитать количество длин волн между двумя исследователями и измерить разность частот двух сигналов: раз есть возможность создать волновой эталон, то это допущение тоже можно считать доказанным.

Для решения данной задачи в АИСО мы рассмотрим случай двух движущихся со скоростями v_A и v_B источников и приемников A и B , облучающих друг друга волной определенной эталонной частоты ω в одномерном пространстве (см. Рисунок 2.1):

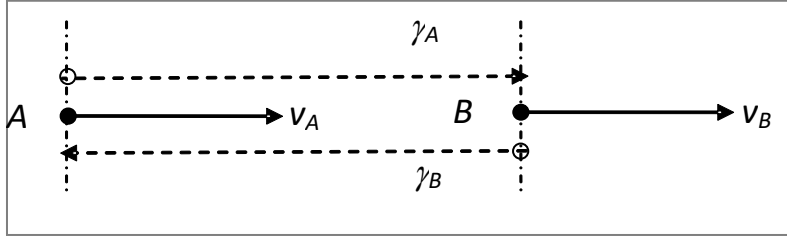


Рисунок 2.1

Схема обмена эталонными сигналами между двумя движущимися в АИСО исследователями.

A и B – два исследователя, движущиеся в одну сторону с одинаковыми скоростями, γ_A и γ_B – два эталонных сигнала от исследователя A в сторону B и от исследователя B в сторону A .

4. Случай одинаковых скоростей.

Предположим такую ситуацию. Есть два исследователя на расстоянии L друг от друга. И есть два эталонных галилеевых источника и приемника волн A и B , движущихся с одинаковыми скоростями $v_A = v_B = v$. **Исследователь A посылает сигнал в сторону приемника B** – и наоборот. Скорость волны $c = 1$. При посылке волны частотой ω от A к B сигнал в АИСО на стороне условно неподвижного приемника приобретет частоту ω_A из-за эффекта Доплера:

$$\omega_A = \omega \frac{1}{(1 - v)}. \quad (2.1)$$

Длина волны, прошедшее время и количество уместившихся волн между A и B определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_{AB} &= \frac{1 - v}{\omega}, \\ T_{AB} &= \frac{L}{(1 - v)}, \\ n_{AB} &= \frac{\omega L}{(1 - v)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Напомню: для измерения длины волны необходима галилеева линейка. При приеме волны частотой ω_A от A к B в системе АИСО приемник B из-за обратного эффекта Доплера измерит частоту ω_{AB} :

$$\omega_B = \omega_{AB}(1 - v) = \left(\omega \frac{1}{(1 - v)} \right) (1 - v) = \omega. \quad (2.3)$$

Точно такой же сигнал получит и приемник на стороне A при посылке такого же сигнала от B , только изменятся знаки "-" на "+". Отправленный от B сигнал на приемнике A будет иметь частоту

$$\omega'_A = \omega'_B(1 + v) = \left(\omega \frac{1}{(1 + v)} \right) (1 + v) = \omega. \quad (2.4)$$

Длина волны, прошедшее время и количество уместившихся волн между B и A определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_{BA} &= \frac{1 + v}{\omega}, \\ T_{AB} &= \frac{L}{(1 + v)}, \\ n_{BA} &= \frac{\omega L}{(1 + v)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Мы видим, что с точки зрения исследователя АИСО приемники получают сигналы той же частоты, что посылали источники. И это абсолютно верно и с точки зрения исследователей A и B в их собственном ИСО. Оба исследователя могут сделать вывод: их взаимная скорость равна нулю. Но смогут ли они определить свою скорость относительно АИСО? Конечно, нет – с какой бы скоростью они ни двигались, измеренная ими частота сигнала останется неизменной, эталонной.

Но есть еще три параметра – длина волны, время распространения волны и количество волн между A и B в разных направлениях в соответствии с (2.2) и (2.5) отличаются друг от друга. Можно ли их применить для локализации A и B в АИСО? Ранее в предыдущем параграфе при рассмотрении одностороннего распространения волны мы определили, что по длине волн мы это не можем сделать. Но в данном случае при двустороннем распространении волны это вполне возможно. Галилееву длину волн мы, конечно, не сможем измерить, но их отношение – вполне (2.6).

$$\begin{aligned} k &= \frac{\lambda_{AB}}{\lambda_{BA}} = \frac{1 - v}{1 + v} \rightarrow \\ v &= \frac{1 - k}{1 + k}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Также мы можем подсчитать количество волн туда и сюда, и по их отношению найти скорость в АИСО:

$$\begin{aligned} \frac{n_{AB}}{n_{BA}} &= \frac{1 + v}{1 - v} \rightarrow \\ v &= \frac{n_{AB} - n_{BA}}{n_{AB} + n_{BA}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Также мы можем подсчитать частоту биений суперпозиции встречных волн и по их значениям также найти скорость в АИСО.

Здесь необходимо сделать замечание: расчеты сделаны в абсолютных эталонах галилеева пространства и синхронизированных с ним волновых эталонах, без учета возможных релятивистских эффектов. При учете релятивистских эффектов в формулах (2.1) - (2.4) с т.з галилеева наблюдателя изменится частота источника ω : $\omega \rightarrow \omega_r$. С т.з. исследователей A и B их собственные частоты в их собственных волновых эталонах останутся без изменений.

5. Взаимная скорость в случае разных скоростей.

Рассмотрим общий случай разных скоростей v_A и v_B . В результате вычислений по предыдущей же схеме для наблюдателя B получим следующий результат:

$$\omega'_B = \omega_A(1 - v_B) = \omega \frac{1}{(1 - v_A)}(1 - v_B) = \omega \frac{1 - v_B}{1 - v_A}. \quad (2.8)$$

Разрешим уравнение (2.8) относительно скорости v_A и v_B :

$$\begin{aligned} v_A &= 1 - \frac{\omega}{\omega'_B}(1 - v_B), \\ v_B &= 1 - \frac{\omega'_B}{\omega}(1 - v_A). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.9) видно, чтобы определить скорость другого объекта, необходимо знать свою скорость v_B в АИСО, и наоборот. Но мы ее не знаем, следовательно, (2.9) напрямую не работает. Но, предположив, что мы относительно АИСО имеем определенную скорость, например $-v_B = 0$, мы вполне можем определить состояние (конфигурацию) объектов волнового пространства. А собственную скорость мы можем определить в эксперименте "одинаковых скоростей" (2.7).

Одновременно мы можем определить и взаимную скорость. Из (2.8) имеем:

$$\begin{aligned} \omega'_B &= \omega \frac{1 - v_B}{1 - v_A} \rightarrow \\ \omega'_B &= \omega \frac{(1 - v_B + v_A - v_A)}{(1 - v_A)} = \\ &= \omega \left(1 - \frac{v_B - v_A}{1 - v_A}\right) = \omega \left(1 - \frac{\Delta v}{1 - v_A}\right) \rightarrow \\ \Delta v &= \frac{1 - \frac{\omega'_B}{\omega}}{1 - v_A}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь тоже необходимо знать свою скорость. Но при $v_A \rightarrow 0$ отношение частот будет близко к единице и результат будет вполне вменяемым и измеримым:

$$\Delta v = 1 - \frac{\omega'_B}{\omega}. \quad (2.11)$$

Более выпукло и понятно это утверждение следует из следующего приближения:

$$\begin{aligned} \frac{\omega'_B}{\omega} &= \frac{1 - v_B}{1 - v_A} \sim (1 - v_B)(1 + v_A) = \\ &= 1 - v_B + v_A - v_A v_B = \\ &= 1 - \Delta v - v_A v_B \rightarrow \\ \Delta v &= 1 - \frac{\omega'_B}{\omega} - v_A v_B \rightarrow \\ \Delta v &\sim 1 - \frac{\omega'_B}{\omega}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Результат эксперимента в обратном направлении даст:

$$\omega'_A = \omega_B(1 + v_A) = \omega \frac{1}{(1 + v_B)}(1 + v_A) = \omega \frac{1 + v_A}{1 + v_B}. \quad (2.13)$$

Если вместо второго прибора (**B**) использовать зеркало, на стороне А получим:

$$\omega'_A = \omega'_B \frac{\omega'_A}{\omega} = \left(\omega \frac{1 - v_B}{1 - v_A}\right) \left(\frac{\omega}{\omega} \frac{1 + v_A}{1 + v_B}\right) = \omega \frac{1 - v_B}{1 - v_A} \cdot \frac{1 + v_A}{1 + v_B} = \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega \frac{1 - v_B + v_A - v_A v_B}{1 - v_A + v_B - v_A v_B} = \omega \frac{(1 - v_A v_B) - (v_B - v_A)}{(1 - v_A v_B) + (v_B - v_A)} = \\
 &= \omega \frac{c' - \Delta v}{c' + \Delta v} : c' = 1 - v_A v_B.
 \end{aligned}$$

С помощью зеркала эффект получается двойным. Из (2.14) можно точно вычислить скорость v_B при известном v_A :

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \omega'_A(1 - v_A + v_B - v_A v_B) = \omega(1 + v_A - v_B - v_A v_B) \rightarrow \\
 &\omega'_A(1 - v_A) + \omega'_A v_B(1 - v_A) = \omega(1 - v_A) - \omega v_B(1 + v_A) \rightarrow \\
 &\omega'_A(1 - v_A) - \omega(1 - v_A) = -v_B(\omega'_A(1 - v_A) + \omega(1 + v_A)) \rightarrow \\
 v_B &= -\frac{\omega'_A(1 - v_A) - \omega(1 - v_A)}{\omega'_A(1 - v_A) + \omega(1 + v_A)} = -\frac{(\omega'_A - \omega)(1 - v_A)}{\omega'_A(1 - v_A) + \omega(1 + v_A)}; \tag{2.15} \\
 v_B &= \frac{\omega - \omega'_A}{\omega'_A - \omega \frac{1+v_A}{1-v_A}}.
 \end{aligned}$$

Из (2.14) также получается более красивое выражение для относительной скорости:

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \omega'_A(c' + \Delta v) = \omega(c' - \Delta v) \rightarrow \\
 &\omega'_A \Delta v + \omega \Delta v = \omega c' - \omega'_A c' \rightarrow \\
 \Delta v &= c' \frac{\omega - \omega'_A}{\omega + \omega'_A}. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

При малых скоростях наблюдателей "скоростной" коэффициент c' можно приравнять единице с ошибкой порядка произведения скоростей наблюдателей:

$$\rightarrow \Delta v = 1 \cdot \frac{\omega - \omega'_A}{\omega + \omega'_A}. \tag{2.17}$$

С лучевой скоростью в одномерном пространстве мы разобрались. С направлением в более чем одномерном пространстве сложнее. Если имеются только два исследователя, то невозможно измерить тангенциальную скорость и ее направление в пространстве – не с чем ее сравнивать: любые направления эквивалентны, и вращение с.о. может не детектироваться. Но для этого имеется **принцип Маха: бесконечно удаленные тела находятся всегда на одном и том же направлении, независимо от их взаимного лучевого и тангенциального движения.** Таким образом, тангенциальную скорость взаимного движения можно определить на фоне бесконечно удаленных тел. Зная расстояние между исследователями и угловую скорость тангенциального движения, можно измерить реальную скорость тангенциального движения.

Расстояние можно определить также и по параллаксу направления на объект.

Выводы.

Главные выводы:

1) в галилеевом пространстве в одностороннем эксперименте с волновыми эталонами, синхронизированными абсолютно, невозможно определить абсолютную скорость ИСО относительно АИСО из-за недостатка информации.

2) в галилеевом пространстве в двустороннем эксперименте с волновыми эталонами, синхронизированными абсолютно, возможно определить абсолютную скорость ИСО относительно АИСО.

6. А что в трехмерном (многомерном) пространстве?

Неожиданно выяснилось, что пространство может быть не только одномерным, но и трехмерным. А все, расчеты, проведенные выше, относятся к одномерному пространству. Что изменится в расчетах?

Во первых, источники периодических сигналов могут генерировать волны в произвольном направлении. Во вторых, источники периодических сигналов могут иметь различную ширину активной излучающей базы фронтов волн: от нуля (практически точки) до бесконечной ширины. Точечный источник будет генерировать сферические волны. Поэтому, чтобы не было никаких неожиданностей, необходимо обеспечить направление распространения волн точно в направлении друг к другу. Для этого достаточно использовать точечный генератор волн. Но опять же в этом случае необходимо и скорости направлять в этом же направлении. А это есть ограничение недопустимое – нам же необходимо найти все три компоненты скорости. А возможно ли это?

Ответ – нельзя. Отсутствие поперечного эффекта Доплера (см. следующую часть) говорит о том, что поперечная составляющая скорости никаким образом не скажется на параметрах излучаемой и принимаемой волны. Важна только продольная составляющая скорости источника и приемника волны. И для определения двух дополнительных составляющих скоростей необходимо использовать дополнительно еще двух участников измерительной операции в двух дополнительных направлениях.

3. Поперечный эффект Доплера. Аберрация. Закон Гюйгенса

7. Волна бесконечной ширины

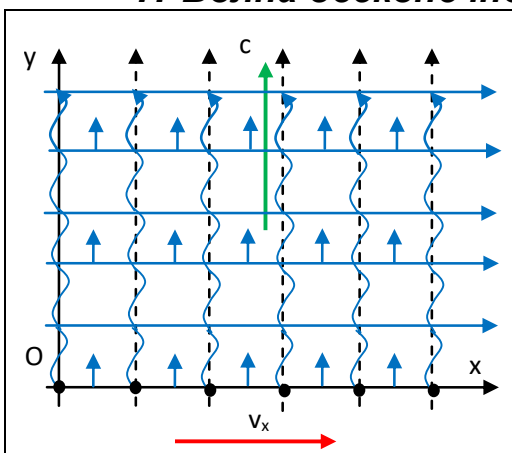


Рисунок 3.1

Движение поперечной волны в плоскости (x, y) . Синими стрелками указано направление движения фронта поперечной волны, а зелеными - направление движения ИСО с источником волны.

Поперечный эффект Доплера рассматривается (или может иметь место) при движении источника со скоростью v_x (Рисунок 3.1) в некотором направлении x и одновременном формировании волн в поперечном к направлению движения направлении y . Положения фронтов поперечных волн при этом оказываются параллельными оси координат x (синие линии со стрелками вправо), а движение фронта волны происходит в направлении оси y со скоростью c . На Рисунок 3.1 дана схема распространения бесконечно широкой волны 'x-x' в поперечном направлении в предположении справедливости закона Гюйгенса для распространения волны. В соответствии с этим законом фронт волны с каждой точки зарождения в ИСО представляет собой расширяющуюся окружность (сферу). Но при полной интерференции всех отдельных волн **фронт бесконечной волны** x-x, распространяющейся от прямой линии Ox , даже движущейся со скоростью v_x , представляет собой эту же прямую линию, движущуюся со скоростью c в направлении y . Поэтому **поперечного эффекта**

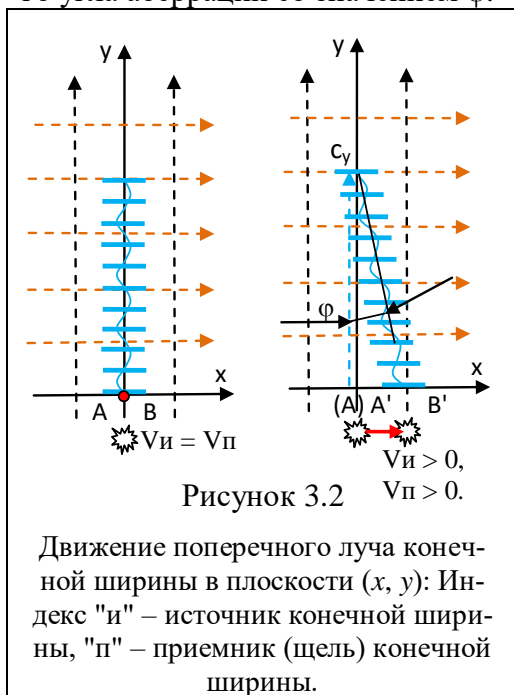
Доплера для фронта бесконечной галилеевой волны не имеется. Следовательно, все параметры этой волны остаются неизменными: ни частота, ни длина волны, ни период не изменяются. Угла аберрации (изменении положения фронта волны, точнее, угла ее наклона к оси x) наблюдаться не будет.

Но наблюдается еще один эффект: в любой ИСО, движущейся как на Рисунок 3.1 с произвольной скоростью, скорость распространения волны в перпендикулярном направлении

остаётся неизменной и равной предельной скорости волны. А это противоречит галилеевой аддитивности скорости волны в ГП.

8. Волна конечной ширины

Но для не широкой волны (луча), источником которой является отрезок AB (Рисунок 3.2) конечной длины, ситуация несколько другая. Угла aberrации (изменении положения фронта волны) также наблюдаться не будет. Но сам луч, несмотря на это, для галилеева подвижного наблюдателя визуально изменит траекторию своего движения и как бы отклоняется "назад" по отношению к направлению движения на угол φ . Это кардинально отличается от движения брошенного "источником" камня, наследующего импульс источника в направлении движения. Такое поведение луча равносильно присутствию "механического" отстающего угла aberrации со значением φ :



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c}, \tag{3.1}$$

где v – абсолютная скорость в АИСО. Она верна и для источника, и для наблюдателя.

Примерно такую форму имеют волны от движущейся по воде лодки – конус отстающей волны, и звук от летящего высоко в небе самолета. Визуально этот эффект aberrации на Рисунок 3.3 (см. далее) показан пунктирной красной линией. При этом, несмотря на то, что луч смещается визуально влево, фронт волны остаётся параллельным оси x .

Эффекта Доплера – т.е. изменения частоты – здесь также не будет. Но будет побочный "геометрический" эффект скорости распространения звука: скорость движения "головы" c'_y луча от движущегося источника будет больше изотропной скорости $c_y = c$ волны в этой же АИСО. А это не противоречит принятому постулату галилеевой аддитивности скорости волны. Объяснение

наличия двух скоростей – направления фронта волны и отклонения "луча" на определенный угол "aberrации" можно объяснить наличием двух типов – контра- и ковариантных – векторов, каждый со своим законом преобразования. Для контравариантного вектора скорости справедлив закон сложения скоростей в ГП:

$$c'^i = c^i - v^i.$$

Она даёт направление распространения луча. А ковариантные векторы скорости не изменяются:

$$c'_i = c_i.$$

Она даёт направление распространения фронта луча. Таким образом, можно сделать такие выводы: направление и величина "aberrации" – контравариантным вектором, а фронт волны и направление его распространения определяются ковариантными векторами.

9. Волна от точечного движущегося источника и aberrация

От точечного источника волны картина несколько другая. Но основные выводы те же. Для звука в воздухе от движущегося точечного источника механизм распространения волны по Гюйгенсу создаёт множество концентрических невидимых сферических волновых поверхностей фронтов волн со сдвинутыми центрами (см. Рисунок 3.3 - далее). Здесь A –

начальное положение источника звука, A' – последовательные новые положения источника звука и центров сферических волн, C – наблюдатель, v_x – скорость источника звука, c – скорость звука в перпендикулярном направлении к наблюдателю C , $c_3 = c$ – видимая направление прихода звука в направлении к наблюдателю C от точки ее излучения A , c_y – направление распространения "условного" "перпендикулярного" фронта "луча" звука.

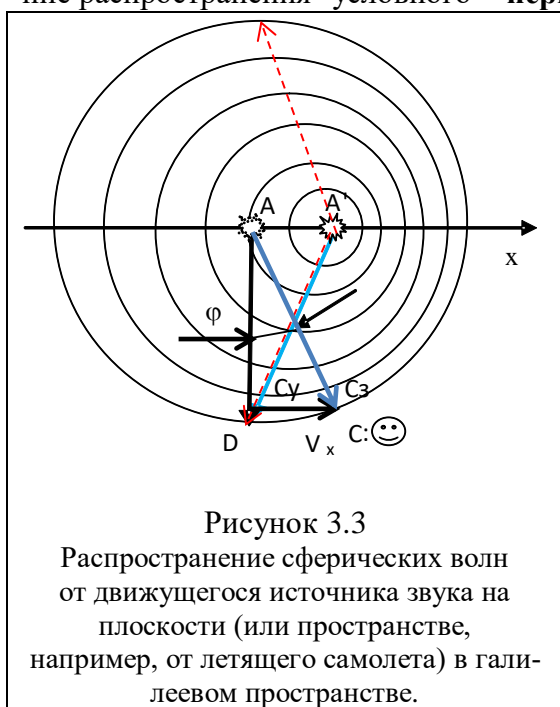


Рисунок 3.3

Распространение сферических волн от движущегося источника звука на плоскости (или пространстве, например, от летящего самолета) в галилеевом пространстве.

движения.

С другой стороны,

2) Ну а как быть с отстающим от изображения самолета звуком двигателей самолета для покоящегося наблюдателя C ? Это разве не абберация? Да, это тоже абберация. Классическая – с т.з. приемника. Если первое – абберация с т.з. ИСО источника, то второе – абберация с т.з. ИСО приемника. Действительно, покоящемуся наблюдателю C кажется, что звук идет не с того места, где находится визуально наблюдаемый источник звука (A), а несколько позади (голубая линия со стрелкой от центра концентрической окружности A , достигшей наблюда-

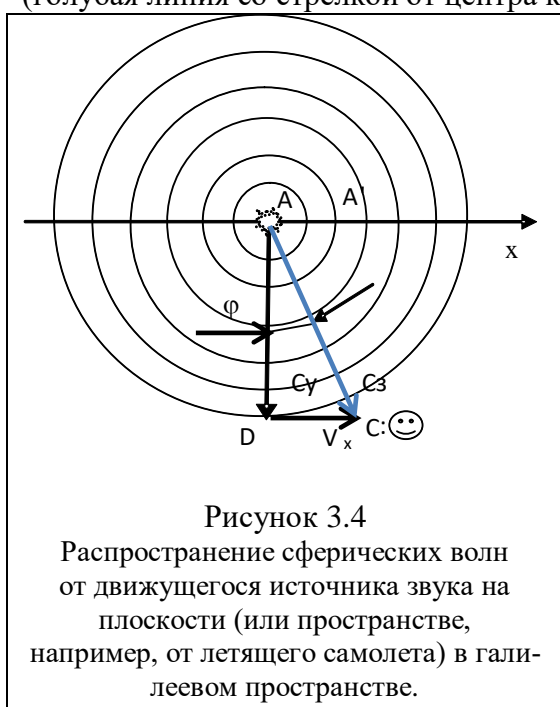


Рисунок 3.4

Распространение сферических волн от движущегося источника звука на плоскости (или пространстве, например, от летящего самолета) в галилеевом пространстве.

1) Разберем по рисунку наличие-отсутствие абберации фронта волны от точечного источника. Для этого рассмотрим самую большую сферическую волну от точечного движущегося источника с положением в т.А (Рисунок 3.3). Волна от нее распространяется во все стороны со скоростью звука в с.о. АСО, и перпендикулярный к направлению движения фронт волны через некоторое время достигает т.Д. Но при этом этот участок фронта волны не получает никакого отклонения от своего направления, которое она получила бы при испускании покоящимся источником в т.А. В этом и заключается отсутствие эффекта абберации от источника. Но "видимый" след от последовательно созданных участков волн во времени от движущегося самолета в ИСО самолета будет соответствовать линии $A'D$, а он отклонен на угол φ абберации в соответствии с (3.1). И фронты волн в этом видимом "следе" $A'D$ будут находиться в параллели с направлением

движения. Вроде бы налицо абберация. Угол "абберации" φ_0 здесь определяется по формуле (3.2):

$$\sin \varphi = \frac{v_x}{c}. \quad (3.2)$$

(Обратите внимание на геометрическое отличие в уравнениях (3.1) и (3.2) по Рисунок 3.2 и Рисунок 3.3). Если бы мы для наблюдения за звуковым изображением самолета использовали звуковой телескоп, то должны были бы отклонить ее на этот самый угол назад, чтобы "увидеть" самолет.

3) Осталось рассмотреть случай движущегося в ГП приемника со скоростью v_x и покоящегося "самолета". Этот случай изображен на Рисунок 3.4. Он немногим отличается от Рисунок 3.3. Но угол абберации определяется уже по той же формуле, что и в (3.1). Если в предыдущем случае частота звука из-за эффекта Доплера увеличивалась, то в этом случае

она уменьшается.

Звездная aberrация рассматривается также с этих же т.з. Правда, есть некоторые существенные отличия в связи с релятивизмом звездной aberrации:

1) в релятивистском случае существует симметрия между ИСО источником и ИСО приемником, а в галилеевом пространстве симметрии нет – см. (3.1) и (3.2) и

2) в ней дополнительно существует поперечный эффект Доплера, который в этой работе не рассматривается.

Из этих объяснений видно, что перпендикулярные волны на [Рисунок 3.1](#) и [Рисунок 3.2](#) не наследуют от источника волны продольного импульса и/или скорости (и других материальных параметров) в своем движении и наследуют ее только при специальном учете направления и скорости.

4. Общие выводы относительно эффекта Доплера и aberrации:

1) Невозможно определить ни абсолютную, ни относительную скорости в результате измерений одностороннего изменения частоты от доплеровского эффекта синхронизированной эталонной волны из-за недостатка информации об источнике и/или приемнике. Синхронизация волнового эталона осуществляется в ГП в состоянии покоя относительно АИСО.

2) Если выполнена синхронизация и известна одна из скоростей в АИСО, то по эффекту Доплера возможно определить и другую. Предполагая собственную скорость нулевой, можно определить и другую скорость.

3) По параметрам распространения волны "туда" и "обратно" в системе двух исследователей вполне возможно определить скорость относительно АИСО и локализовать себя в АИСО.

4) Первые три пункта справедливы в одномерном пространстве.

5) При наличии бесконечно удаленных объектов в системе одного исследователя возможно применить принцип Маха и определить свою скорость относительно бесконечно удаленных объединенных общей статистикой объектов по доплеровскому эффекту или каких-то средних статистических параметров бесконечной среды окружения, определив ее неоднородность по направлениям. Например, реликтовое излучение. Но никакой 100%-ной гарантий, что бесконечно удаленные объекты в среднем определяют АИСО, нет: в принципе они все могут находиться в состоянии общего движения относительно реального АИСО. Все дело в точности измерений. Например, Земля вращается – это видно по движению звезд. С другой стороны, поверхность Земли неподвижна, если не смотреть на звезды: мы же это вращение не замечаем? ну разве что специально поставленным экспериментом. А если быть еще более точным, то Земля вращается вокруг Солнца, и это заметно по aberrации положения звезд на небе. И далее – Солнце вращается вокруг центра нашей Галактики, Галактики вращаются в пределах своих Метагалактик, и т.д.

6) Для поперечных волн дополнительно к продольному эффекту Доплера существуют поперечные эффекты – aberrация для узкого перпендикулярного луча при ее отсутствии для бесконечно широких лучей.

Сокращения и другие соглашения

(*) А – абсолютное, В – время, волновое, Г – галилеево, И – инерциальное,	АПВ – ПВ с абсолютным временем и пространством. АСО (АИСО) – абсолютная (инерциальная) система отсчета, ВП – волновое пространство, ГП – галилеево пространство,
---	---

<p>К – координаты, квантовая, классическая, М – механика, метрическое, материя, Н – ньютоново, неинерциальная, О – отсчета, относительности, общая, П – пространство, Р – релятивистская, С – система, специальная, Т – теория, тензоры, У – условный, Ф – физика, Ч – частная, ~ – (индекс) обозначает волновой параметр, – (индекс) параллельный, продольный, ⊥ – (индекс) перпендикулярный, поперечный.</p>	<p>ГПТК – линейные преобразования тензоров и координат, ГВП – галилеево волновое пространство, ИСО – инерциальная система отсчета – координатная с.о., полученная из исходного ортонормированным ЛПТК, КМН – классическая механика ньютонова, ЛПТК – линейные преобразования тензоров и координат, МГП – метрическое галилеево пространство, МП – метрическое пространство, ПВ – пространство–время, ПВМ – пространство–время–материя, ГПВ – галилеево пространство–время, ПТК – преобразования тензоров и координат. СК, с.к. – система координат, См. – смотри, СО, с.о. – система отсчета, СТО – специальная теория относительности, (и)т.д. – (и) так далее, (и) т.п. – (и) тому прочие, в т.ч. – в том числе, т.з. – точка зрения, т.[Идентиф.точки] – точка.[Идентиф.точки], м.о. – материальный объект, с.с. – сплошная среда, См. – смотри [далее], УАИСО – Условная Абсолютная ИСО,</p>
--	---

- 1) *При использовании более чем одной буквы.
- 2) Выделение **красным цветом** в формуле может обозначать **равный нулю элемент формулы или выражения**.
- 3) По одинаковым верхнему и нижнему индексам производится свертка (суммирование) соответствующих элементов (по правилу Эйнштейну).
- 4) По индексу в скобке типа " $_{(k)}$ " или " $^{(k)}$ " свертка не выполняется, но она привязана к соответствующему тензорному или другому индексу "функционально".
- 5) Формат ссылок на формулы: (N). При необходимости указания на конкретную строку формулы применяется формат (N):n, где n – номер строки формулы, начиная с 1 (единицы), причем эта нумерация продолжается и на дальнейшие не нумерованные формулы.

Литература

1. Аквивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : Наука, 1972. – 351 с.
2. Детлаф, А. А. Курс общей физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. Высшая школа, 2017. – 245 с.

3. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М. :Высш. шк., 2001. – 575 с. 74
4. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Бином, 2017. – 146 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики: В 10 т. : т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с.
6. Малыкин Г. Б. Паралоренцевские преобразования, УФН, 179:3 (2009), 285–288; Phys. Usp., 52:3 (2009), 263–266 // Полный текст URL: [PDF файл](#) (899 kB) (дата обращения: 05.07.2019).
7. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. М. :Наука, 1965. [Einstein A Ann. Physik 322 891 (1905)]
8. Чепика М. Сходство и различие СЭТ и СТО. [Электронный ресурс] // URL: http://redshift0.narod.ru/Rus/Stationary/Absolute/Absolute_Principles_4.htm (дата обращения: 16.07.2019). // Нижний Новгород, e-mail: redshift0@narod.ru.
9. Tangherlini F R "The velocity of light in uniformly moving frame", Ph D Thesis (Stanford: Stanford Univ., 1958)]
10. [Timin Valery](#). Two-way Wave Metrics of Galilean Space. Двусторонние волновые метрики ГП. [Электронный ресурс] // URL: <https://vixra:2008.0186vixra:2008.0186> (Дата загрузки: 2020-08-24 20:54:29).
11. Тимин В. А. Метрики галилеева пространства. [Электронный ресурс] // Metrics Galileia Space. URL: <http://vixra.org/abs/1907.0545>.
12. Тимин В. А. Преобразования галилеевых тензоров. [Электронный ресурс] // Galilean Transformations of Tensors, URL: <http://vixra.org/abs/1910.0602>.
13. Тимин В. А. Уравнения распространения волн в различных пространствах. [Электронный ресурс] // URL: <http://vixra.org/abs/1908.0091>.
14. Тимин В. А. Эксперимент Майкельсона–Морли. [Электронный ресурс] // URL: <http://vixra.org/abs/1908.0574>.

Все мои работы в VIXRA.ORG:

15. Тимин В. А. Все работы. URL: http://vixra.org/author/valery_timin.

E-Mail: timinva@yandex.ru.